International Journal of Engineering and Management Sciences (IJEMS) Vol. 3. (2018). No. 5
DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

Környezetismeret és geometria – készségfejlesztő foglalkozás középiskolások számára
Geometry around us - development of the skills for students in the secondary education

A. VARGA

Debreceni Egyetem, Műszaki Kar, Műszaki Alaptárgyi Tanszék, vargaa@eng.unideb.hu

Abstract. In the framework of the project EFOP-3.6.1-16-2016-00022 00022 „Debrecen Venture Catapult Program"t workshops are held in secondary schools in order to show for the students that the precise knowledge about the mathematical backgrounds is an important part of the engineers works. We give lot of examples in our environment for appearing of quadratic surfaces; for instance in architecture, in mechanical engineering life (gear–wheels, twist drills,…etc.).The development of geometrical spatial ability happen by the help of using 3D-animations, moreover we investigate the changing of the shape of surfaces by mathematical shoftwares. We are going to built hyperboloid of one sheet and hyperbolic paraboloid.

Absztrakt. Az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 00022 „Debrecen Venture Catapult Program" keretében szakkör jellegű rendezvényeket tartunk főként a középiskolás korosztálynak. Cél, hogy a diákok számára vonzóvá váljon a mérnöki pálya, másrészt játékos formában érzékeljék a precíz matematikai háttértudás fontosságát e területen. Számos példát mutatunk a hétköznapi életből másodrendű felületek megjelenésére. Manuális tevékenységgel és matematikai szoftvereket használva 3D animációk segítségével e matematikai témakör megismerésével fejleszthetjük a térérzékelést is. A foglalkozásokon például egyköpenyű hiperboloidot és hiperbolikus paraboloidot modellezünk.

Bevezetés

A sikeres pályaválasztáshoz kulcsfontosságú, hogy a középiskolások megfelelő tájékozottsággal rendelkezzenek arról, hogy milyen tudományterületeken kell mélyíteni tudásukat ahhoz, hogy diplomájuk megszerzése után az illető tevékenységkör hasznos művelőivé váljanak.

Tudománynépszerűsítő előadás és játékos foglalkozás kerül kidolgozásra EFOP-3.6.1-16-2016-00022 00022 „Debrecen Venture Catapult Program" projekt keretében a debreceni (főként) középiskolás korosztály számára többek között abból a célból, hogy felkeltse érdeklődésüket a műszaki pálya iránt és tudatosítsa a természettudományos ismeretek fontosságát e területen.

A foglalkozás a térgeometria témakörön belül a nevezetes felületek geometriája ismeretanyagának elsajátítását célozza meg manuális tevékenységekkel. Az alap- és középfokú oktatásban alapvető

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

fontosságú, hogy a matematikai fogalmak megalapozása tapasztalatszerzés útján történjen. A másodrendű felületek témaköre jól kapcsolható mindennapi élményeinkhez, hiszen ezekkel a felületekkel, mint például szerszámfelületekkel, épületek tetőszerkezetével környezetünkben minden nap találkozunk.

1. A foglalkozás menetrendje

Elsőként egy rövid előadást tartunk: részletesen foglalkozunk gömbökkel, forgás ellipszoidokkal, egyköpenyű forgás hiperboloidokkal és hiperbolikus paraboloidokkal. Megismerésük igényét környezetünkben fellelhető példákkal motiváljuk *(lásd 1. ábra).* Tehát az **első állomás**: gyakorlati példák másodrendű felületekre. A műszaki pályára készülő tanulók számára nagyon fontos a másodrendű forgásfelületek ismerete, hiszen rengeteg ilyen felülettel találkoznak: fogaskerekek, kúpszerű tetőszerkezetek, erőművek hűtőtornyai, stb.

Forgáshiperboloid
(Millenáris Park, Budapest)

egyköpenyű hiperboloid
(erőmű hűtőtornya, Lingen)

hiperbolikus paraboloid (Autóbusz-állomás, Debrecen)

gömb

egyköpenyű hiperboloid
(fogaskerék váltóban)

ellipszoid

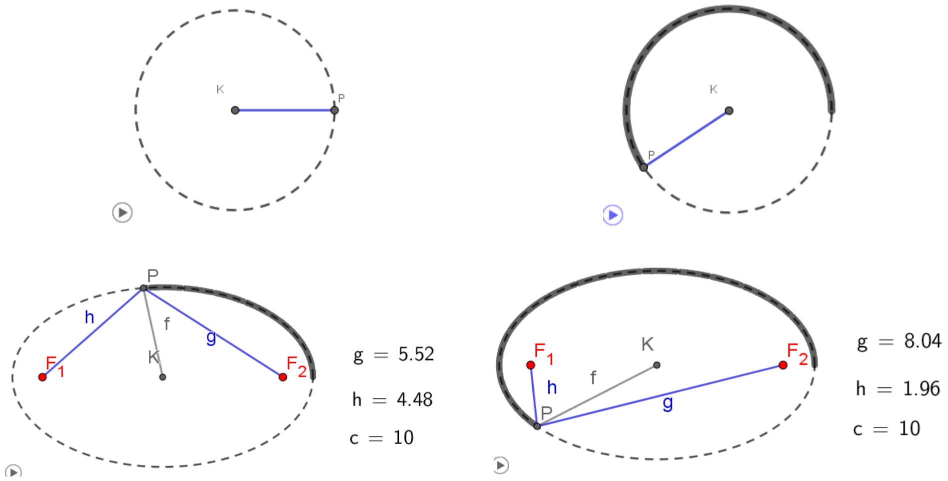
1. ábra: Másodrendű felületek környezetünkben.

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

Ezen felületek tanulmányozásához szükség van a kör, ellipszis, hiperbola és parabola - algebrailag másodrendű görbék - ismeretére, így a **második állomás** az imént említett kúpszeletek mértanihelyes definíciójának megadása és megértése. Tanuláselméletek szerint a tapasztalati tanulásnak három szintje van: a) a cselekvő tanulás egy tevékenységből indul ki, az ennek során megszerzett tudás e tevékenység mellékterméke; b) a szemléletes tanulás szemléltetőeszközök használatán alapul; c) a fogalmi szintű tapasztalati tanulás a szemléltetések helyett a verbális ismeretszerzésen alapul; ez utóbbi forma magasabb oktatási szinten valósítható meg eredményesebben [1]. Cselekvő tanulás céljából rajzoltathatunk kört és ellipszist (*lásd 2. ábra*).

2. ábra: Ellipszis és kör manuálisan

Ezután a GeoGebra program segítségével (lásd 3. ábra) animációként megmutatjuk azt, amit a tanulók megrajzoltak, és rögzíthetjük a kör és ellipszis definícióját: A körvonal a sík azon pontjainak halmaza, amelyek a sík egy adott pontjától egy adott távolságra vannak. Az adott pont a kör középpontja. Az ellipszis azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyeknek két adott ponttól (a két fókuszponttól F_1 -től és F_2-től) , mért távolságuk összege állandó, és ez az állandó nagyobb, mint a két fókuszpont távolsága.

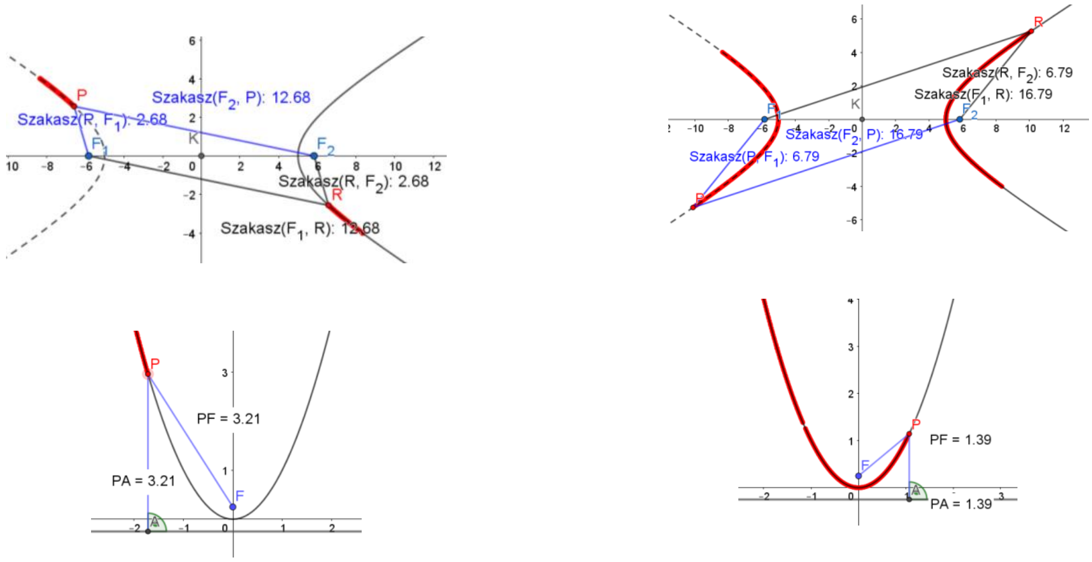


3. ábra: Animációk a kör és ellipszis fogalmához

A hiperbola és parabola definícióját már csak a GeoGebra programot használva (lásd 4. ábra) animáció segítségével vezetjük be: A hiperbola azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyeknek két adott ponttól (a két fókuszponttól F_1 -től és F_2-től), mért távolságuk különbségének abszolútértéke állandó, és ez az állandó kisebb, mint a két fókuszpont távolsága. A parabola azon pontok halmaza a síkon, amelyeknek a sík egy adott v egyenesétől (vezéregyenes) és egy v-re nem illeszkedő F pontjától (fókuszpont) vett távolsága egyenlő. A **harmadik állomás** a térbeli transzformációk közül a tengely körüli forgatás áttekintése. Térbeli forgatásnál szükség van egy t egyenesre, mely körül forgatunk,

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

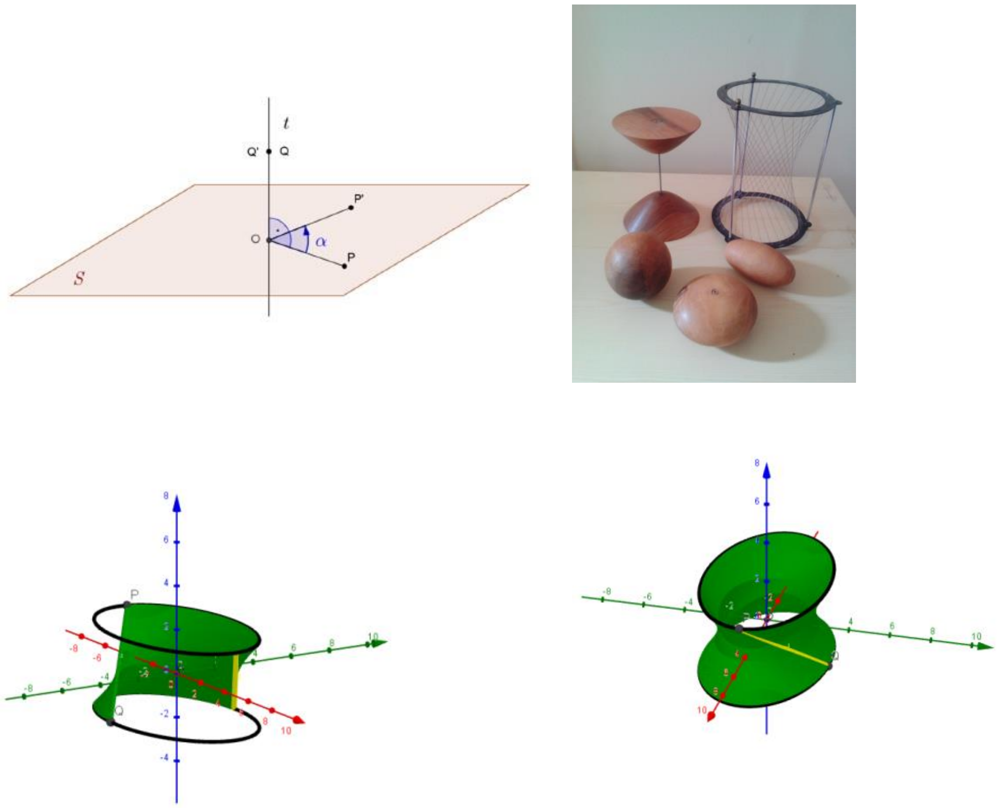
valamint egy α szögre, hogy milyen mértékkel. Az α egy irányított szög, ami azt jelenti, hogy pozitív szög esetén az óramutató járásával ellentétesen, míg negatív szög esetén az óramutató járásával megegyezően forgatunk. Egyenes körüli elforgatás esetén az egyenes pontjai fixpontok, azaz a forgatás során a képpont megegyezik az eredeti ponttal. Ha a *P* pontot a t egyenes nem tartalmazza, akkor a képe az a *P'* pont lesz, melyre teljesül, hogy *P* és *P'* pontnak a *t* egyenestől vett távolsága megegyezik, valamint *PtP'* szög nagysága és iránya a megadott α szög. Ezzel a térbeli transzformációval a tanulók a kerettanterv szerint 9. osztályban ismerkednek meg [5].



4. ábra: Animációk a hiperbola és parabola fogalmához

Térbeli forgatás segítségével szemléltethetjük az ellipszoidot, egy- illetve kétköpenyű hiperboloidot és a paraboloidot. Legegyszerűbb síkbeli modelleket egy dróthoz rögzítve megforgatni; az ellipszist a kis- és nagytengelye körül is, a hiperbolát a valós- és képzetes tengelye körül is. Megismerkedünk a térbeli modellekkel. A GeoGebra programmal animáció segítségével szemléltetjük, hogy forgástengellyel kitérő egyenes forgatásával egyköpenyű hiperboloidot kapunk (lásd 5. ábra).

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.



5. ábra: Térbeli modellek és animáció

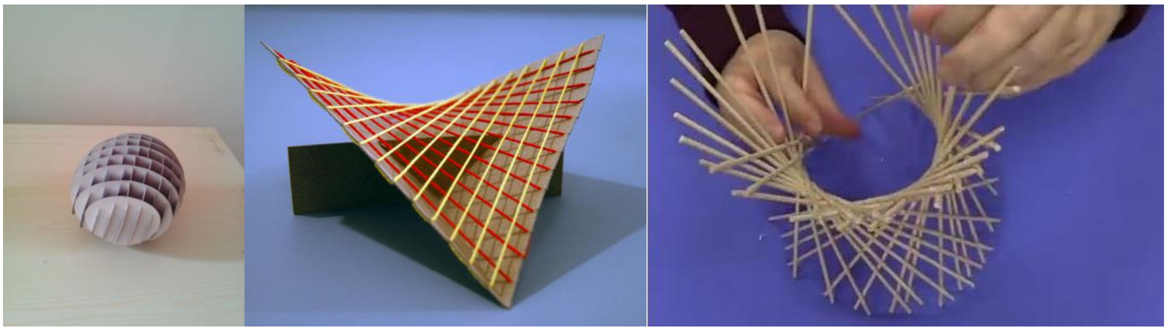
Hiperbolikus paraboloidhoz/nyeregfelülethez úgy jutunk, hogy két merőleges síkú és ellentétes tengelyirányú parabolát választunk, és az egyiket úgy mozgatjuk, hogy síkjának állása és tengelyének iránya változatlan maradjon, tengelypontja pedig a másik parabola végigfut.

„Ha két kitérő egyenes és egy ezeket metsző sík van adva, s ha az adott egyeneseken át olyan egyeneseket fektetünk, amelyek az adott síkkal párhuzamos állásúak, akkor ezek az átfektetett egyenesek hiperbolikus paraboloidot alkotnak. Ilyen módon minden hiperbolikus paraboloidhoz eljuthatunk.'' (lásd [6])

A foglalkozás **negyedik állomása**ként elkészítjük az alábbi modelleket (korosztálytól és időkerettől függően választunk, lásd 6. ábra):

a) a kör ill. ellipszis körmetszet- modelljét készítjük el papírból,
b) gumiszállal kilapítható és térbe visszaugró nyeregfelületet fűzünk,
c) hurkapálca és gumigyűrűk segítségével egyköpenyű hiperboloidot alkotunk.

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.



6. ábra: Modellek készítése

Eddig a pontig a foglalkozás általános iskolások számára is megtartható.

A téri képességek fejlesztésének számos korszerű eszköze ismert. Napjainkban igen fontos szerephez jut a háromdimenziós modellezés, melynek révén a tanulni vágyók háromdimenziós alakzatokat mozgathatnak, fejlesztve ezáltal téri képességeiket (lásd [2], [3], [4]).

Az **ötödik állomás** a másodrendű felületekkel kapcsolatos algebrai és geometriai ismeretek rövid áttekintése, a **hatodik** pedig online szoftver használata, mely segítségével a tárgyalt felületek alakváltozásának módja tanulmányozható az algebrai paraméterek változtatásának függvényében. Ez utóbbi két állomást 12. évfolyamon, matematika iránt érdeklődő tanulók számára ajánljuk.

1.1. Másodrendű felületek elmélete középiskolásoknak

1.1.1. Algebrai háttér

Először a másodrendű görbékkel ismerkedünk. Egy másodrendű görbe a síkban az

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + K = 0$$

egyenlettel adható meg. ahol A, B, D, G, H, K rögzített valós konstansok, és az x, y a változók. Itt feltételezzük, hogy az A, B, D, G, H, K együtthatók egyszerre nem tűnnek el. Bármely másodrendű görbe egyenlete a koordináta-rendszer egybevágósági transzformációkkal az alábbi kanonikus alakok valamelyikére hozható (lásd [6]):

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathbf{0}$ **–** egy pont	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\mathbf{0}$ **–**metsző egyenespár	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-\mathbf{1}$ **–** üres halmaz
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathbf{1}$ **- ellipszis**	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **- hiperbola**	$y^2=2px$ **- parabola**
$\frac{x^2}{a^2}=\mathbf{0}$ **–** egy egyenes	$\frac{x^2}{a^2}=-1$ –üres halmaz	$\frac{x^2}{a^2}=1$ –párhuzamos egyenespár

1. táblázat: Másodrendű görbék

Az ellipszis és hiperbola egyenletét tekintve azok megadhatók mátrixos formában is $\bar{k}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\bar{k}^T=0$ módon, ahol $\bar{k}=(x\ y\ 1)$ és

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

$$\boldsymbol{S}_{ellipszis} = \begin{pmatrix} 1/_{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1/_{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ és } \boldsymbol{S}_{hiperbola} = \begin{pmatrix} 1/_{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/_{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Egy másodrendű felület a háromdimenziós térben (az xyz térbeli koordináta rendszerben) a következő alakban adható meg:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0 \qquad (1)$$

ahol $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K$ rögzített valós konstansok, és az x, y, z a változók. Itt feltételezzük, hogy az A, B, C, D, E, F együtthatók egyszerre nem tűnnek el.

Mátrixos formában az (1) egyenlet $\bar{v} \cdot \boldsymbol{M} \cdot \bar{v}^T = 0$ alakban írható, ahol $\bar{v} = (x\ y\ z\ 1)$ és

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} A & D/_2 & E/_2 & G/_2 \\ D/_2 & B & F/_2 & H/_2 \\ E/_2 & F/_2 & C & J/_2 \\ G/_2 & H/_2 & J/_2 & K \end{pmatrix} \qquad (2)$$

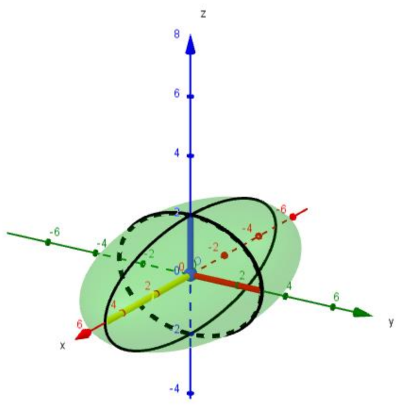
A másodrendű felületek lehetnek:

ellipszoidok, gömbök, egyköpenyű hiperboloidok, kétköpenyű hiperboloidok, kúpok, elliptikus paraboloidok, hiperbolikus paraboloidok, hengerfelületek.

Az általános, háromtengelyű ellipszoid (lásd 7. ábra) egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Ekkor a (2) mátrix alakja

$$\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{ellipszoid}} = \begin{pmatrix} 1/_{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/_{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/_{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Feltéve, hogy $a \geq c \geq b$, a $c = b$ esetben orsószferiodról, $c = a$ esetén lencseszferoidról beszélünk.



7. ábra: Ellipszoid

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

Az általános egyköpenyű hiperboloid egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, a kétköpenyűé pedig $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. A forgási hiperboloidokat akkor kapjuk, ha $a=b$. Hasonló módon, mint az ellipszoidnál ezek is beazonosíthatóak mátrixaikkal (lásd 8. ábra).

Érdeklődő 12. évfolyamosoknak megmutathatjuk, hogy az exponenciális függvények segítségével definiált $ch(v)=\frac{e^v+e^{-v}}{2}$ és $sh(v)=\frac{e^v-e^{-v}}{2}$ hiperbolikusz függvényeket és a $cos^2u+sin^2u=1$ illetve $ch^2v-sh^2v=1$ azonosságokat felhasználva az

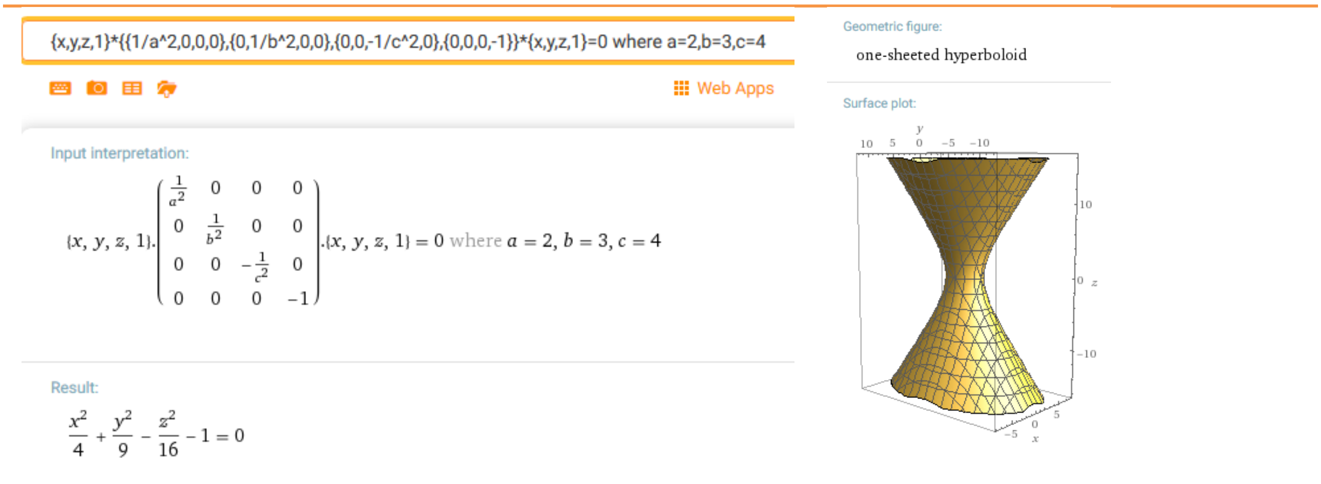
$$\{(a\cdot ch(v)\cdot cos(u)\,,a\cdot ch(v)\cdot sin(u)\,,c\cdot sh(v))\in\mathbb{R}^3|\,(u,v)\in[0,2\pi[\times\mathbb{R}\}$$

módon definiált ponthalmaz éppen az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ egyenletű forgási hiperboloid.

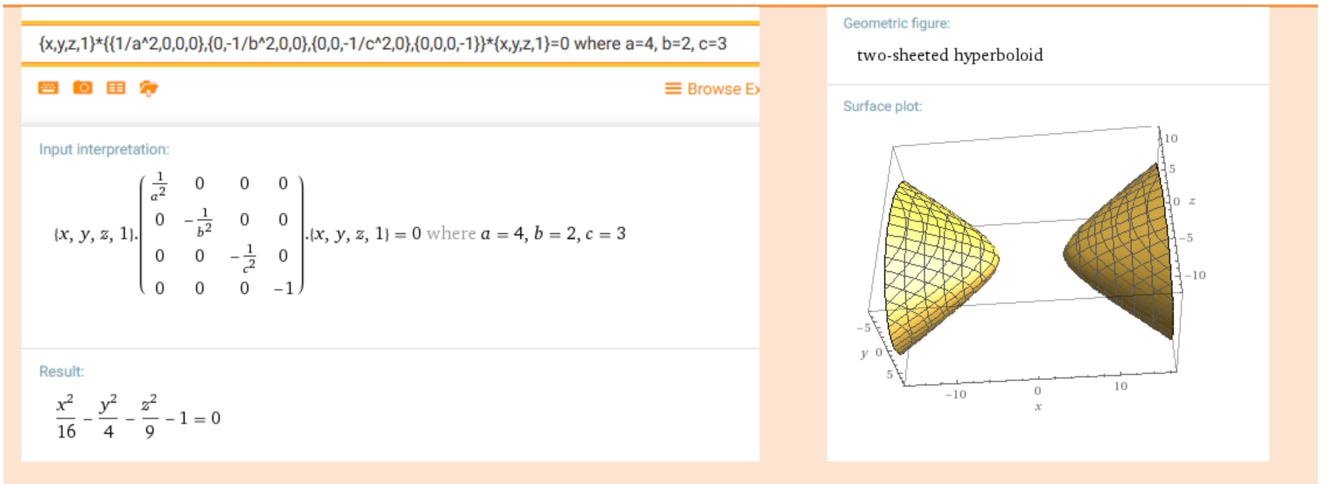
1.1.2.Másodrendű felületek és szoftverek

A Wolfram a kereskedelmi célú Mathematica szoftver fejlesztője. A WolframAlpha ennek a fejlesztésnek a tudását használó tudományos kereső szoftver. Nagy háttértudással rendelkezik, elméleti és számítási kérdéseket is megválaszol, igaz csak angol nyelven. Hátránya, hogy az eredményeket nem tárolja. Online jellege miatt vonzó a fiatalok számára, hiszen majdnem minden középiskolás rendelkezik okostelefonnal. A WolframAlpha elérhetősége: http://www.wolframalpha.com/

A szoftver segítségével tanulmányozhatjuk másodrendű felületeinket (lásd 8. ábra).

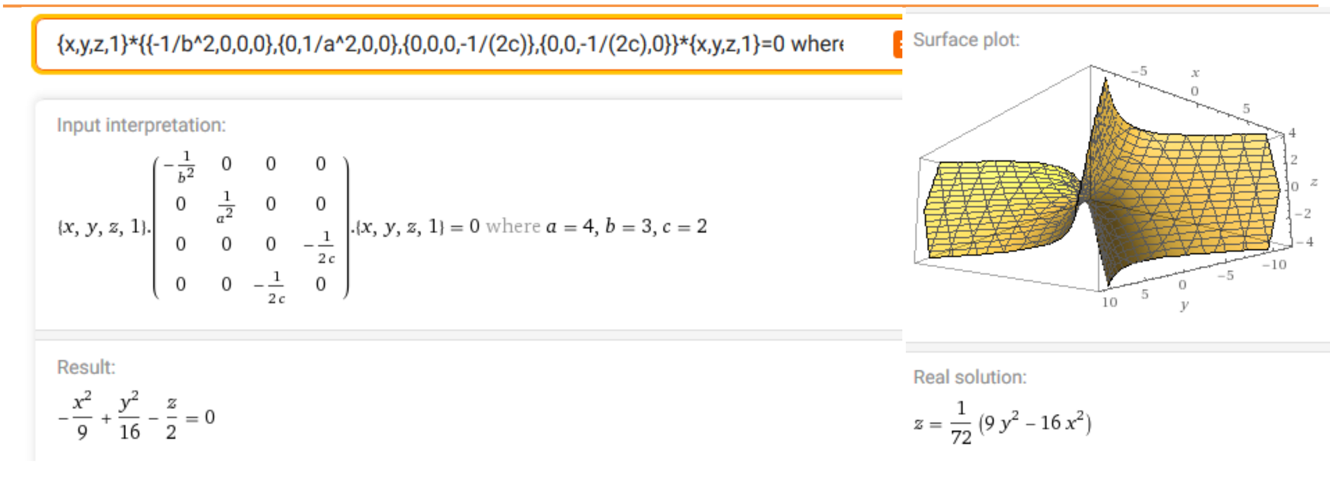


DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.



8. ábra: Egyköpenyű- és kétköpenyű hiperboloid

Ezek után a $-\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z}{c}=0$ nyeregfelület mátrixának meghatározását már a tanulókra bízhatjuk.



9. ábra: Hiperbolikus paraboloid

A kétváltozós valós értékű függvények bizonyos regularitási feltételek mellett felületeket határoznak meg. A 9. ábrán szereplő hiperbolikus paraboloidot megadó kétváltozós valós függvényt a WolframAlpha a „3D plot f(x,y)=2*(-x^2/50+y^2/9) ” paranccsal rajzolja ki.

Összegzés

A mérnöki pályára jelentkező középiskolásokban tudatosítani kell, hogy a szakmai tárgyak értelmező tanulásához elengedhetetlen a matematikai háttér ismerete és a térlátás. David Hilbert szavaival élve „A geometriának nagy vonásokban való bemutatása a szemléletes gondolkodásmód kapcsán arra is alkalmas, hogy a közönség szűkebb körében a matematika helyesebb méltatásához hozzásegítsen.” Bízzunk benne, hogy leendő mérnökpalántáink köre kiválóan alkalmas erre.

DOI: 10.21791/IJEMS.2018.5.13.

Köszönetnyilvánítás

A publikáció elkészítését az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 számú projekt támogatta. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Hivatkozások

[1] I. Virág: *Tanuláselméletek és tanítási-tanulási stratégiák.* https://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tamop412A/2011-0021_04_tanulaselmeletek_es_tanitasi-tanulasi_strategiak/24_a_tanuls_tpusai.html

[2] P. Tóth: *A téri műveleti képességek fejlettségének vizsgálata.* Vzdelávanie, výskum a metodológia, ISBN 978-80-971251-1-0

[3] L. Budai (2016) *Téri képességek mérése és fejlesztése GeoGebrával a középiskolában.* Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Egyetemi doktori (PhD) értekezés.

[4] J. Katona (2012) *A geometriai térszemlélet számítógéppel támogatott fejlesztése a műszaki felsőoktatásban*. Debreceni Egyetem, Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, Egyetemi doktori (PhD) értekezés.

[5] http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html

[6] Gy. György (1962) *Bevezetés a geometriába.* Tankönyvkiadó, Budapest 1962