

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
(**Н И У « Б е л Г У »**)

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
Кафедра информационно-телекоммуникационных систем и технологий

СУБПОЛОСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Магистерская диссертация
Вороновой Анны Николаевны

очного отделения
направления подготовки 11.04.02
Инфокоммуникационные технологии и системы связи
2 года обучения группы 07001432

Научный руководитель
доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой
Информационно-телекоммуникационных
систем и технологий НИУ «БелГУ»
Жиляков Е.Г.

Рецензент
канд. техн. наук, доцент кафедры
Прикладной информатики и
информационных технологий НИУ «БелГУ»
Черноморец А. А.

БЕЛГОРОД 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ.....	6
1.1. Цифровые фильтры.....	7
1.1.1. КИХ-фильтр.....	8
1.1.2. БИХ-фильтры.....	9
1.2. Адаптивная фильтрация	11
1.2.1. Динамические адаптивные системы	12
1.2.2. Применение адаптивной фильтрации	15
1.3. Фильтр Винера	18
1.4. Метод наименьших квадратов. Алгоритм LMS.....	21
1.5. Рекурсивный метод наименьших квадратов Алгоритм RLS.....	24
1.6. Фильтр Калмана	26
2. АДАПТИВНАЯ СУБПОЛОСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ	29
2.1. Общий вид оператора сглаживания	29
2.2. Адаптивное построение оператора субполосного сглаживания.....	36
3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ	41
3.1. Оценка качества фильтрации алгоритмами Винера и Калмана в зависимости от длины импульсной характеристики	41
3.2. Сравнительный анализ фильтрации методами Винера, Калмана и адаптивной субполосной фильтрации при обработке модельного сигнала ..	46
3.3. Сравнительный анализ фильтрации методами Винера, Калмана и адаптивной субполосной фильтрации при обработке эмпирических данных.....	52
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	61
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	64

ВВЕДЕНИЕ

С развитием информационно-коммуникационных технологий количество средств цифровой обработки сигналов (ЦОС) в радиотехнических системах неуклонно возрастает, обеспечивая рост их качественных показателей. Общественные потребности по обработке, хранению и передаче сведений стимулировали усилия исследователей в области цифровой обработки сигналов. Особенно такая тенденция характерна для систем радиосвязи, обработки аудио и видеоинформации, цифровой оптики и в ряде других приложений, связанных с большим объемом вычислений [1-3].

Повышение точности выполнения операций в цифровых устройствах является задачей организации вычислительных затрат, которая ждет теоретических и прикладных решений. Одной из них является цифровая адаптивная фильтрация сигналов. Появившись в конце 1950-х годов, адаптивные фильтры прошли большой путь, превратившись из экзотической технологии, применявшейся преимущественно в военных целях, в необходимую часть информационно-коммуникационных систем, без которого сейчас была бы немыслима работа модемов, сотовых телефонов и многого другого [4-6]. Существует большое количество адаптивных алгоритмов, различающихся вычислительной сложностью, особенностями поведения, используемыми исходными данными и структурами самих адаптирующихся систем/

Развитие теории адаптивной обработки сигналов всегда было непрерывно связано с практикой. В основе большинства адаптивных устройств находится адаптивный фильтр. Среди многочисленных областей применения АФ можно выделить основные: подавление шумов, адаптивные антенные системы, в которых адаптивные фильтры используются для регулирования пучка и обеспечения пустых указателей в его образце, чтобы удалить нежелательные помехи, цифровые приемники связи, в которых адаптивные фильтры используются, чтобы обеспечить балансировку межсимвольной

помехи и для идентификации канала, методы адаптивного подавления шума, в которых адаптивный фильтр используется для оценки и устранения шумового компонента в некотором желательном сигнале, моделирование системы, в которой адаптивный фильтр используется как модель, чтобы оценить характеристики неизвестной системы. Устройства, в которых используются адаптивные фильтры: модемы, сотовые телефоны, системы цифровой и аналоговой связи, системы обработки речи [8]. Эти устройства являются неотъемлемыми элементами оборудования современных радиотехнических систем и систем связи, тактико-технические характеристики которых часто недостижимы без использования адаптивной обработки сигналов.

Свойства цифрового фильтра с фиксированными параметрами обычно определяются требуемой передаточной функцией. В свою очередь, передаточная функция определяет структуру фильтра и его вычислительную сложность [9]. Если требования к передаточной функции фильтра невозможно сформулировать заранее или они могут изменяться в процессе работы, то вместо фильтров с фиксированными параметрами целесообразно использовать фильтры с изменяемыми параметрами - адаптивные фильтры [7].

Задача адаптивного фильтра — повысить качество приема или обработки сигнала изменяясь в зависимости от параметров сигнала. Для минимизации ошибки воспроизведения образцового сигнала блок адаптации после обработки каждого отсчета анализирует сигнал ошибки и дополнительные данные, поступающие из фильтра, используя результаты этого анализа для подстройки параметров (коэффициентов) фильтра. Возможен и иной вариант адаптации, при котором образцовый сигнал не используется. Такой режим работы называется слепой адаптацией [4,5,10]. В этом случае требуется некоторая информация о структуре полезного входного сигнала. Очевидно, что слепая адаптация является более сложной вычислительной задачей, чем адаптация с использованием образцового сигнала. Может показаться, что алгоритмы с использованием образцового сигнала лишены

практического смысла, поскольку выходной сигнал должен быть заранее известен. Однако есть целый ряд практических задач, при решении которых образцовый сигнал оказывается доступен.

Целью данной работы является исследование и сравнительный анализ методов адаптивной фильтрации.

Для достижения поставленной цели определены следующие задачи:

1. Исследование алгоритма адаптивного фильтра на основе оптимального фильтра Винера.
2. Исследование адаптивного фильтра на основе алгоритма Калмана.
3. Исследование алгоритма адаптивного фильтра на основе метода адаптивной субполосной фильтрации.
4. Сравнительный анализ методов адаптивной фильтрации.

1. ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Фильтрация, представляет собой обработку сигнала, в результате которой изменяется состав исходного сигнала. Фильтры выделяют значимые характеристики отдельных компонент сигналов, некоторых закономерностей, периодических структур, в то же время ослабляя или подавляя нежелательные компоненты.

Существуют аналоговая и цифровая версии процесса фильтрации. Аналоговый фильтр обрабатывает непрерывные сигналы, а цифровой фильтр-последовательности дискретных отсчетов. Цифровой фильтр может представлять собой компьютерную программу, программируемый аппаратный процессор или специализированную интегральную схему. Цифровые фильтры делятся на два больших класса: фильтры с импульсной характеристикой конечной длины (КИХ-фильтры) и фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длины (БИХ-фильтры) [1,6,11].

Преимущества цифровых фильтров по сравнению с аналоговыми:

- Цифровые фильтры имеют программное обеспечение, для упрощения настройки и проверки;
- Цифровые фильтры используют только арифметические действия умножения и сложения-вычитания;
- Цифровые фильтры не зависимы от изменений температуры или влажности;

1.1. Цифровые фильтры

Цифровой фильтр представляет собой линейную дискретную систему, выполняющую преобразование входной последовательности в выходную по алгоритму, описываемому разностным уравнением, который отображается заданной структурой, реализованной аппаратно или программно.

В зависимости от того, являются ли параметры цифрового фильтра неизменными или меняющимися во времени, его называют стационарным или адаптивным [4,12,13]. По умолчанию речь идет о стационарных цифровых фильтрах.

Требования к характеристикам цифровых фильтров зависят от его типа и назначения. По умолчанию подразумевают частотно-избирательные цифровые фильтры, выполняющие селекцию частотных составляющих входной последовательности [11,14,15].

Преимуществами цифровых фильтров перед аналоговыми являются:

- Высокая точность (точность аналоговых фильтров ограничена физическими свойствами).
- Стабильность (в отличие от аналогового фильтра передаточная функция не зависит от характеристик элементов).
- Гибкость настройки, лёгкость изменения.
- Компактность — аналоговый фильтр на очень низкую частоту потребовал бы чрезвычайно громоздких конденсаторов или индуктивностей.

Недостатками цифровых фильтров по сравнению с аналоговыми являются:

- Трудность работы с высокочастотными сигналами. Полоса частот ограничена частотой Найквиста, равной половине частоты дискретизации сигнала. Поэтому для высокочастотных сигналов применяют аналоговые фильтры, либо, если на высоких частотах нет полезного сигнала, сначала подавляют высокочастотные составляющие с помощью аналогового фильтра нижних частот, затем обрабатывают сигнал цифровым фильтром [16].

- Для большой точности и высокой скорости обработки сигналов требуется не только мощный процессор, но и дополнительное, возможно дорогостоящее, аппаратное обеспечение в виде высокоточных и быстрых ЦАП и АЦП.

1.1.1. КИХ-фильтр

КИХ-фильтр (фильтр с конечной импульсной характеристикой), называемый также не рекурсивным - это фильтр, импульсный отклик которого содержит конечное число ненулевых отсчетов. Такой импульсный отклик всегда абсолютно суммируем, и, следовательно, КИХ-фильтры всегда устойчивы [1,2,13,16]. Для вычисления текущего отсчета выходного сигнала КИХ-фильтры используют только текущий и предыдущие отсчеты входного сигнала и совсем не используют выходные отсчеты. Это приводит к тому, что, если входная последовательность содержит конечное количество ненулевых отсчетов, то выходная последовательность такого фильтра также будет содержать последовательность ненулевых отсчетов конечной длительности, благодаря чему КИХ-фильтры и получили свое имя [17-20].

КИХ-фильтр описывается передаточной функцией:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (1.1)$$

Ей соответствует разностное уравнение:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) \quad (1.2)$$

непосредственно описывающее алгоритм вычисления реакции.

Следовательно, для КИХ-фильтров расчет коэффициентов передаточной функции сводится к расчету импульсной характеристики. Длинной и порядком КИХ-фильтра называют соответственно число коэффициентов N и порядок R передаточной функции, где:

$$R = N - 1 \quad (1.3)$$

Сложность КИХ-фильтра определяется его длиной N (порядком R). КИХ фильтры могут иметь линейную ФЧХ. Длительность импульсной характеристики КИХ фильтра, несмотря на то, что она конечна, может оказаться достаточно большой для достижения резкого спада частотной характеристики на границе зоны пропускания [13,15,18].

1.1.2. БИХ-фильтры

Фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры) коренным образом отличаются от КИХ-фильтров из-за наличия обратной связи. В КИХ-фильтрах выходные отсчеты зависят только от предыдущих и текущего входных отсчетов, то каждый выходной отсчет БИХ-фильтра зависит от предыдущих и текущего входных отсчетов, а также от предыдущих выходных отсчетов. Способность БИХ-фильтров запоминать и использовать предыдущие выходные отсчеты является и их преимуществом и недостатком одновременно. Аналогично для всех систем с обратной связью, возмущения входного сигнала в могут сделать БИХ-фильтр неустойчивым и превратить его в генератор. Эта способность выдавать на выход последовательности ненулевых отсчетов бесконечной длины, даже когда все входные отсчеты равны нулю, и послужила причиной, по которой в названии этих фильтров присутствуют слова «с бесконечной импульсной характеристикой» [21,22]. По сравнению с КИХ-фильтрами БИХ-фильтры имеют более сложную структуру, их труднее проектировать и анализировать, их фазо-частотная характеристика принципиально не линейна.

БИХ-фильтр описывается передаточной функцией общего вида:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{k=1}^{M-1} a_k z^{-k}} \quad (1.4)$$

и при $(N-1) < (M-1)$, (по умолчанию) имеет порядок $R=(M-1)$.

Ей соответствует алгоритм вычисления реакции непосредственно в виде разностного уравнения:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k y(n-k) \quad (1.5)$$

Помимо общего вида, передаточная функция БИХ-систем может быть представлена в других эквивалентных видах, среди которых практически интерес представляют два следующих:

- Произведение множителей второго порядка с вещественными коэффициентами

$$H(z) = G \prod_{k=1}^L \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \quad (1.6)$$

- Сумма дробей второго порядка с вещественными коэффициентами

$$H(z) = \sum_{k=1}^L \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \quad (1.7)$$

Передаточным функциям соответствуют эквивалентные виды разностных уравнений, т. е. другие алгоритмы вычисления реакции. Исходя из этого, структура, отображающая алгоритм вычисления реакции, определяется видом передаточной функции [1,15,18]. При аналогичных характеристиках, БИХ фильтры имеют более простую реализацию по сравнению с КИХ фильтрами.

Но БИХ фильтры более чувствительны к конечной разрядности вычислений, которая приводит у них к появлению колебаний т.н. «предельных циклов». За исключением специального случая, когда все полюса передаточной функции лежат на единичной окружности z -плоскости, невозможно построить реализуемый стабильный БИХ фильтр, имеющий точно линейную ФЧХ.

1.2. Адаптивная фильтрация

Адаптивная обработка сигналов или адаптивная фильтрация, применяется, если с поставленной задачей не справляются фильтры с фиксированными параметрами. У фильтра с фиксированными параметрами, свойства обычно определяются требуемой передаточной функцией. В свою очередь, передаточная функция определяет структуру фильтра и его вычислительную сложность [4,8,11,24]. В случае когда спецификацию к передаточной функции фильтра невозможно сформулировать заранее или спецификация изменяется в процессе работы фильтра, то вместо фильтров с фиксированными параметрами используются фильтры с изменяемыми параметрами, например адаптивные фильтры.

Проблемами большинства адаптивных алгоритмов служат алгоритм Ньютона, алгоритм наискорейшего спуска и алгоритм по критерию наименьших квадратов [7,9].

Поскольку параметры адаптивного фильтра изменяются в процессе его работы, такой фильтр относится к нелинейным устройствам. Однако, при каждом фиксированном значении параметров, адаптивный фильтр – это линейное устройство, так как между его входными и выходными сигналами существует линейная зависимость, определяемая текущим набором весовых коэффициентов, подобно линейным фильтрам с фиксированными параметрами. Таким образом, адаптивный фильтр – это фильтр с изменяемыми в процессе работы параметрами. Для определения этих параметров, необходимо сформулировать критерий работы адаптивного фильтра. Таким критерием является минимум некоторой целевой функции, как правило, функции ошибок между требуемым и выходным сигналами адаптивного фильтра. Достижение минимума целевой функции означает, что выходной сигнал адаптивного фильтра в определённой степени приближен к требуемому сигналу. Выходной сигнал адаптивного фильтра изменяется за счёт вариации

его весовых коэффициентов, рассчитываемых на основе различных алгоритмов обработки требуемого и входного (входных) сигналов [25].

Анализ адаптивных фильтров как нелинейных систем более сложный, чем анализ фильтров с фиксированными параметрами. Также адаптивные фильтры являются самонастраивающимся. С этой точки зрения, они проще и не требуют сложных методов расчёта весовых коэффициентов [8,24].

В общем случае адаптивный фильтр представляет собой устройство, представленное на рисунке 1.

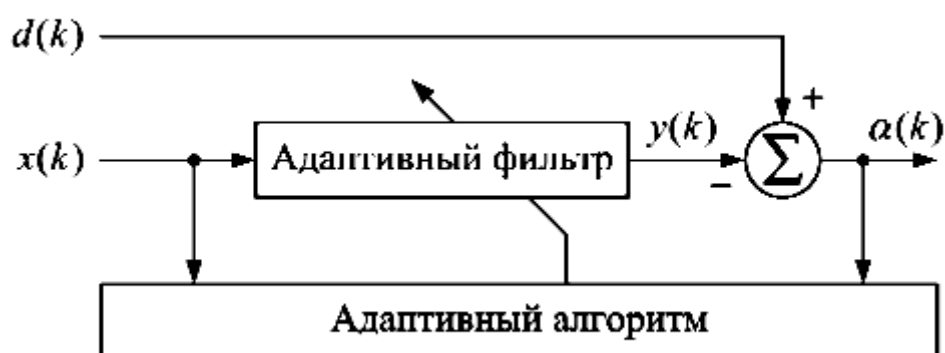


Рисунок 1 Адаптивный фильтр

Здесь $x(k)$ – входной сигнал, $d(k)$ – требуемый сигнал, $y(k)$ – выходной сигнал, $\alpha(k) = d(k) - y(k)$ – сигнал ошибки, который используется для формирования целевой функции адаптивного фильтра, k – индекс дискретного времени или номер отсчетов обрабатываемых сигналов.

1.2.1. Динамические адаптивные системы

Существует множество приложений цифровой обработки сигналов, в которых коэффициенты фильтра не могут быть определены априорно. Высокоскоростной модем, предназначенный для передачи данных по телефонным каналам должен эффективно передавать данные через каналы связи, которые имеют различные частотные характеристики и, следовательно, приводят к различным видам искажений [10,16]. В таких условиях,

единственным способом, обеспечивающим корректную передачу данных, является наличие корректируемых коэффициентов у компенсатора модема. Коэффициенты могут быть оптимизированы с целью минимизации некоторой меры искажения, возникающей при прохождении сигнала по каналу связи. Такой фильтр с корректируемыми параметрами называется адаптивным фильтром, а в данном случае адаптивным компенсатором. Под термином «адаптивный цифровой фильтр» понимается такая система передачи и обработки информации, которая самоприспосабливается к изменяющимся входным воздействиям с целью оптимального выделения полезного сигнала при выбранном критерии качества фильтрации.

В методиках синтеза адаптивных цифровых фильтров учитываются основные принципы, которые могут быть положены в основу адаптивной обработки измерительной информации. Эти принципы являются достаточно общими и получили свое развитие в современной теории управления и контроля. Обобщая известные из теории и практики результаты исследований, динамические системы по принципу адаптации можно разделить на следующие основные классы [4,20].

- Пассивные адаптивные системы. При синтезе таких систем выбираемый критерий качества задается в пределах, удовлетворяющих априори широкому диапазону изменения входных воздействий. В таких системах обратная связь практически отсутствует, что исключает реакцию этих систем на мгновенные изменения входных воздействий.

- Системы, адаптирующиеся по входному сигналу. В таких системах измеряется (вычисляется) одна или несколько характеристик входного сигнала, например, его среднеквадратическая величина, коэффициент отношения сигнал/шум, спектральная плотность мощности и др. С учетом изменений этих характеристик происходит перенастройка параметров фильтра. Системы такого типа обычно не чувствительны к изменению выходных

характеристик динамической системы, которая в этом случае может рассматриваться как разомкнутая. Исключением является тот случай, когда используется величина среднеквадратической ошибки между выходным и входным сигналами для окончательной подстройки параметров фильтра.

- Системы, адаптирующиеся по выходному сигналу. В таких системах контролируется изменение их выходных параметров (объекта самонастройки) и в соответствии с ними перенастраиваются коэффициенты фильтра, чем обеспечивается компенсация изменения контролируемого функционала качества, вызванного вариациями параметров объекта. В этих системах можно контролировать адаптацию как по вектору состояния системы, так и по интегральным характеристикам объекта (импульсной переходной, переходной, передаточной и другими функциями) [23,24].

- Системы, адаптирующиеся за счет прямой подстройки параметров фильтра (коэффициентов усиления, постоянных времени и других параметров). В таких системах изменения входных и/или выходных воздействий непосредственно (а не через функционал качества) влияют на параметры фильтров, обеспечивая поддержание их выходных сигналов в требуемом диапазоне.

- Системы, адаптирующиеся по тестовым сигналам. В таких системах для выбранного диапазона входных воздействий заранее формируется соответствующая им совокупность тестовых сигналов. В процессе функционирования системы с целью распознавания класса (диапазона) входного воздействия на ее вход подается совокупность тестовых сигналов, реакции на которые сопоставляются с реакцией на входное воздействие. Реакция на тестовый сигнал, устанавливающая наибольшее соответствие с реакцией на входное воздействие, используется для отождествления входного воздействия с определенным классом (диапазоном) входных воздействий [20,23].

- Системы, адаптирующиеся по экспериментальным значениям некоторых параметров или характеристик. В процессе функционирования таких систем по значениям входных и выходных сигналов вычисляется назначенный параметр или характеристика, которые затем сравниваются с эталонной. При определенном уровне рассогласования этих характеристик производится перенастройка параметров системы до получения необходимого соответствия между эталонной и вычисленной характеристиками (или параметрами).

Проведенная классификация адаптивных динамических систем является условной, т. к. некоторые системы одновременно можно отнести к двум, и более названным классам [18]. Тем не менее, даже эта упрощенная классификация позволяет в дальнейшем остановиться на разработке методик синтеза наиболее перспективных для систем передачи и обработки измерительной информации адаптивных цифровых фильтров. Следует отметить еще один принцип адаптации, которому будет уделено значительное место в последующем изложении. Этот принцип адаптации можно назвать «самооптимизацией». Суть его состоит в том, что импульсная переходная функция фильтра формируется на основе измерения и обработки мгновенных значений входных и выходных последовательностей с использованием прямого (или рекурсивного) алгоритма вычислений при выбранном критерии качества цифровой фильтрации. Реализация (аппаратурная и программная) и применение такого адаптивного цифрового фильтра являются весьма перспективными для систем передачи и обработки нестационарных случайных процессов.

1.2.2. Применение адаптивной фильтрации

Адаптивные фильтры в настоящее время нашли применение в радиотехнике и телекоммуникационных системах [3,17,23]

- Идентификация систем

Использование адаптивных фильтров так или иначе сводятся к решению задачи идентификации, то есть определения характеристик некоторой системы. Имеются два варианта идентификации — прямая и обратная [10]. В прямой, адаптивный фильтр включается параллельно с исследуемой системой (рис. 2, а).

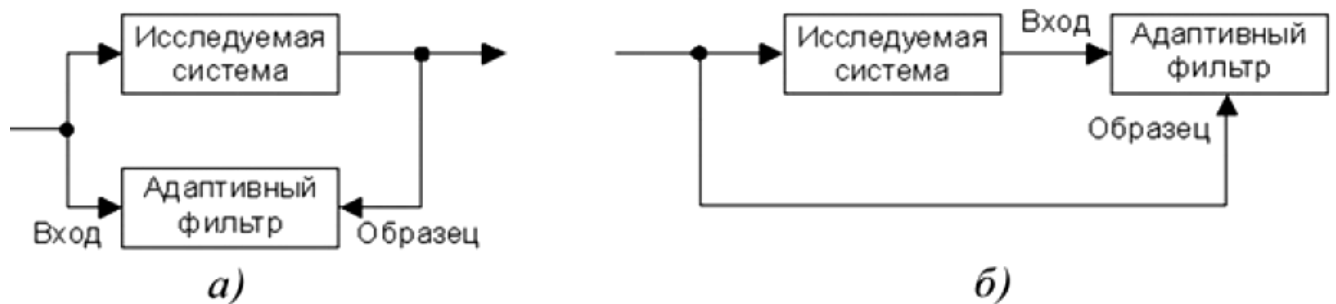


Рисунок 2 Идентификация систем с помощью адаптивного фильтра: а – прямая, б – обратная

Входной сигнал общий для исследуемой системы и адаптивного фильтра, а выходной служит для адаптивного фильтра образцовым сигналом. В процессе адаптации временные и частотные характеристики фильтра стремятся к соответствующим характеристикам исследуемой системы [23].

При обратной идентификации адаптивный фильтр включается последовательно с исследуемой системой (рис. 2, б). Выходной сигнал системы поступает на вход адаптивного фильтра, а входной сигнал системы является образцом для адаптивного фильтра. Таким образом, фильтр стремится компенсировать влияние системы и восстановить исходный сигнал, устранив внесенные системой искажения.

- Подавление шума

Пусть необходимо обеспечить пилота или водителя трактора речевой связью. При этом воспринимаемый микрофоном речевой сигнал окажется сильно зашумленным звуками. Убрать эти шумы нельзя, но можно получить образец сигнала шума, установив второй микрофон в непосредственной близости от источника шума. Шумовые процессы, воспринимаемые двумя

микрофонами, будут коррелированными, так как они происходят из общего источника, но вычест шум из речевого сигнала полученный вторым микрофоном нельзя шум следует разными путями и претерпевает искажения.

В то же время шумовой сигнал не коррелирован с полезным речевым сигналом. В данном случае с помощью адаптивного фильтра, решается задача прямой идентификации (рис. 2, а). Входным сигналом адаптивного фильтра является шумовой сигнал от дополнительного микрофона, а в качестве образцового сигнала используется смесь, воспринимаемая основным микрофоном. Адаптивный фильтр преобразовывает входной сигнал, как можно ближе к образцовому [3,10]. Поскольку со входным сигналом фильтра коррелирована лишь шумовая составляющая образцового сигнала, в установившемся режиме на выходе фильтра будет получаться оценка шума, присутствующего в образцовом сигнале. Сигнал ошибки, рассчитываемый как разность между образцовым сигналом и выходным сигналом адаптивного фильтра, будет в этом случае представлять собой очищенный от шума речевой сигнал.

- **Выравнивание канала связи**

При передаче по каналу связи информационный сигнал искажается. В системах цифровой связи это приводит к возникновению ошибок при приеме данных. Для снижения вероятности ошибок нужно компенсировать влияние канала связи, то есть решить задачу обратной идентификации (см. рис. 2, б). В частотной области компенсация вносимых каналом искажений означает выравнивание его частотной характеристики. Для использования адаптивного фильтра необходимо получить образцовый сигнал. Эта проблема решается передачей специального настроечного сигнала перед началом передачи данных. В качестве такого сигнала используется псевдослучайная последовательность символов. Принимающей стороне алгоритм формирования сигнала известен, образцовый сигнал генерируется автономно и используется

для обучения адаптивного фильтра [3,17]. Этот режим работы называется режимом обучения (рис. 3).

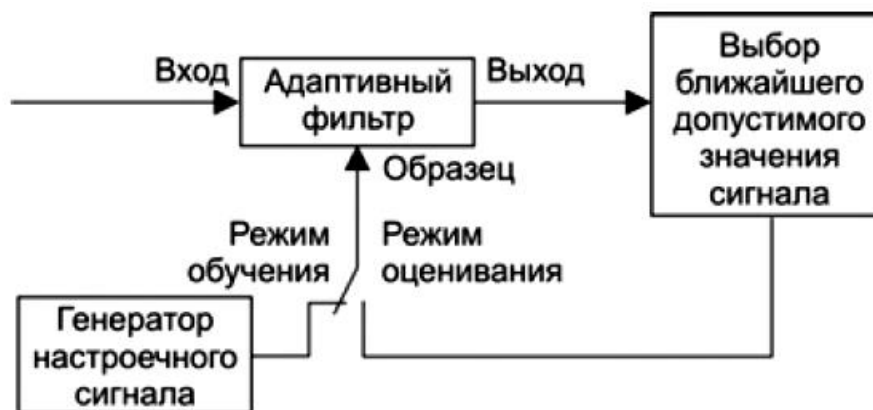


Рисунок 3 Выравнивание канала связи с помощью адаптивного фильтра

После окончания настроечного сигнала начинается передача данных. Приемник при этом переключается в режим оценивания, здесь для получения образцового сигнала используется тот факт, что множество возможных значений сигнала в системе цифровой связи является конечным. После приема временного такта ищется ближайшее к принятому сигналу допустимое значение. Оно используется в качестве образцового сигнала, а разность между этим значением и принятым сигналом дает сигнал ошибки, используемый для адаптации.

1.3. Фильтр Винера

Задача фильтра Винера заключается в получении передаточной функции фильтра, обеспечивающего наилучшую по критерию минимума среднеквадратичной ошибки фильтрацию полезного сигнала, при воздействии на него аддитивного случайного шума [4,26]. Адаптивные фильтры, можно рассматривать как приближенную, более простую для практики реализацию линейного оптимального фильтра Винера.

Задача впервые была решена независимо двумя учеными:

– Советским математиком А. Колмогоровым, опубликовавшим решение в 1941 г. в статье «Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей».

– Американским ученым – математиком Н. Винером, опубликовавшим результат в 1949 г. в статье «The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications».

Поэтому соответствующие оптимальные фильтры получили название фильтров Винера – Колмогорова. И такое название встречается во многих публикациях. Но чаще используется название «фильтры Винера». Видимо, причинами такой терминологии является то обстоятельство, что статья А. Колмогорова – это теоретическая работа ученого - математика. Для инженеров - практиков она оказалась мало доступной. Кроме того, русский язык менее распространен по сравнению с английским. Поэтому более широкую известность и понимание нашли результаты работы Н. Винера, хотя она была опубликована позже [26].

Пусть входной дискретный случайный сигнал $x(k)$ обрабатывается нерекурсивным дискретным фильтром порядка N , коэффициенты которого могут быть представлены вектор-столбцом $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^T$ [4]. Выходной сигнал фильтра равен

$$y(k) = u^T(k)w \quad (1.8)$$

где $u(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N)]^T$ - вектор -столбец содержимого линии задержки фильтра на k -м шаге.

Кроме того, имеется образцовый (также случайный) сигнал $d(k)$. Ошибка воспроизведения образцового сигнала равна

$$e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - u^T(k)w \quad (1.9)$$

Необходимо найти коэффициенты фильтра w , которые обеспечивают максимальную близость выходного сигнала фильтра к образцовому, то есть

минимизируют ошибку $e(k)$. Поскольку $e(k)$ также является случайным процессом, в качестве меры ее величины разумно принять средний квадрат. Таким образом, оптимизируемый функционал выглядит так:

$$J(w) = \overline{e^2(k)} \rightarrow \min \quad (1.10)$$

Квадрат ошибки равен

$$e^2(k) = (d(k) - u^T(k)w)^2 = d^2(k) - 2d(k)u^T(k)w + w^T u(k)u^T(k)w \quad (1.11)$$

Статистически усредняя это выражение, получаем следующее:

$$J(w) = \overline{e^2(k)} = \overline{d^2(k)} - 2\overline{d(k)u^T(k)}w + \overline{w^T u(k)u^T(k)w} \quad (1.12)$$

Входящие в полученную формулу усредненные величины имеют следующий смысл:

- $\overline{d^2(k)} = \sigma_d^2$ - средний квадрат образцового сигнала;
- $\overline{d(k)u^T(k)} = p^T$ - транспонированный вектор-столбец p взаимных

корреляций между k -м отсчетом образцового сигнала и содержимым линии задержки фильтра. Если рассматриваемые случайные процессы $x(t)$ и $d(k)$ являются совместно стационарными, вектор взаимных корреляций не зависит от номера шага k [4,26]

- $\overline{u(k)u^T(k)} = R$ - корреляционная матрица сигнала, имеющая $(N+1) \times (N+1)$. Для стационарного случайного процесса корреляционная матрица имеет вид матрицы Теплица, то есть на ее диагоналях стоят одинаковые величины:

$$R = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & R_x(2) & \dots & R_x(N) \\ R_x(1) & R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(N-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(N-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x(N) & R_x(N-1) & R_x(N-2) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

Здесь $R_x(m) = \overline{x(k)x(k-m)}$ — корреляционная функция (КФ) случайного процесса $\{x(k)\}$.

С учетом введенных обозначений (1.12) принимает следующий вид:

$$J(w) = \sigma_d^2 - 2p^T w + w^T R w \quad (1.14)$$

Данное выражение представляет собой квадратичную форму относительно w и потому при невырожденной матрице R имеет единственный минимум, для нахождения которого необходимо приравнять нулю вектор градиента:

$$\text{grad } J(w) = -2p + R w = 0 \quad (1.15)$$

Отсюда получаем искомое решение для оптимальных коэффициентов фильтра:

$$w = R^{-1} p \quad (1.16)$$

Такой фильтр называется фильтром Винера. Подстановка в (1.14) (1.16) дает минимально достижимую дисперсию сигнала ошибки:

$$\overline{e^2(k)}_{\min} = \sigma_d^2 - p^T R^{-1} p \quad (1.17)$$

Также $e(k)y(k) = 0$ и $e(k)x(k) = 0$, то есть что сигнал ошибки для фильтра Винера некоррелирован со входным и выходным сигналами фильтра.

1.4. Метод наименьших квадратов. Алгоритм LMS

Адаптивный фильтр по критерию наименьшего квадрата (LMS). Разработан в конце 1950-х годов, принадлежит профессору Стэнфордского университета (США) Бернарду Уидроу [4,27]. В российской литературе для обозначения LMS-алгоритма часто используется аббревиатура МНК, что означает метод наименьшего квадрата. По сравнению с более сложными рекурсивными алгоритмами по критерию наименьших квадратов (RLS), LMS-

алгоритм вычисления весовых коэффициентов (ВК), является менее эффективным. К достоинствам данного алгоритма относятся низкая вычислительная сложность, простота в понимании и реализации. Вычислительная сложность LMS- алгоритма равна $2N$ арифметическим операциям (сложений с умножениями) на одну итерацию, совпадающую по длительности с периодом дискретизации обрабатываемых сигналов, где N – число ВК адаптивного фильтра. LMS-алгоритм относится к классу алгоритмов стохастического градиентного поиска координат минимума целевой функции. Термин «стохастический» употребляется для того, чтобы отличать LMS-алгоритм, использующий упрощенный градиент, от алгоритма наискорейшего спуска, использующего точное значение градиента целевой функции, минимизируемой в процессе работы адаптивного фильтра. Упрощенный градиент является неточным, в результате чего движение вектора ВК к минимуму этой функции носит в некотором смысле случайный характер, отчего и используется термин «стохастический».

Данный метод основан на поиске минимума целевой функции (1.12) методом наискорейшего спуска [27,28]. При использовании данного способа оптимизации вектор коэффициентов фильтра $w(k)$ должен рекурсивно обновляться следующим образом:

$$w(k+1) = w(k) - \frac{\mu}{2} \text{grad } J(w(k)) = w(k) + \mu p - \mu R w(k), \quad (1.18)$$

где μ — положительный коэффициент, называемый размером шага.

Алгоритм сходится, если

$$0 < \mu < 2 / \lambda_{\max}, \quad (1.19)$$

где λ_{\max} - максимальное собственное число корреляционной матрицы R . Скорость сходимости при этом зависит от разброса собственных чисел

корреляционной матрицы R - чем меньше отношение $\lambda_{\max} / \lambda_{\min}$, тем быстрее сходится итерационный процесс.

Однако для расчета градиента необходимо знать значения матрицы R и вектора p . На практике могут быть доступны лишь оценки этих значений, получаемые по входным данным. Простейшими такими оценками являются мгновенные значения корреляционной матрицы и вектора взаимных корреляций, получаемые без какого-либо усреднения:

$$\hat{R}(k) = u(k)u^T(k), \quad (1.20)$$

$$\hat{p}(k) = d(k)u(k). \quad (1.21)$$

При использовании данных оценок формула (1.18) принимает следующий вид:

$$w(k+1) = w(k) + \mu d(k)u(k) - \mu u(k)u^T(k)w(k) = w(k) + \mu u(k)(d(k) - u^T(k)w(k)). \quad (1.22)$$

Выражение, стоящее в скобках, согласно (1.9), представляет собой разность между образцовым сигналом и выходным сигналом фильтра на k -м шаге, то есть ошибку фильтрации $e(k)$. С учетом этого выражение для рекурсивного обновления коэффициентов фильтра оказывается очень простым:

$$w(k+1) = w(k) + \mu e(k)u(k) \quad (1.23)$$

Алгоритм адаптивной фильтрации, основанный на формуле (1.23), получил название LMS (метод наименьших квадратов) [4]. Можно получить ту же формулу и несколько иным образом: используя вместо градиента статистически усредненного квадрата ошибки $\overline{e^2(k)}$ градиент его мгновенного значения $e^2(k)$.

Основным достоинством алгоритма LMS является предельная вычислительная простота - для подстройки коэффициентов фильтра на каждом

шаге нужно выполнить $N+1$ пар операций «умножение–сложение». Платой за простоту является медленная сходимость и повышенная (по сравнению с минимально достижимым значением (1.17)) дисперсия ошибки в установившемся режиме - коэффициенты фильтра всегда флуктуируют вокруг оптимальных значений (1.16), что и увеличивает уровень выходного шума [28].

1.5. Рекурсивный метод наименьших квадратов Алгоритм RLS

Алгоритм RLS это - адаптивный фильтр алгоритм, которого рекурсивно находит коэффициенты фильтра, которые минимизируют взвешенный линейные наименьшие квадраты функция стоимости касающийся входных сигналов в отличие от LMS, который стремится уменьшать среднеквадратическую ошибку. В происхождении RLS входные сигналы считают детерминированными, в то время как для LMS и подобного алгоритма их считают стохастическими. По сравнению с большинством его конкурентов RLS показывает чрезвычайно быструю конвергенцию [29,30]. Однако, эта выгода компенсируется за счет высокой вычислительной сложности.

При его использовании производится рекурсивное обновление оценки обратной корреляционной матрицы $P = (UU^T)^{-1}$, а вывод формул основывается на следующем матричном тождестве:

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}, \quad (1.24)$$

где A и C — квадратные невырожденные матрицы (необязательно одинаковых размеров), а B и D — матрицы совместимых размеров.

Применение формулы (1.24) для рекурсивного обновления обратной корреляционной матрицы P для коэффициентов оптимального фильтра дает следующую последовательность шагов адаптивного алгоритма RLS.

При поступлении новых входных данных $u(k)$ производится фильтрация сигнала с использованием текущих коэффициентов фильтра $w(k-1)$ и вычисление величины ошибки воспроизведения образцового сигнала:

$$y(k) = u^T(k)w(k-1), \quad (1.25)$$

$$e(k) = d(k) - y(k). \quad (1.26)$$

Рассчитывается вектор-столбец коэффициентов усиления (следует отметить, что знаменатель дроби в следующих двух формулах является скаляром, а не матрицей):

$$K(k) = \frac{P(k-1)u(k)}{1 + u(k)^T P(k-1)u(k)}. \quad (1.27)$$

Производится обновление оценки обратной корреляционной матрицы сигнала:

$$P(k) = P(k-1) - K(k)u(k)^T P(k-1). \quad (1.28)$$

Наконец, производится обновление коэффициентов фильтра:

$$w(k) = w(k-1) + K(k)e(k) \quad (1.29)$$

Начальное значение вектора w обычно принимается нулевым, а в качестве исходной оценки матрицы P используется диагональная матрица вида CI / σ_x^2 , где $C \gg 1$.

Если статистические свойства входного сигнала со временем изменяются, это приводит к ухудшению качества фильтрации [30]. Чтобы дать фильтру возможность отслеживать нестационарный входной сигнал, можно применить экспоненциальное забывание, при котором вес прошлых значений сигнала ошибки экспоненциально уменьшается:

$$J(w) = \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^{K-1-k} |e(k)|^2, \quad 0 < \lambda \leq 1 \quad (1.30)$$

При использовании экспоненциального забывания формулы (1.27) и (1.28) принимают следующий вид:

$$K(k) = \frac{P(k-1)u(k)}{\lambda + u(k)^T P(k-1)u(k)}, \quad (1.31)$$

$$P(k) = \frac{1}{\lambda} (P(k-1) - K(k)u(k)^T P(k-1)) \quad (1.32)$$

Главным достоинством алгоритма RLS является быстрая сходимость. Однако достигается это за счет значительно более высокой (по сравнению с алгоритмом LMS) вычислительной сложности [4,26].

1.6. Фильтр Калмана

Фильтр Калмана — рекурсивный фильтр, оценивающий вектор состояния динамической системы, используя ряд неполных и зашумленных измерений. Назван в честь Рудольфа Калмана. Фильтр Калмана широко используется в инженерных и эконометрических приложениях. Калмановская фильтрация является важной частью теории управления, играет большую роль в создании систем управления. Фильтр Калмана предназначен для рекурсивного дооценивания вектора состояния априорно известной динамической системы, то есть для расчёта текущего состояния системы необходимо знать текущее измерение, а также предыдущее состояние самого фильтра [30-33]. Таким образом, фильтр Калмана, подобно другим рекурсивным фильтрам, реализован во временном, а не в частотном представлении.

Алгоритм работает в два этапа. На этапе прогнозирования фильтр Калмана экстраполирует значения переменных состояния, а также их неопределенности. На втором этапе, по данным измерения, результат экстраполяции уточняется [4,33].

Наглядный пример возможностей фильтра — получение оптимальных, непрерывно обновляемых оценок положения и скорости некоторого объекта по результатам временного ряда неточных измерений его местоположения. Например, в радиолокации стоит задача сопровождения цели, определения её местоположения, скорости и ускорения, при этом результаты измерений поступают постепенно и сильно зашумлены. Фильтр Калмана использует вероятностную модель динамики цели, задающую тип вероятного движения

объекта, что позволяет снизить воздействие шума и получить хорошие оценки положения объекта в настоящий, будущий или прошедший момент времени.

Цель фильтра Калмана — минимизировать дисперсию оценки векторного случайного процесса $x(k)$, изменяющегося во времени следующим образом:

$$x(k + 1) = \Phi(k)x(k) + v(k) \quad (1.33)$$

где $\Phi(k)$ — матрица перехода, $v(k)$ — случайный вектор (шум процесса), имеющий нормальное распределение с корреляционной матрицей $Q_p(k)$ [4].

Для наблюдения доступен линейно преобразованный процесс $y(k)$, к которому добавляется шум наблюдения:

$$y(k) = H(k)x(k) + w(k), \quad (1.34)$$

где $H(k)$ — матрица наблюдения, $w(k)$ — шум наблюдения, представляющий собой случайный вектор, имеющий нормальное распределение с корреляционной матрицей $Q_M(k)$.

Поиск алгоритма для рекурсивного обновления оценки процесса $\hat{x}(k)$ дает следующую последовательность формул:

- $\hat{y}(k) = C(k)\Phi(k)\hat{x}(k - 1)$ — прогнозируемое значение сигнала;
- $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ — невязка между прогнозируемым и реально наблюдаемым значениями;

– $K(k) = P(k - 1)C^T(k) * (C(k)P(k - 1)C^T(k) + Q_M(k))^{-1}$ — калмановский коэффициент усиления;

- $\hat{x}(k) = \Phi(k)\hat{x}(k - 1) + K(k)e(k)$ обновление оценки процесса $x(k)$;

– $P(k) = \Phi(k)[P(k - 1) - K(k)C(k)P(k - 1)]\Phi^T(k) + Q_M(k)$ — обновление оценки корреляционной матрицы ошибок фильтрации.

Для решения задачи адаптивной фильтрации при использовании фильтра Калмана отслеживаемым процессом является вектор коэффициентов оптимального фильтра w [4]. Матрица перехода является единичной: $\Phi(k) = I$, так как детерминированных изменений коэффициентов не происходит. В качестве матрицы наблюдения выступает вектор содержимого линии задержки

фильтра $u(k)$. Таким образом, выходной сигнал фильтра представляет собой прогнозируемое значение наблюдаемого сигнала, а в качестве самого наблюдаемого сигнала выступает образцовый сигнал адаптивного фильтра $d(k)$. Шум наблюдения является ошибкой воспроизведения образцового сигнала, а матрица Q_M превращается в скалярный параметр — средний квадрат сигнала ошибки.

При фильтрации стационарного случайного процесса, коэффициенты оптимального фильтра являются постоянными и можно принять $Q_p = 0$. Для возможности отслеживания фильтром медленных изменений статистики входного сигнала, в качестве Q_p используется диагональная матрица.

В результате таких преобразований приведенные выше формулы принимают следующий вид:

- $y(k) = u^T(k)\hat{w}(k-1)$ — выходной сигнал фильтра (прогнозируемое значение образцового сигнала);
- $e(k) = d(k) - y(k)$ — ошибка фильтрации;
- $K(k) = \frac{P(k-1)u(k)}{u^T(k)P(k-1)u(k)+Q_M}$ — калмановский коэффициент усиления;
- $\hat{w}(k) = \hat{w}(k-1) + K(k)e(k)$ -обновление оценки коэффициентов фильтра $w(k)$;
- $P(k) = P(k-1) - K(k)u^T P(k-1) + Q_p$ обновление оценки корреляционной матрицы ошибок оценивания.

Начальное значение вектора w принимается нулевым, а в качестве исходной оценки матрицы P используется диагональная матрица вида CI .

Фильтр Калмана позволяет используя математические модели системы построить оптимальные оценки системных переменных по выполненным измерениям [38-32]. К достоинствам алгоритма следует отнести его рекуррентную природу, эффективно проявляющуюся при работе в реальном времени, а также возможность априорной оценки точности получаемых результатов средствами самого алгоритма.

2. АДАПТИВНАЯ СУБПОЛОСНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

2.1.Общий вид оператора сглаживания

Пусть вектор $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)'$, где штрих означает транспонирование, состоит из вещественных компонент, значения которых фиксируются при наблюдении за некоторым параметром исследуемого процесса (отрезок временного ряда). Основной целью регистрации таких векторов (эмпирических данных) является построение моделей поведения процесса. Для этих целей часто используется представление [36-41]:

$$x_k = f_k + \varepsilon_k, k = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

где неизвестный f_k - тренд, а ε_k - случайные колебания относительно тренда, обусловленные множеством неконтролируемых факторов.

В рамках такой модели, как правило, основной интерес представляет тренд, который отражает тенденцию изменений процесса.

В настоящее время можно отметить два основных подхода к построению трендов. В основе одного из них используется выбор из априорных соображений явных функциональных зависимостей от номеров отсчетов (аргумент), параметры которых затем подгоняются к имеющимся эмпирическим данным (обучающая выборка) [36]. Другой подход основывается на идее сглаживания [42-45], которое позволяет подавить вторую из компонент в правой части (2.1), что естественно именовать также фильтрацией.

Оба подхода обладают определенными преимуществами и недостатками. Основная проблема первого из них заключается в обосновании адекватности выбранной функциональной зависимости. Поэтому трудно не согласиться с высказанным в [41] мнением, что использование явных математических зависимостей равносильно навязыванию законов природе.

При построении сглаживающих процедур тоже часто используются те или иные предположения о характере поведения трендов и отклонений от них.

Наименее жесткие предположения о характере поведения трендов (в основном требование локальной монотонности) при построении сглаживающих процедур используются в [33-36].

Подход на основе фильтрации с использованием частотных представлений, позволяет отразить согласованность поведения компонент вектора тренда присутствующих во всех анализируемых компонентах вектора эмпирических данных. При этом априорные предположения о свойствах тренда кроме определенной степени гладкости не используются. Такой подход требует адаптивной обработки эмпирических данных, позволяющей получить необходимую информацию непосредственно по конкретному их отрезку [41].

Процедуру сглаживания естественно представить в виде

$$\hat{f} = W(\vec{x}), \quad (2.2)$$

Где $W(\vec{x})$ - некоторый оператор сглаживания, который является непрерывным на множестве R^N .

Легко понять, что в силу аддитивности правой части (2.1) оператор сглаживания должен быть линейным, так что выполняется условие

$$\hat{f} = W(\vec{f}) + W(\vec{e}), \quad (2.3)$$

где $\vec{e} = (e_1, \dots, e_N)'$.

Очевидным требованием также является выполнение следующего неравенства для евклидовых норм векторов (символ $\| \cdot \|$)

$$b = \|W(\vec{e})\| / \|W(\vec{f})\| < \|\vec{e}\| / \|\vec{f}\|. \quad (2.4)$$

Ясно также, что в идеальном случае должно выполняться тождество

$$W(\vec{f}) = \vec{f}, \quad (2.5)$$

то есть используемый оператор в качестве неподвижной точки должен иметь искомый вектор тренда (вообще говоря, априори неизвестный).

Далее обозначены трансформанты Фурье

$$Z(\omega) = \sum_{k=1}^N z_k \exp(-j\omega(k-1)), \quad j = (-1)^{1/2} \quad (2.6)$$

обозначаемых соответствующими строчными буквами векторов $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$ так что справедливо представление

$$z_i = \int_{-\pi}^{\pi} Z(\omega) \exp(j\omega(i-1)) d\omega / 2\pi. \quad (2.7)$$

Пусть Ω_κ означает симметрично расположенный относительно начала координат частотный интервал

$$\Omega_r = [-\Omega_{2r}, -\Omega_{1r}) \cup [\Omega_{1r}, \Omega_{2r}). \quad (2.8)$$

где выполняется условие $0 \leq \Omega_{1\kappa} \leq \Omega_{2\kappa} \leq \pi$.

Введем понятие субполосного расстояния между двумя векторами [43]

$$d_r(x, z) = \int_{\omega \in \Omega_r} |X(\omega) - Z(\omega)|^2 d\omega / 2\pi. \quad (2.9)$$

Подставив сюда определения трансформант Фурье вида (2.5), после очевидных преобразований с учетом (2.8) получаем представление непосредственно в области оригиналов

$$d_r(x, z) = \sum_{k=1}^N \lambda_k^r (\alpha_k^r - \beta_k^r)^2, \quad (2.10)$$

где $\lambda_k^r, k=1, \dots, N$ упорядоченные по убыванию

$$\lambda_1^r \geq \lambda_2^r \geq \dots \lambda_N^r \geq 0 \quad (2.11)$$

неотрицательные собственные числа субполосной матрицы $A_r = \{a_{ik}^r\}$ с элементами

$$a_{ik}^r = (\sin(\Omega_{2r}(i-k)) - \sin(\Omega_{1r}(i-k))) / \pi(i-k), \quad a_{ii}^r = (\Omega_{2r} - \Omega_{1r}) / \pi, \quad (2.12)$$

так что имеет место

$$L'G^r = A_rG^r; \quad (2.13)$$

$L' = \text{diag}(\lambda_1^r, \dots, \lambda_N^r)$, $G^r = \{\vec{q}_1^r \dots \vec{q}_N^r\}$ - ортогональная матрица, состоящая из соответствующим (2.11) образом упорядоченных собственных векторов;

$$\vec{\alpha}^r = (\alpha_1^r, \dots, \alpha_N^r)' = G^{r'}\vec{x}, \quad \vec{\beta}^r = (\beta_1, \dots, \beta_N)' = G^{r'}\vec{z}. \quad (2.14)$$

Таким образом, в (2.14) компоненты векторов (см. также (2.10)) состоят из проекций исходных векторов на собственные векторы субполосной матрицы.

Вычисления показывают, что при выборе (квадратные скобки означают целую часть содержимого)

$$J_r = 2 [N a_{ik}^r / 2] + 4, \quad (2.15)$$

с высокой точностью выполняются равенства

$$\lambda_{k+J_r} = 0, \quad (2.16)$$

Поэтому при выполнении условий

$$\beta_i^r = \alpha_i^r, \quad i = 1, \dots, J_r \quad (2.17)$$

с высокой степенью точности субполосное расстояние будет равно нулю, то есть

$$d_r(x, z) = 0, \quad (2.18)$$

Таким образом, для точного совпадения отрезков трансформант Фурье в заданном частотном интервале не обязательно выполнения тривиального условия равенства соответствующих векторов

$$\vec{x} = \vec{z}. \quad (2.19)$$

Нетрудно показать, что в виду свойства ортонормальности набора собственных векторов субполосной матрицы среди всех векторов, удовлетворяющих условию (2.18), минимальной евклидовой нормой будет обладать вектор

$$\vec{y}_r = \sum_{k=1}^{J_r} \alpha_k^r \vec{q}_k^r. \quad (2.20)$$

Этот результат легко обобщить на случай объединения непересекающихся интервалов вида (2.8)

$$\Omega_R = \bigcup_{r \in R} \Omega_r, \quad (2.21)$$

где R - некоторое множество частотных интервалов, причем предполагается выполнение неравенств $\min \Omega_{1r} \geq 0$, $\max \Omega_{2r} \leq \pi$.

При этом соотношение для объединенного субполосного расстояния принимает вид

$$d_R(x, z) = \sum_{k=1}^{J_R} \lambda_k^R (\alpha_k^R - \beta_k^R)^2. \quad (2.22)$$

Входящие сюда символы означают те же характеристики, что и в (2.8), но только для суммарной субполосной матрицы

$$A_R = \sum_{r \in R} A_r, \quad (2.23)$$

В частности J_R означает число ненулевых собственных чисел матрицы (2.23).

Таким образом, справедливо следующее.

Утверждение 1. Необходимым и достаточным условием совпадения в частотном интервале вида (2.21) отрезков трансформант Фурье двух векторов \vec{x} и \vec{z} является выполнение равенств [35]

$$\beta_k^R = \alpha_k^R, \quad k = 1, \dots, J_R, \quad (2.24)$$

причем среди всех таких векторов \vec{z} вектор

$$\vec{y}_R = \sum_{k=1}^{J_R} \alpha_k^R \vec{q}_k^R \quad (2.25)$$

имеет минимальную евклидову норму [9].

Положим

$$W_R = G_J^R G_J^{R'}, \quad (2.26)$$

где $G_{J_R}^R = \{\vec{q}_1^R \dots \vec{q}_{J_R}^R\}$. Тогда соотношение (2.25) можно преобразовать к виду

$$\vec{y}_R = W_R \vec{x}. \quad (2.27)$$

Непосредственно из представления элементов матрицы (2.23)

$$a_{ik}^R = \int_{\omega \in \Omega_R} \exp(-j\omega(i-k)) d\omega / 2\pi \quad (2.28)$$

нетрудно получить характеристическое свойство её собственных чисел и векторов

$$\lambda_k^R = \int_{\omega \in \Omega_R} |Q_k^R(\omega)|^2 d\omega / 2\pi, \quad (2.29)$$

то есть собственные числа численно равны доле энергии соответствующего собственного вектора, попадающей в объединенный частотный интервал (здесь учтено равенство Парсеваля и равенство единице норм собственных векторов).

Таким образом, использование только ненулевых собственных чисел сужает диапазон частот, в который попадает энергия вектора (2.27).

Поэтому представляется естественным называть соотношение (2.27) оператором субполосного сглаживания (ОСС) или фильтрации, а W_R матрицей оператора субполосного сглаживания (МОСС).

Непосредственно из определения (2.25) нетрудно получить соотношения для скалярного произведения исходного вектора и результата его сглаживания

$$(\vec{x}, \vec{y}_R) = \|\vec{y}_R\|^2 = \sum_{k=1}^{J_R} (\alpha_k^R)^2 \geq 0. \quad (2.30)$$

Поэтому справедливы равенства

$$\rho(x, y_R) = (\vec{x}, \vec{y}_R) / (\|\vec{x}\| \|\vec{y}_R\|) = \left(\sum_{k=1}^{J_R} (\alpha_k^R)^2 / \sum_{i=1}^N (\alpha_i^R)^2 \right)^{1/2}, \quad (2.31)$$

$$\gamma_R(x, y_R) = \|\vec{x} - \vec{y}_R\|^2 = \sum_{k=J_R+1}^N (\alpha_k^R)^2. \quad (2.32)$$

Представляется естественным характеристику (2.31) называть коэффициентом подобия исходного и сглаженного векторов. Его положительная знакоопределенность с точки зрения решаемой задачи построения трендов является существенным свойством.

Из ортонормальности набора собственных векторов субполосной матрицы (2.23) следует справедливость.

Утверждение 2. Неподвижными точками ОСС (2.27) являются только векторы вида [35]

$$\vec{u} = G_J^R \vec{b}, \quad \vec{b} = (b_1, \dots, b_{J_R})', \quad (2.33)$$

где компоненты вектора \vec{b} являются произвольными числами (в том числе комплексными) [41].

Очевидно, что трансформанты Фурье векторов (2.25) можно представить в виде

$$Y(\omega) = \sum_{ik1}^{J_R} \alpha_k^R Q_k(\omega). \quad (2.34)$$

Поэтому можно считать, что реализуется вариант приближенного аналитического продолжения трансформанты Фурье исходного вектора с выбранного частотного интервала на смежные подобласти частотной оси.

2.2. Адаптивное построение оператора субполосного сглаживания

Отметим, что представление (2.33) определяет множество трендов, удовлетворяющих «идеальному» условию (2.4). Реальные тренды будут ему удовлетворять только приближенно, причем степень приближения определяется количеством векторов в представлении (2.33) и выбором частотного интервала [35].

Так как предполагается, что искомый тренд является более узкополосным чем анализируемый временной ряд, то представляется целесообразным потребовать выполнения следующего вариационного условия.

При одинаковой суммарной ширине

$$S_R = \sum_{r \in R} (\Omega_{2r} - \Omega_{1r}) \quad (2.35)$$

у нескольких объединенных частотных интервалов вида (2.21) выбирается тот из них, на котором коэффициент подобия (2.31) больше.

Отметим, что точного равенства получаемого коэффициента подобия заданному значению достичь затруднительно, поэтому речь может идти о некотором допустимом приближении к нему.

Пусть в дальнейшем $K + 1$ означает общее количество частотных интервалов, на которые разбита ось частот $[-\pi, \pi)$, $\Delta = \pi / (2K + 1)$,

$\omega_k = 2(r-1)\Delta$, $r = 1, \dots, K+1$, а границы частотных интервалов определяются соотношениями

$$\Omega_{10} = 0; \Omega_{20} = \Delta; \Omega_{1r} = \omega_r - \Delta; \Omega_{2r} = \omega_r + \Delta, r = 1, \dots, K, \quad (2.36)$$

то есть частотные интервалы не пересекаются и перекрывают всю частную ось.

Количество частотных интервалов может быть любым, однако целесообразно придерживаться следующего уравнения

$$K = [(N-2)/4], \quad (2.37)$$

где квадратные скобки означают целую часть содержимого. Оно соответствует тому, что тогда Δ будет равно половине ширины основного лепестка спектра прямоугольного окна длительности N (ядро Дирихле) [41]. При этом максимальное собственное число субполосной матрицы A_0 с элементами

$$a_{ik}^0 = \sin(\Delta(i-k)) / \pi(i-k); a_{ii}^0 = 1 / (2K+1), i, k = 1, \dots, N \quad (2.38)$$

будет равно 0,98, а $J_0 = 5$.

В свою очередь из (2.12) нетрудно получить представление для элементов субполосных матриц для остальных частотных интервалов

$$a_{ik}^r = 2a_{ik}^0 \cos(\omega_r(i-k)). \quad (2.39)$$

Положим

$$P_r(x) = \int_{\omega \in \Omega_r} |X(\omega)|^2 / 2\pi \quad (2.40)$$

Имея в виду определение (2.5) нетрудно получить представление этой характеристики непосредственно в области оригиналов

$$P_r(x) = \vec{x}' A_r \vec{x}. \quad (2.41)$$

Пусть

$$sredx = \|\vec{x}\|^2 / 2\pi, \quad (2.42)$$

$$h_r = 1,378 sredx \cdot (\Omega_{2r} - \Omega_{1r}), \quad (2.43)$$

то есть имеются в виду плотность энергии вектора и соответствующие её части, приходящиеся на интервалы определенных выше размеров. Коэффициент 1,378 является медианой (квантиль) вероятностного распределения хи- квадрат с двумя степенями свободы (сумма интегралов от квадратов вещественной и мнимой частей трансформант Фурье по соответствующим частотным интервалам для белого гауссовского шума) [43].

На основе соотношений (2.12) и (2.36) нетрудно получить соотношение

$$\sum_{r=0}^K A_r = I = \text{diag}(1, \dots, 1). \quad (2.44)$$

Поэтому справедливо равенство

$$\sum_{r=0}^K P_r(x) = \|\vec{x}\|^2. \quad (2.45)$$

Таким образом, в общем случае совокупность частей энергий (2.41) можно разделить на два множества

$$R = \{P_r(x) \geq h_r, r \in R\} \quad (2.46)$$

и \bar{R} , если выполняются противоположные неравенства.

Подставив в (2.41) представление (2.1), нетрудно получить соотношение для частей энергий анализируемого вектора в частотных интервалах.

$$P_r(x) = P_r(f) + P_r(\varepsilon) + 2\vec{f}' A_r \vec{\varepsilon}. \quad (2.47)$$

Поэтому справедливо соотношение

$$sredx = sredf + sred\varepsilon + 2(\vec{x}, \vec{\varepsilon}) / 2\pi. \quad (2.48)$$

Предполагая, что подавляющая доля энергии тренда сосредоточена в более суммарно узкой, чем у случайных колебаний частотной области, вполне обоснованно можно считать, что именно в этой области с большей вероятностью будут выполняться неравенства вида (2.46), чем противоположные (нецентральное хи- квадрат распределение вероятностей интегралов от квадратов вещественной и мнимой компонент трансформанты Фурье).

Поэтому множество частотных интервалов (2.46) естественно называть информационным, а составляющие его частотные интервалы называть информационными.

Дальнейшие шаги заключаются в использовании соотношения (2.23) и вычислении для полученной суммарной субполосной матрицы собственных чисел и векторов.

Отметим далее, что областью определения трансформанты Фурье любого вектора конечной размерности является вся частотная ось в границах $[-\pi, \pi)$. Поэтому, для точного воспроизведения тренда потребуется весь набор собственных векторов суммарной субполосной матрицы, который является полным базисом для представления векторов данной размерности [41,42]. Однако, при этом будут точно воспроизведены и искажающие воздействия. Поэтому при выборе числа собственных векторов J_R для формирования матрицы ОСС вида (2.26) необходимо достичь компромисса между желанием точного воспроизведения тренда как неподвижной точки (собственного вектора) оператора (2.27) и степени очистки его от искажающих воздействий.

К сожалению, в виду различных причин не представляется возможным достаточно строго обосновать процесс отбора собственных векторов для формирования МОСС (2.26). Поэтому были использованы вычислительные эксперименты, которые показали, что использование в качестве критерия отбора собственных векторов неравенства для соответствующих собственных чисел

$$\lambda_{i+1}^R \geq (1 - \phi_R) / (2(2K + 1 - t_R)) \cdot \sum_{k=1}^i \lambda_k^R / i, \quad (2.49)$$

позволяет достичь искомого компромисса.

Здесь использованы следующие обозначения

$$t_R = S_R / \Delta, \quad (2.50)$$

$$\phi_R = P_R(x) / \|\vec{x}\|^2 = \vec{x}' A_R \vec{x} / \|\vec{x}\|^2, \quad (2.51)$$

λ_k^R - упорядоченные по убыванию собственные числа суммарной субполосной матрицы A_R .

Отметим, что числитель первого из сомножителей в правой части (2.49) равен квадрату доли энергии оценки вектора искажений, тогда как знаменатель определяет удвоенное число частотных интервалов, куда она попадает (число степеней свободы).

Форма последнего в правой части (2.49) сомножителя выбрана по аналогии с приближенным равенством

$$P_R(x) \approx \|\hat{f}_R\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{J_R} \lambda_k^R / J_R, \quad (2.52)$$

где \hat{f}_R оценка тренда на основе сглаживания

$$\hat{f}_R = W_R \vec{x}, \quad (2.53)$$

а матрица W_R определяется соотношением (2.26).

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

3.1. Оценка качества фильтрации алгоритмами Винера и Калмана в зависимости от длины импульсной характеристики

Для алгоритмов Винера и Калмана были проведены вычислительные эксперименты, в ходе которых на вход подавались сигналы вида (3.1) и изменялась длина импульсной характеристики [47-50].

$$\tilde{\vec{x}} = \vec{x} + \vec{u}, \quad (3.1)$$

где \vec{x} – исходный сигнал, \vec{u} – шум, распределенный по равномерному закону, $\tilde{\vec{x}}$ – сигнал полученный после применения фильтрации.

В данном случае за исходный принимался сигнал следующего вида:

$$\vec{x} = \sin(2\pi k * 0.1) + \cos(2\pi k * 0.005), k = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

В процессе проведения экспериментов соотношение шум/сигнал изменялось в пределах от 0 до 0,5 с шагом 0,1 и определялось по следующей формуле [50]

$$ОШС = \frac{P_{шум}}{P_{сиг.}} = \frac{\sum_{k=1}^N y_k^2}{\sum_{k=1}^N x_k^2}, \quad (3.3)$$

За образцовый сигнал был принят исходный.

В качестве меры сравнения использовалось относительное среднеквадратическое отклонение сигнала на выходе фильтра от исходного сигнала, которое рассчитывается по формуле [50-52]:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_k - a \cdot z_k)^2}{\sum_{k=1}^N x_k^2}}, \quad (3.4)$$

где x_k - исходный сигнал, z_k - сигнал на выходе фильтра,

$$a = \frac{\sum_{k=1}^N x_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^N x_k^2}, \quad (3.5)$$

В таблице 2.1 представлена зависимость относительного среднеквадратического отклонения (ε) от отношения шум/сигнал и длительности импульсной характеристики фильтра (L) при использовании оптимального фильтра Винера.

Таблица 3.1. Зависимость относительного среднеквадратического отклонения от отношения шум/сигнал и длительности импульсной характеристики фильтра Винера

шум/сиг. L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
8	0,0663	0,3599	0,5372	0,5778	0,6081	0,7019
16	0,1017	0,4018	0,5431	0,5782	0,6081	0,7018
24	0,1304	0,4439	0,5444	0,5824	0,6093	0,7016
32	0,1561	0,4750	0,5497	0,5909	0,6176	0,7015
40	0,1756	0,4984	0,5634	0,6026	0,6359	0,7015
48	0,1866	0,5160	0,5883	0,6116	0,6573	0,7015
56	0,1895	0,5296	0,6027	0,6145	0,6744	0,7013
64	0,1901	0,5377	0,6039	0,6154	0,6830	0,7013
72	0,2031	0,5397	0,6049	0,6154	0,6865	0,7013
80	0,2411	0,5398	0,6091	0,6155	0,6874	0,7010
88	0,3075	0,5408	0,6207	0,6157	0,6877	0,6991
96	0,3783	0,5440	0,6272	0,6184	0,6877	0,6964
104	0,4370	0,5504	0,6299	0,6241	0,6877	0,6950
112	0,4764	0,5575	0,6307	0,6333	0,6875	0,6957
120	0,4937	0,5638	0,6309	0,6402	0,6882	0,6971
128	0,4964	0,5666	0,6320	0,6428	0,6898	0,6977
136	0,4977	0,5676	0,6329	0,6433	0,6932	0,6976
144	0,5056	0,5675	0,6330	0,6538	0,6990	0,6983
152	0,5207	0,5673	0,6329	0,6761	0,7097	0,7031

окончание таблицы 3.1.

160	0,5366	0,5672	0,6334	0,6974	0,7275	0,7142
168	0,5474	0,5672	0,6346	0,7214	0,7469	0,7319
176	0,5523	0,5669	0,6342	0,7452	0,7633	0,7489
184	0,5536	0,5668	0,6346	0,7585	0,7754	0,7605
192	0,5537	0,5668	0,6348	0,7624	0,7833	0,7668
200	0,5537	0,5671	0,6349	0,7628	0,7872	0,7686
208	0,5537	0,5686	0,6351	0,7640	0,7880	0,7687
216	0,5542	0,5732	0,6362	0,7675	0,7881	0,7687
224	0,5573	0,5822	0,6377	0,7746	0,7894	0,7687
232	0,5657	0,5900	0,6407	0,7802	0,7924	0,7687
240	0,5784	0,5957	0,6429	0,7847	0,7967	0,7688
248	0,5940	0,5992	0,6449	0,7893	0,8014	0,7691
256	0,6071	0,6007	0,6458	0,7909	0,8067	0,7690

Для большей наглядности по данным, представленным в таблице, были построены зависимости относительного среднеквадратического отклонения от длительности импульсной характеристики сигнала при различных уровнях шума, представлены на рисунке 3.1 [52-56].

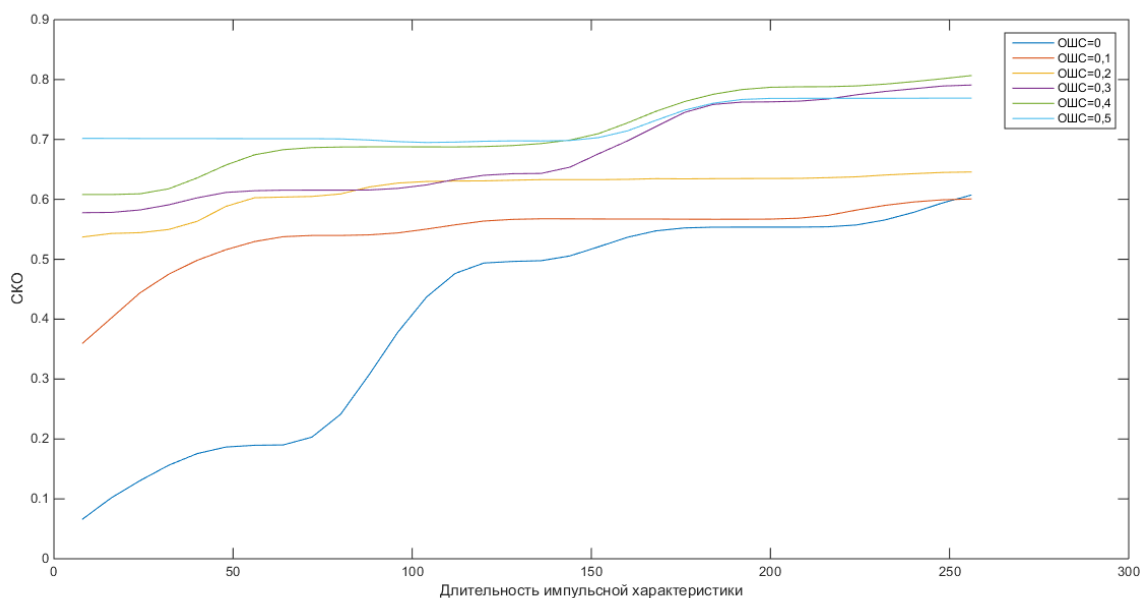


Рисунок 3.1. Зависимость относительного среднеквадратического отклонения от длительности импульсной характеристики фильтра Винера при разном отношении шум/сигнал.

В таблице 3.2 представлена зависимость относительного среднеквадратического отклонения от отношения шум/сигнал и длительности импульсной характеристики фильтра при использовании фильтрации Калмана.

Таблица 3.2. Зависимость относительного среднеквадратического отклонения от отношения шум/сигнал и длительности импульсной характеристики фильтра Калмана

шум/сиг. L	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
8	0,6465	0,4813	0,4270	0,2420	0,1985	0,1877
16	0,4354	0,0739	0,1703	0,1047	0,0841	0,1190
24	0,1469	0,1132	0,0799	0,1024	0,0759	0,1469
32	0,1567	0,0690	0,0888	0,1033	0,0839	0,1366
40	0,1036	0,0718	0,0788	0,1170	0,0948	0,1307
48	0,1454	0,0838	0,0972	0,1189	0,1245	0,1287
56	0,0838	0,0788	0,0910	0,1163	0,1247	0,1231
64	0,0902	0,0847	0,0967	0,1190	0,1195	0,1254
72	0,0755	0,0891	0,1045	0,1084	0,1226	0,1300
80	0,0792	0,0875	0,1010	0,1094	0,1269	0,1281
88	0,0807	0,0903	0,1040	0,1157	0,1271	0,1340
96	0,0628	0,0854	0,0996	0,1160	0,1266	0,1331
104	0,0611	0,0894	0,1065	0,1206	0,1370	0,1441
112	0,0888	0,0920	0,1055	0,1222	0,1342	0,1435
120	0,0671	0,0953	0,1103	0,1266	0,1354	0,1459
128	0,0562	0,0915	0,1099	0,1249	0,1396	0,1474
136	0,0603	0,0939	0,1117	0,1277	0,1394	0,1484
144	0,0549	0,0954	0,1153	0,1299	0,1423	0,1541
152	0,0607	0,0974	0,1167	0,1314	0,1434	0,1555
160	0,0593	0,0981	0,1173	0,1318	0,1489	0,1571
168	0,0595	0,0993	0,1191	0,1358	0,1498	0,1608
176	0,0614	0,1002	0,1215	0,1375	0,1511	0,1633
184	0,0585	0,1011	0,1218	0,1383	0,1522	0,1653
192	0,0585	0,1017	0,1230	0,1410	0,1534	0,1687
200	0,0538	0,1017	0,1239	0,1418	0,1569	0,1695
208	0,0560	0,1036	0,1269	0,1434	0,1579	0,1720

окончание таблицы 3.2.

216	0,0575	0,1044	0,1264	0,1455	0,1600	0,1734
224	0,0534	0,1050	0,1281	0,1470	0,1616	0,1751
232	0,0524	0,1058	0,1302	0,1477	0,1636	0,1774
240	0,0562	0,1069	0,1305	0,1491	0,1650	0,1789
248	0,0558	0,1073	0,1312	0,1505	0,1667	0,1802
256	0,0543	0,1083	0,1328	0,1518	0,1676	0,1822

Для большей наглядности по данным, представленным в таблице, были построены зависимости относительного среднеквадратического отклонения от длительности импульсной характеристики фильтра Калмана при различных уровнях шума, представлены на рисунке 3.2 [52-56].

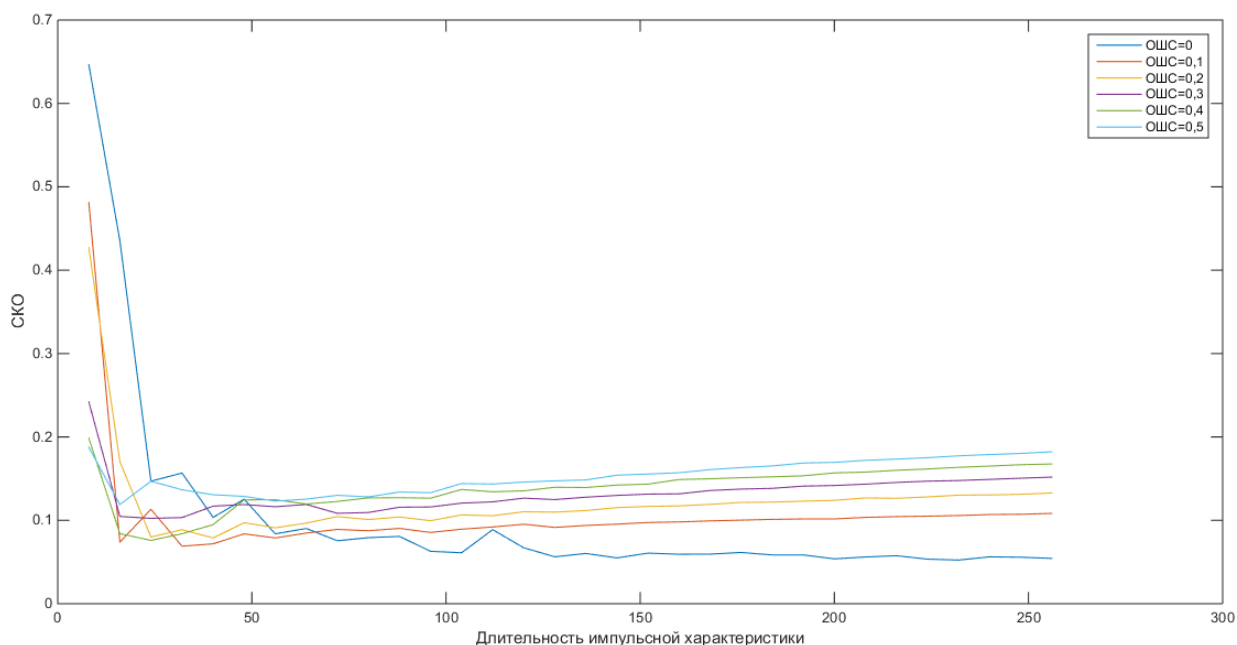


Рисунок 3.2. Зависимость относительного среднеквадратического отклонения от длительности импульсной характеристики фильтра Калмана при разном отношении шум/сигнал.

Проанализировав результаты проделанных экспериментов, сведенных в таблицы 3.1 и 3.2, и построенным по ним зависимостям, представленным на рисунках 3.1 и 3.2. В фильтрации методом Винера при соотношении шум/сигнал равном 0 и увеличении длины импульсной характеристики фильтра от 8 до 96 относительное среднеквадратическое отклонение сигнала на выходе

фильтра от исходного резко увеличивается с 0,01 до 0,5 и далее постепенно увеличивается до 0,6. При появлении шума на входе фильтра относительное среднеквадратическое отклонение сигнала на выходе фильтра постепенно возрастает и принимает значений от 0,45 до 0,7.

Итогом вышеизложенного является следующая зависимость: при увеличении соотношения шум/сигнал минимальное значение относительного среднеквадратического отклонения наблюдается при меньшей длине импульсной характеристики фильтра.

В фильтрации методом Калмана относительное среднеквадратичное отклонение уменьшается при увеличении длины импульсной характеристики, чем меньше соотношение шум/сигнал там меньше значение относительного среднеквадратичного отклонения.

3.2. Сравнительный анализ фильтрации методами Винера, Калмана и адаптивной субполосной фильтрации при обработке модельного сигнала

Для сравнительного анализа методов адаптивной фильтрации были проведены вычислительны эксперименты, в ходе которых, как и в предыдущем случае, подавались сигналы вида (3.2) и изменялось соотношение шум/сигнал определяемое формулой (3.3) в пределах от 0 до 0,5 с шагом 0,1.

В данном исследовании в качестве исходного использовался модельный сигнал, генерируемый на основе соотношения.

$$\vec{x} = \cos\left(\frac{8\pi k}{N} + \varphi_1\right) + \cos\left(\frac{15\pi k}{N} + \varphi_2\right), k = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

Где, $\varphi_1, \varphi_2 \in (-\pi, \pi)$ случайные фазы, равномерно распределенные в указанном интервале; N- длительность обрабатываемого отрезка временного ряда.

Длительности фильтруемого и результирующего сигнала равны N=512. В качестве критерия эффективности методов фильтрации использовалось относительное среднеквадратическое отклонение, которое рассчитывается по формуле (3.3) [50].

В методе адаптивной субполосной фильтрации (АСФ), в отличие алгоритма Винера и Калмана, образцовый сигнал не используется. Для объективности исследований образцовый сигнал подвергался искажению.

В таблице 3.3 представлена зависимость относительного среднеквадратического отклонения от отношения шум/сигнал для модельного сигнала, отфильтрованного методом Винера, Калмана и методом адаптивной субполосной фильтрации.

Таблица 3.3 – Зависимость относительного среднеквадратического отклонения от отношения шум/сигнал для модельного сигнала

Шум/сигнал	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Адаптивная субполосная фильтрация	0,0115	0,0350	0,0686	0,0889	0,1382	0,1695
Фильтр Винера	0,1992	0,4874	0,5452	0,6188	0,7043	0,7103
Фильтр Калмана	0,0902	0,0847	0,0967	0,1190	0,1595	0,1954

На рисунках 3.2 – 3.10 представлены графики исходного сигнала и сигналов, отфильтрованных Винера, Калмана и методом адаптивной субполосной фильтрации при изменяющемся соотношении шум/сигнал равному 0, 0.3, 0.5 [56-60].

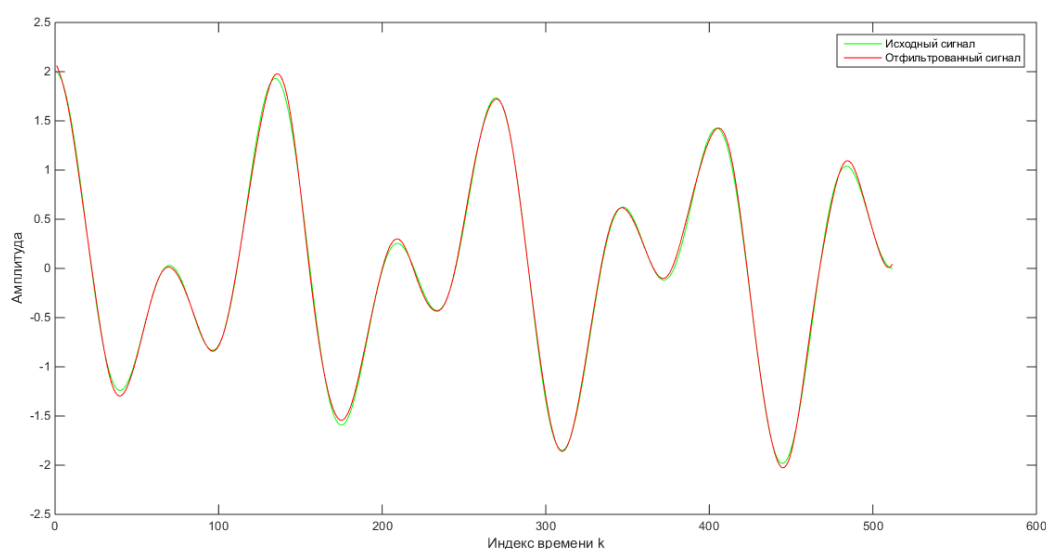


Рисунок 3.3. Сигнал отфильтрованный адаптивным субполосным методом при соотношении шум/сигнал 0

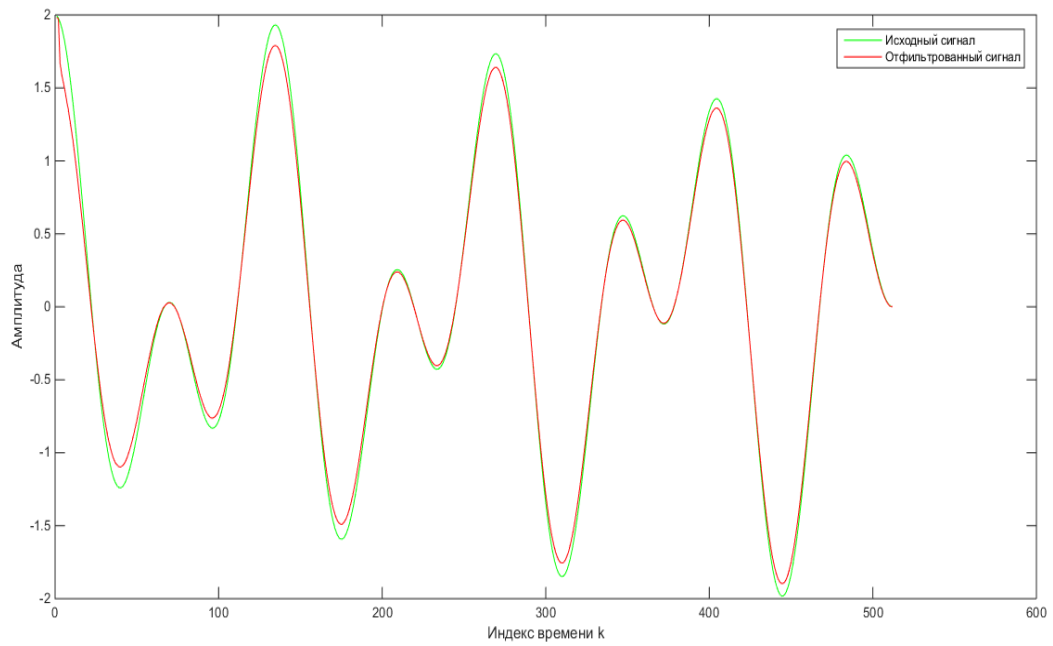


Рисунок 3.4. Сигнал отфильтрованный методом Калмана при соотношении шум/сигнал 0

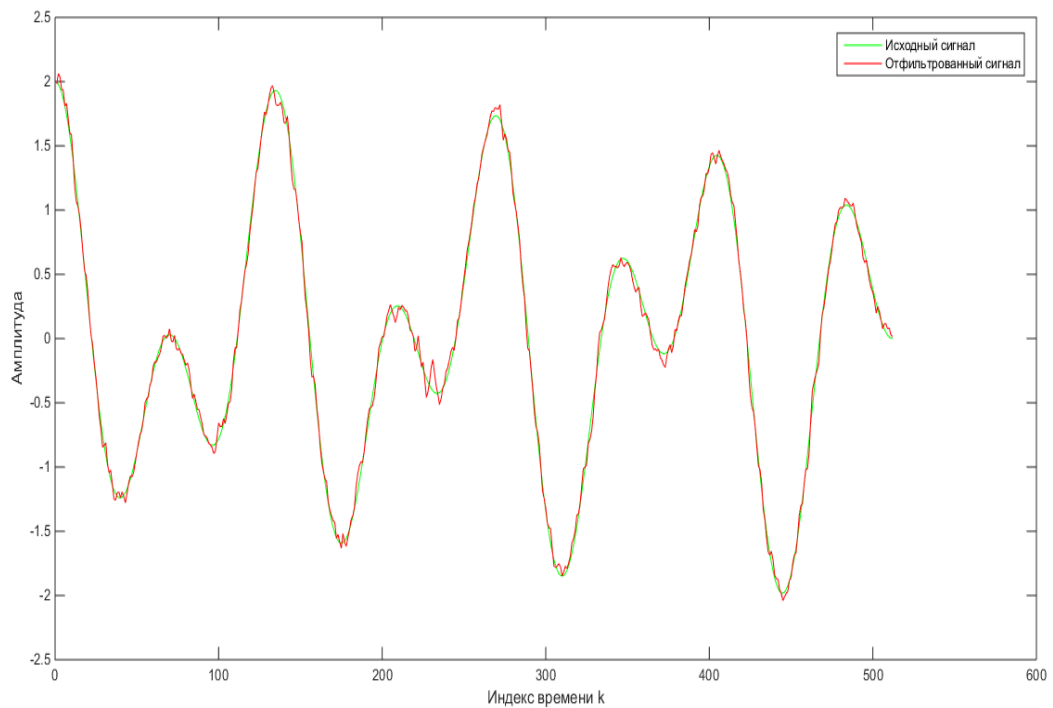


Рисунок 3.5. Сигнал отфильтрованный методом Винера при соотношении шум/сигнал 0

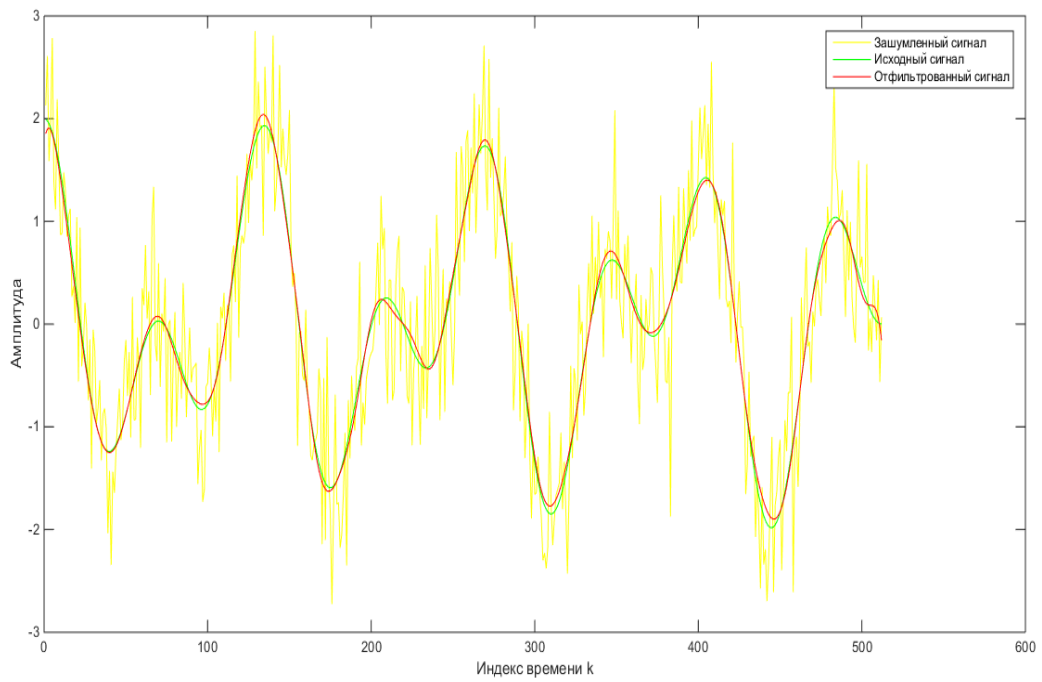


Рисунок 3.6. Сигнал отфильтрованный адаптивным субполосным методом при соотношении шум/сигнал 0.3

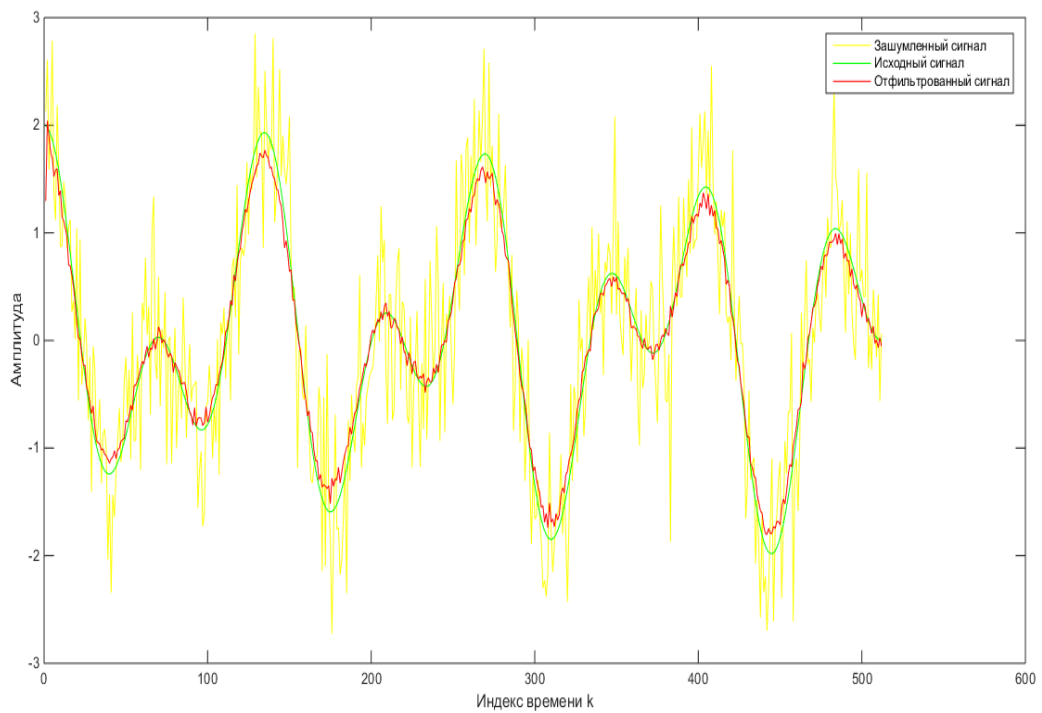


Рисунок 3.7. Сигнал отфильтрованный методом Калмана при соотношении шум/сигнал 0.3

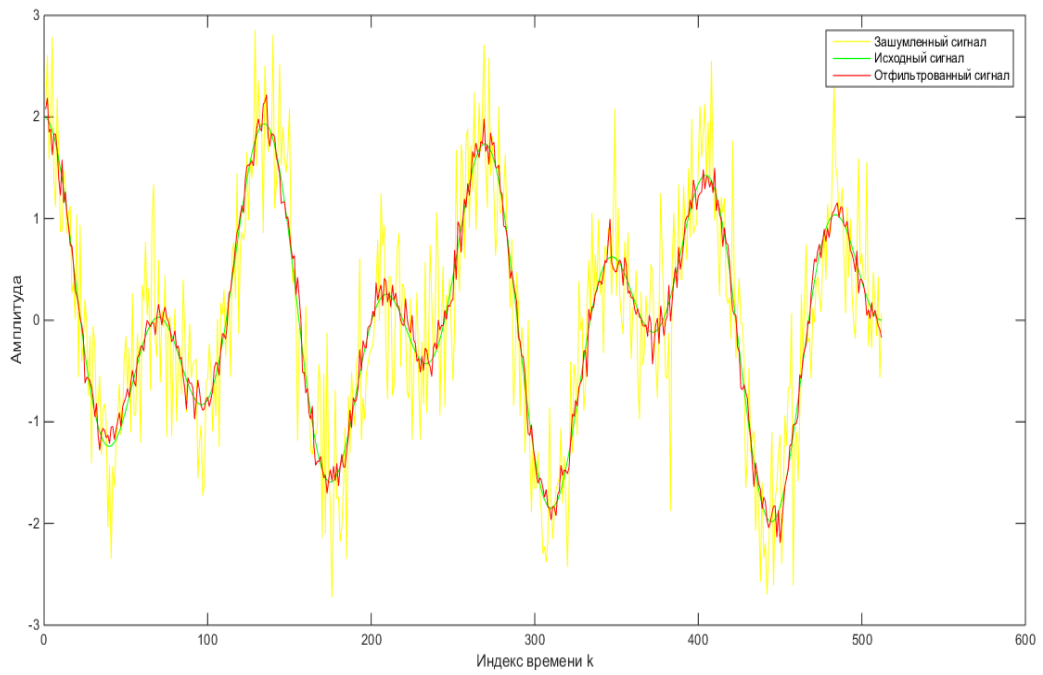


Рисунок 3.8. Сигнал отфильтрованный методом Винера при соотношении шум/сигнал 0.3

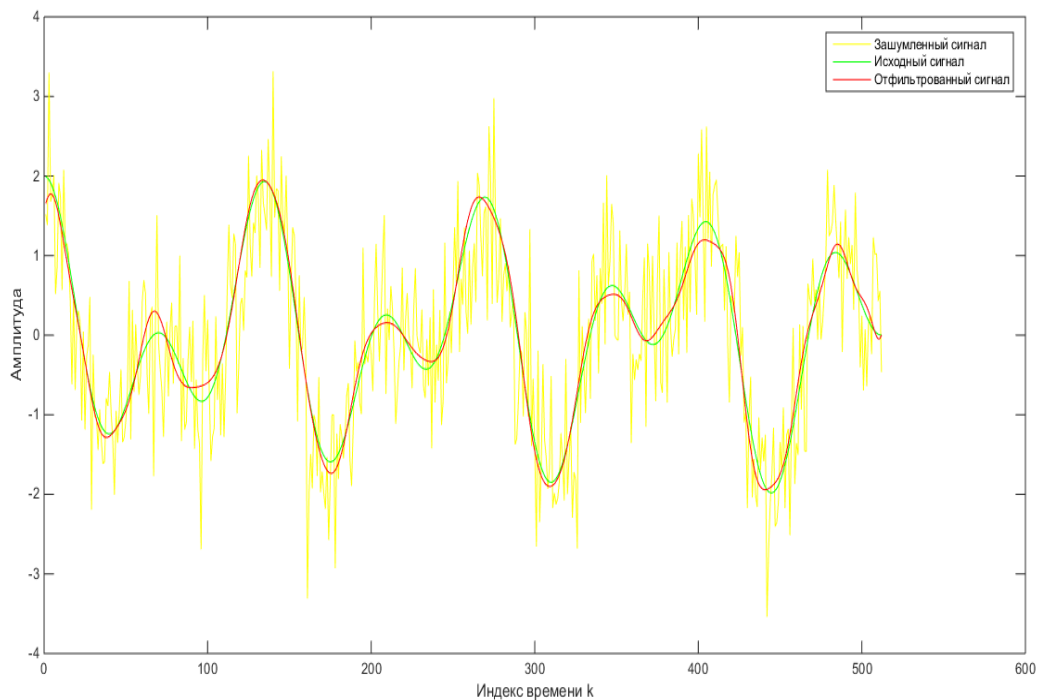


Рисунок 3.9. Сигнал отфильтрованный адаптивным субполосным методом при соотношении шум/сигнал 0.5

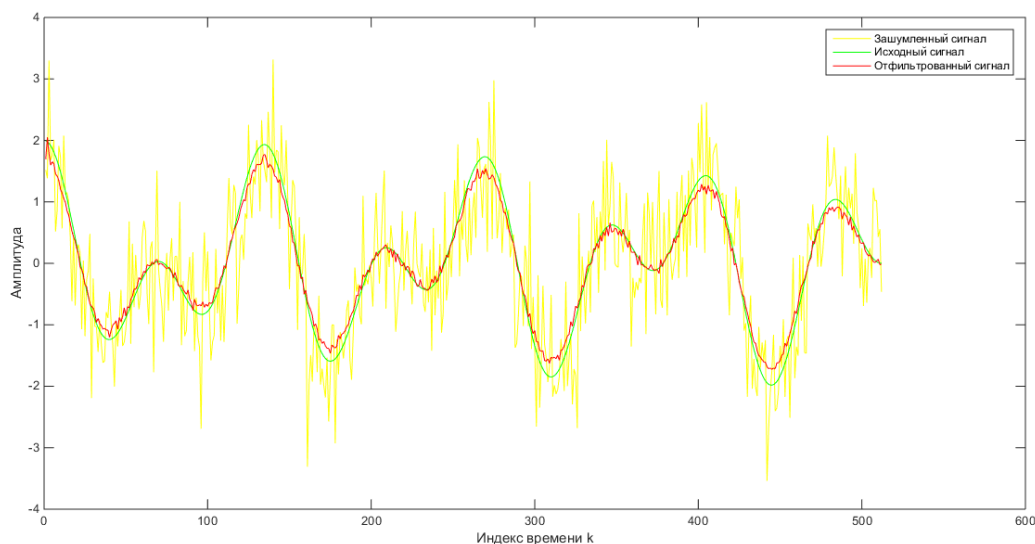


Рисунок 3.10. Сигнал отфильтрованный методом Калмана при соотношении шум/сигнал 0.5

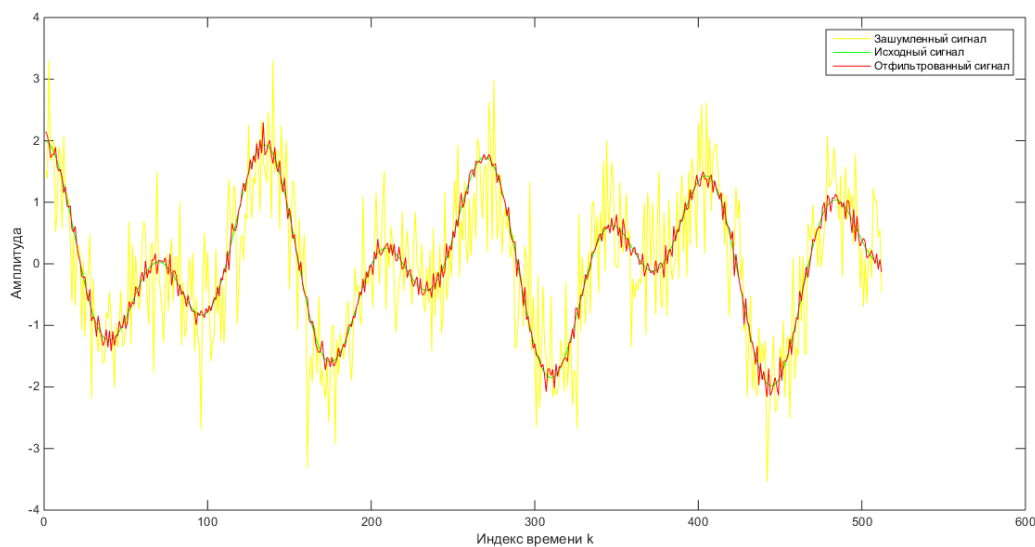


Рисунок 3.11. Сигнал отфильтрованный методом Винера при соотношении шум/сигнал 0.5

Проанализировав результаты эксперимента, приведенные в таблице 2.3, отметим, что при отсутствии шума выходной сигнал метода адаптивной субполосной фильтрации, имеет меньшее относительное среднеквадратическое отклонение, чем выходной сигнал фильтров, основанных на методах Винера и Калмана. С увеличением уровня шума в фильтруемом сигнале, наблюдается

увеличение относительного среднеквадратического отклонения от исходного сигнала при всех рассмотренных видах фильтрации. Следует обратить внимание, что относительное среднеквадратическое отклонение выходного сигнала адаптивного субполосного фильтра от исходного сигнала имеет меньшую скорость роста, чем у методов Винера и Калмана.

3.3. Сравнительный анализ фильтрации методами Винера, Калмана и адаптивной субполосной фильтрации при обработке эмпирических данных

Для сравнительного анализа методов адаптивной фильтрации так же были проведены вычислительные эксперименты, где в качестве исходного сигнала использовались эмпирические данные, представляющие из себя строку изображения. Исходная строка представлена на рисунке 3.12.

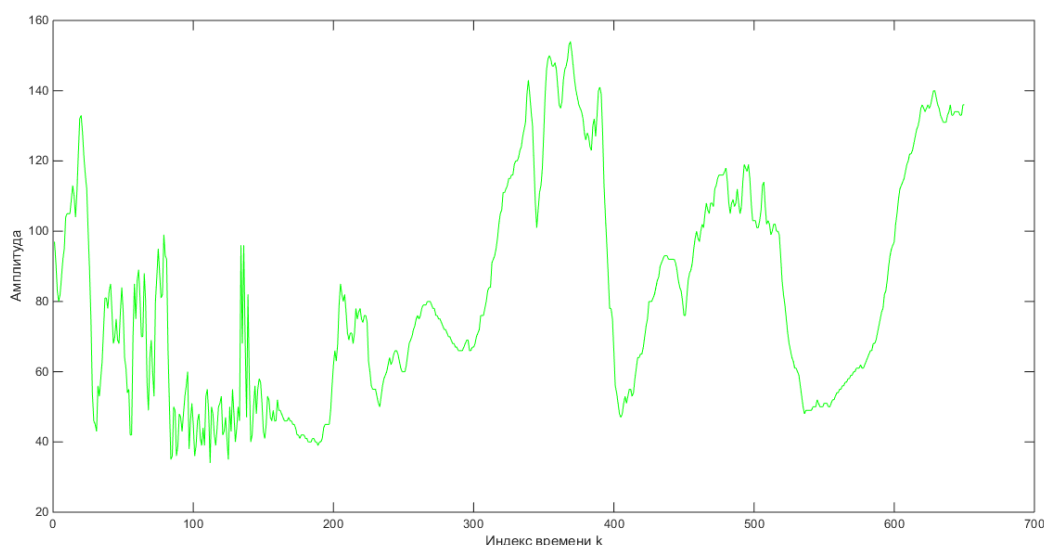


Рисунок 3.12. График, представляющий собой одну строку исходного изображения

Представленная строка имеет негладкий вид, присутствуют выбросы, перепады, поэтому стоит задача отфильтровать ее получив гладкую кривую.

Для исследования устойчивости к воздействию шумов, было произведено искусственное зашумление с использованием псевдослучайных чисел, сгенерированных по нормальному закону распределения. Как и в

предыдущем случае, изменялось соотношение шум/сигнал определяемое формулой (3.3) в пределах от 0 до 0,5.

Результаты экспериментов представлены на рисунках

Фильтрация с соотношением шум/сигнал равном 0

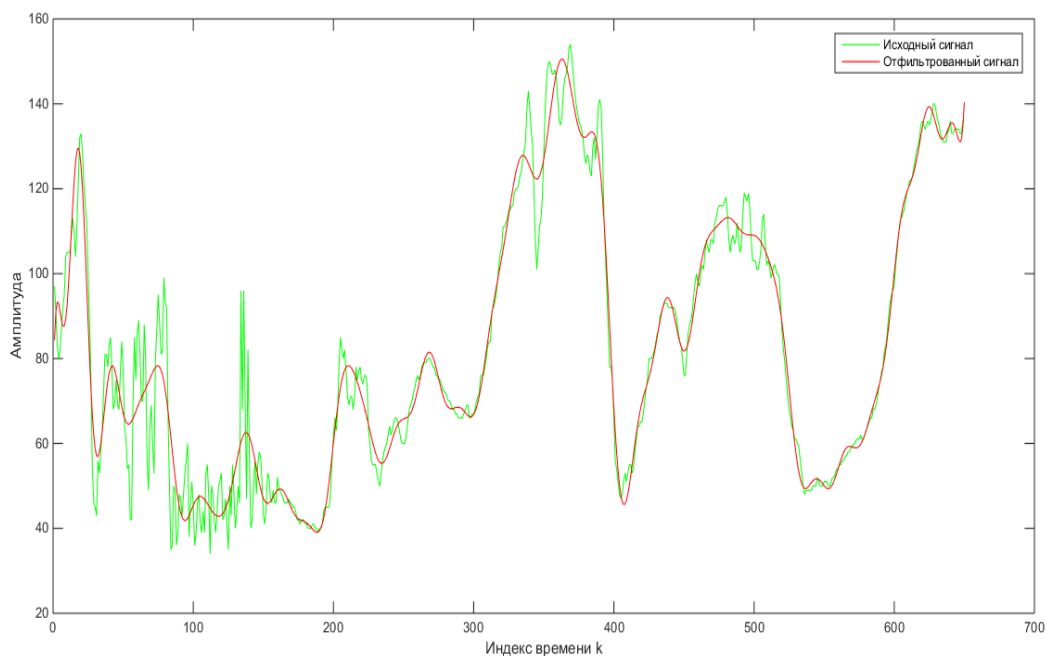


Рисунок 3.13. Фильтрация методом адаптивной субполосной фильтрации

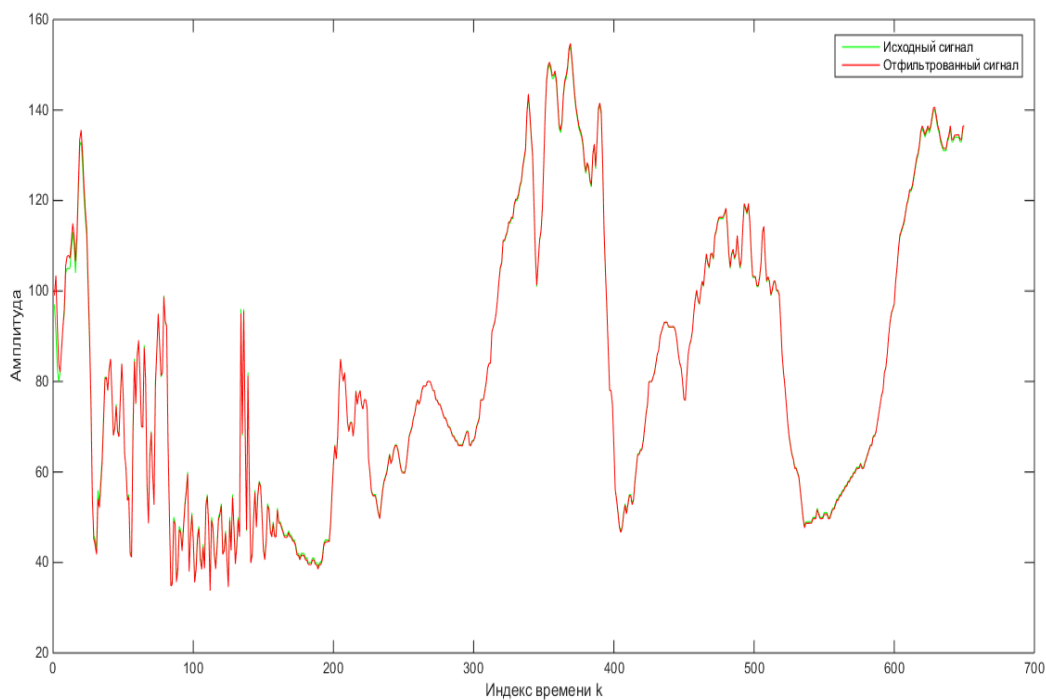


Рисунок 3.14. Фильтрация по Калману

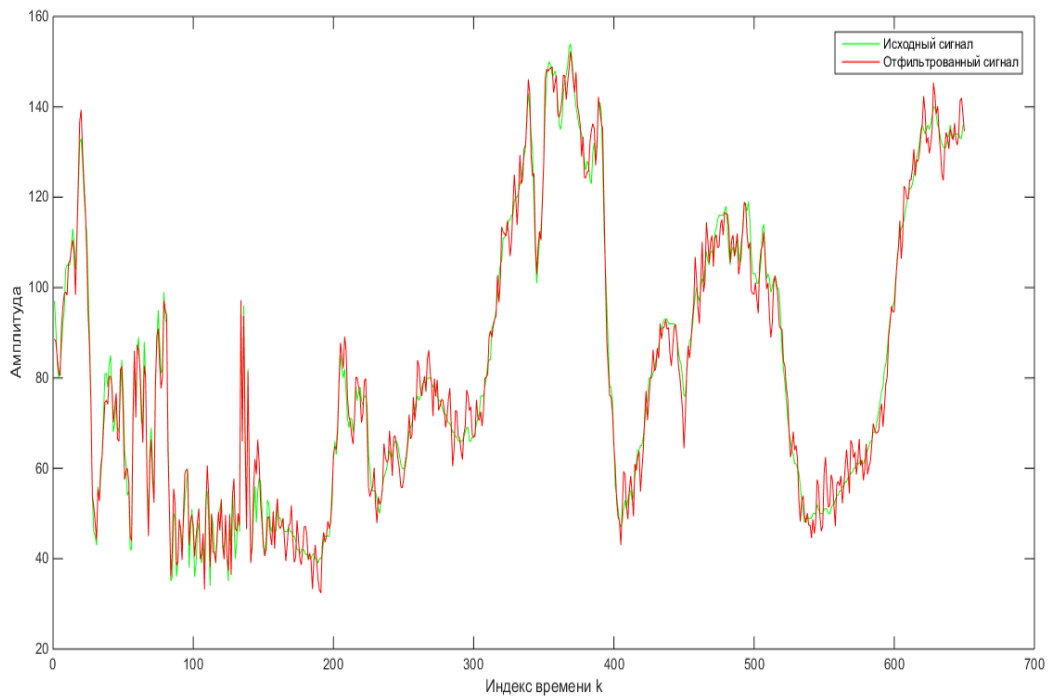


Рисунок 3.15. Фильтрация алгоритмом Винера

Фильтрация с соотношением шум/сигнал равном 0.3

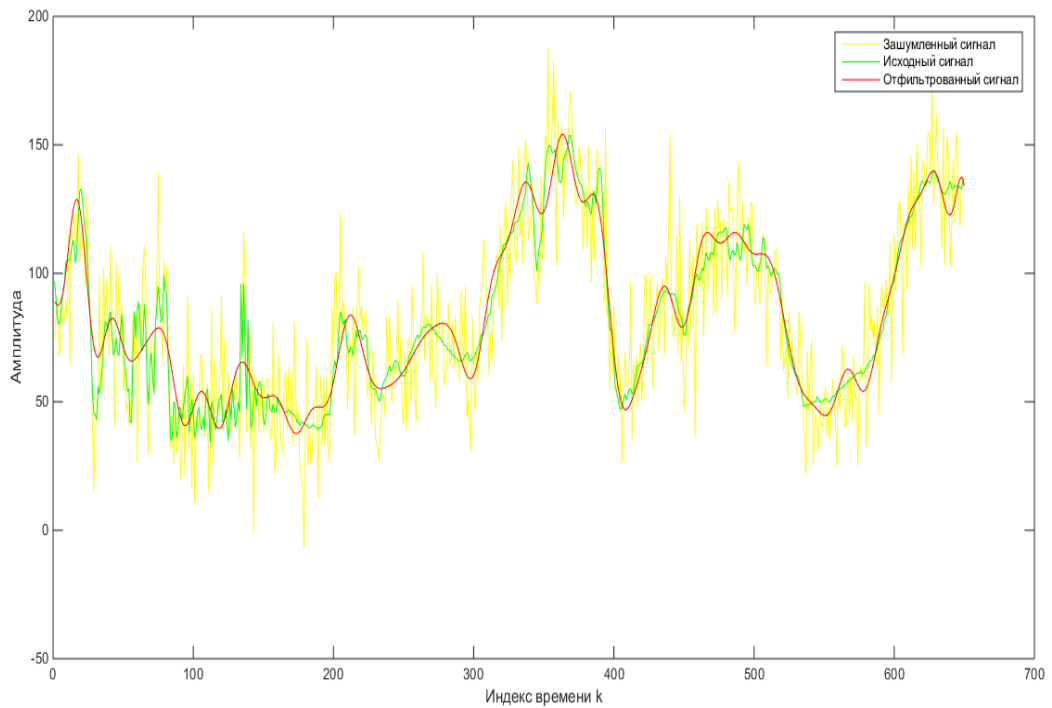


Рисунок 3.16. Фильтрация методом адаптивной субполосной фильтрации

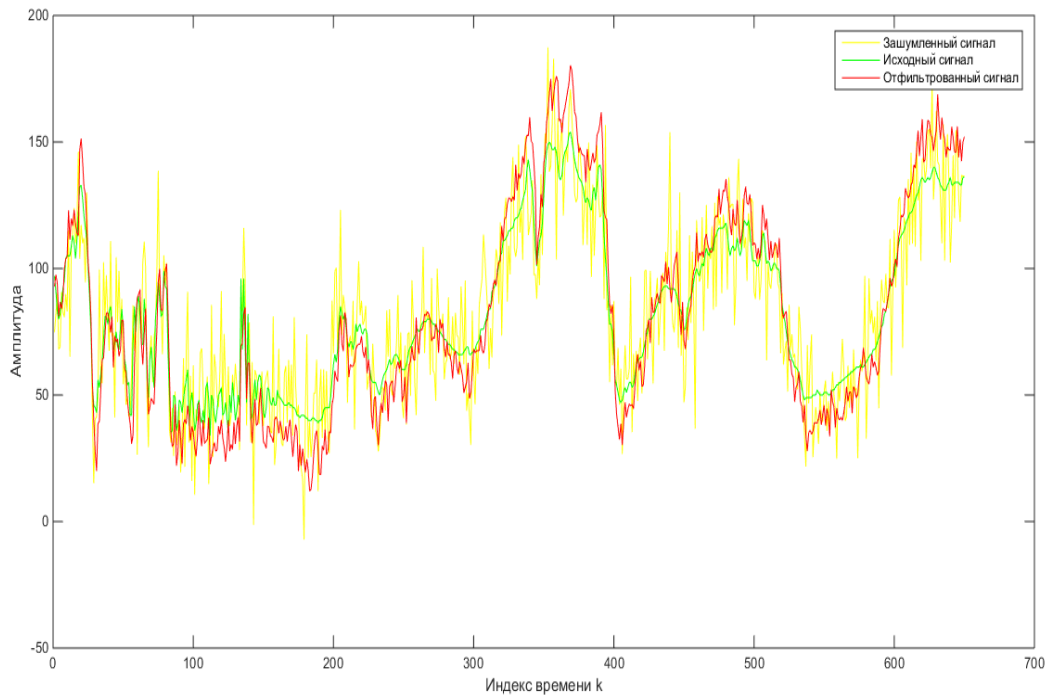


Рисунок 3.17. Фильтрация по Калману

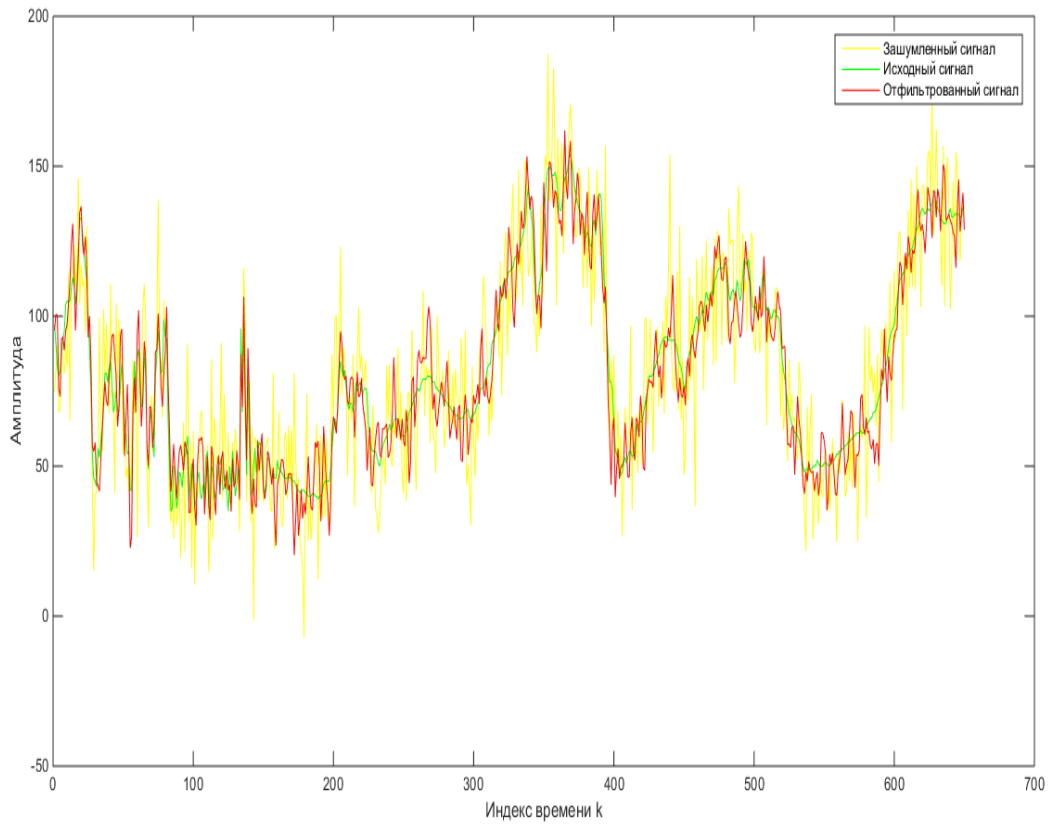


Рисунок 3.18. Фильтрация алгоритмом Винера

Фильтрация с соотношением шум/сигнал равном 0.5

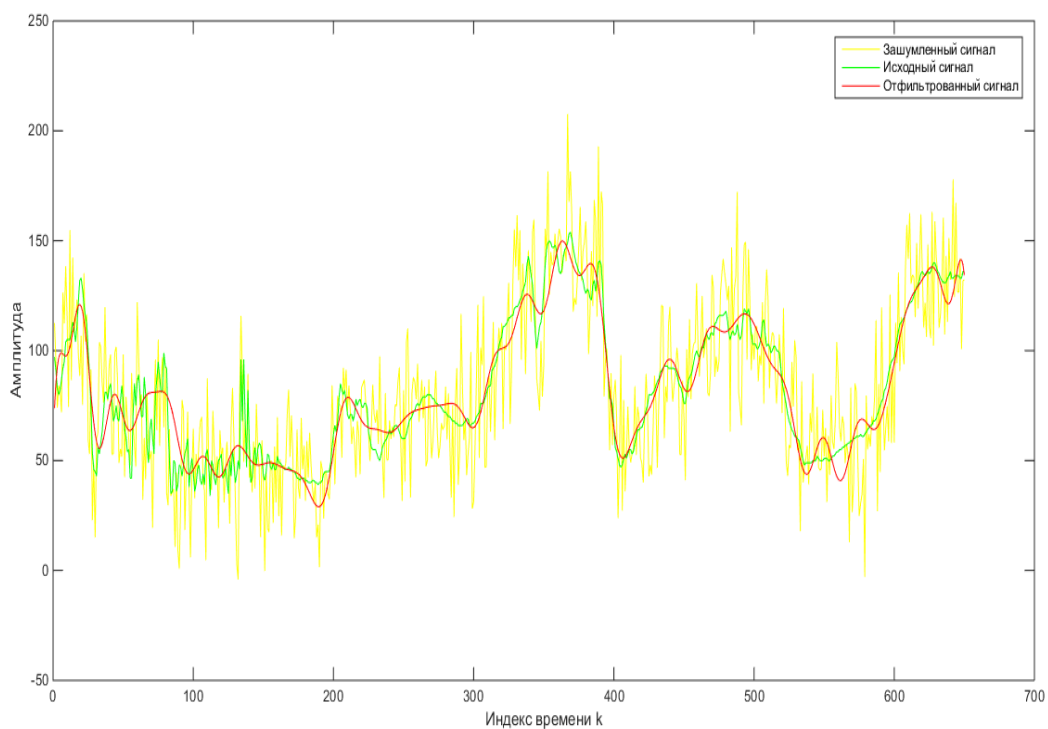


Рисунок 3.19. Фильтрация методом адаптивной субполосной фильтрации

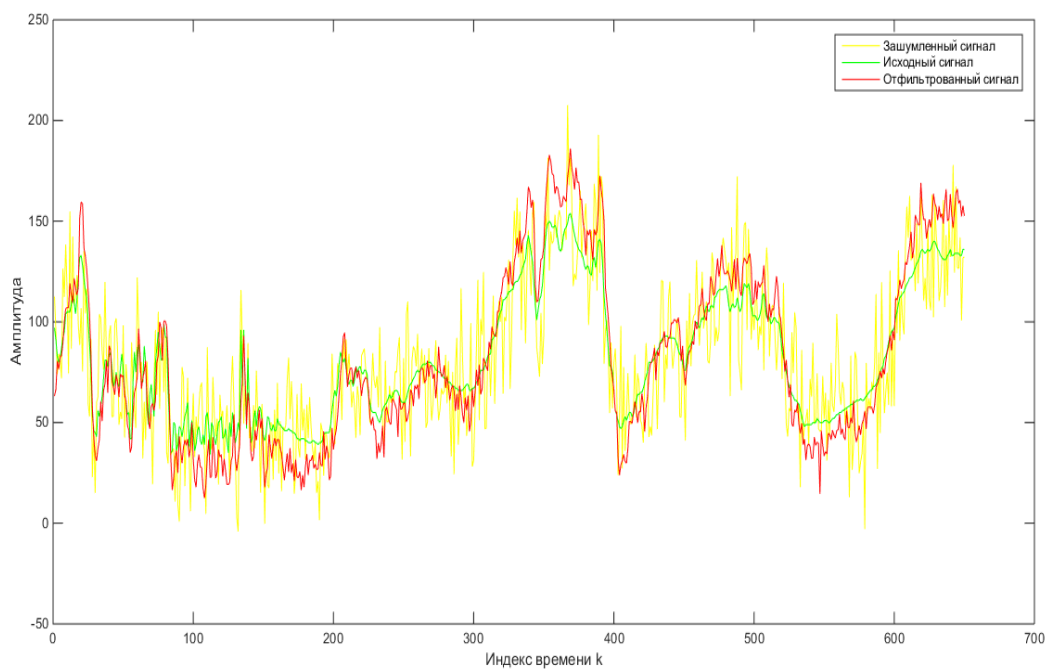


Рисунок 3.20. Фильтрация по Калману

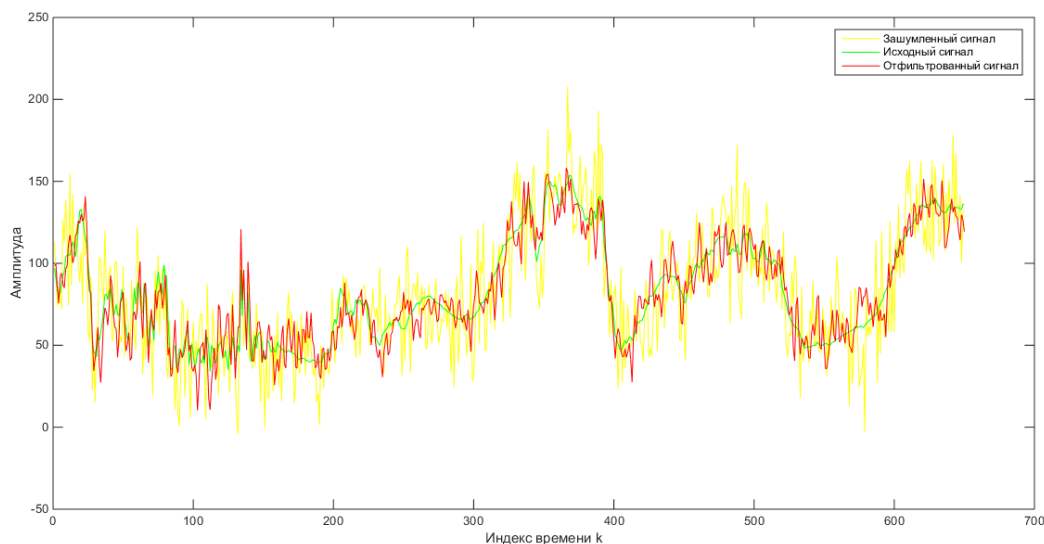


Рисунок 3.21. Фильтрация алгоритмом Винера

Для оценки качества фильтрации по формуле 3.5 было рассчитано среднеквадратичное отклонение выходного сигнала для разных соотношений шум/сигнал. Результаты представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Зависимость относительного среднеквадратического отклонения от отношения шум/сигнал при обработке эмпирических данных

Шум/сигнал	0	0,3	0,5
Адаптивная субполосная фильтрация	0,0766	0,0839	0,0892
Фильтр Винера	0,0439	0,1007	0,1257
Фильтр Калмана	0,0102	0,1507	0,1802

Для наглядности, вычтем из исходного сигнала полученный отфильтрованный сигнал для соотношения шум/сигнал 0, 0,3, 0,5.

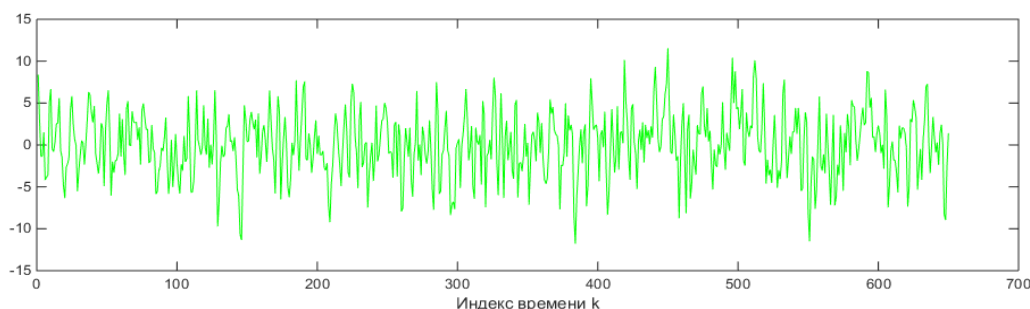


Рисунок 3.22. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равно 0 для метода Винера

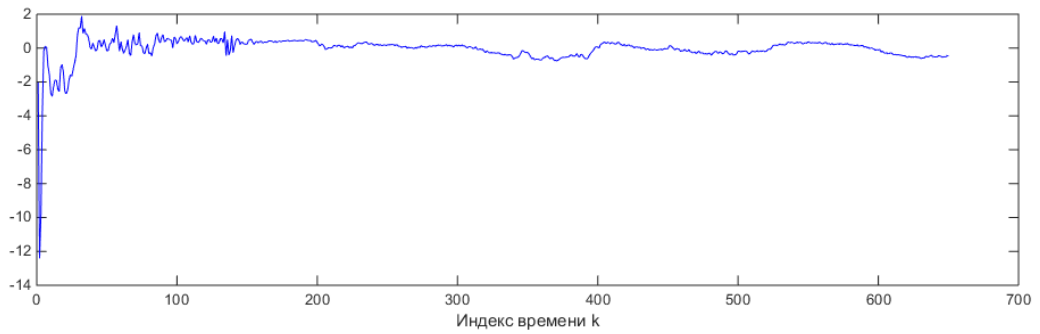


Рисунок 3.23. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0 для метода Калмана

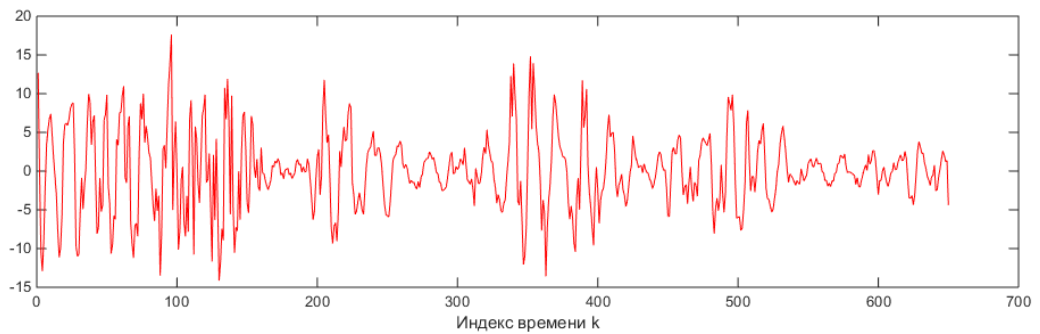


Рисунок 3.24. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0 для метода субполосной фильтрации

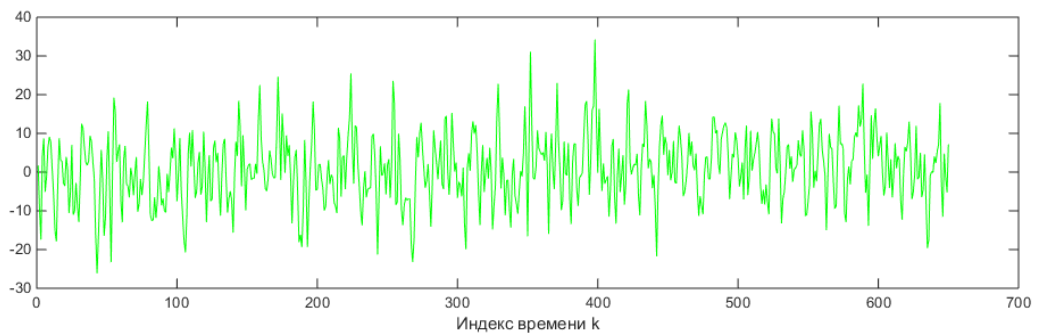


Рисунок 3.25. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0,3 для метода Винера

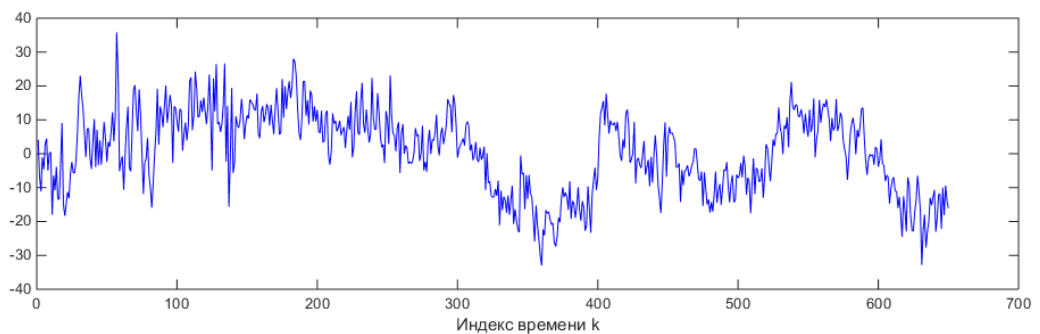


Рисунок 3.26. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0,3 для метода Калмана

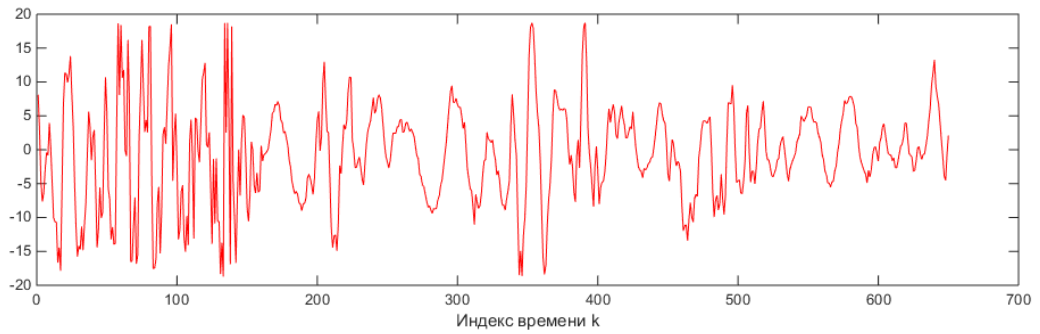


Рисунок 3.27. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0,3 для метода субполосной фильтрации

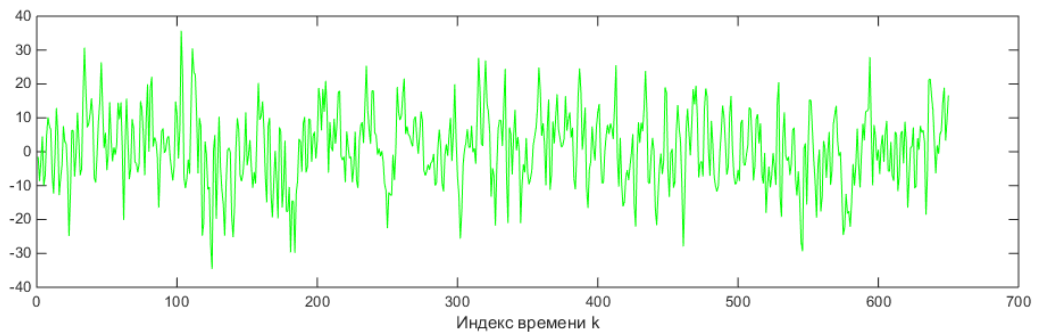


Рисунок 3.28. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0,5 для метода Винера

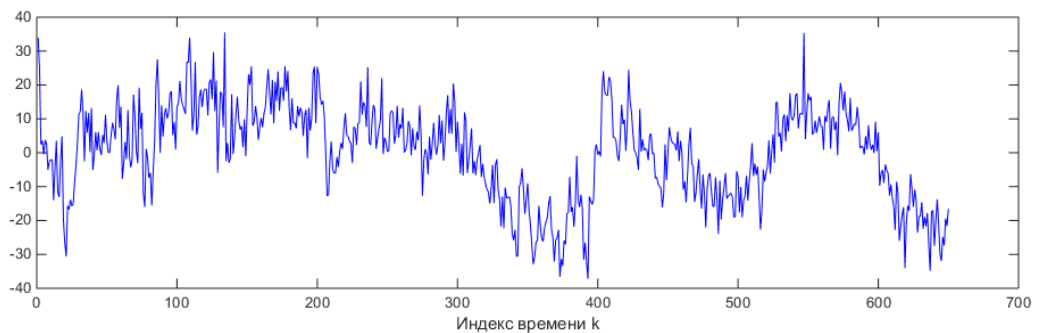


Рисунок 3.29. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0,5 для метода Калмана

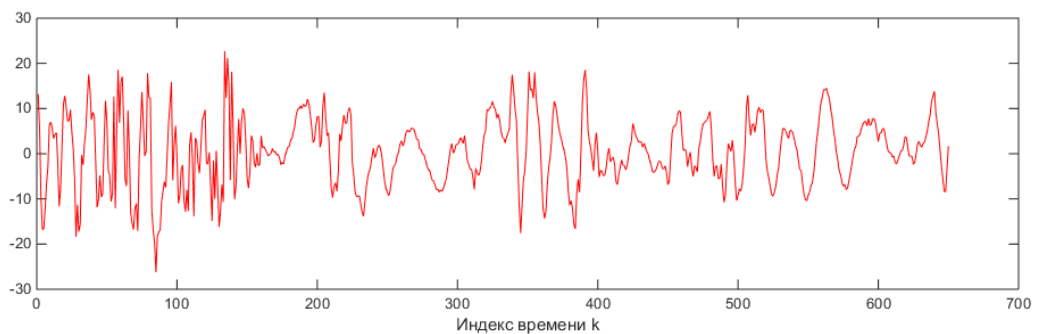


Рисунок 3.30. Разность исходного сигнала и отфильтрованного при соотношении шум/сигнал равном 0,5 для метода субполосной фильтрации

Проведя анализ результатов полученных в ходе фильтрации вектора изображения, можно сделать вывод, что фильтрация методами Калмана и Винера не приводит к гладкости. При соотношении шум/сигнал равном нулю методы Винера и Калмана практически не изменяют исходный сигнал, но при увеличении соотношения шум/сигнал, выходной сигнал отклоняется от исходного (см. таблица 3.4). Разность исходного и выходного сигнала также показывает, что фильтрация и методами Винера и Калмана (рис. 3.22-3.30) не устойчива к увеличению шумов. Фильтрация субполосным методом, делает сигнал гладким, выходной сигнал с увеличением шума изменяется не сильно по сравнению с фильтрацией по алгоритмам Винера и Калмана (см. таблица 3.4), рост амплитуды разности исходного и полученного сигнала с увеличением шума меньше чем у алгоритмов Винера и Калмана (рис. 3.22-3.30) это позволяет заключить что субполосная фильтрация устойчива к увеличению шума.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие теории и практики цифровой обработки сигналов привело к появлению в этой области знаний, ряда самостоятельных научно-технических направлений, одним из которых является адаптивная обработка. При поиске оптимальных алгоритмов обработки сигнала неизбежно приходится опираться на некоторые статистические модели сигналов и шумов. Чаще всего при формировании этих моделей используются концепции линейности, стационарности и нормальности. Однако перечисленные принципы далеко не всегда выполняются на практике, а от адекватности выбранной модели в значительной мере зависит качество приема сигнала. Возможным решением проблемы является использование адаптивных фильтров, которые позволяют системе подстраиваться под параметры входного сигнала.

В зависимости от используемого алгоритма, адаптивные фильтры демонстрируют различную функциональную эффективность. В данной дипломной работе проведён сопоставительный анализ эффективности нескольких алгоритмов адаптивной фильтрации, а именно: исследованы алгоритмы фильтрации на основе методов Винера и Калмана. В работе так же был исследован алгоритм фильтра на основе метода адаптивной субполосной фильтрации.

Подводя итог проделанной работе, можно сказать, что ее цель, заключающаяся в исследовании и сравнительном анализе методов адаптивной фильтрации достигнута. Все поставленные задачи решены полностью.

В первом разделе работы представлены сведения о фильтрах. Описаны цифровые фильтры, к числу которых относятся фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры), фильтры с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры). Так же были изложены их математические основы, указаны преимущества и недостатки. Центральное место в этом разделе отведено изложению теории и алгоритмов адаптивной

фильтрации. Рассмотрены виды адаптивных фильтров и их применение. Изучены алгоритмы адаптивных фильтров.

Во втором разделе дипломной работы рассматривается оператор субполосного сглаживания, на основе которого построена адаптивная субполосная фильтрация.

В третьем разделе проводились вычислительные эксперименты для сравнительного анализа методов адаптивной фильтрации. Первоначально исследовалось качество фильтрации алгоритмов Винера и Калмана в зависимости от длины импульсной характеристики и соотношения шум/сигнал. В фильтрации методом выявлена зависимость: при увеличении соотношения шум/сигнал минимальное значение относительного среднеквадратического отклонения наблюдается при меньшей длине импульсной характеристики фильтра. В фильтрации методом Калмана относительное среднеквадратичное отклонение уменьшается при увеличении длины импульсной характеристики, чем меньше соотношение шум/сигнал тем меньше значение относительного среднеквадратичного отклонения.

Второй этап вычислительных экспериментов посвящен исследованию и сравнительному анализу фильтрации по алгоритмам Винера, Калмана и адаптивной субполосной фильтрации при обработке модельного сигнала и эмпирических данных.

Для модельного сигнала при отсутствии шума выходной сигнал метода адаптивной субполосной фильтрации, имеет меньшее относительное среднеквадратическое отклонение, чем выходной сигнал фильтров, основанных на методах Винера и Калмана. С увеличением уровня шума в фильтруемом сигнале, наблюдается увеличение относительного среднеквадратического отклонения от исходного сигнала при всех рассмотренных видах фильтрации. Относительное среднеквадратическое отклонение выходного сигнала адаптивного субполосного фильтра от

исходного сигнала имеет меньшую скорость роста, чем у методов Винера и Калмана.

При обработке эмпирических данных фильтрация методами Калмана и Винера не приводит к гладкости. При соотношении шум/сигнал равном нулю методы Винера и Калмана практически не изменяют исходный сигнал, но при увеличении соотношения шум/сигнал, выходной сигнал отклоняется от исходного. Субполосный метод, делает сигнал гладким и устойчив к увеличению шума. Во всех рассмотренных случаях метод субполосной фильтрации оказался более эффективным.

Учитывая выше изложенное, и то обстоятельство, что метод субполосной фильтрации не использует образцовый сигнал, можно сказать, что он является более эффективным по сравнению с алгоритмами Винера и Калмана, и заслуживает широкого применения в информационно-телекоммуникационных системах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сергиенко, А.Б. Цифровая обработка сигналов: Учеб. пособие / А.Б. Сергиенко. – СПб.: Питер, 2003 – 604 с.: ил
2. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского.— М.: Радио и связь, 2000.— 800 с.
3. Рабинер Л. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Л. Рабинер, Б. Гоулд. – М. : Мир, 1978. – 847 с.
4. Уидроу, Б. Адаптивная обработка сигналов. / Уидроу Б. Стирнз С.Д.; Пер. с англ. под ред. Шахгильдяна В.В. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.
5. Лайонс, Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. / Под ред. А.А.Бритова. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006 г. – 656 с.: ил
6. Коуэн, К. Ф. Н. Адаптивные фильтры: Пер. с англ. / Под ред. К. Ф. Н. Коуэна и П.М. Гранта. – М.: Мир, 1988. – 392 с.
7. Джиган В.И. История, теория и практика адаптивной обработки сигналов // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем - 2012». Сб. трудов / под общ. ред. академика РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2012. С. 30-37.
8. Тараканов А.Н., Адаптивная цифровая обработка сигналов/ Тараканов А.Н., Хрящев В.В., Приоров А.Л. Ярославль: ЯГУ, 2001.
9. Журавлев А.К. Обработка сигналов в адаптивных антенных решетках/ Журавлев А.К., Лукошкин А.П., Поддубный С.С. Изд-во Ленинградского университета, 1983.
10. Монзинго Р.А., Адаптивные антенные решётки. Введение в теорию./ Монзинго Р.А., Миллер Т.У Радио и связь, 1986.
11. Голд, Б. Цифровая обработка сигналов [Текст] / Б. Голд, Ч. Рейдер. – М.: Сов. Радио, 1973. – 368 с.
12. Рабинер Л. Цифровая обработка речевых сигналов / – М. : Мир, 1990. – 730 с.

13. Гольденберг Л. М. и др. Цифровая обработка сигналов. Учебное пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 1990. — 256 с.
14. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Изд. 2-е, испр. — М.: Техносфера, 2007. — 856 с
15. Хемминг Р. В. Цифровые фильтры. — М.: Недра, 1987. — 221 с
16. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. — М.: Мир, 1988. — 488 с.
17. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и её применения, М., Наука, 1965, 464 стр.
18. Смит С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. Додэка XXI, 2008. — 720 с.
19. Глинченко А. С. Цифровая обработка сигналов. В 2 ч. — Красноярск: Изд-во КГТУ, 2001. — 383 с
20. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1989. — 448 с.
21. Вайнштейн Л. А., Выделение сигналов на фоне случайных помех, М., Советское радио, 1960, 447 с.
22. Раймонд Мэк. Импульсные источники питания. — М.: Издательский дом «Додэка XXI», 2008. — С. 272
23. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. Под ред Э. Оппенгейма: пер с. Англ./ под ред. А.МюРязанцева – М.:Мир, 1978
24. Воскобойников Ю. Е. Локальные адаптивные алгоритмы фильтрации цифровых изображений / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Научный вестник НГТУ. – 1997. – № 3. – С. 21–32
25. Воскобойников Ю. Е. Нелинейные алгоритмы фильтрации векторных сигналов / Ю. Е. Воскобойников, В. Г. Белявцев // Автометрия. – 1999. – № 5. – С. 97–106.
26. Винер . Я-математик, М., Наука, 1964, с.265;

27. Колесников, А.П. Введение в численный анализ.— М.: Из-во РУДН, 2002.
28. Р. Богнер, А. Константинидис. Введение в цифровую фильтрацию. — Москва: Мир, 1976.
29. Афонский А. А. Измерительные приборы и массовые электронные измерения / Под ред. проф. В. П. Дьяконова. - М.: СОЛОН-Пресс, 2007 - 544 с.
30. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х тт. — М.: «Мир», 1983
31. Таранчук В. Б. Основные функции систем компьютерной алгебры. — Минск: БГУ, 2013. — 59 с.
32. Китаев В. Е. Электропитание устройств связи./ Китаев В. Е., Бокуняев А. А., Колканов М. Ф. — М.: «Связь», 1975. — С. 328.
33. Джиган, В. Адаптивные фильтры. Современные средства моделирования и реализации / В. Джиган // Электроника: НТБ. – 2012. – №7. – С, 106 – 125.
34. Афонский А. А. Цифровые анализаторы спектра, сигналов и логики / Под ред. проф. В. П. Дьяконова. — М.: СОЛОН-Пресс, 2009. — 248 с.
35. Zhilyakov, Yevgeniy G. Adaptive Subband Filtration Of Time Series/ Zhilyakov Yevgeniy G., Belov Sergei P.//International Journal of Applied Engineer Research – 2015 – Т. XI. - 21. - С. 42778 - 42782
36. *Кендалл М., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976
37. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976
38. *Драйпер Н, Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. Т.2. М.: Финансы и статистика, 1986
39. *Отнес Р., Энноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.

40. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды. Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005
41. Тьюки Дж. Анализ результатов наблюдений. М.: Мир, 1981
42. Грешилов А. А., Стакун В. А., Стакун А. А. Математические методы построения прогнозов. М.: Радио и связь, 1997.-
43. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967
44. Хургин Я.И. , Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М.Наука, 1971
45. Жилияков, Е. Г. Вариационный метод дифференцирования и интерполяции дискретных сигналов / Е. Г. Жилияков, С.М. Чудинов, Т.Н. Созонова // Вопросы радиоэлектроники, сер. РЛТ, 2006. – Вып.1. – С. 146-154.
46. Жилияков Е.Г. Оптимальное формирование дискретных канальных сигналов / Е.Г. Жилияков, С.П. Белов, Н.Ю. Мисливец // Вопросы радиоэлектроники. Сер. РЛТ, 2007.
47. Сергиенко, А. Б. Алгоритмы адаптивной фильтрации: особенности реализации в MATLAB / А. Б. Сергиенко // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – №1. – С. 18 – 28.
48. Джиган В.И. Прикладная библиотека адаптивных алгоритмов. Электроника: Наука, Технологии, Бизнес. 2006. № 1. С. 60–65.
49. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. — М.: МИР, 1990. — С. 584.
50. Жилияков, Е.Г. Вариационный метод оценивания производных и интерполяции сигналов по эмпирическим данным / Е.Г. Жилияков, И.Ю. Мисливец, Т.Н. Созонова. // Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии, 2006. – №2. – С. 7-73.
51. Бронников А. В. Нелинейные комбинированные алгоритмы фильтрации зашумленных сигналов и изображения/ А. В. Бронников, Ю.
52. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6/ Обработка сигналов и проектирование фильтров. — М.: СОЛОН-Пресс, 2005. — 676 с.

53. Дьяконов В. П. MATLAB и SIMULINK для радиоинженеров. — М.: «ДМК-Пресс», 2011. — 976 с.
54. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7.0 + Simulink 5/6/ Обработка сигналов и проектирование фильтров. — М.: СОЛОН-Пресс, 2005. — 676 с
55. Обзор средств MATLAB и ToolBox [Электронный ресурс] // MATLAB.Exponenta URL: <http://matlab.exponenta.ru/spline/book1/7.php> (дата обращения 10.05.2016)
56. Лазарев Ю. Ф. Matlab 5.x. — Киев: BHV, 2000. — 384 с.
57. Солонина, А.И. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB: Учеб. пособие / А.И. Солонина, С.М. Арбузов – СПб.: БХВ-Петербург, 2008 – 816 с.: ил.
58. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. — СПб: «Питер», 1999,2001. — 1296 с. — ISBN 5-89251-065-4.
59. Оленев Н.Н., Печенкин Р.В., Программирование в MATLAB и Simulink с приложениями. — М.: ВЦ РАН, 2015. — 123 с.
60. Курбатова Е. А. MATLAB 7. Самоучитель. — М.: «Диалектика», 2005. — 256 с