



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Curvas de Hodógrafo Pitagórico

Memoria realizada por Ana Martínez Barragán

Dirigido por:
VºBº

Dra. M. Carmen Márquez García

Abstract

In this work we are going to study the property of the Pythagorean hodographs in curves with different degrees of freedom. First, we are going to see fundamental aspects of curves with this property. Then we are going to study in detail the cubic curves and finally we are going to see, in less detail, this property in higher order curves.

Resumen

En este trabajo estudiaremos la propiedad de hodógrafo pitagórico en curvas con distintos grados de libertad. Primero, veremos los aspectos fundamentales de las curvas con esta propiedad. Luego, estudiaremos con detalle las curvas cúbicas y finalmente, con menos detalle, veremos la propiedad del hodógrafo en curvas de grado superior.

Índice general

Introducción	9
1. Preliminares	11
1.1. Conceptos previos	11
2. Hodógrafo Pitagórico	23
2.1. Introducción	23
2.2. Tripletas de polinomios pitagóricos	26
2.3. Aspectos fundamentales	27
2.4. Curvas cúbicas	30
2.5. Curvas de orden superior	49
2.6. Longitud de arco	54
2.7. Curvas Offset	57
2.8. Observaciones finales	59
Bibliografía	63

Introducción

Las curvas de Bézier, concepto fundamental para esta memoria, fueron desarrolladas por primera vez por Paul De Casteljaou en 1959, usando el algoritmo que lleva su nombre. Sin embargo, fue Pierre Bézier quien las dió a conocer 3 años más tarde, en 1962, de quien tomaron el nombre. Estas curvas fueron un instrumento fundamental del sistema que se desarrolló para el trazado de dibujos técnicos, en el diseño aeronáutico y en el de automóviles.

Las biografías de estos matemáticos siguieron líneas paralelas y muy próximas. Pierre-Étienne Bézier nació en París en 1910. Su padre era ingeniero y su madre fue una persona muy interesada en la criptografía y el análisis combinatorio. Se graduó en ingeniería mecánica en la Escuela Nacional Superior de Artes y Oficios y un año después en ingeniería eléctrica en la Escuela Superior de Electricidad y se doctora en Matemáticas por la Universidad de París en 1977. Entró en la casa Renault en 1933 donde hasta el 1975 ocupó el puesto de director de métodos matemáticos. También trabajó de profesor de ingeniería de producción desde 1968 hasta 1979 en la Escuela Nacional de Artes y Oficios. Con la aparición de los primeros ordenadores hizo uso de la informática para el diseño de carrocería. Así en 1968 presentó un prototipo del sistema Unisurf que fue uno de los pioneros en sistemas de diseño geométrico asistido por ordenador. Esta modelización matemática se apoya en las curvas que llevan su nombre y que protagonizan su tesis de Doctorado en Matemáticas. Finalmente, falleció en 1999 siendo enterrado en Gallardon, Francia. Paul De Casteljaou nació en Besançon, Francia. Estudió Física y Matemáticas y trabajó para la casa Citroën, donde en 1959 desarrolló un algoritmo conocido actualmente como algoritmo de De Casteljaou con el que se puede evaluar cálculos en una cierta familia de curvas polinómicas. El algoritmo de De Casteljaou es todavía ampliamente usado, aunque con algunas modificaciones, ya que es el método más robusto y numéricamente estable para evaluar polinomios. Finalmente, murió en 1999.

Este trabajo está dividido en dos capítulos. El primero comienza introduciendo algunos conceptos previos que consideramos necesarios para la comprensión del mismo y de los que haremos uso a lo largo de la memoria. Expondremos la definición de curvas de Bézier y sus propiedades, centrándonos en las curvas racionales. También daremos la definición de la resultante y veremos la elevación del grado de curvas polinómicas y racionales de Bézier.

En el segundo capítulo presentaremos y desarrollaremos el artículo escrito por R. T. Faouki y T. Sakkalis sobre las curvas con hodógrafo pitagórico en términos de curvas de Bézier, [8]. Se estudiarán los aspectos fundamentales de curvas con esta propiedad y se verán propiedades en diversas aplicaciones.

A lo largo de esta memoria aparecerán numerosas imágenes elaboradas con los programas Geogebra y Maple6.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se introducirán conceptos que servirán de base para la comprensión de esta memoria. Enunciaremos las propiedades mas relevantes de los polinomios de Bernstein y curvas de Bézier, así como también definiremos las curvas de Bézier racionales, [5] y [4].

1.1. Conceptos previos

Comenzaremos definiendo los conceptos de polinomios de Bernstein y curvas de Bézier.

Definición 1.1.1 (Polinomios de Bernstein) Fijado $n \in \mathbb{N}$, existen $n+1$ *polinomios de Bernstein* de grado n :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

definidos generalmente para $t \in [0, 1]$.

Una de las propiedades destacables de los polinomios de Bernstein es:

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1. \tag{1.1.1}$$

Además estos polinomios forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado n con coeficientes reales.

Definición 1.1.2 (Curva de Bézier) Llamamos *curva de Bézier* simple o de un tramo a la curva en forma paramétrica donde cada coordenada es expresada como combinación lineal de la base de Bernstein:

$$r(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1], \quad (1.1.2)$$

con $P_i = (x_i, y_i)$ si es una curva en \mathbb{R}^2 ó $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ si es una curva en \mathbb{R}^3 . Los coeficientes P_i se denominan *puntos de control* de la curva de Bézier y la poligonal que forman estos puntos se conoce como *polígono de control* de la curva de Bézier.

Estas curvas cumplen algunas propiedades a tener en cuenta, como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control, es invariante bajo transformaciones afines, puede reparametrizarse mediante una transformación afín del intervalo, es simétrica, es decir, si invertimos el polígono de control la gráfica de la curva es la misma sólo que recorrida en sentido inverso, interpola los puntos de control extremos siendo $r(0) = P_0$, $r(1) = P_n$ y es tangente al polígono de control en sus extremos, de modo que $r'(0) = n(P_1 - P_0)$, $r'(1) = n(P_n - P_{n-1})$. Otras propiedades son la relación que mantienen estas formas básicas con sus integrales definidas y sus derivadas:

$$\int_0^t B_k^{n-1}(\xi) d\xi = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n B_j^n(t), \quad (1.1.3)$$

para $k = 0, \dots, n-1$.

$$r'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} n \Delta P_k B_k^{n-1}(t), \quad (1.1.4)$$

donde $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$ para $k = 0, \dots, n-1$.

Ejemplo 1.1.3 Curva de Bézier de 3º y 5º grado:

$$\begin{aligned} r(t) &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, & t \in [0, 1]. \\ r(t) &= (1-t)^5 P_0 + 5t(1-t)^4 P_1 + 10t^2(1-t)^3 P_2 + 10t^3(1-t)^2 P_3 \\ &\quad + 5t^4(1-t) P_4 + t^5 P_5, & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Definición 1.1.4 (Reparametrización de una curva de Bézier) Aunque las curvas de Bézier $r(t)$ están definidas para $t \in [0, 1]$, es posible reparametrizarlas para que su intervalo de definición sea cualquier $[a, b]$ mediante un cambio de variable afín $t = \frac{s-a}{b-a}$:

$$\bar{r}(s) = \sum_{k=0}^n P_k B_k^n \left(\frac{s-a}{b-a} \right), \quad s \in [a, b].$$

Definición 1.1.5 (Curva compuesta) Sean $r_1(u)$ con $u \in [u_0, u_1]$ y $r_2(u)$ con $u \in [u_1, u_2]$ dos curvas de Bézier simples. Se define la curva de Bézier compuesta $r(u)$ parametrizada por $u \in [u_0, u_2]$ como

$$r(u) = \begin{cases} r_1(u), & u \in [u_0, u_1] \\ r_2(u), & u \in [u_1, u_2] \end{cases}$$

Se verifica que:

- $r(u)$ es de clase C^0 en $[u_0, u_2]$ si se verifica $r_1(u_1) = r_2(u_1)$.
- $r(u)$ es de clase C^1 en $[u_0, u_2]$ si además se tiene $r_1'(u_1) = r_2'(u_1)$.
- $r(u)$ es de clase C^2 en $[u_0, u_2]$ si además se cumple $r_1''(u_1) = r_2''(u_1)$.

Hay ocasiones en que las curvas de Bézier de grado n no poseen la suficiente flexibilidad para modelar la forma deseada. Una forma de proceder en esta situación es aumentar la flexibilidad del polígono añadiéndole otro punto de control. Como primer paso, se podría querer agregar otro punto de control pero sin modificar la forma de la curva; esto equivale a elevar el grado de la curva de Bézier en una unidad. Si $r(t) = \sum_{j=0}^n P_j B_j^n(t)$ es una curva de Bézier de grado n y la queremos expresar como una curva de Bézier de grado $n+1$, $r(t) = \sum_{j=0}^{n+1} Q_j B_j^{n+1}(t)$, entonces la relación que existe entre los puntos de control P_j y los Q_j es:

$$Q_j = \left(1 - \frac{j}{n+1} \right) P_j + \frac{j}{n+1} P_{j-1}, \quad (1.1.5)$$

donde $j = 0, \dots, n+1$.

Veamos como hemos llegado a esa relación. Partimos de la ecuación:

$$\sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n+1} Q_j \binom{n+1}{j} t^j (1-t)^{n+1-j}.$$

Multiplicando la parte izquierda de la ecuación por $t + (1 - t)$ tenemos:

$$\sum_{j=0}^n P_j \binom{n}{j} (t^j (1-t)^{n+1-j} + t^{j+1} (1-t)^{n-j}) = \sum_{j=0}^{n+1} Q_j \binom{n+1}{j} t^j (1-t)^{n+1-j}.$$

Comparando los coeficientes de ambas ecuaciones obtenemos,

$$Q_j \binom{n+1}{j} = P_j \binom{n}{j} + P_{j-1} \binom{n}{j-1},$$

lo que nos lleva a la ecuación (1.1.5).

En el trabajo daremos algunos ejemplos de curvas paralelas a otras, por lo que pasaremos a definir las.

Definición 1.1.6 (Curva paralela o curva offset) Sea una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \alpha(t)$. Llamamos *curva paralela* de α a una distancia d , a la curva β definida como sigue:

$$\begin{aligned} \beta : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \beta(t) = \alpha(t) + d\mathbf{n}_\alpha(t), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{n}_\alpha(t)$ es el vector normal unitario de α en el punto $\alpha(t)$.

También utilizaremos el siguiente lema que nos ayudará a encontrar una solución de un sistema de ecuaciones polinomiales:

Definición 1.1.7 Sean $f = a_m x^m + \dots + a_0$, $g = b_n x^n + \dots + b_0$ con $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$ dos polinomios en $\mathbb{R}[x]$. La resultante de f y g está definida como:

$$Res_x(f, g) = \det \begin{bmatrix} a_m & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_m & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \cdots & a_0 \\ b_n & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & b_{m-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \quad (1.1.6)$$

Lema 1.1.8 Sean $f = a_mx^m + \dots + a_0$, $g = b_nx^n + \dots + b_0$ dos polinomios de grados exactamente m , $n \geq 1$, es decir, $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$ en $\mathbb{R}[x]$. La resultante de f y g , $Res_x(f, g)$, da una condición necesaria y suficiente sobre los coeficientes de f y g que determina cuando los dos polinomios comparten un factor irreducible o una raíz. En cuyo caso, esa raíz será solución del sistema de ecuaciones polinomiales formado por $\{f = 0, g = 0\}$, [3].

Teniendo en cuenta que las curvas de Bézier racionales van a aparecer al final de esta memoria, pasamos a describirlas y daremos algunas propiedades. Además veremos como para $n = 2$ ayudan a la parametrización de arcos de circunferencia, al contrario de las curvas de Bézier simples, que sólo representan arcos de parábolas.

Definición 1.1.9 (Curva de Bézier racional) Se define una *curva de Bézier racional* de grado n como

$$h(t) = \frac{\omega_0 P_0 B_0^n(t) + \dots + \omega_n P_n B_n^n(t)}{\omega_0 B_0^n(t) + \dots + \omega_n B_n^n(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

donde los $\omega_i \in \mathbb{R}$ son los *pesos* y los $P_i \in \mathbb{R}^2$ ó \mathbb{R}^3 son los puntos de control, que forman el polígono de control.

Para una mejor interpretación de esta definición veamos que las curvas de Bézier racionales en el plano afín son una proyección de una curva de Bézier simple en el espacio proyectivo.

Consideremos una curva polinómica, $\mathbf{h}(t) = (h_0(t), h_1(t), h_2(t))$, $t \in [0, 1]$, en \mathbb{R}^3 y que no pase por el origen. Sabemos que la podemos ver como representante de una curva en el plano proyectivo, que se proyecta sobre el plano afín con una parametrización $h(t) = (h_1(t)/h_0(t), h_2(t)/h_0(t))$. Así pues, a partir de una curva paramétrica polinómica en el espacio, hemos obtenido una parametrización racional de la misma en el plano. Obviamente, los polos de la parametrización, es decir, los valores de t para los cuales el denominador $h_0(t)$ se anula, aunque son puntos legítimos del plano proyectivo, corresponden a puntos del infinito, fuera del plano afín.

Haciendo uso de los polinomios de Bernstein, en \mathbb{R}^3 podemos representar una curva de grado n por medio de un polígono de control $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_i^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

y luego proyectar sobre el plano afín. Sin embargo, esta manera de proceder no nos proporciona intuición sobre la curva plana, ya que los puntos de control del polígono están en el espacio.

Por ello, descompondremos, en su lugar, las coordenadas de los vértices en dos partes, $\mathbf{P}_i = (\omega_i, \omega_i P_i)$, donde ω_i es la primera componente del vértice i -ésimo y $\omega_i P_i$ son las restantes. A primera vista, esta forma de proceder rompe la simetría de la expresión, pero es práctica, ya que $P_i \in \mathbb{R}^2$ es precisamente la proyección de \mathbf{P}_i sobre el plano afín.

Por tanto, estamos describiendo las curvas racionales por medio de un polígono de control $\{P_0, \dots, P_n\}$, al modo de las curvas polinómicas, y unos parámetros adicionales, $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, que denominaremos pesos. La parametrización de la curva vendrá dada por

$$\mathbf{h}(t) = \left(\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t), \sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_i^n(t) \right) \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0, 1],$$

$$h(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, 1] \quad (1.1.7)$$

lo que muestra claramente que los pesos son los parámetros que controlan el denominador de la parametrización racional.

Si todos los pesos son iguales, $\omega = \omega_i$, $i = 0, \dots, n$, el denominador desaparece pues

$$\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t) = \omega \sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \omega$$

y recuperamos una curva polinómica

$$h(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t),$$

de polígono de control $\{P_0, \dots, P_n\}$.

En la práctica, todos los pesos ω_i se toman positivos. Su interpretación es bastante sencilla. Basta observar que, si en la expresión (1.1.7) hacemos crecer uno de los pesos, ω_k , dejando fijos el resto,

$$\lim_{\omega_k \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega_k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(t)} = P_k,$$

lo que muestra que la curva tiende a acercarse al vértice P_k correspondiente. Este efecto se puede emplear para incrementar la tensión de la curva. Sin embargo, este hecho no sirve para acercar indiscriminadamente la curva a todos los vértices del polígono, ya que es obvio que, si multiplicamos todos los pesos por un mismo número λ , la cancelación entre numerador y denominador en (1.1.7) deja la curva invariable. Es decir, para un mismo polígono de control $\{P_0, \dots, P_n\}$, los juegos de pesos $\{\omega_0, \dots, \omega_n\}$, $\{\lambda\omega_0, \dots, \lambda\omega_n\}$ corresponden a una misma parametrización y, por tanto, a una misma curva racional. Este último hecho se puede utilizar para normalizar los pesos, por ejemplo, de modo que el primer peso valga la unidad. Basta escoger $\lambda = 1/\omega_0$.

En todo lo anterior, estamos dando por sentado que cualquier punto del plano proyectivo tiene su equivalente en el afín, lo cual, como sabemos, no es cierto, ya que podría corresponder a un punto del infinito. ¿Qué sucede si uno de los vértices \mathbf{P}_i es un punto del infinito?

Está claro que en este caso no tiene sentido hablar del peso ω_i , ya que la primera componente del vértice va a ser nula, $\mathbf{P}_i = (0, P_i)$. En cualquier caso, sabemos que su imagen en el afín es un vector, no un punto, por lo que lo denominaremos vector de control. Haciendo esta distinción entre puntos y vectores de control, la expresión de una curva racional queda así:

$$h(t) = \frac{\sum_{\text{puntos}}^n \omega_i P_i B_i^n(t) + \sum_{\text{vectores}}^n P_i B_i^n(t)}{\sum_{\text{puntos}}^n \omega_i B_i^n(t)}, \quad (1.1.8)$$

que, para que tenga sentido, deberá tener al menos un vértice que sea punto de control. De lo contrario el denominador se anularía y tendríamos una curva vectorial, en el infinito del afín.

Propiedades de las curvas racionales

Muchas de las propiedades de las curvas de Bézier se trasladan a las curvas racionales de manera inmediata, incluso de manera manifiestamente mejorada.

Para comenzar, seguimos empleando combinaciones baricéntricas de los vértices del polígono de control, ya que, sumando los coeficientes de cada P_i obtenemos la unidad:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(t)} = 1.$$

Esto implica que las propiedades que se derivaban de este hecho para las curvas de Bézier, tales como que la curva está contenida en la envolvente convexa del polígono de control o que sea invariante bajo transformaciones afines, se siguen manteniendo.

Otras propiedades, como que la curva interpole los vértices extremos P_0, P_n o ser simétrica, se cumplen también. Por ejemplo, lo comprobamos para el origen de la curva,

$$h(0) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i B_i^n(0)}{\sum_{i=0}^n \omega_i B_i^n(0)} = \frac{\omega_0 P_0}{\omega_0} = P_0,$$

y del mismo modo $h(1) = P_n$.

Para una curva racional cuadrática normalizada, con $\omega_0 = 1 = \omega_2, \omega_1 = \omega > 0$

$$r(t) = \frac{P_0(1-t)^2 + 2\omega P_1 t(1-t) + P_2 t^2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}$$

se tiene que:

$$r'(0) = 2\omega(P_1 - P_0),$$

$$r'(1) = 2\omega(P_2 - P_1)$$

con lo cual la tangente de la curva para $t = 0$ tiene la dirección del segmento que une P_0 con P_1 y la tangente para $t = 1$, la dirección del segmento que une P_1 con P_2 .

Arcos de circunferencia

Frente a las parametrizaciones polinómicas, que para $n = 2$ sólo permiten representar arcos de parábola, las parametrizaciones racionales describen arcos de circunferencia. Fijémonos en la parametrización normalizada, $\omega_0 = 1 = \omega_2, \omega_1 = \omega$, con $\omega > 0$, de una curva de Bézier racional de grado dos:

$$r(t) = \frac{(1-t)^2 P_0 + 2\omega t(1-t) P_1 + t^2 P_2}{(1-t)^2 + 2\omega t(1-t) + t^2}. \quad (1.1.9)$$

Por simplificar cálculos, tomemos el arco circular de radio 1 centrado en el origen $c(s) = (\cos(s), \sin(s))$ con extremos $c(0) = (1, 0)$ y $c(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Queremos calcular P_0, P_1, P_2 y ω tal que $r(t)$ sea el arco de circunferencia $c(s)$ entre los puntos $(1, 0)$ y $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Imponiendo las condiciones de interpolación tenemos que $P_0 = r(0) = c(0) = (1, 0)$, $P_2 = r(1) = c(\alpha) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ y el vértice P_1 , por simetría, será $(D \cos(\alpha/2), D \sin(\alpha/2))$.

Para estudiar las direcciones tangentes a la curva $c(s)$ obtenemos su derivada $c'(s) = (-\sen s, \cos s)$. La tangente a la curva $r(t)$ en $P_0 = r(0)$ es $2\omega(P_1 - P_0)$ y la derivada de la curva $c(s)$ en cero es $c'(0) = (0, 1)$, luego $2\omega(P_1 - P_0) \parallel (0, 1)$.

Por otro lado, la tangente en $P_2 = r(1)$ es $2\omega(P_2 - P_1)$ y la derivada de la curva $c(s)$ en α es $c'(\alpha) = (-\sen \alpha, \cos \alpha)$, luego $2\omega(P_2 - P_1) \parallel (-\sen \alpha, \cos \alpha)$. Teniendo en cuenta que $P_1 = (D \cos(\alpha/2), D \sen(\alpha/2))$ obtenemos que

$$2\omega(P_1 - P_0) = 2\omega \left(D \cos \frac{\alpha}{2} - 1, D \sen \frac{\alpha}{2} \right) \parallel (0, 1),$$

por lo que llegamos a que

$$\omega \left(D \cos \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0$$

y como tenemos que $\omega > 0$ se tiene que $D = 1/\cos(\alpha/2)$, con lo cual, $P_1 = (1, \tan(\alpha/2))$.

Para obtener ahora el valor del peso ω partimos de que $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, \tan(\alpha/2))$ y $P_2 = (\cos \alpha, \sen \alpha)$. Sea la reparametrización del arco circular $c(s)$:

$$c(t) = (\cos(t\alpha), \sen(t\alpha)), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

por lo que

$$c(1/2) = \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sen \frac{\alpha}{2} \right).$$

Sustituyendo $t = 1/2$ en (1.1.9) tenemos que

$$r(1/2) = \frac{(1/4)P_0 + 2\omega(1/4)P_1 + (1/4)P_2}{(1/4) + 2\omega(1/4) + (1/4)} = \frac{P_0 + 2\omega P_1 + P_2}{2 + 2\omega}.$$

Como queremos que las curvas c y r sean la misma, imponemos que $c(1/2) = r(1/2)$, por tanto, se tiene que

$$P_0 + 2\omega P_1 + P_2 = (1, 0) + 2\omega \left(1, \tan \frac{\alpha}{2} \right) + (\cos \alpha, \sen \alpha) = (2 + 2\omega) \left(\cos \frac{\alpha}{2}, \sen \frac{\alpha}{2} \right)$$

con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 + 2\omega + \cos \alpha = (2 + 2\omega) \cos(\alpha/2) \\ 2\omega \tan(\alpha/2) + \sen \alpha = (2 + 2\omega) \sen(\alpha/2) \end{cases}$$

lo que implica

$$\begin{cases} 2\omega(1 - \cos(\alpha/2)) = 2\cos(\alpha/2) - 1 - \cos \alpha \\ 2\omega(\tan(\alpha/2) - \operatorname{sen}(\alpha/2)) = 2\operatorname{sen}(\alpha/2) - \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$$

y de la segunda ecuación llegamos a que

$$2\omega \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\cos(\alpha/2)} - 1 \right) = 2\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - 2\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

por lo que si tomamos $0 < \alpha < \pi$,

$$\omega = \frac{1 - \cos(\alpha/2)}{(1 - \cos(\alpha/2))/(\cos(\alpha/2))} = \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación comprobamos el valor de ω :

$$2\cos \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \frac{\alpha}{2}) = 2\cos \frac{\alpha}{2} - 1 - \cos \alpha$$

por tanto

$$-2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = -1 - \cos \alpha$$

luego

$$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2},$$

lo cual es cierto.

Se puede ver que a partir de los P_1 y ω calculados, $r(t) = (r_1(t), r_2(t))$ verifica que $r_1^2(t) + r_2^2(t) = 1$:

De la Ecuación (1.1.9) llegamos a que

$$r(t) = \frac{(1-t)^2(1, 0) + 2\omega t(1-t)(1, \tan(\alpha/2)) + t^2(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)}{(1-t)^2 + 2t(1-t)\omega + t^2}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} r_1^2(t) + r_2^2(t) &= \\ &= \frac{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2\cos \alpha)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\ &+ \frac{(2t(1-t)\operatorname{sen}(\alpha/2) + t^2\operatorname{sen} \alpha)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t)\cos(\alpha/2) + t^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-t)^4 + 4t^2(1-t)^2 \cos^2(\alpha/2) + t^4 \cos^2 \alpha}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\
&+ \frac{4t(1-t)^3 \cos(\alpha/2) + 2(1-t)^2 t^2 \cos \alpha + 4t^3(1-t) \cos(\alpha/2) \cos \alpha}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\
&+ \frac{4t^2(1-t)^2 \sin^2(\alpha/2) + t^4 \sin^2 \alpha + 4t^3(1-t) \sin(\alpha/2) \sin \alpha}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} = \\
&= \frac{(1-t)^4 + t^4 + 2t^2(1-t)^2(2 \cos^2(\alpha/2) + 2 \sin^2(\alpha/2) + \cos \alpha)}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} + \\
&+ \frac{4t(1-t)^3 \cos(\alpha/2) + 4t^3(1-t)(\cos(\alpha/2) \cos \alpha + \sin(\alpha/2) \sin \alpha)}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} = \\
&= \frac{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2}{((1-t)^2 + 2t(1-t) \cos(\alpha/2) + t^2)^2} = 1
\end{aligned}$$

Luego la curva racional $r(t)$ es el arco de circunferencia $c(t)$.

Capítulo 2

Hodógrafo Pitagórico

El hodógrafo de una curva paramétrica plana $r(t) = (x(t), y(t))$ es el lugar geométrico descrito por la primera derivada de la curva, $r'(t) = (x'(t), y'(t))$. Se dice que una curva polinómica paramétrica tiene hodógrafo pitagórico si existe un polinomio $\sigma(t)$ tal que $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$ y diremos que $\{(x'(t), y'(t), \sigma(t))\}$ es una “tripleta pitagórica”. Aunque la curva de hodógrafo pitagórico tiene menos grados de libertad que una curva paramétrica polinómica arbitraria del mismo grado, aquella presenta propiedades notablemente atractivas desde un punto de vista práctico. Por ejemplo, su longitud de arco se puede expresar como una función polinómica del parámetro y sus curvas offsets son curvas polinómicas racionales.

A lo largo de este capítulo presentaremos una caracterización algebraica de la propiedad del hodógrafo pitagórico, analizaremos sus implicaciones geométricas en términos de curvas de Bézier y estudiaremos las propiedades en diversas aplicaciones.

2.1. Introducción

La representación de curvas y superficies en una forma adecuada de computación eficiente y sistemática es un problema básico en el diseño asistido por ordenador. La mayoría de estas representaciones son formuladas como curvas paramétricas polinómicas, [4]. Los arcos de curvas polinómicas planas, se definen de una forma equivalente a :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^n a_k t^k, \\ y(t) &= \sum_{k=0}^n b_k t^k, \quad \text{para } t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Dichos arcos pueden unirse con varios órdenes de continuidad formando curvas spline para una interpolación de datos uniforme. Se representan fácilmente incrementando uniformemente t y evaluando el polinomio (2.1.1). Una deficiencia inmediata de la forma (2.1.1) es la poca "flexibilidad" que presentan, esto puede remediarse permitiendo la forma racional $r(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)$, donde $X(t)$, $Y(t)$ y $W(t)$ son polinomios. Obviamente, las curvas polinómicas son un subconjunto propio de las curvas racionales y la extensión a las formas racionales no presenta dificultades computacionales significativas, [4].

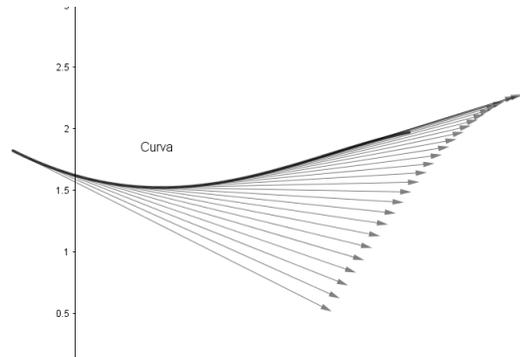


Figura 2.1: Segmento de curva paramétrica diferenciable y vectores de velocidad a lo largo de ese segmento.

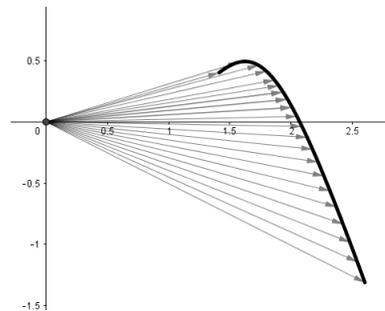


Figura 2.2: El hodógrafo es el lugar geométrico generado al trasladar estos vectores al origen

Las curvas paramétricas polinómicas tienen ciertas limitaciones que degradan su utilidad general en aplicaciones prácticas de diseño. Nuestro ob-

jetivo es identificar un subconjunto de curvas polinómicas para las cuales estas limitaciones se “relajan” y resaltar las propiedades útiles que surgen. Para facilitar este trabajo, recurrimos a la noción de hodógrafo de una curva plana $r(t) = (x(t), y(t))$, es decir, el lugar geométrico descrito por la derivada paramétrica $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ de esta curva, [1]. Si t representa el tiempo, el hodógrafo describe el vector velocidad de la trayectoria $r(t) = (x(t), y(t))$, Figura 2.2 y Figura 2.1.

Antes de continuar, seamos más específicos sobre algunas de las limitaciones de las curvas polinómicas mencionadas anteriormente. Cuando dicha curva se representa evaluando de forma uniforme el valor del parámetro $\{t_k\}$, los puntos geométricos resultantes $\{r_k\}$ no están uniformemente espaciados a lo largo de la curva, ya que su “flujo paramétrico” es necesariamente desigual si no es una línea recta. Para compensar esto se requiere una determinación de la relación funcional entre la longitud de arco s a lo largo de la curva y el parámetro t . En general, $s(t)$ es una integral que no puede resolverse con funciones elementales de t y recurriendo a métodos numéricos para aproximar esta integral, el resultado es ineficiente y potencialmente propenso a errores.

Otro problema surge con respecto a las curvas offset. En aplicaciones tales como el mecanizado de control numérico, el interés está en la curva $r_o(t) = r(t) + d\mathbf{n}(t)$, curva dada a una distancia fija d de la curva polinómica $r(t)$ en la dirección de su vector normal $\mathbf{n}(t)$. La curva $r_o(t)$ no es, en general, una curva polinómica. De hecho, hace más de un siglo, [10], se probó que si $r(t)$ es de grado n , la curva offset a una distancia $\pm d$, tomada en conjunto, constituye una curva algebraica irreducible con una ecuación implícita $f_o(x, y) = 0$ de grado $4n - 2$ en general, [7]. Este hecho ha llevado a la formulación de varios esquemas heurísticos de aproximación polinómica por partes para las curvas offset.

Las curvas polinómicas que se presentan en este capítulo superan estas deficiencias. Sus longitudes de arco son meramente funciones polinómicas del parámetro, mientras que sus curvas offsets son curvas racionales de grado relativamente bajo para distancias $\pm d$. En vista de los diversos usos prácticos de las curvas offset, esta última propiedad es especialmente significativa. Las formas racionales son el esquema omnipresente de representación canónica de los sistemas de modelado geométrico, y la posibilidad de describir las curvas offset precisamente en términos de ellas facilita el procedimiento utilizado en distintas aplicaciones.

2.2. Tripletas de polinomios pitagóricos

El teorema de Pitágoras relaciona la longitud de la hipotenusa, c , con las longitudes, a y b , de los catetos de un triángulo rectángulo. Esto nos proporciona una ecuación en la que podemos determinar el valor real para c cuando conocemos los valores reales arbitrario de a y b :

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (2.2.1)$$

Sólo en ciertos casos especiales, esta ecuación es satisfecha cuando a , b y c son enteros. Es decir, dados a y b enteros, siempre se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$ también es un número entero, pero ¿es posible encontrar c entero tal que $c^2 = a^2 + b^2$? En estos casos diremos que $\{a, b, c\}$ forman una tripleta pitagórica.

En este trabajo nos ocuparemos principalmente de las soluciones especiales para un problema análogo, en el que a , b y c en (2.2.1) son polinomios reales en una variable dada t y las implicaciones de sus soluciones en el diseño y procesamiento de curvas paramétricas.

Vamos a enunciar una caracterización particular para las tripletas de polinomios pitagóricos que nos será útil:

Teorema 2.2.1 (Kubota) *Sean tres polinomios reales $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ verificando $\max[\deg(a), \deg(b)] = \deg(c) > 0$. Estos polinomios satisfacen la condición pitagórica $a^2(t) + b^2(t) = c^2(t)$ si y solo si pueden expresarse en términos de polinomios reales $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ de la forma:*

$$\begin{aligned} a(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\ b(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \\ c(t) &= w(t)[u^2(t) + v^2(t)]. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Demostración. Kubota en [9] demuestra este teorema en un contexto mucho más general, el de un dominio de factorización único arbitrario D de característica $p \neq 2$. En este trabajo aplicamos este teorema sobre el anillo de los polinomios con coeficientes reales en una variable. \square

Suponemos a partir de ahora que en (2.2.2) los polinomios u y v son primos entre sí, ya que de lo contrario el $[MCD(u, v)]^2$ podría ser absorbido por w . Del mismo modo, asumimos que el polinomio w es mónico, es decir, el coeficiente, k , del monomio de mayor grado es igual a 1 ya que si no lo fuera,

podríamos dividir w por k para que fuera mónico y multiplicar u y v por \sqrt{k} (la suposición de que $k > 0$ está justificada en la medida en que los elementos $\{a, b, c\}$ de la tripleta pitagórica se consideran de signo indeterminado).

2.3. Aspectos fundamentales de las curvas de Hodógrafo Pitagórico

Se dice que el hodógrafo $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ de una curva polinómica, $r(t) = (x(t), y(t))$, es pitagórico si sus componentes son miembros de una tripleta de polinomios pitagóricos $\{x'(t), y'(t), \sigma(t)\}$.

Por el teorema de Kubota tenemos que existen unos polinomios $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ tales que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\ y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

donde identificamos $x'(t)$ con $a(t)$ y $y'(t)$ con $b(t)$, pues en caso contrario correspondería simplemente a una rotación de los ejes de coordenadas. Por tanto, cuando hablamos de una curva con hodógrafo pitagórico nos referimos a cualquier curva polinomial cuya derivada es de la forma (2.3.1).

Comenzemos estudiando algunos casos particulares de curvas con hodógrafo pitagórico:

- Caso 1: Si $w(t) = 0$ ó $u(t) = v(t) = 0$, las ecuaciones (2.3.1) se reducen a $x'(t) = y'(t) = 0$ y la curva polinómica $r(t)$ degenera en un punto.
- Caso 2: Si $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ son constantes con $w(t)$ distinta de cero y, al menos uno de $u(t)$ y $v(t)$ también distinto de cero, entonces $r(t)$ es una línea recta parametrizada regular que tiene la propiedad del hodógrafo pitagórico en un sentido trivial, es decir, la tripleta $\{x'(t), y'(t), \sigma(t)\}$ es una tripleta de números reales.
- Caso 3: Si $u(t)$ y $v(t)$ son constantes, ambas no nulas, pero $w(t)$ no es una constante, la curva $r(t)$ es de nuevo lineal, pero su parametrización no es regular. De hecho, será “trazada de forma múltiple” cuando el parámetro, que viene dado por el polinomio $\int w(t)dt$, esté entre dos raíces reales consecutivas. La curva $r(t)$ describirá una recta o una semirecta dependiendo de la paridad del grado del polinomio parámetro.

Caso 4: Si $w(t) \neq 0$ y $u(t)$ ó $v(t)$ es cero, la curva $r(t)$ es una recta paralela al eje OX no parametrizada regularmente, ya que por la misma razón que en el caso anterior está trazada de forma múltiple.

El caso con el que trabajaremos de aquí en adelante, considera los casos donde los polinomios $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ son todos distintos de cero, siendo $u(t)$ y $v(t)$ primos entre sí y no constantes a la vez. Con estas restricciones eliminamos los casos más simples estudiados anteriormente.

Las curvas de hodógrafo pitagórico $r(t) = (x(t), y(t))$ que satisfacen las condiciones fijadas son necesariamente de grado $n = \max[\deg(x), \deg(y)] \geq 3$, pues si $n = 0$, entonces $r'(t) = (0, 0)$ y estaríamos en el Caso 1. Si $n = 1$, entonces $r'(t)$ es constante y estaríamos en el Caso 2. Si $n = 2$, entonces $u(t)$ y $v(t)$ son constantes y $w(t)$ es un polinomio de grado 1 y tenemos un caso particular del Caso 3.

Ahora estudiaremos algunas características básicas de las curvas de hodógrafo pitagórico.

Lema 2.3.1 *La curva polinómica correspondiente al hodógrafo pitagórico (2.3.1) es de grado $n = \lambda + 2\mu + 1$, donde $\mu = \max[\deg(u), \deg(v)]$ y $\lambda = \deg(w)$.*

Demostración. Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.3.1) observamos que:

$$\begin{aligned} \deg(x') &\leq \deg(w) + 2\max[\deg(u), \deg(v)] \\ \deg(y') &= \deg(w) + \deg(u) + \deg(v) \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} \deg(x) &\leq \deg(w) + 2\max[\deg(u), \deg(v)] + 1 \\ \deg(y) &= \deg(w) + \deg(u) + \deg(v) + 1. \end{aligned}$$

La cota de $\deg(x')$ se alcanza dependiendo de la posibilidad de cancelación en los monomios principales de $u(t)^2$ y $v(t)^2$. Estudiemos más detenidamente esta posibilidad de cancelación de estos monomios:

- Si $\deg(u) \neq \deg(v)$, dicha cancelación no puede ocurrir y $\deg(x) = \lambda + 2\mu + 1 > \deg(y)$.
- Si $\deg(u) = \deg(v)$ se tiene que $\deg(y) = \lambda + 2\mu + 1 \geq \deg(x)$, independientemente de si ocurre la cancelación o no.

Por tanto, $n = \max[\deg(x), \deg(y)]$ está dado por $\lambda + 2\mu + 1$ en cualquiera de los dos casos. \square

Lema 2.3.2 *Las curvas con hodógrafo pitagórico de grado n tienen $n + 3$ grados de libertad, es decir, $n - 1$ menos que los grados de libertad asociados a una curva polinómica arbitraria del mismo grado, que tienen $2(n+1)$ grados de libertad.*

Demostración. Asumiendo que $u(t)$ y $v(t)$ son primos entre sí y no constantes a la vez, se tiene que $\mu = \max[\deg(u), \deg(v)] \geq 1$. Por tanto, los polinomios $u(t)$ y $v(t)$ estarán determinados, a lo más, por los $\mu + 1$ coeficientes de los monomios de cada uno. Si $\lambda = \deg(w)$, el polinomio $w(t)$ estará determinado por $\lambda + 1$ coeficientes, pero como el polinomio $w(t)$ es mónico, vendrá determinado por un máximo de λ coeficientes. Por lo que podemos elegir libremente, a lo sumo, $\lambda + 2(\mu + 1)$ coeficientes para especificar los polinomios $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ que definen el hodógrafo pitagórico. Las constantes de integración de (2.3.1) proporcionan dos grados más de libertad, haciendo un total de $\lambda + 2\mu + 4 = n + 3$, ya que $n = \lambda + 2\mu + 1$ por el lema anterior.

En general, una curva polinómica de grado n tiene $2(n + 1)$ grados de libertad, que corresponden al número de coeficientes de los monomios de los polinomios que describen sus dos ecuaciones paramétricas. \square

Estos grados de libertad, que se corresponden con el número de coeficientes que determinan los polinomios que describen las ecuaciones paramétricas de la curva, no son idóneos para la manipulación computacional de la forma intrínseca de dicha curva. Tres de ellos se tienen en cuenta para asignar el sistema de coordenadas en el plano: dos para elegir el origen (ya que depende de los límites de integración) y uno para orientar los ejes. Otros dos corresponden a las libertades en la parametrización: sea $r(t) = (x(t), y(t))$ una curva de grado n con hodógrafo pitagórico, $x'(t)^2 + y'(t)^2 = c(t)^2$, y sea $r(\tau) = (\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$, otra parametrización de $r(t)$ del mismo grado también con hodógrafo pitagórico, $\bar{x}'(\tau)^2 + \bar{y}'(\tau)^2 = d(\tau)^2$.

Calculemos los parámetros naturales asociados a cada parametrización:

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_0}^t |\alpha'(\xi)| d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\xi)^2} d\xi = \int_{t_0}^t \sqrt{c(\xi)^2} d\xi \\ &= \pm \int_{t_0}^t c(\xi) d\xi = \pm(\bar{c}(t) - \bar{c}(t_0)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \int_{\tau_0}^{\tau} |\alpha'(\xi)| d\xi = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\xi)^2} d\xi = \pm \int_{\tau_0}^{\tau} d(\xi) d\xi \\ &= \pm(\bar{d}(\tau) - \bar{d}(\tau_0)) \end{aligned}$$

donde, $\bar{c}(t) = \int c(t) dt$ y $\bar{d}(\tau) = \int c(\tau) d\tau$. Las funciones $(x(t), y(t))$, $(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau))$ describen la misma curva, luego el parámetro natural es invariante salvo cons-

tantes, por lo que $s = \bar{s} + cte$. Así llegamos a que $\bar{d}(\tau) = \bar{c}(t) + cte$ siendo $\bar{d}(\tau)$, $\bar{c}(t)$ polinomios del mismo grado. Por tanto, $\tau = pt + q$.

Descontando los cinco grados de libertad correspondientes a los movimientos rígidos y reparametrizaciones podemos decir que, mientras que las curvas polinómicas de grado n tienen $2n - 3$ grados de libertad, las curvas con hodógrafo pitagórico del mismo grado n tienen $n - 2$ grados de libertad.

Definición 2.3.3 (Punto singular) Una curva polinómica $r(t) = (x(t), y(t))$ tiene un punto singular en el valor ξ si el hodógrafo pitagórico en el punto $r(\xi)$ atraviesa el origen de coordenadas. Es decir, si $r'(\xi) = (0, 0)$.

Evidentemente, el valor del parámetro en el punto singular es el valor de la raíz real de $MCD(x'(t), y'(t))$. Para las curvas con hodógrafo pitagórico, los puntos singulares coinciden con las raíces reales de $w(t)$, ya que es imposible que $u^2(\xi) - v^2(\xi) = u(\xi)v(\xi) = 0$ para algún valor de ξ cuando el $MCD(u(t), v(t)) = 1$.

2.4. Hodógrafos Pitagóricos de curvas cúbicas

De acuerdo con la discusión realizada antes del Lema 2.3.1, las curvas más simples con hodógrafo pitagórico son las curvas de grado 3, donde $\lambda = \deg(w) = 0$ y $\mu = \max[\deg(u), \deg(v)] = 1$. Fijado un sistema de referencia y parametrización, estas curvas solo tienen un grado de libertad comparadas con los tres grados de libertad de las curvas cúbicas en general. En esta sección haremos un análisis detallado de estas curvas.

Consideremos dos polinomios $u(t)$ y $v(t)$ dados por la forma de Bernstein Bézier:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 B_0^1(t) + u_1 B_1^1(t), \\ v(t) &= v_0 B_0^1(t) + v_1 B_1^1(t), \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

donde asumimos que las razones $u_0 : u_1$ y $v_0 : v_1$ no son iguales.

Calculemos primero:

$$\begin{aligned} (B_0^1(t))^2 &= B_0^1(t)B_0^1(t) = (1-t) \cdot (1-t) = B_0^2(t), \\ (B_1^1(t))^2 &= B_1^1(t)B_1^1(t) = t \cdot t = B_2^2(t), \\ B_0^1(t) \cdot B_1^1(t) &= (1-t) \cdot t = \frac{1}{2} B_1^2(t). \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Por tanto, el hodógrafo pitagórico definido por las ecuaciones (2.4.1) y $w(t) = 1$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)] = (u_0B_0^1(t) + u_1B_1^1(t))^2 \\
&\quad - (v_0B_0^1(t) + v_1B_1^1(t))^2 = u_0^2B_0^2(t)u_1^2B_2^2(t) \\
&\quad + 2u_0u_1\frac{1}{2}B_1^2(t) - v_0^2B_0^2(t) - v_1^2B_2^2(t) - 2v_0v_1\frac{1}{2}B_1^2(t) \\
&= (u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0u_1 - v_0v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t).
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

$$\begin{aligned}
y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t) = 2(u_0B_0^1(t) + u_1B_1^1(t))(v_0B_0^1(t) + v_1B_1^1(t)) \\
&= 2[u_0v_0B_0^2(t) + u_0v_1\frac{1}{2}B_1^2(t) + v_0u_1B_1^2(t) + u_1v_1\frac{1}{2}B_1^2(t)] \\
&= 2u_0v_0B_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)B_1^2(t) + 2u_1v_1B_2^2(t).
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Integrando las ecuaciones (2.4.3), (2.4.4) y utilizando la propiedad de la forma de Bernstein Bézier (1.1.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \int u^2(t) - v^2(t)dt = \int [(u_0^2 - v_0^2)B_0^2(t) + (u_0u_1 \\
&\quad - v_0v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)B_2^2(t)]dt = (u_0^2 - v_0^2) \int B_0^2(t)dt \\
&\quad + (u_0u_1 - v_0v_1) \int B_1^2(t)dt + (u_1^2 - v_1^2) \int B_2^2(t)dt \\
&= \frac{(u_0^2 - v_0^2)}{3} \sum_{j=1}^3 B_j^3(t) + C_1 + \frac{(u_0u_1 - v_0v_1)}{3} \sum_{j=2}^3 B_j^3(t) \\
&\quad + C_2 + \frac{(u_1^2 - v_1^2)}{3} \sum_{j=3}^3 B_j^3(t) + C_3 = B_1^3(t) \frac{(u_0^2 - v_0^2)}{3} \\
&\quad + B_2^3(t) \frac{(u_0^2 - v_0^2) + (u_0u_1 - v_0v_1)}{3} \\
&\quad + B_3^3(t) \left[\frac{(u_0^2 - v_0^2) + (u_0u_1 - v_0v_1) + (u_1^2 - v_1^2)}{3} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{(C_1 + C_2 + C_3)}_C \cdot 1, \right.
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta (1.1.1), se tiene que, $C \cdot 1 = C \cdot \sum_{j=0}^3 B_j^3(t)$. Por tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \underbrace{C}_{x_0} B_0^3(t) + \underbrace{\left[\frac{u_0^2 - v_0^2}{3} + C \right]}_{x_1} B_1^3(t) + \underbrace{\left[\frac{(u_0^2 - v_0^2) + (u_0 u_1 - v_0 v_1)}{3} + C \right]}_{x_2} B_2^3(t) \\
 & + \underbrace{\left[\frac{(u_0^2 - v_0^2) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) + (u_1^2 - v_1^2)}{3} + C \right]}_{x_3} B_3^3(t) = x_k \sum_{k=0}^3 B_k^3(t).
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int 2u(t)v(t)dt = \int [2u_0v_0B_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)B_1^2(t) + 2u_1v_1B_2^2(t)]dt \\
 &= 2u_0v_0 \int B_0^2(t)dt + (u_0v_1 + u_1v_0) \int B_1^2(t)dt + 2u_1v_1 \int B_2^2(t)dt \\
 &= \frac{2u_0v_0}{3} \sum_{k=1}^3 B_j^3(t) + D_1 + \frac{(u_0v_1 + u_1v_0)}{3} \sum_{j=2}^3 B_j^3(t) + D_2 = \frac{2u_1v_1}{3} \sum_{j=3}^3 B_j^2(t) \\
 &+ D_3 = B_1^3(t) \frac{2u_0v_0}{3} + B_2^3(t) \frac{2u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)}{3} \\
 &+ B_3^3(t) \frac{2u_0v_0(u_0v_1 + u_1v_0) + 2u_1v_1}{3} + \underbrace{(D_1 + D_2 + D_3)}_D \cdot 1 \\
 &= \underbrace{D}_{y_0} B_0^3(t) + \underbrace{\left[\frac{2u_0v_0}{3} + D \right]}_{y_1} B_1^3(t) + \underbrace{\left[\frac{2u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)}{3} + D \right]}_{y_2} B_2^3(t) \\
 &+ \underbrace{\left[\frac{2u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + 2u_1v_1}{3} + D \right]}_{y_3} B_3^3(t) = y_k \sum_{k=0}^3 B_k^3(t).
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Tenemos entonces que los puntos de control de la curva $r(t) = (x(t), y(t)) = (x_k \sum_{k=0}^3 B_k^3(t), y_k \sum_{k=0}^3 B_k^3(t)) = \sum_{k=0}^3 (x_k, y_k) B_k^3(t)$, $P_k = (x_k, y_k)$, vienen dados a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
P_0 &= (x_0, y_0) = (C, D), \\
P_1 &= \left(\frac{u_0^2 - v_0^2}{3} + C, \frac{2u_0v_0}{3} + D \right) = P_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\
P_2 &= \left(\frac{(u_0^2 - v_0^2) + (u_0u_1 - v_0v_1)}{3} + C, \frac{2u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)}{3} + D \right) \\
&= P_1 + \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\
P_3 &= \left(\frac{(u_0^2 - v_0^2) + (u_0u_1 - v_0v_1) + (u_1^2 - v_1^2)}{3} + C, \right. \\
&\quad \left. \frac{2u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + 2u_1v_1}{3} + D \right) = P_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1).
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Aunque estas expresiones son idóneas para la parametrización de las curvas con hodógrafo pitagórico cúbicas desde un punto de vista computacional, no son, sin embargo, las más apropiadas desde un punto de vista intuitivo. Por ello, vamos a formular unas propiedades más geométricas de estas curvas.

Teorema 2.4.1 *Sea $r(t)$ una curva cúbica definida por los puntos de control, P_k . Sean L_1, L_2, L_3 las longitudes de los lados del polígono de control y θ_1, θ_2 los ángulos interiores en los vértices P_1 y P_2 . Las condiciones*

$$L_2 = \sqrt{L_1L_3} \text{ y } \theta_2 = \theta_1 \tag{2.4.8}$$

son necesarias y suficientes para asegurar que $r(t)$ tenga hodógrafo pitagórico.

Demostración. Sea $r(t)$ una curva cúbica con hodógrafo pitagórico definido por los puntos de control dados anteriormente, P_k . Denotamos por d_{jk} la distancia entre P_j y P_k ($j \neq k$). Así, $L_1 = d_{01}$, $L_2 = d_{12}$ y $L_3 = d_{23}$.

$$\begin{aligned}
d_{01} &= \|P_1 - P_0\| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0^2 - v_0^2)^2 + (2u_0v_0)^2} \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{u_0^4 - 2u_0^2v_0^2 + v_0^4 + 4u_0^2v_0^2} = \frac{1}{3} \sqrt{u_0^4 + 2u_0^2v_0^2 + v_0^4} \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)^2} = \frac{1}{3} (u_0^2 + v_0^2) = \frac{u_0^2 + v_0^2}{3},
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

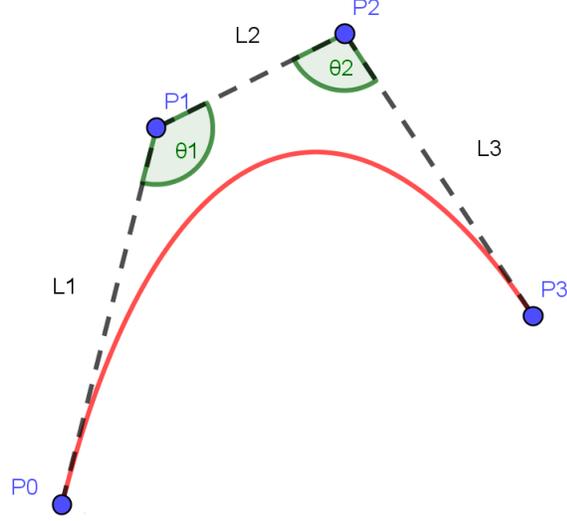


Figura 2.3: Los parámetros geométricos L_1, L_2, L_3, θ_1 y θ_2 definen la forma del polígono de control de la curva cúbica.

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= \|P_2 - P_1\| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0 u_1 - v_0 v_1)^2 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)^2} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{u_0^2 u_1^2 + v_0^2 v_1^2 + u_0^2 v_1^2 + u_1^2 v_0^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)} \quad (2.4.10) \\
 &= \frac{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}{3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_{23} &= \|P_3 - P_2\| = \frac{1}{3} \sqrt{(u_1^2 - v_1^2)^2 + 4u_1^2 v_1^2} = \frac{1}{3} \sqrt{u_1^4 + v_1^4 - 2u_1^2 v_1^2 + 4u_1^2 v_1^2} \\
 &= \frac{1}{3} \sqrt{u_1^4 + 2u_1^2 v_1^2 + v_1^4} = \frac{1}{3} \sqrt{(u_1^2 + v_1^2)^2} = \frac{u_1^2 + v_1^2}{3}. \quad (2.4.11)
 \end{aligned}$$

Claramente se tiene la condición $d_{12} = \sqrt{d_{01} \cdot d_{23}}$, pues

$$\sqrt{d_{01} \cdot d_{23}} = \sqrt{\frac{u_0^2 + v_0^2}{3} \frac{u_1^2 + v_1^2}{3}} = \frac{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}{3}.$$

Antes de continuar con la demostración, enunciaremos el teorema del coseno para un triángulo de lados a , b y c y ángulo interior δ que forman los lados a y b .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \delta.$$

Aplicándolo a nuestra demostración y teniendo en cuenta la Figura 2.3 se tiene:

$$d_{02}^2 = d_{12}^2 + d_{01}^2 - 2d_{12}d_{01} \cos \theta_1 \Rightarrow \cos \theta_1 = \frac{d_{01}^2 + d_{12}^2 - d_{02}^2}{2d_{12}d_{01}}.$$

$$d_{13}^2 = d_{23}^2 + d_{12}^2 - 2d_{23}d_{12} \cos \theta_2 \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{d_{12}^2 + d_{23}^2 - d_{13}^2}{2d_{12}d_{23}}.$$

Vamos a calcular d_{02}^2 y d_{13}^2 :

$$\begin{aligned} P_2 - P_0 &= \frac{1}{3}[(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) + (u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)] \\ &= \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2 + u_0u_1 - v_0v_1, 2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0), \\ P_3 - P_1 &= P_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) - P_0 - \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \\ &= \frac{1}{3}[(u_0^2 - v_0^2 + u_0u_1 - v_0v_1, 2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0) \\ &\quad - (u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) + (u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)] = \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2 + u_0u_1 \\ &\quad - v_0v_1, 2u_1v_1 + u_0v_1 + u_1v_0), \end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned} d_{02}^2 &= \|P_2 - P_0\|^2 = \frac{1}{9}[(u_0^2 - v_0^2 + u_0u_1 - v_0v_1)^2 - (2u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_0)^2] \\ &\quad \frac{1}{9}[(u_0^2 - v_0^2)^2 + (u_0u_1 - v_0v_1)^2 + 2(u_0^2 - v_0^2)(u_0u_1 - v_0v_1) + 4u_0^2v_0^2 \\ &\quad + (u_0v_1 + u_1v_0)^2 + 4u_0v_0(u_0v_1 + u_1v_0)] = \frac{1}{9}[u_0^2(u_0^2 + u_1^2 + 2u_0u_1 \\ &\quad - 2v_0v_1 + v_0^2 + v_1^2 + 4v_0v_1) + v_0^2(v_0^2 + v_1^2 - 2u_0u_1 + 2v_0v_1 + u_0^2 + u_1^2 \\ &\quad + 4u_0u_1)] = \frac{1}{9}(u_0^2 + v_0^2)[(u_0 + u_1)^2 + (v_0 + v_1)^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{13}^2 &= \|P_3 - P_1\|^2 = \frac{1}{9}[(u_1^2 - v_1^2 + u_0u_1 - v_0v_1)^2 + (2u_1v_1 + u_0v_1 + u_1v_0)^2] \\
&= \frac{1}{9}[(u_1^2 - v_1^2)^2 + (u_0u_1 - v_0v_1)^2 + 2(u_1^2 - v_1^2)(u_0u_1 - v_0v_1) + 4u_1^2v_1^2 \\
&\quad + (u_0v_1 + u_1v_0)^2 + 4u_1v_1(u_0v_1 + u_1v_0)] = \frac{1}{9}[u_1^2(u_1^2 + u_0^2 + 2u_0u_1 \\
&\quad - 2v_0v_1 + v_1^2 + v_0^2 + 4v_0v_1)] = \frac{1}{9}(u_1^2 + v_1^2)[(u_0 + u_1)^2 + (v_0 + v_1)^2].
\end{aligned}$$

Obtenemos así que:

$$\begin{aligned}
\cos \theta_1 &= \frac{(u_0^2 + v_0^2)^2 + (u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)^2 - (u_0^2 + v_0^2)[(u_0 + u_1)^2 + (v_0 + v_1)^2]}{9} \\
&\quad \frac{2}{9}(u_0^2 + v_0^2)\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{(u_0^2 + v_0^2) + (u_1^2 + v_1^2) - (u_0 + u_1)^2 - (v_0 + v_1)^2}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{-2(u_0u_1 + v_0v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \frac{-(u_0u_1 + v_0v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\
\cos \theta_2 &= \frac{u_1^2 + v_1^2 + u_0^2 + v_0^2 - (u_0 + u_1)^2 - (v_0 + v_1)^2}{2\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \\
&= \frac{-(u_0u_1 + v_0v_1)}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} = \cos \theta_1.
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Con esto se sigue que $\theta_2 = \theta_1$ ó $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$. Para probar que sólo puede darse la primera igualdad, veamos que $\text{sen } \theta_1 = \text{sen } \theta_2$.

Teniendo en cuenta que el producto vectorial de dos vectores es $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\text{sen } \theta)\bar{u}_z$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{sen } \theta_1 &= \frac{(\Delta P_1 \times \Delta P_0)\bar{u}_z}{d_{01}d_{12}}, \\
\text{sen } \theta_2 &= \frac{(\Delta P_2 \times \Delta P_1)\bar{u}_z}{d_{23}d_{12}},
\end{aligned}$$

donde \bar{u}_z es un vector unitario ortogonal al plano que contiene a la curva $r(t)$ y $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$, $k = 0, \dots, n-1$. Calculamos entonces $\text{sen } \theta_1$ y $\text{sen } \theta_2$:

$$\begin{aligned}\Delta P_0 &= P_1 - P_0 = \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \Delta P_1 &= P_2 - P_1 = \frac{1}{3}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \Delta P_2 &= P_3 - P_2 = \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1).\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\Delta P_1 \times \Delta P_0 &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ u_0u_1 - v_0v_1 & u_0v_1 + u_1v_0 & 0 \\ u_0^2 - v_0^2 & 2u_0v_0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(-u_0^3v_1 \\ &+ u_0^2u_1v_0 - v_0^2u_0v_1 + v_0^3u_1)\bar{u}_z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta P_2 \times \Delta P_1 &= \frac{1}{9} \begin{vmatrix} \bar{u}_x & \bar{u}_y & \bar{u}_z \\ u_1^2 - v_1^2 & 2u_1v_1 & 0 \\ u_0u_1 - v_0v_1 & u_0v_1 + u_1v_0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(-u_1^2u_0v_1 \\ &+ u_1^3v_0 - v_1^3u_0 + v_1^2u_1v_0)\bar{u}_z.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}d_{01}d_{12} &= \frac{1}{9}(u_0^2 + v_0^2)\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}, \\ d_{23}d_{12} &= \frac{1}{9}(u_1^2 + v_1^2)\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}.\end{aligned}$$

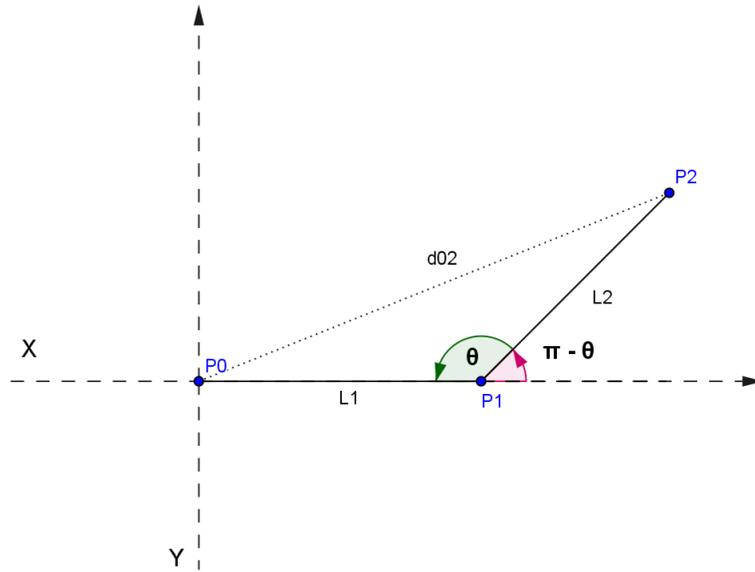
Y se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta_1 &= \frac{\frac{1}{9}[(u_0^2(-u_0v_1 + u_1v_0) + v_0^2(-u_0v_1 + u_1v_0))]}{\frac{1}{9}(u_0^2 + v_0^2)\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \\ &= \frac{v_0u_1 - u_0v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}, \\ \operatorname{sen} \theta_2 &= \frac{u_1^2(u_1v_0 - u_0v_1) + v_1^2(u_1v_0 - v_1u_0)}{(u_1^2 + v_1^2)\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}} \\ &= \frac{v_0u_1 - u_0v_1}{\sqrt{(u_0^2 + v_0^2)(u_1^2 + v_1^2)}}. \end{aligned}$$

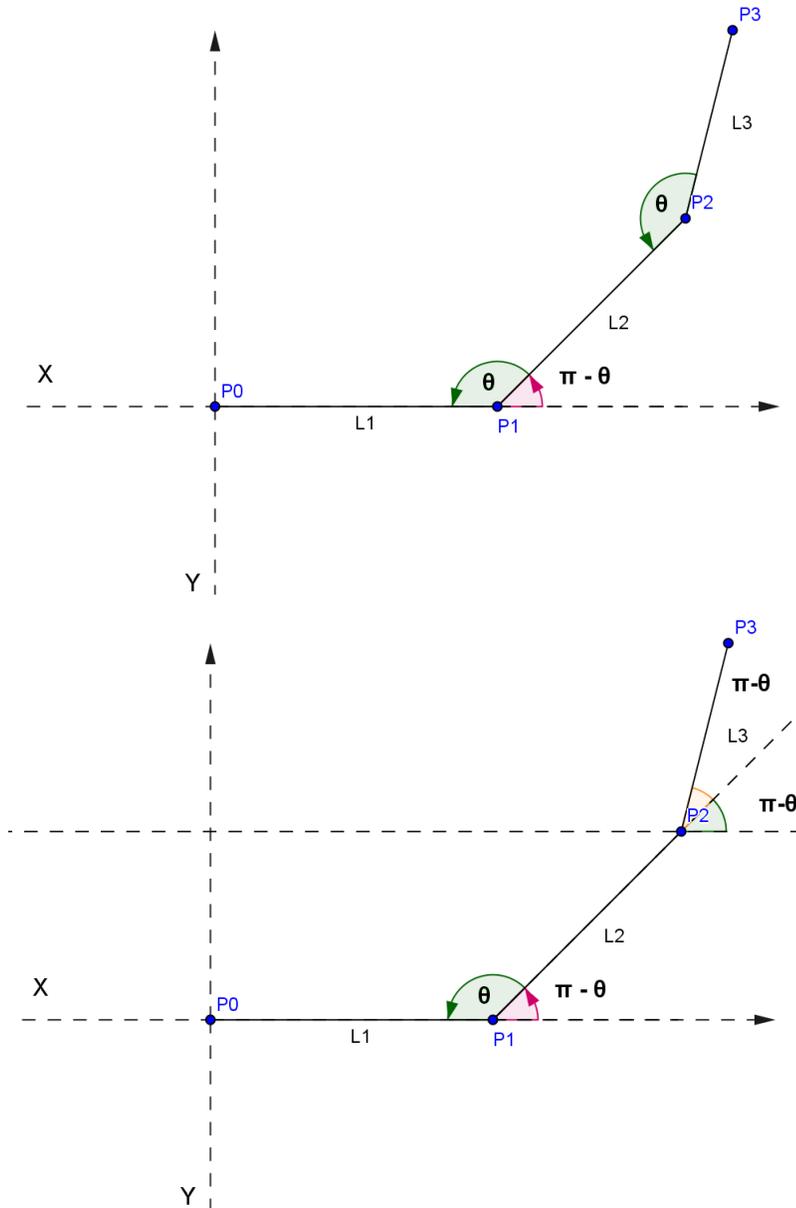
Por tanto, $\operatorname{sen} \theta_1 = \operatorname{sen} \theta_2 \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$.

Recíprocamente, sea $r(t)$ cualquier curva cúbica cuyo polígono de control satisfaga $\theta_1 = \theta_2$. Podemos adoptar un sistema de coordenadas en el que los lados del polígono de control sean de la forma:

$$\Delta P_0 = L_1(1, 0), \Delta P_1 = L_2(\cos(\pi - \theta), \operatorname{sen}(\pi - \theta)) = L_2(-\cos \theta, \operatorname{sen} \theta),$$



$$\Delta P_2 = L_3(\cos(2(\pi - \theta)), \text{sen}(2(\pi - \theta))) = L_3(\cos 2\theta, -\text{sen } 2\theta).$$



Utilizando la propiedad (1.1.4), tenemos que:

$$r'(t) = 3[\Delta P_0 B_0^2(t) + \Delta P_1 B_1^2(t) + \Delta P_2 B_2^2(t)] = 3(L_1 B_0^2(t) - L_2 \cos \theta B_1^2(t) + L_3 \cos 2\theta B_2^2(t), L_2 \sin \theta B_1^2(t) - L_3 \sin 2\theta B_2^2(t)).$$

Así,

$$x'^2(t) = 9L_1^2 B_0^4(t) - 9L_1 L_2 \cos \theta B_1^4(t) + (6L_2^2 \cos^2 \theta + 3L_1 L_3 \cos 2\theta) B_2^4(t) - 9L_2 L_3 \cos \theta \cos 2\theta B_3^4(t) + 9L_3^2 \cos^2 2\theta B_4^4(t),$$

$$y'^2(t) = 6L_2^2 \sin^2 \theta B_2^4(t) - 9L_2 L_3 \sin \theta \sin 2\theta B_3^4(t) + 9L_3^2 \sin^2 2\theta B_4^4(t),$$

y se tiene que:

$$x'^2(t) + y'^2(t) = 9L_1^2 B_0^4(t) - 9L_1 L_2 \cos \theta B_1^4(t) + (6L_2^2 + 3L_1 L_3 \cos 2\theta) B_2^4(t) - 9L_2 L_3 \underbrace{(\cos \theta \cos 2\theta + \sin \theta \sin 2\theta)}_{\cos \theta} B_3^4(t) + 9L_3^2 B_4^4(t).$$

Los coeficientes, c_k , de este polinomio respecto a la base de Bernstein de grado 4 son:

$$\begin{aligned} c_0 &= 9L_1^2, \\ c_1 &= -9L_1 L_2 \cos \theta, \\ c_2 &= 6L_2^2 + 3L_1 L_3 \cos 2\theta, \\ c_3 &= -9L_2 L_3 \cos \theta, \\ c_4 &= 9L_3^2. \end{aligned} \tag{2.4.13}$$

Por lo tanto, si el polígono de control de $r(t)$ satisface $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$, entonces veamos que $x'^2(t) + y'^2(t)$ coincide con el cuadrado del polinomio:

$$\sigma(t) = 3[L_1 B_0^2(t) - L_2 \cos \theta B_1^2(t) + L_3 B_2^2(t)], \tag{2.4.14}$$

que es:

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &= 9[L_1 B_0^2(t) - L_2 \cos \theta B_1^2(t) + L_3 B_2^2(t)]^2 \\ &= 9[(L_1 B_0^2(t) + L_2 \cos \theta B_1^2(t))^2 + (L_3 B_2^2(t))^2 + 2(L_1 B_0^2(t) + L_2 \cos \theta B_1^2(t))(L_3 B_2^2(t))] \\ &= 9L_1^2 B_0^4(t) - 9L_1 L_2 \cos \theta B_1^4(t) + (6L_2^2 \cos^2 \theta + 3L_1 L_3) B_2^4(t) - 9L_2 L_3 \cos \theta B_3^4(t) + 9L_3^2 B_4^4(t). \end{aligned}$$

Aplicando la condición $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$ y $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ tenemos que $6L_2^2 \cos^2 \theta + 3L_1 L_3 = 6L_2^2 + 3L_1 L_3 \cos 2\theta$, y por tanto los coeficientes de $B_2^4(t)$ de los polinomios $x'^2(t) + y'(t)$ y $\sigma^2(t)$ coinciden.

Entonces $r(t)$ es una curva con hodógrafo pitagórico siempre y cuando las condiciones del teorema se cumplan. \square

Recordamos que desde un punto de vista algebraico, según el Lema 2.3.2, de los $2(n + 1)$ grados de libertad de las curvas polinómicas de grado n , las curvas con hodógrafo pitagórico del mismo grado tienen $n + 3$ grados de libertad. De estos $2(n + 1)$ ó $n + 3$, escogimos dos para fijar el origen, uno para orientar los ejes y dos para la reparametrización, quedando $2n - 3$ ó $n - 2$. Por lo que es claro que las curvas cúbicas con hodógrafo pitagórico tendrán un solo grado de libertad.

Sin embargo, desde un punto de vista geométrico, una curva cúbica, en general, viene determinada, salvo movimientos rígidos, por L_1, L_2, L_3, θ_1 y θ_2 . Teniendo en cuenta que el movimiento rígido añadiría tres grados de libertad correspondientes a la elección del origen de coordenadas y la orientación de los ejes, obtenemos un total de ocho grados de libertad para las curvas polinómicas cúbicas. Las condiciones (2.4.8) obtenidas al imponer a estas curvas la propiedad del hodógrafo pitagórico nos rebajan el número de grados de libertad a seis, de los cuales tres corresponden al movimiento rígido y otros tres son los parámetros geométricos que describen dos de las longitudes de los lados del polígono de control y el ángulo θ . Según el Lema 2.3.2 las curvas cúbicas con hodógrafo pitagórico pueden tener un grado de libertad, así que dos de los tres parámetros geométricos van a intervenir si se impone que la curva está parametrizada naturalmente.

En términos de (u_0, u_1) y (v_0, v_1) , vemos que el polinomio $\sigma(t)$ que completa la tripleta pitagórica con $x'(t)$ e $y'(t)$ está descrito en la forma de Bernstein-Bézier por:

$$\sigma(t) = (u_0^2 + v_0^2)B_0^2(t) + (u_0u_1 + v_0v_1)B_1^2(t) + (u_1^2 + v_1^2)B_2^2(t),$$

que es claramente equivalente a la expresión (2.4.14) teniendo en cuenta las expresiones (2.4.9), (2.4.10), (2.4.11) y (2.4.12).

Ejemplo 2.4.2 La condición $L_2 = \sqrt{L_1 L_3}$ implica que las longitudes L_1, L_2 y L_3 de los lados del polígono de control, o bien son idénticas o bien son

distintas entre sí. En los ejemplos A, B y C de la Figura 2.4 tenemos que $L_1 = L_2 = L_3 = 1$, mientras que en los ejemplos D y E, $\frac{L_1}{2} = L_2 = 2L_3 = 1$ y $\frac{2L_1}{3} = L_2 = \frac{3L_3}{2} = 1$, respectivamente. Los puntos de control para cada uno de los ejemplos son:

$$\text{A) } P_0 = (0, 0), P_1 = (3/5, 4/5), P_2 = (8/5, 4/5), P_3 = (11/5, 0)$$

$$\text{B) } P_0 = (0, 0), P_1 = (0, 1), P_2 = (1, 1), P_3 = (1, 0)$$

$$\text{C) } P_0 = (5/13, 0), P_1 = (0, 12/13), P_2 = (1, 12/13), P_3 = (8/13, 0)$$

$$\text{D) } P_0 = (0, 0), P_1 = (2, 0), P_2 = (2, 1), P_3 = (3/2, 1)$$

$$\text{E) } P_0 = (0, 0), P_1 = (9/10, 6/5), P_2 = (19/10, 6/5), P_3 = (23/10, 2/3)$$

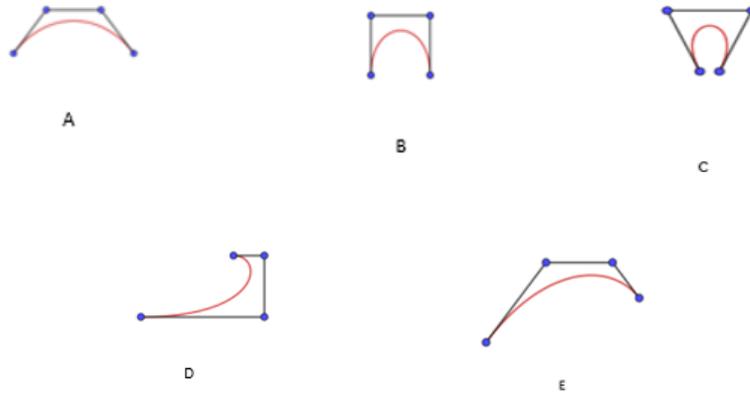


Figura 2.4: Tres curvas de Bézier cúbicas con hodógrafo pitagórico cuyos polígonos de control son simétricos, A, B y C y dos curvas con polígonos de control asimétricos, D y E.

Habitualmente, las curvas de Bézier se consideran parametrizadas para $t \in [0, 1]$, pero la propiedad de hodógrafo pitagórico es fundamentalmente de naturaleza global, por lo tanto, cualquier restricción sobre el polígono de control que surge de la propiedad de hodógrafo pitagórico se puede aplicar

a la curva de Bézier para un intervalo de mayor amplitud, es decir, para $t \in [a, b]$, con $a < 0$ y $b > 1$.

Corolario 2.4.3 *Las curvas cúbicas con hodógrafo pitagórico no tienen puntos de inflexión reales.*

Demostración. Sabemos que la curvatura de $r(t) = (x(t), y(t))$ viene definida como, $\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\|r'(t)\|^3}$. Si $\kappa(t) > 0$, la curva en un entorno de t está en el semiplano que define la recta tangente en ese punto donde apunta el vector normal. En cambio, si $\kappa(t) < 0$, la curva en un entorno de t estará en el semiplano definido por la recta tangente en ese punto donde no está el vector normal. Por tanto, los puntos de inflexión se dan cuando $\kappa(t)$ se anule. Veamos que las curvas con hodógrafo pitagórico verifican $\kappa(t) \neq 0$ cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$.

Por las ecuaciones (2.4.3) y (2.4.4) tenemos que:

$$r'(t) = (x'(t), y'(t)) = ((u_0^2 - v_0^2)(1-t)^2 + (u_0u_1 - v_0v_1)2t(1-t) + (u_1^2 - v_1^2)t^2, 2u_0v_0(1-t)^2 + (u_0v_1 + u_1v_0)2t(1-t) + 2u_1v_1t^2).$$

Así,

$$r''(t) = (x''(t), y''(t)) = (-2(1-t)(u_0^2 - v_0^2) + 2(u_0u_1 - v_0v_1)(1-2t) + 2(u_1^2 - v_1^2)t, 4u_0v_0(1-t) + 2(u_0v_1 + u_1v_0)(1-2t) + 4u_1v_1t).$$

Entonces, $\kappa(t) = 0 \Leftrightarrow x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0$.

$$\begin{aligned} x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) &= 2(u_0v_1 - v_0u_1)[t^2(u_0^2 - 2u_0u_1 + v_1^2 - 2v_0v_1 + v_0^2 \\ &\quad + u_1^2) + t(-2u_0^2 + 2u_0u_1 + 2v_0v_1 - 2v_0^2) + u_0^2 + v_0^2] \\ &= 2(u_0v_1 - v_0u_1)[t^2((u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2) \\ &\quad + t(-2u_0^2 + 2u_0u_1 + 2v_0v_1 - 2v_0^2) + u_0^2 + v_0^2]. \end{aligned}$$

Se tiene que $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = 0$ sí y solo sí $[t^2((u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2) + t(-2u_0^2 + 2u_0u_1 + 2v_0v_1 - 2v_0^2) + u_0^2 + v_0^2] = 0$ ya que estamos asumiendo $u_0 : u_1 \neq v_0 : v_1$.

Tenemos que probar que el discriminante de esta ecuación de segundo grado es siempre negativo, pues eso implica que las soluciones no son soluciones reales.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2u_0^2 + 2u_0u_1 + 2v_0v_1 - v_0^2)^2 - 4[(u_0 - u_1)^2 + (v_0 - v_1)^2][u_0^2 + v_0^2] \\ &= 8u_0u_1v_0v_1 - 4v_1^2u_0^2 - 4u_1^2v_0^2 = -4(u_0v_1 - u_1v_0)^2 < 0.\end{aligned}$$

□

Además vamos a ver a continuación que toda curva cúbica con hodógrafo pitagórico tiene un punto de autointersección. A modo de ejemplo, hemos tomado la curva obtenida en el apartado B del ejemplo anterior para $t \in [-2, 2]$, cuya representación se puede ver en la Figura 2.5.

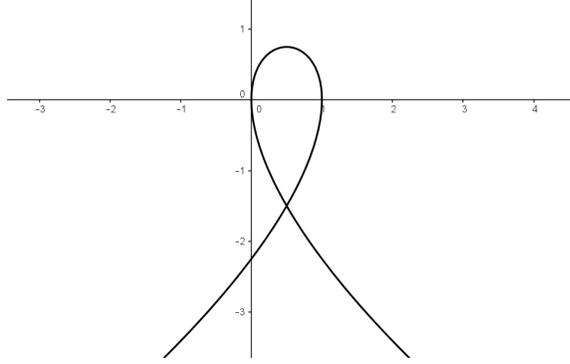


Figura 2.5: Curva del apartado B para $t \in [-2, 2]$.

Lema 2.4.4 *Toda curva cúbica con hodógrafo pitagórico tiene un punto de autointersección o punto de corte, donde el valor del parámetro viene dado por:*

$$t = \frac{(u_0^2 + v_0^2) - (u_0u_1 - v_0v_1) \pm \sqrt{3}(u_0v_1 - u_1v_0)}{(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2}$$

Demostración. De acuerdo con la discusión de la Sección 2.3, las curvas cúbicas con hógrafo pitagórico no tienen puntos singulares ya que $w(t) = 1$. El punto de autointersección de una curva cúbica $r(t) = (x(t), y(t))$ debe obtenerse para los valores del parámetro t y $t + \tau$ que cumplan:

$$\begin{aligned}\frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau} &= x'(t) + \frac{1}{2}x''(t)\tau + \frac{1}{6}x'''(t)\tau^2 = 0, \\ \frac{y(t + \tau) - y(t)}{\tau} &= y'(t) + \frac{1}{2}y''(t)\tau + \frac{1}{6}y'''(t)\tau^2 = 0,\end{aligned}$$

donde la división por τ elimina la solución trivial. La condición para t tal que las ecuaciones descritas se satisfacen para algún valor de τ está dada por el Lema 1.1.8 ya que se trata de un sistema polinomial. Por tanto, si consideramos la resultante respecto a τ ,

$$R(t) = \text{Resultante}_\tau \left(\frac{x(t+\tau) - x(t)}{\tau}, \frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} \right), \quad (2.4.15)$$

ésta puede expresarse como el determinante de Sylvester, (1.1.6):

$$R(t) = \begin{vmatrix} \frac{1}{6}x''' & \frac{1}{2}x'' & x' & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}x''' & \frac{1}{2}x'' & x' \\ \frac{1}{6}y''' & \frac{1}{2}y'' & y' & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}y''' & \frac{1}{2}y'' & y' \end{vmatrix}$$

A partir de las expresiones $x(t)$ e $y(t)$ dadas en (2.4.5) y (2.4.6) para los P_i de la forma (2.4.7) y efectuando cálculos muy extensos llegamos a que la resultante adopta la forma $R(t) = \lambda[a_2t^2 + 2a_1t + a_0]$, donde $\lambda = \frac{(u_0v_1 - u_1v_0)^2}{9} \neq 0$ y los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 vienen dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= [u_0u_1 + v_0v_1 - u_0^2 - v_0^2]^2 - 3(u_0v_1 - u_1v_0)^2, \\ a_1 &= [(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2][u_0u_1 + v_0v_1 - u_0^2 - v_0^2], \\ a_2 &= [(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2]^2. \end{aligned}$$

Si denotamos Δ el discriminante de la ecuación de segundo grado $R(t) = 0$, se tiene que $\frac{1}{4\lambda^2}\Delta = a_1^2 - a_0a_2 = 3[(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2]^2(u_0v_1 - u_1v_0)^2$. Claramente $\Delta > 0$ pues estamos suponiendo que los polinomios $u(t)$ y $v(t)$ son primos entre sí y ambos no constantes, por tanto, $u_0v_1 - u_1v_0 \neq 0$ y $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$. Así, el punto de autointersección que corresponde a los dos valores del parámetro t son las soluciones reales $\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_0a_2}}{a_2}$ de la ecuación $R(t) = 0$. □

Cuando se trata de arcos de Bézier cúbicos finitos, generalmente es deseable que las ecuaciones (2.4.5) y (2.4.6) definan un segmento de curva simple,

sin puntos de corte. Esto puede garantizar *a priori* que los valores del parámetro t definido en el Lema 2.4.4 no se encuentren en el intervalo $[0, 1]$ para los valores u_0, u_1, v_0 y v_1 elegidos.

La existencia de un punto de autointersección es solo una condición necesaria para que una curva cúbica tenga hodógrafo pitagórico, sin embargo, no es una condición suficiente. Consideremos la curva cúbica $f(x, y) = x^3 - x^2 + y^2 = 0$ que admite la parametrización $x(t) = 1 - t^2, y(t) = t - t^3$. Claramente tiene un punto de corte que corresponde en este caso al origen de coordenadas y se obtiene para $t = 1$ y $t = -1$, sin embargo vemos que $x'^2(t) + y'^2(t) = 9t^4 - 2t^2 + 1 \neq \sigma^2(t)$, [11]. Formularemos una condición suficiente para que las curvas cúbicas con puntos de autointersección tengan la propiedad de hogógrafo pitagórico.

Definición 2.4.5 La forma estándar de una curva cúbica con punto de autointersección, $r(t) = (x(t), y(t))$ viene dada por:

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t^2 - 1), \\ y(t) &= q(t - \delta)(t^2 - 1), \end{aligned}$$

con p y q no nulas.

Interpretamos la forma estándar de la siguiente manera: tomamos el punto de autointersección como origen y forzamos a $x(t)$ y a $y(t)$ a que posean un factor cuadrático común con distintas raíces reales, que corresponden a los dos valores del parámetro en el punto de corte. Podemos reparametrizar la curva para asignar los valores del parámetro $t = \pm 1$ en el punto de corte y el factor cuadrático común será $t^2 - 1$. Las ecuaciones paramétricas de $r(t)$ son de la forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t^2 - 1)(t - \alpha), \\ y(t) &= b(t^2 - 1)(t - \beta), \end{aligned}$$

cuya representación gráfica se puede ver en la Figura 2.6.

Se puede considerar una rotación sobre el origen para reducir el factor $t - \alpha$ en $x(t)$ a una constante. Así obtenemos la forma estándar de una curva cúbica con autointersección dada en la Definición 2.4.5. En la Figura 2.7 hemos representado cinco curvas en forma estándar.

A continuación se enunciará un teorema que nos ayudará a determinar curvas cúbicas con hodógrafo pitagórico.

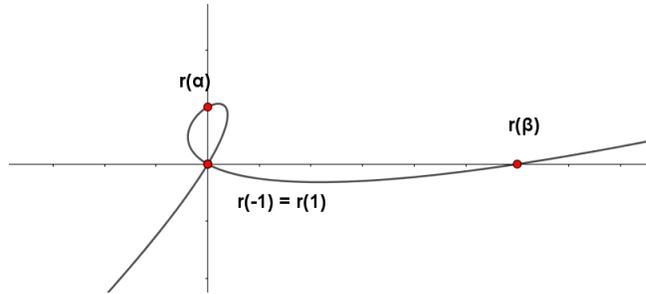


Figura 2.6: Curva $r(t) = (a(t^2 - 1)(t - \alpha), b(t^2 - 1)(t - \beta))$, con $t \in [-3, 3]$.

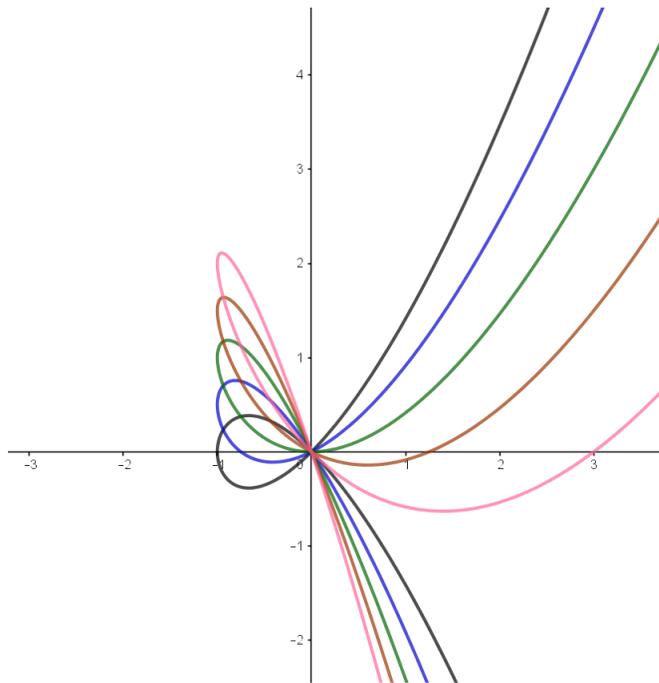


Figura 2.7: Forma estándar de una curva cúbica con punto de corte eligiendo $p = q = 1$ y los valores $\delta = 0, \delta = 0'5, \delta = 1, \delta = 1'5, \delta = 2$.

Teorema 2.4.6 *La forma estándar de las curvas cúbicas con puntos de autointersección con hodógrafo pitagórico corresponden a ejemplos de curvas cúbicas Tschirnhausen, definidas por:*

$$\begin{aligned} x(t) &= d(t^2 - 1), \\ y(t) &= \frac{\pm d}{\sqrt{3}}t(t^2 - 1). \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Demostración. Consideramos la forma estándar de una curva cúbica con punto de corte descrita en la definición anterior. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2pt, \\ y'(t) &= q(3t^2 - 2\delta t - 1). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} x'^2(t) + y'^2(t) &= 4p^2t^2 + q^2(3t^2 - 2\delta t - 1)^2 \\ &= q^2 \left[9t^4 - 12\delta t^3 + \left(4\frac{p^2}{q^2} + 4\delta^2 - 6 \right) t^2 + 4\delta t + 1 \right] \\ &= q^2 [9t^4 - 12\delta t^3 + (4f^2 + 4\delta^2 - 6)t^2 + 4\delta t + 1], \end{aligned}$$

donde $f = \frac{p}{q}$. Para que cumpla la propiedad de hodógrafo pitagórico se debe verificar que $x'^2(t) + y'^2(t)$ es el cuadrado de un polinomio. Es decir, $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = q(At^2 + Bt + C)$. O lo que es lo mismo, $x'^2(t) + y'^2(t) = q^2[A^2t^4 + 2ABt^3 + (B^2 + 2AC)t^2 + 2BCt + C^2]$.

Entonces, se deben verificar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} A^2 &= 9, \\ 2AB &= -12\delta, \\ 2AC + B^2 &= 4f^2 + 4\delta^2 - 6, \\ 2BC &= 4\delta, \\ C^2 &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema formado por las tres primeras ecuaciones, obtenemos los siguientes valores: $A = \pm 3$, $B = \mp 2\delta$ y $C = \pm [\frac{2}{3}f^2 - 1]$.

Vamos a sustituir los valores obtenidos en las dos últimas ecuaciones. En la primera de ellas tenemos $-\delta \left[\frac{2}{3}f^2 - 1 \right] = \delta$ como hemos asumido que $f \neq 0$, la única posibilidad para que se cumpla esta ecuación es $\delta = 0$. Ahora sustituimos C en la última ecuación y obtenemos $\frac{2}{3}f^2 \left[\frac{2}{3}f^2 - 2 \right] = 0$

lo que implica que $f^2 = 3$ pues $f \neq 0$. Así, $q = \frac{\pm p}{\sqrt{3}}$, donde la elección del signo corresponde al sentido en el que se recorre la curva. Por tanto, en forma estándar, las curvas cúbicas con hodógrafo pitagórico están dadas por (2.4.16) donde la cantidad d representa la distancia desde el origen hasta el punto de intersección con el eje OX. Además otra propiedad que se desprende de las ecuaciones (2.4.16) es que $x(t) = x(-t)$ y $y(t) = -y(-t)$, por tanto la curva es simétrica respecto al eje OX. En la Figura 2.8 se muestran varios ejemplos de estas curvas. \square

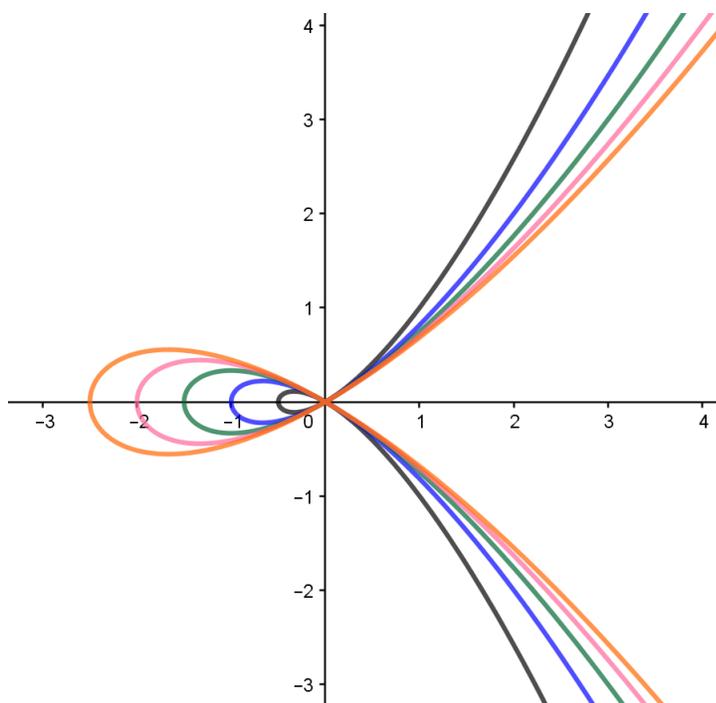


Figura 2.8: Curvas cúbicas Tschirnhausen con los valores $d = 0'5$, $d = 1$, $d = 1'5$, $d = 2$ y $d = 2'5$.

2.5. Curvas de orden superior

Una aplicación importante de las curvas paramétricas cúbicas es la interpolación de secuencias ordenadas de puntos en el plano mediante arcos de curvas cúbicas y pegados con continuidad de clase C^2 , es decir, curvas splines

cúbicas. Los arcos que describen dichos splines generalmente se construyen usando la interpolación de Hermite, [2]. Desafortunadamente, las curvas cúbicas con hodógrafo pitagórico son, en general, demasiado inflexibles para la interpolación de clase C^2 .

Para lograr cierta flexibilidad en el diseño y al mismo tiempo conservar las ventajas de la propiedad de hodógrafo pitagórico, debemos recurrir a curvas de mayor grado. Para tales curvas, será una tarea difícil y prolongada proporcionar un análisis tan completo y detallado como el dado en la Sección 2.4 para las curvas cúbicas ya que tal análisis debería tener los siguientes objetivos principales:

1. Formular restricciones geométricas intuitivas (como (2.4.8) en el caso de las cúbicas) en el polígono de control que garantice la propiedad de hodógrafo pitagórico, o de otro modo proporcionar procedimientos simples de construcción geométrica para tales curvas.
2. Identificar las formas esenciales que tendrán las curvas con hodógrafo pitagórico de un cierto grado mediante el análisis de sus puntos singulares, la identificación de la forma estándar y evaluar la idoneidad de estas formas para su uso en problemas de diseño geométrico.

En esta sección nos limitaremos a dar un breve esbozo de algunas de las características más destacadas de las curvas con hodógrafo pitagórico de cuarto y quinto grado.

Como sabemos de (2.3.1):

$$\begin{aligned}x'(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)], \\y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t).\end{aligned}$$

Si $w(t) = cte$, entonces $r(t)$ no es de grado 4, pues ni $x'(t)$ ni $y'(t)$ pueden ser de grado 3 ya que ni el caso en el que $u(t)$ y $v(t)$ sean de grado 1, ni el caso en el que el grado de uno de ellos fuese 2 y el otro fuese 1, son posibles. Si $w(t) \neq cte$, entonces para que $r(t)$ sea de grado 4 tiene que ocurrir que $\deg(w(t)) = \deg(u(t)) = \deg(v(t)) = 1$, y por tanto, $r(t)$ tiene un punto singular que se corresponde con el valor del parámetro que anula al polinomio $w(t)$.

Escribiremos el polinomio mónico $w(t)$ en la forma de Bernstein Bézier:

$$w(t) = -\xi B_0^1(t) + (1 + \xi) B_1^1(t),$$

identificamos $t = \xi$ como el valor del parámetro en el punto singular. Al igual que para las curvas de grado 3, expresamos $u(t) = u_0B_0^1(t) + u_1B_1^1(t)$ y $v(t) = v_0B_0^1(t) + v_1B_1^1(t)$ en la forma de Bernstein Bézier.

Teniendo en cuenta,

$$\begin{aligned} x'(t) &= w(t)[u^2(t) - v^2(t)] = -\xi(1-t)[(u_0^2 - v_0^2)(1-t)^2 + (u_1^2 - v_1^2)t^2 \\ &\quad + 2(u_0u_1 - v_0v_1)(1-t)t] + (1-\xi)t[(u_0^2 - v_0^2)(1-t)^2 + (u_1^2 - v_1^2)t^2 \\ &\quad + 2(u_0u_1 - v_0v_1)(1-t)t] = -\xi(u_0^2 - v_0^2)(1-t)^3 \\ &\quad + (1-\xi)(u_0^2 - v_0^2)(1-t)^2t + 2(1-\xi)(u_0u_1 - v_0v_1)(1-t)t^2 \\ &\quad - \xi(u_1^2 - v_1^2)(1-t)t^2 + (1-\xi)(u_1^2 - v_1^2)t^3 - 2\xi(u_0u_1 - v_0v_1)(1-t)^2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2w(t)u(t)v(t) = 2w(t)[u_0(1-t)(v_0(1-t) + v_1t) \\ &\quad + u_1t(v_0(1-t) + v_1t)] = -2\xi u_0v_0(1-t)^3 + 2(1-\xi)u_0v_0(1-t)^2t \\ &\quad - 2\xi(u_0v_1 + u_1v_0)(1-t)^2t + 2(1-\xi)(u_0v_1 + u_1v_0)(1-t)t^2 \\ &\quad - 2\xi u_1v_1(1-t)t^2 + 2(1-\xi)u_1v_1t^3 - 2\xi(1-t)[u_0v_0(1-t)^2 \\ &\quad + (u_0v_1 + u_1v_0)(1-t)t + u_1v_1t^2] + 2(1-\xi)t[u_0v_0(1-t)^2 \\ &\quad + (u_0v_1 + u_1v_0)(1-t)t + u_1v_1t^2]. \end{aligned}$$

e integrando ambas ecuaciones usando argumentos similares a los utilizados en la Sección 2.4, llegamos a que las curvas de grado 4 con hodógrafo pitagórico, $r(t) = P_0B_0^4(t) + P_1B_1^4(t) + P_2B_2^4(t) + P_3B_3^4(t) + P_4B_4^4(t)$, tienen puntos de control de la forma:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 - \frac{\xi}{4}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ P_2 &= P_1 + \frac{(1-\xi)}{12}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) - \frac{\xi}{6}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ P_3 &= P_2 + \frac{(1-\xi)}{6}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) - \frac{\xi}{12}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1), \\ P_4 &= P_3 + \frac{(1-\xi)}{4}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1), \end{aligned}$$

donde el punto inicial P_0 es arbitrario.

Hay que tener en cuenta que el polígono de control se degenera si elegimos $\xi = 0$ ó $\xi = 1$ ($P_1 = P_0$ en el primer caso y $P_4 = P_3$ en el segundo). De hecho, esto debería haberse esperado, ya que por la propiedad (1.1.4) de las curvas

de Bézier, deducimos que $r'(0) = 4(P_1 - P_0)$ y $r'(1) = 4(P_4 - P_3)$ y tendríamos $r'(0) = 0$ ó $r'(1) = 0$, por lo que el punto singular sería P_0 ó P_4 .

En la Figura 2.9 se ilustran algunos ejemplos de curvas de grado 4 con hodógrafo pitagórico. Estos han sido generados haciendo elecciones arbitrarias de los parámetros (u_0, u_1) , (v_0, v_1) y ξ . Obviamente, este enfoque ofrece poca información geométrica sobre la forma de la curva resultante.



Figura 2.9: Ejemplos de curvas cuárticas con hodógrafo pitagórico para $t \in [0, 1]$. En la primera de ellas $\xi = \frac{1}{2}$, mientras que en la otra la cúspide ha sido elegida fuera del intervalo $[0, 1]$.

Estos ejemplos sugieren que las curvas de grado 4 con hodógrafo pitagórico también podrían compartir la propiedad de convexidad de las curvas cúbicas, es decir, tampoco poseen puntos de inflexión reales. De hecho, $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$ es un polinomio de grado 4 en t , que factoriza en $(t - \xi)^2$ por un polinomio de grado 2 con discriminante $-4(u_0v_1 - u_1v_0)^2$, el cual es siempre negativo. Así, las curvas cuárticas con hodógrafo pitagórico no tienen puntos de inflexión reales ya que $\kappa(t)$ no cambia de signo, [8].

En el caso de las curvas cuárticas, el polígono de control se describe mediante siete parámetros geométricos: las longitudes de los lados L_1, L_2, L_3, L_4 y sus tres ángulos interiores que forman éstos $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Veamos los grados de libertad que poseen estas curvas. En general, a las curvas polinómicas de grado 4 les corresponden diez grados de libertad, de los cuales debemos descontar cinco que corresponden a la elección del origen, orientación de los ejes y reparametrización de la curva. Por el Lema 2.3.2 sabemos que las curvas con hodógrafo pitagórico tienen $n - 1$ grados de libertad menos que las que no poseen esta propiedad. Por este motivo, las curvas cuárticas con hodógrafo

pitagórico poseen 2 grados de libertad. Con esto podemos concluir que los $n - 1$ grados de libertad, en nuestro caso tres, corresponden al número de restricciones independientes de los parámetros $L_1, L_2, L_3, L_4, \theta_1, \theta_2$ y θ_3 que caracterizan la propiedad del hodógrafo pitagórico para las curvas de grado 4. Estas restricciones no presentan una interpretación tan intuitiva como las condiciones (2.4.8) del caso cúbico. Por ejemplo, a partir de los puntos de control de las curvas cuárticas se deduce la siguiente restricción, [8]:

$$\xi^2 L_4 (3|1 - \xi|L_2^2 - |\xi|L_1 L_4) = (1 - \xi)^2 L_1 (3|\xi|L_3^2 - |1 - \xi|L_1 L_4),$$

que relaciona las longitudes de los cuatro lados del polígono de control y la ubicación del punto singular ξ .

Las curvas de grado 5 con hodógrafo pitagórico son obtenidas eligiendo $\lambda = 0, \mu = 2$ ó $\lambda = 2, \mu = 0$, donde $\lambda = \deg(w)$ y $\mu = \max[\deg(u), \deg(v)]$. Las curvas correspondientes al primer caso carecen de puntos singulares, mientras que las correspondientes a este último tienen dos cúspides reales ordinarias, un punto singular real de segundo orden o ningún punto singular real, según si el discriminante de $w(t) = 0$ es positivo, cero o negativo, respectivamente.

Cuando $w(t)$ es una constante y $u(t) = u_0 B_0^2(t) + u_1 B_1^2(t) + u_2 B_2^2(t)$, $v(t) = v_0 B_0^2(t) + v_1 B_1^2(t) + v_2 B_2^2(t)$, los puntos de control son de la forma:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{1}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0 v_0), \\ P_2 &= P_1 + \frac{1}{5}(u_0 u_1 - v_0 v_1, u_0 v_1 + u_1 v_0), \\ P_3 &= P_2 + \frac{2}{15}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1 v_1) + \frac{1}{15}(u_0 u_2 - v_0 v_2, u_0 v_2 + u_2 v_0), \\ P_4 &= P_3 + \frac{1}{5}(u_1 u_2 - v_1 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1), \\ P_5 &= P_4 + \frac{1}{5}(u_2^2 - v_2^2, 2u_2 v_2), \end{aligned}$$

donde P_0 es arbitrario.

Sólo vamos a mencionar una restricción sobre las longitudes de los lados del polígono de control que surge de manera directa de las expresiones dadas:

$$\frac{L_2}{L_4} = \sqrt{\frac{L_1}{L_5}}.$$

Por otro lado, si $w(t) = w_0B_0^2(t) + w_1B_1^2(t) + w_2B_2^2(t)$ y $u(t)$, $v(t)$ son funciones lineales, los puntos de control son de la forma:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 + \frac{w_0}{5}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ P_2 &= P_1 + \frac{w_0}{10}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) + \frac{w_1}{10}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ P_3 &= P_2 + \frac{w_0}{30}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) + \frac{2w_1}{15}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) \\ &\quad + \frac{w_2}{30}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ P_4 &= P_3 + \frac{w_1}{10}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) + \frac{w_2}{10}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ P_5 &= P_4 + \frac{w_2}{5}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1), \end{aligned}$$

donde P_0 es arbitrario.

Si ξ_1 y ξ_2 son los valores del parámetro t donde hay puntos singulares, los coeficientes de Bernstein de $w(t)$ en estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} w_0 &= \xi_1\xi_2, \\ w_1 &= -\frac{[(1-\xi_1)\xi_2 + (1-\xi_2)\xi_1]}{2}, \\ w_2 &= (1-\xi_1)(1-\xi_2). \end{aligned}$$

En la Figura 2.10 se muestran algunos ejemplos de curvas de grado 5 con cúspide y sin cúspide. De nuevo, estos fueron generados de manera aleatoria eligiendo libremente los parámetros (u_0, u_1) , (v_0, v_1) y (ξ_1, ξ_2) ó (u_0, u_1, u_2) y (v_0, v_1, v_2) .

El polinomio $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$ es un polinomio de grado 6. Este polinomio viene determinado por los factores $(t - \xi_1)^2$ y $(t - \xi_2)^2$ por una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es $\Delta = -4(u_0v_1 - u_1v_0)^2 < 0$, [8].

2.6. Longitud de arco

La longitud de arco a lo largo de una curva polinómica $r(t) = (x(t), y(t))$ aumenta a un ritmo

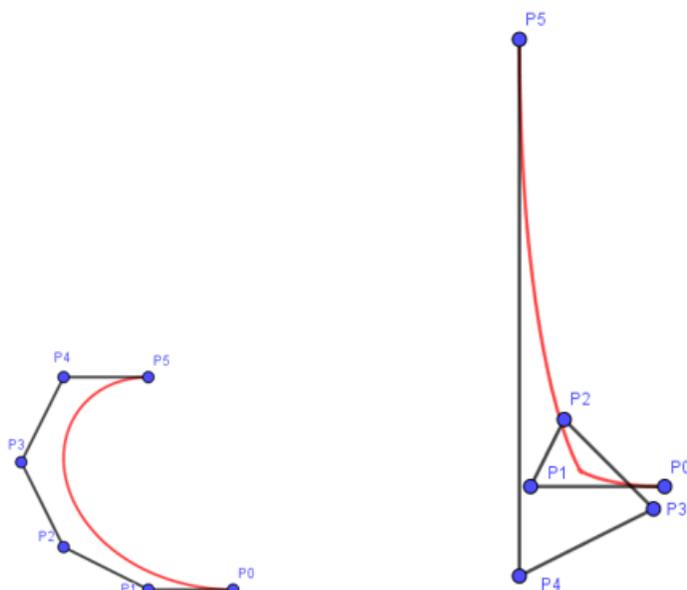


Figura 2.10: Ejemplos de curvas con hodógrafo pitagórico de grado 5. El primero tomando $\lambda = 0$ y $\mu = 2$ y el segundo $\lambda = 2$ y $\mu = 0$.

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)},$$

respecto al parámetro t . La longitud s medida desde $t = 0$ viene dada por:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

pero esta integral no admite, en general, una expresión en términos de funciones elementales. El cálculo de las longitudes de arco de los segmentos de curva polinómica, por lo general implica una aproximación mediante métodos numéricos en casos específicos.

Si la curva $r(t)$ tiene hodógrafo pitagórico, sabemos que existe un polinomio $\sigma(t)$ tal que $x'^2(t) + y'^2(t) = \sigma^2(t)$, por tanto se reescribe la ecuación anterior como:

$$s(t) = \int_0^t |\sigma(t)| dt, \quad (2.6.1)$$

que implica un cálculo elemental.

De hecho, si $r(t)$ se ha construido eligiendo los polinomios $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ e integrando las ecuaciones (2.3.1), sabemos que $\sigma(t) = w(t)[u^2(t) + v^2(t)]$. Primero consideraremos los casos en los que $\sigma(t)$ no cambia de signo, pues la necesidad de tomar el valor absoluto en la ecuación anterior puede ser un inconveniente.

Habiendo asumido $\sigma(t) = w(t)[u^2(t) + v^2(t)]$ y $MCD(u(t), v(t)) = 1$, se verifica que $\sigma(t)$ no tiene raíces reales y se puede considerar positiva para valores de $t \in (-\infty, +\infty)$ siempre y cuando $w(t)$ no tenga raíces reales. En particular, si $w(t)$ es constante, $\sigma(t)$ será de grado $n - 1$ y se puede escribir de la forma:

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_k t^k, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

cuando $r(t)$ es una curva con hodógrafo pitagórico de grado n .

La longitud de arco s de $r(t)$ medido desde $t = 0$ es la función poliómica

$$s(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{k-1} t^k}{k}.$$

En este caso $s(t)$ es una función monótona creciente, ya que su derivada, $\sigma(t)$, es positiva para todo t .

Ejemplo 2.6.1 Consideramos las curvas cúbicas Tschirnhausen (2.4.16), así $x'(t) = d2t$, $y'(t) = \frac{\pm d(3t^2 - 1)}{\sqrt{3}}$ y $\sigma(t) = \frac{|d|(3t^2 + 1)}{\sqrt{3}}$.

Al integrar $\sigma(t)$ vemos que la longitud de arco de esta curva, medida desde $r(0)$, viene dada por la expresión polinómica simple:

$$s(t) = \int_0^t \sigma(t) dt = \frac{|d|}{\sqrt{3}} t(t^2 + 1).$$

Para una curva con hodógrafo pitagórico encontrar el valor del parámetro t_0 en el que se alcanza una longitud de arco s_0 , implica la determinación de la raíz de la ecuación polinómica $s(t) - s_0 = 0$.

Vamos a suponer que $w(t)$ no es constante. En este caso, sólo tenemos que preocuparnos de las raíces de multiplicidad impar del polinomio $w(t)$, ya que en esos valores es donde $\sigma(t)$ cambia de signo. Así, si t_1, \dots, t_N denota, en

orden ascendente, las raíces de multiplicidad impar de $w(t)$, debemos dividir la integral (2.6.1) en aquellos valores $\{t_k\}$ que se encuentran dentro del rango de integración y luego sumar las integrales de $\sigma(t)$ sobre los subintervalos resultantes con signos alternos.

2.7. Curvas Offset

Sea $\mathbf{n}(t)$ el vector normal unitario de la curva polinómica $r(t) = (x(t), y(t))$ en cada punto. La curva offset de la curva $r(t)$ será, fijada una distancia d , el lugar geométrico definido por $r_o(t) = r(t) + d\mathbf{n}(t)$. Las coordenadas de $r_o(t)$ vienen descritas por:

$$\begin{aligned} x_o(t) &= x(t) + \frac{dy'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \\ y_o(t) &= y(t) - \frac{dx'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}. \end{aligned}$$

Aunque estas ecuaciones constituyen una descripción precisa de la curva offset, la presencia del radical $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ es desafortunada desde la perspectiva de los sistemas de modelado que se adhieren a formas polinómicas y racionales como su representación canónica.

Las curvas offset de curvas con hodógrafo pitagórico se pueden identificar con una familia de curvas polinómicas racionales y, por lo tanto, son totalmente compatibles con la funcionalidad geométrica de los sistemas de modelado geométricos.

Si $r(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{k=0}^n (x_k, y_k) B_k^n(t)$ es una curva de Bézier de grado n con hodógrafo pitagórico tal que $w(t)$ no tiene raíces reales, entonces $\sigma(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ debe ser un polinomio positivo para todo valor real t de grado $n - 1$. La curva offset, $r_o(t)$, a una distancia d de $r(t)$ puede expresarse en la forma racional $r_o(t) = (x_o(t), y_o(t)) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)$, donde

$$X(t) = \sigma(t)x(t) + dy'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} X_k B_k^{2n-1}(t),$$

$$Y(t) = \sigma(t)y(t) - dx'(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} Y_k B_k^{2n-1}(t),$$

$$W(t) = \sigma(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} W_k B_k^{2n-1}(t).$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}\frac{X(t)}{W(t)} &= x(t) + d \frac{y'(t)}{\sigma(t)} = x_o(t), \\ \frac{Y(t)}{W(t)} &= y(t) + d \frac{x'(t)}{\sigma(t)} = y_o(t),\end{aligned}$$

y al menos uno de los polinomios $X(t)$ e $Y(t)$ debe ser de grado $2n - 1$ y $W(t)$ tiene que tener grado $n - 1$, este último se expresa mediante una elevación del grado para dar una descripción explícita de la curva offset $r_o(t)$ en términos de sus $2n$ puntos de control asociados con los pesos W_k , $P_k = \left(\frac{X_k}{W_k}, \frac{Y_k}{W_k} \right)$ ya que,

$$\begin{aligned}r_o(t) &= \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right) = \left(\frac{\sum_{k=0}^{2n-1} X_k B_k^{2n-1}(t)}{\sum_{k=0}^{2n-1} W_k B_k^{2n-1}(t)}, \frac{\sum_{k=0}^{2n-1} Y_k B_k^{2n-1}(t)}{\sum_{k=0}^{2n-1} W_k B_k^{2n-1}(t)} \right) \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{2n-1} (X_k, Y_k) B_k^{2n-1}(t)}{\sum_{k=0}^{2n-1} W_k B_k^{2n-1}(t)} = \frac{\sum_{k=0}^{2n-1} W_k P_k B_k^{2n-1}(t)}{\sum_{k=0}^{2n-1} W_k B_k^{2n-1}(t)}\end{aligned}$$

llegando así a la expresión de una curva de Bézier racional, ver (1.1.7).

Teniendo en cuenta una de las propiedades de las curvas de Bézier, podemos expresar $r'(t) = (x'(t), y'(t))$ de la forma (1.1.4) y al polinomio $\sigma(t)$ le corresponden los coeficientes de Bernstein $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}$. Aplicando procedimientos aritméticos y la elevación de grado para polinomios con coeficientes en forma de Bernstein se obtienen los puntos de control de la curva offset racional, [8]:

$$(X_k, Y_k, W_k) = \sum_{j=\max\{0, k-n\}}^{\min\{n-1, k\}} \frac{\binom{n}{k-j} \binom{n-1}{j}}{\binom{2n-1}{k}} \times [\sigma_j(x_{k-j}, y_{k-j}, 1) + dn(\Delta y_j, -\Delta x_j, 0)] \quad (2.7.1)$$

para $k = 0, \dots, 2n - 1$.

Como en el caso del cálculo de la longitud de arco, debemos preocuparnos de las raíces reales de multiplicidad impar de $w(t)$, ya que puede producirse un cambio de sentido repentino en el vector normal $\mathbf{n}(t)$ de la curva original. En este caso, debemos esperar que la curva offset sufra una discontinuidad puntual en estos valores del parámetro. Por lo tanto, para asegurar que cada

subsegmento de la curva tenga una curva offset continua, es conveniente dividir la curva original en segmentos comprendidos entre los valores de t que corresponden a las raíces de multiplicidad impar de $w(t)$, t_1, \dots, t_N .

A pesar de su apariencia, la fórmula (2.7.1) no es difícil de implementar en la práctica. Por ejemplo, las curvas offset cúbicas con hodógrafo pitagórico no son más que una curva racional de grado 5. En este caso, las ecuaciones pueden simplificarse:

$$\begin{aligned} (X_0, Y_0, W_0) &= L_1(x_0, y_0, 1) + d(\Delta y_0, -\Delta x_0, 0), \\ (X_1, Y_1, W_1) &= \frac{1}{5}[3L_1(x_1, y_1, 1) - 2L_2 \cos \theta(x_0, y_0, 1) \\ &\quad + d(2\Delta y_1 + 3\Delta y_0, -3\Delta x_0, 0)], \\ (X_2, Y_2, W_2) &= \frac{1}{10}[3L_1(x_2, y_2, 1) - 6L_2 \cos \theta(x_1, y_1, 1) + L_3(x_0, y_0, 1) \\ &\quad + d(\Delta y_2 + 6\Delta y_1 + 3\Delta y_0, -\Delta x_2 - 6\Delta x_1 - 3\Delta x_0, 0)], \\ (X_3, Y_3, W_3) &= \frac{1}{10}[3L_3(x_1, y_1, 1) - 6L_2 \cos \theta(x_2, y_2, 1) + L_1(x_3, y_3, 1) \\ &\quad + d(\Delta y_0 + 6\Delta y_1 + 3\Delta y_2, -\Delta x_0 - 6\Delta x_1 - 3\Delta x_2, 0)], \\ (X_4, Y_4, W_4) &= \frac{1}{5}[3L_3(x_1, y_1, 1) - 2L_2 \cos \theta(x_3, y_3, 1) \\ &\quad + d(2\Delta y_1 + 3\Delta y_2, -2\Delta x_1 - 3\Delta x_2, 0)], \\ (X_5, Y_5, W_5) &= L_3(x_3, y_3, 1) + d(\Delta y_2, -\Delta x_2, 0), \end{aligned}$$

donde hemos usado la forma (2.4.14) de $\sigma(t)$ en términos de los parámetros geométricos L_1 , L_2 , L_3 y θ . Hemos multiplicado las expresiones por 3, ya que se puede aplicar una escala arbitraria a $X(t)$, $Y(t)$ y $W(t)$ sin alterar la curva.

2.8. Observaciones finales

En este trabajo se han descrito las características básicas de las curvas con hodógrafo pitagórico, los procedimientos de construcción de estas curvas

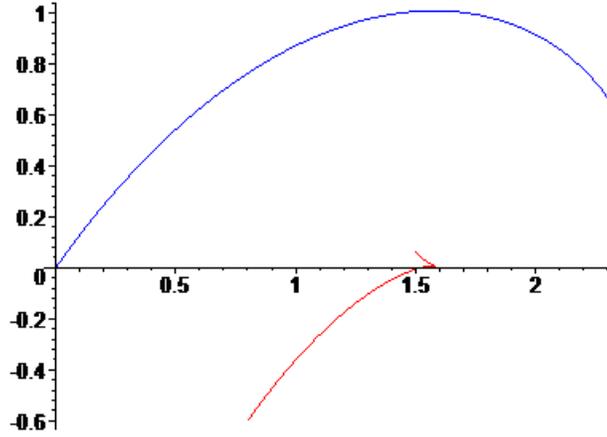


Figura 2.11: En rojo la curva offset con distancia $d = 1$ de la curva cúbica en azul con hodógrafo pitagórico del Ejemplo 2.4.2 apartado E contruida mediante las ecuaciones anteriores para $t \in [0, 1]$.

y se han visto las propiedades más útiles para diversas aplicaciones. Esto último da lugar a un mayor estudio y evaluación de la utilidad práctica de estas curvas polinómicas.

La noción de hodógrafo pitagórico para curvas polinómicas planas tiene generalizaciones directas a otras formas geométricas. Resumimos brevemente varias de estas.

Curvas Racionales. La curva racional $r(t) = \left(\frac{X(t)}{W(t)}, \frac{Y(t)}{W(t)} \right)$ tiene el hodógrafo:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{W(t)X'(t) - W'(t)X(t)}{W^2(t)}, \\ y'(t) &= \frac{W(t)Y'(t) - W'(t)Y(t)}{W^2(t)}. \end{aligned}$$

Nos interesan aquellos casos donde los polinomios $W(t)X'(t) - W'(t)X(t)$ y $W(t)Y'(t) - W'(t)Y(t)$ son componentes de la tripleta pitagórica por lo que,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{(W(t)X'(t) - W'(t)X(t))^2 + (W(t)Y'(t) - W'(t)Y(t))^2}}{W^2(t)}$$

se reduce a una función racional del parámetro t . Claramente, $W(t)X'(t) - W'(t)X(t)$ y $W(t)Y'(t) - W'(t)Y(t)$ deben ser de la forma $w(t)[u^2(t) - v^2(t)]$ y $2w(t)u(t)v(t)$.

Curvas Espaciales. Una curva polinómica alabeada $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tiene un hodógrafo $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Nos interesan los casos en las cuales los tres elementos de este hodógrafo dan lugar a un polinomio $\sigma(t)$ en la función

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}.$$

S sabe que las componentes del hodógrafo son expresadas en términos de los cuatro polinomios reales $h(t)$, $u(t)$, $v(t)$ y $w(t)$ en la forma:

$$\begin{aligned} x'(t) &= h(t)[u^2(t) - v^2(t) - w^2(t)], \\ y'(t) &= 2h(t)u(t)v(t), \\ z'(t) &= 2h(t)u(t)w(t). \end{aligned}$$

es, evidentemente, una condición suficiente, por lo que $\frac{ds}{dt} = \sigma(t) = h(t)[u^2(t) + v^2(t) + w^2(t)]$.

Superficies. Para una superficie polinómica paramétrica $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, el análogo a la función $\frac{ds}{dt} = \|r'(t)\|$ para una curva plana es:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u \partial v} = \|r_u \times r_v\| = \sqrt{(x_u y_v - x_v y_u)^2 + (y_u z_v - y_v z_u)^2 + (z_u x_v - z_v x_u)^2}, \quad (2.8.1)$$

donde las derivadas parciales respecto a $u(t)$ y $v(t)$ se denotan con los subíndices correspondientes. La integral de la ecuación anterior sobre algún dominio paramétrico $(u, v) \in \Omega$ da el área de superficie A_Ω correspondiente, mientras que el vector normal a la superficie se define como,

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}.$$

Por lo tanto, nos interesan las tripletas de los polinomios $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ de modo que el argumento del radical en (2.8.1) es el cuadrado de algún otro polinomio $\sigma(u, v)$. Si además, $\sigma(u, v) > 0$ en todo el plano real, la

superficie offset $r_o(u, v) = r(u, v) + d\mathbf{N}(u, v)$ sería racional. Esto es una perspectiva especialmente atractiva ya que el problema de aproximar de forma fiable las superficies offsets es cualitativamente más difícil que en el caso de la curva plana, [6].

Bibliografía

- [1] P. Bézier. *Numerical Control- Mathematics and Applications*. Wiley, New York, 1972.
- [2] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [3] Cox, Little and O'Shea. *Ideals, Varieties and Algorithms*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [4] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, New York, 1988.
- [5] J. M. Cordero, J. Cortés. *Curvas y Superficies para modelado geométrico*. Ra-Ma, Madrid, 2002.
- [6] R. T. Farouki. The Approximation of Non-Degenerate Offset Surfaces. *Comput. Aided Geom. Design* **3** (1986), 15-43.
- [7] R. T. Farouki and C. A. Nelf. Algebraic Properties of Plane Offset Curves. *Comput. Aided Geom. Design* **7** (1990), 101-127.
- [8] R. T. Farouki and T. Sakkalis. Pythagorean Hodographs. *IBM J. Res. Develop* **34** (1990), 736-752.
- [9] K. K. Kubota. Pythagorean Triples in Unique Factorization Domains. *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 503-505.
- [10] G. Salmon *A Treatise on the Higher Plane Curves*. Chelsea, New York, 1879 (preprint).
- [11] R. J. Walker. *Algebraic Curves*. Springer-Verlag, New York, 1978.