Fedezzük fel a megoldást: keressünk mintát!

Kónya Eszter – Kovács Zoltán
Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar – Nyíregyházi Egyetem

Az MTA Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatásával egy olyan kutatási programot dolgoztunk ki, melyben a problémamegoldó gondolkodás sajátosságait vizsgáljuk az alsó tagozatos kortól kezdve tanárjelöltekkel bezárólag különböző képességű csoportokban. Dolgozatunkban egy olyan problémára adott tanulói válaszokat elemzünk, amely mindegyik korosztály számára valós problémaszituációt jelenthet. Kutatásunk elsősorban a tanulók modellalkotó és szabályfelismerő képességeiről ad képet, általánosabban arról, hogy a sorozatképzés, szabályfelismerés (összefoglalóan mintakeresés) és a megalkotott szabály indoklása hogyan vezet felfedezéshez. Külön vizsgáljuk azt is, hogy a probléma különböző típusú reprezentációi hogyan befolyásolják a problémamegoldás folyamatát.

Kulcsszavak: *probléma alapú tanulás, mintakeresés, reprezentáció, definiált sorozat, induktív gondolkodás*

Bevezetés

Dolgozatunk egyik kulcsfogalma, a felfedezésen alapuló (felfedeztető) tanulás egyrészt folyamatosan gazdagodó fogalmi struktúraként van jelen mind a matematika didaktikai, mind a neveléstudományi irodalomban, másrészt terminológiai és fordítási viták is kísérik használatát (Csíkos, 2010), ezért mindenekelőtt tisztáznunk kell, hogy milyen értelemben használjuk ezt a fogalmat. *Paul Ernest* munkája (1991) a felfedeztető módszer (*inquiry method*) három formáját különbözteti meg: az irányított felfedezést (*guided discovery*), a problémamegoldást (*problem solving*) és a kutatásalapú tanulást (*investigatory approach*). A különbségtétel alapja a tanulói és a tanári szerep. A problémamegoldás jellemzéseként a tanár szerepét a probléma kitűzésében, a tanuló szerepét a probléma saját erőből történő megoldásában látja a szerző. A kutatásalapú tanulástól elsősorban a tanári szerep különbözteti meg, ahol a tanár csak a probléma szituációt határozza meg, magát a problémát a tanuló fogalmazza meg, mint ahogyan a probléma megoldási kísérlete is a tanuló feladata. Az irányított felfedezésben a tanuló befogadó, tanárt követő szerepe dominál. A neveléstudományi irodalom ugyanakkor különbséget tesz a problémamegoldás (*problem solving*) és a problémaalapú tanulás (*problem based learning*) között, utóbbit önszabályozó tanulói folyamatként mutatja be (Molnár, 2004). Dolgozatunk szóhasználatához *Csíkos Csaba* meghatározása áll legközelebb: „A matematika területén a problémaalapú tanulás azt jelenti, hogy a tanulónak matematikai problémahelyzetet kell elemezniük, saját és társaik gondolatmenetéhez kritikusan kell viszonyulniuk, és meg kell tanulniuk elmagyarázni és igazolni gondolatmenetüket." (*Csíkos*, 2010. 53. o.) Az általunk vizsgált szituációt az előbbi meghatározás mindhárom eleme jellemzi, így kutatásunk leírásához megfelelő fogalmi keretet szolgáltat.

A felfedezésen alapuló tanulás modern elméletének egyik kifejtője *Jerome S. Bruner*, aki szerint a tanuló a felfedezésen alapuló tanulás során kutatóként viselkedik, és a tanulás, problémamegoldás lehetőségek felkutatásán keresztül történik (*Bruner*, 1974). A magyar matematikadidaktikai hagyományoknak fontos eleme a felfedezésen alapuló tanulás, amely szoros kapcsolatban van az induktív gondolkodással, vagy a pólyai aktív tanulás alapelvével: „Eredményes lesz a tanulás, ha a tanuló maga találja ki az elsajátítandó tananyag akkora hányadát, amekkorát az adott körülmények között egyáltalán lehet" (*Pólya*, 1985. 114. o.), így *Bruner* konstruk-

DOI 10.31074/gyn201817685

Kónya Eszter: orcid.org/0000-0003-2871-8412
Kovács Zoltán: orcid.org/0000-0002-7359-9435

tivista elméletéhez direkt módon kapcsolódnak *Pólya* heurisztikával és induktív gondolkodással kapcsolatos tézisei (Pólya, 1988). A felfedezésen alapuló tanulás a közoktatási gyakorlatban markánsan a *Varga Tamás* nevével fémjelzett komplex matematikatanítási kísérletben alapelvként jelenik meg. A komplex matematikatanítási kísérlet egyik fontos hatásának látjuk, hogy ennek az elvnek finomítása, továbbfejlesztése, azóta is jelen van a matematikatanítás és -tanulás mindennapi gyakorlatában. Ezen a helyen *C. Neményi Eszter* tantárgy-pedagógiai munkáját emeljük ki, melynek az egyik fókuszpontja a tanulói felfedezés támogatása elsősorban a szabályfelismerő képesség fejlesztésén keresztül (C. Neményi, 1999).

A téma kutatóiban folyamatosan felvetődnek szakmai és etikai kérdések is a felfedezéses tanulással kapcsolatban. Lehet-e önálló (vagy irányított) felfedezést elvárni minden tanulótól, érthető-e mindenki számára a példák és ellenpéldák szerepe, nem vezethet-e a felfedezésen alapuló tanulás értelem nélküli tanuláshoz, ahol tehát a felfedezés végeredménye nem kap kiemelt szerepet a felfedezéshez vezető úttal szemben, egyáltalán szabad-e a felfedezéses tevékenységet értékelni. Ezekre a dilemmákra csak úgy lehet megnyugtató választ adni, ha a felvetett problémákat tudományos alapossággal megvizsgáljuk. Minél jobban megismerjük a tanulók problémamegoldó gondolkodásának sajátosságait a különböző életkorokban, illetve minél alaposabban elemezzük, hogy osztálytermi környezetben mitől lehet hatékony a felfedezéses matematikatanítás, annál biztosabban tudjuk alkalmazni ezt a módszert.

A kérdések tanulmányozására a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatásával egy kutatási programot dolgoztunk ki, melyben a problémamegoldó gondolkodás sajátosságait vizsgáljuk az alsó tagozatos kortól kezdve tanárjelöltekkel bezárólag különböző képességű csoportokban. Kutatásunk egyik alprogramjában, amely jelen munka tárgya is, olyan problémára adott tanulói válaszokat dolgoztunk fel, amely mindegyik korosztály számára valós problémaszituációt jelenthetett. A probléma kézenfekvő matematikai modellje sorozattal adható meg, többféle módon is. Így kutatásunk eredménye elsősorban a tanulók modellalkotó és szabályfelismerő képességeiről ad képet, általánosabban arról, hogy a sorozatképzés, szabályfelismerés (összefoglalóan mintakeresés) és a megalkotott szabály indoklása hogyan vezet felfedezéshez. Ebben a kontextusban felfedezésen azt értjük, hogy a tanuló nem tanári magyarázatot követve jut el a probléma megoldásához, hanem önállóan. Külön vizsgáltuk azt is, hogy a probléma különböző típusú reprezentációi hogyan befolyásolják a problémamegoldás folyamatát.

A kutatási módszer a tanulók gondolkodásának megfigyelése és elemzése volt. 2016 őszén és 2017 tavaszán végzett keresztmetszeti kutatásunkban minden tanulói csoportot beleszámítva 155 írásbeli munkát és 16 (a 4–11. évfolyamok mindegyikéről két-két) videón rögzített klinikai interjút dolgoztunk fel. Az írásbeli munkákat az alkalmazott problémamegoldási stratégiák alapján elemeztük, kiemelt figyelmet fordítva a mintakeresési stratégiára. Az interjúk kiértékelésénél a fenti szempontokat kiegészítettük egy továbbival, amely különböző típusú reprezentációinak megjelenésére vonatkozott.

Jelen dolgozatban két-két negyedikes és ötödikes, jó matematikai képességekkel rendelkező tanuló teljesítményét elemezzük a velük készített interjúk alapján. A tanulók egy nagyvárosi, matematikai tehetséggondozásban hagyományokkal és országos szintű eredményekkel rendelkező iskolába járnak. Az interjú résztvevőit saját szaktanáruk jelölte ki, kérésünknek megfelelően, az átlagostól jobb képességűek közül. A vizsgálatba bevont tanulók ilyen módon történő kiválasztásával arra törekedtünk, hogy behatároljuk az egyes korosztályok életkori lehetőségeit az adott probléma megoldásának vonatkozásában. Feltehető ugyanis, hogy a vizsgált életkorban az átlagos tanulói gondolkodás nem fejlettebb az interjúban szereplőkénél.

A kutatás elméleti háttere

A mintakeresés mint problémamegoldási stratégia

Kutatásunk keretében olyan problémát használtunk, amely nyílt volt abban az értelemben, hogy nem a probléma megadott megoldásáról kellett bizonyítani, hogy az helytálló, hanem a megoldást meg kellett sejteni, azt szavakkal, vagy szimbólumokkal megfogalmazni, majd helyességét bizonyítani. A nyíltság megjelenik ott is, hogy magát a sejtést is többféle formában lehetett megfogalmazni. A fiatalabb korosztály számára lényeges, hogy pusztán aritmetikai módon meg lehessen fogalmazni az összefüggést, míg idősebb korosztályban már lehetséges az algebrai gondolkodásmód, az algebrai forma. A „bizonyítás" alatt nem feltétlenül matematikai értelemben vett teljes értékű bizonyítást értünk, hanem az életkornak megfelelő különböző szintű érvelést, magyarázatot, amely lehet akár egyetlen konkrét példán bemutatott indoklás. A problémamegoldás szempontjából az első akadály a sejtés megfogalmazása, ennek az akadálynak a leküzdéséhez vezethet a mintakeresés mint problémamegoldási stratégia. „Valamit megsejteni azon múlik, hogy képesek vagyunk-e mintát vagy analógiát felismerni; más szavakkal, képesek vagyunk-e általánosítani" (*Mason, Burton és Stacey*, 2010. 73. o.). Ugyanitt a szerzők háromszavas „ökölszabályt" adnak a gyakorlati megvalósításhoz: *try* (próbáld ki), *maybe* (talán), *why* (miért). Ennek a folyamatnak a részletesebb kifejtésére több munka is vállalkozik. Például Rivera (2013) a minta általánosítását olyan komplex tevékenységként írja le, amely egy felismert struktúra konstruálását, kifejezését és igazolását foglalja magában. Az igazolás vagy „bizonyítás" módja a tanulók életkorától és matematikai képzettségétől függően eltérő lehet: történhet konkrét példákkal végzett, de általános lépésekből álló eljárással, deduktív levezetéssel vagy teljes indukcióval.

Mi a kutatásunk során a következő, ötlépcsős modellt használtuk:

1. Numerikus tapasztalat gyűjtése, elrendezése.
2. A felismert minta követése, akár általános szabály megfogalmazása nélkül.
3. Sejtés megfogalmazása, azaz plauzibilis szabályszerűséget keresünk az adatainkban.
4. Próba, azaz újabb numerikus példával meggyőzőbbé tesszük a sejtést, vagy elvetjük azt.

Ezek a mintakeresési stratégia induktív, tapasztalaton alapuló lépései.

5. Bizonyítás, annak indoklása, hogy a megsejtett szabály mint matematikai modell miért felel meg a probléma által definiált matematikai háttérnek.

Az ötödik lépés az induktív szakasz deduktív lezárása.

A mintakeresés stratégiája feltételezi, hogy a tanulónak már van tapasztalata plauzibilis minták felfedezésében. Ennek legegyszerűbb formája, amikor adott számsorozathoz, rajzhoz, vagy tevékenységhez olyan szabályt kell keresni, mely a sorozat megadott tagjaira illik, s a talált szabály alapján a sorozatot folytatni kell. Egy példával illusztráljuk a plauzibilis mintakeresés feladatát:

Keressünk szabályt a következő egészekből álló számsorozathoz: 1, 2, 4, 7, …

Matematikai szempontból a sorozat következő tagja bármilyen egész szám lehet, azonban nem azt kérdezzük, hogy mi a sorozat következő tagja, hanem azt kérjük, hogy találjunk egy lehetséges szabályt a sorozathoz. Ilyen szabály például, hogy a sorozat negyedik tagjától kezdve a következő tag az előtte levő három tag összege: 1, 2, 4, 7, 13, …. Az is megfelelő szabály azonban, hogy a sorozat második differenciája 1, azaz a folytatás most 1, 2, 4, 7, 11, …. Alsó tagozatban is használatos terminológiával: egy változó különbségű sorozat első négy tagjáról van szó, ahol a szomszédos tagok különbsége rendre 1; 2; 3; …. Az így kapott sorozat már állandó különbségű sorozat (számtani sorozat).

A sorozatokkal kapcsolatos tevékenységek fejlesztő hatása

A matematika tananyagban a sorozatokkal kapcsolatos tevékenységeknek *C. Neményi Eszter* (1999) szerint három féle célja, szerepe van. *Ezek:*

1. A modellszerep bemutatása, azaz a sorozat a valódi probléma matematikai modellje
2. Összefüggés-felismerő képesség fejlesztése
3. Egyszerű elemi ismeretek feltárása a matematikai fogalommal kapcsolatban

Sokféle probléma megértéséhez, megoldásához egy-egy sorozat szolgáltatja a matematikai modellt, azaz a megértést, vagy megoldást egy alkalmas sorozat megtalálása jelenti: ezt értjük a sorozat *modellszerepén*. A megoldásnak ez az útja induktív út, az egyes helyzetek, állapotok megfigyelésétől halad a mintafelismerés és az általánosítás irányába. Ilyen esetekben a felismert minta mindig definiált, éppen a valós szituáció az, ami a mintát és az azt leíró sorozatot egyértelművé teszi. A valós szituációból nyert számsorozat folytatásával, a minta felfedezésével a probléma még nem megoldott. A modell akkor válik teljessé, ha a sorozatot kapcsolatba hozzuk a valóságos problémaszituációval, azaz ha azt is megmutatjuk, hogy a felismert sorozat valóban kifejezi a probléma matematikai hátterét. Az is előfordul, hogy különböző képzési szabályokat ismerünk fel és követünk, ám ezek, amennyiben helyesen írják le a problémát, ugyanahhoz a sorozathoz vezetnek. Tapasztalati függvények, sorozatok alkotását, értelmezését, a változások leírására szolgáló *matematikai modell keresését* a NAT[1] az elsőtől a tizenkettedik évfolyamig előírja, mint a megismerésre vonatkozó fejlesztési feladatot.

A teljes közoktatási folyamaton átívelő fejlesztési célként fogalmazza meg a NAT a sorozatokra vonatkozó összefüggések megalkotását is, mint az alkotás és kreativitás fejlesztésének eszközét. Az összefüggés-felismerő képesség fejlesztés *C. Neményi* munkájának is központi eleme. „Az összefüggés felfedezése tájékozódással, próbálgatással kezdődik és a talált szabály kifejezésével folytatódik. A megtalált szabály kifejezése történhet egyszerűen a sorozat folytatásával, ellenpéldák kizárásával, szavakkal vagy szimbólumokkal történő megfogalmazásával is. Maguk a sorozat tagjai többféle módon reprezentálhatók. Tárgyi tevékenységgel, ábrákkal, számokkal, szimbólumokkal. (*C. Neményi*, 1999. 6. o.).

A sorozatokkal kapcsolatos problémák az életkortól függően hordozhatnak matematikai ismereteket. A dolgozatunkban bemutatott problémához szükséges matematikai ismeret hatodik osztályig a különbségi sorozat képzése, illetve természetes számokból képezett állandó differenciájú sorozat (azaz számtani sorozat, amelyet ekkor még természetesen nem nevezünk néven) összegének meghatározása, megoldási stratégiától függően. Az ismeretek skálája azonban nagyon tág a vizsgált problémánál, a másik végén az állandó második differenciájú sorozatok zárt alakjának meghatározása szerepel.

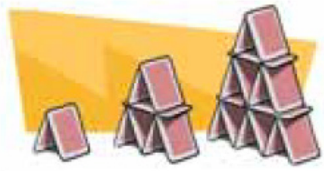
Bruner reprezentációelmélete

Egy probléma megértésének elengedhetetlen feltétele, hogy azt a tanuló valamilyen reprezentációs módban ábrázolja. Ez lehet tárgyi tevékenység (enaktív sík), rajzos tevékenység (ikonikus sík), történhet szimbólumokkal (szimbolikus sík). A szimbólumok lehetnek számok, betűk, egyéb jelek, amelyek jól fejezik ki a feltárt, feltárható összefüggéseket. Természetes, hogy az egyes reprezentációs módok nem elkülönülten jelennek meg a problémamegoldó tevékenység során, de az jól megfigyelhető, hogy a gondolkodás egyes fázisaiban melyik reprezentációs forma dominál. Éppen ezért lényeges kérdés az egyes reprezentációs módok között váltás képessége. Megfigyelési szempontjaink közé tartozik egyrészt, hogy melyik síkon képes hatékonyan gondolkozni a tanuló, képes-e magától váltani a síkok között, amennyiben az egyik módban nem boldogul, rájön-e, hogy a probléma áthelyezése segíthet, illetve, hogy a tanár által kínált reprezentációs módra át tud-e állni.(*Bruner*, 2004).

[1] A Kormány 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról.

A vizsgált problémaszituáció: Építsünk kártyavárat!

Egyik ötödikeseknek szóló tankönyvben (*Wintsche*, 2016) található a következő probléma: Építsetek kártyavárat a képen látható módon! Beszéljétek meg, hogy hány lap kell az 1, 2, 3, … szintes vár elkészítéséhez! (A tankönyvben a feladathoz az 1. ábra van megadva.)



1. ábra: A tankönyv szemléltető ábrája a problémához

A probléma kitűzését korosztályonként módosítottuk. Lényeges változás volt, hogy a különböző korosztályokban más-más kártyavárra kérdeztünk rá: „alacsony” várra, pl. ötszintesre, „magas várra” pl. harmincszintesre, vagy általánosan az n-szintes várra. Minden esetben csak egyetlen kártyavár fotóját adtuk meg, a háromszintes várét, ellentétben a tankönyvi ábrával. Ezt a módosítást azért tartottuk szükségesnek, hogy ne sugalljuk rögtön a probléma kitűzésekor a sorozatképzés ötletét. Sorozatképzésre ugyanis legalább két lehetőség van, ezek mint jellemző összeszámlálási stratégiák ténylegesen meg is jelentek a kísérlet során:

1. Az n-edik kártyavárhoz szükséges lapok számából álló sorozat, melynek kezdő tagjai 2, 7, 15, 26. Ez egy olyan sorozat, melynek második differenciája 3 és a sorozat -edik tagját keressük.
2. Az n-szintes kártyavár egyes szintjeinek megépítéséhez szükséges lapok számából álló sorozat, melynek első három tagja 2, 5, 8, ha felülről lefelé haladunk, s a vertikális helyzetű lapokat „tetőnek” fogjuk fel és nem „padlónak”. Ez egy 3 differenciájú számtani sorozat, melynek összegét keressük.

A probléma kapcsán több kutatási kérdést tettünk fel:

1. *A probléma bruneri értelemben vett reprezentációi hogyan befolyásolják a problémamegoldást?* Ebbe a kérdésbe beleértjük azt is, hogy a megoldás érdekében képes-e a reprezentációk közötti váltásra a tanuló. A várat meg lehet építeni (hatodik osztállyal bezárólag a kártyavárat ténylegesen megépíttettük a tanulókkal), le lehet rajzolni, és meg lehet adni az előző két stratégiának megfelelően a lapok számának sorozatát, így jelen van mind a háromféle bruneri reprezentációs mód (enaktív, ikonikus, szimbolikus).
2. *Megjelenik-e valamilyen problémamegoldási stratégia a válaszadás során, s ha igen hogyan lehet ezeket jellemezni?* Itt is fontos kérdés, hogy vált-e a tanuló stratégiát a megoldás folyamán. A stratégia függhet a kérdéstől, más lehet, ha alacsony, magas, vagy „általános” várra kérdezünk rá.
3. *Mi jellemzi az adott korosztályban a mintakeresést mint általános problémamegoldó stratégiát?* A sorozat létrehozása, tanulmányozása után történik-e szabályfelismerés, szabálykövetés, illetve a felfedezett szabály indoklása?

Tanulmányunkban két negyedikes (Ádám és Dávid, 10 évesek) és két ötödikes (Gergő és Judit, 11 évesek) tanuló[2] klinikai interjú formájában adott megoldását elemezzük. Az interjúk mindegyike 12–13 perces, ezekről videófelvételek készültek.

A problémamegoldás folyamata

Negyedik osztályban a tanulók feladatlap nélkül, csak a tanár instrukciói alapján dolgoztak. A tapasztalatokat az egyes kérdésekre adott tanulói válaszok segítségével mutatjuk be.

1. *Építsd meg a képen látható háromszintes kártyavárat!*

   Mindkét tanuló könnyen megépítette a fénykép alapján a várat, a problémaszituáció megértése nem okozott gondot. Számlálással megállapították, hogy a vár 15 lapból áll.

2. *Hogyan egészítenéd ki négyszintesre? Hány lapot tennél hozzá?*

   A háromszintes vár négyszintesre történő kiegészítését, amelyhez 11 kártyalap kell, a tanár nem engedte ténylegesen elvégezni, csak a kiegészítéshez kért lapokat adta oda a tanulóknak. A felvételeken jól látszik, hogy gondolatban továbbépítették a várat: szemükkel követve, az egyes lépéseknek

2 A tanulmányban fiktív nevek szerepelnek.

megfelelően sorolják, hogy ehhez hány lapra lenne szükségük. Az első két lépésben a kezükkel is mutatják az éppen kért lapok helyét a háromszintes vár mellett.

3. *Hány lapot kérsz még, hogy ötszintes legyen? Hogyan okoskodtál?*

Mivel a négyszintes vár nincs megépítve, most az előző módon nehezebb megválaszolni a kérdést. Önmaguktól nem, de tanári javaslatra a tanulók áttérnek a rajzolásra. Ádám lerajzolja előbb a háromszintes várat, majd az előbb elmondott módon rajzban kiegészíti négyszintessé. Végül helyes választ ad. Dávid egyből az ötszintes várat rajzolja le alulról felfelé haladva, soronként. Az elkészült rajz alapján azonban nem tudja megmondani, hogy a négyszintes várat hány lappal kellett volna kiegészítenie. A tanár arra kéri, hogy színes ceruzával húzza át azokat a lapokat, amiket a négyszinteshez pluszban kell kérnie. Miután kiderül, hogy Dávid nem tudja elkülöníteni a rajznak azt a részletét, amely a négyszintes várnak felel meg, a tanár javaslatára külön lerajzolja a négyszintes várat, és az ábrát színessel ötszintesre kiegészítve állapítja meg, hogy 14 lapra van szükség.

4. *Írd le, hogy hány lapból áll egy egyszintes, kétszintes, háromszintes,* négyszintes, ötszintes vár!

Tanári utasításra a tanulók számokkal leírják az egyes várakhoz szükséges lapok számát. Az egy-, két- és háromszintes várak lapjainak számát az építményt figyelve helyesen adják meg (2, 7, 15 lap). A négyszintes várat mindketten megrajzolják soronként, majd megszámolják a lapokat. Ádám 27-et, Dávid 25-öt kap (a helyes válasz 26). Noha már mindketten tudják, hogy a háromszintes vár 15 lapból áll, és hogy ehhez 11 kiegészítő lap szükséges, ezt nem tudják felhasználni. A helyes értéket mindketten csak többszöri újraszámolás után állapítják meg.

5. *Észreveszel-e szabályszerűséget?*

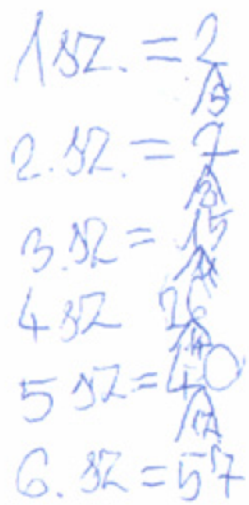
Miután felírták a 2, 7, 15, 26 sorozatot, a tanár a képzési szabály megfogalmazására kéri őket.

Mindkét tanuló felismeri a képzési szabályt, ezt Ádám a következőképpen fejezi ki:

Ádám: Mindig hozzá kell adni hármat ... ahhoz, amit hozzáadtunk. Ötöt adunk hozzá, nyolcat adunk hozzá, tizenegyet adunk hozzá, akkor a következő 14 lesz (a sorozat tagjai fölé írja rendre a különbségeket).
…
Tanár: És el tudod mondani szavakkal, hogy a magasabb várat hogyan építed fel?
Ádám: Egyet mindig mellérakok, (a kezével mutatja az alsó két lapot a rajzon)
Tanár: De mit raksz mellé?
Ádám: Két darab kártyát, aztán felé egyet, aztán még egyszer kettőt, aztán még egyszer egyet, … (mutatja a rajzán) és *ahány szintes, annyiszor kell megismételni.*

Dávid az alábbiak szerint összegzi a tapasztalatait (2. ábra):

Tanár: Mennyit kell még pluszba kérni ahhoz, hogy egy szinttel több legyen?
Dávid: Mindig 3-mal nő.
Tanár: Akkor mi lenne a következő a sorozatban?
Dávid: 17. 17-tel nagyobb, mint az ötszintes. És az 57. A hatszintes.



2. ábra: Dávid feljegyzése az egyes kártyavárakhoz szükséges lapok sorozatáról

A felismert szabály helyességét tanári felszólítás után Ádám az építési folyamatra utalva így magyarázza:

Ádám: Mert a tetejét mindig át kell húzni eggyel, hogy megálljon, és arra még kell kettő.

Dávid nem ad magyarázatot, de a rekurzív szabályt általánosan ő is megfogalmazza:

Dávid: … minden szinthez kell rakni 3-at. Az alsónál csak 2-t.

Az ötödikesek feladatlapon dolgoztak, a problémamegoldás folyamatát a feladatlap kérdései alapján követjük nyomon.

1. *Építs háromszintes várat a* fénykép alapján!

Gergő az alacsonyabb várat rendre kiegészíti, így jut el a háromszintes várig. Judit soronként közvetlenül építi meg. Az elkészült vár négyszintessé való kiegészítéséhez a negyedikesekhez hasonlóan a kész háromszintes várat nézve, gondolatban elvégezve az építést helyesen adják meg a szükséges 11 lapot.

2. *Az egyszintes és a kétszintes várat lerajzoltuk, folytasd a rajzolást a háromszintes várral! Írd a rajzok alá, hogy hány kártyalapból áll a vár!*

3. ábra: A feladatlapon szereplő illusztráció

A háromszintes várat mindketten a kétszinteset oldalról kiegészítve rajzolják le. A kész rajzokon megszámolják a szükséges lapokat és az ábrák alá írják.

3. *Egy négyszintes várat kell megépítened! Mondd meg, ehhez hány lap szükséges!*

Először mindkét tanuló le akarja rajzolni az újabb várat, de a tanár emlékezteti őket, hogy korábban már erről volt szó. Ellentétben a negyedikesekkel, ők már össze tudták kapcsolni a korábban szerzett információkat a kérdés megválaszolásához.

4. Hány lap *szükséges a nyolcszintes várhoz?*

Gergő: … (gondolkodik) Hát, mindig, amennyit hozzáadunk, az kettővel növekszik, mert a tetejére rakunk még egyet [egy szintet], és az két lap.
Tanár: Nézd meg [a számsorozatot], az tényleg kettővel növekszik?
Gergő: Ötöt adunk hozzá, itt meg nyolcat. Nem, 3-mal [növekszik, amit hozzáadunk.]

Gergő a felismert szabályt könnyen alkalmazza és megadja a nyolc-, majd a kilencszintes vár lapjainak számát. Tanári kérdésre a 30-szintes vár lapjainak számát ugyanezzel a rekurzív módszerrel kezdi el számolni, de arra, hogy a 29-szintes várat hány lappal kellene kiegészíteni 30-szintessé, már nem tud válaszolni. Annak ellenére sem, hogy a tanár feleleveníti vele a háromról négyszintesre történő kiegészítés módját. A felismert szabály indoklására nem kerül sor.

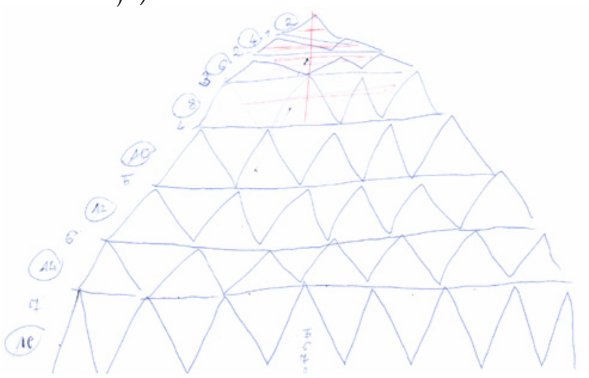
Judit először – helytelenül – a szintek száma és a vár megépítéséhez szükséges lapok száma között egyenes arányosságot feltételez:

Judit: A négyszinteshez kellet 26 lap. És még 4 szintet rá kell rakni ... (hosszabb gondolkodás után) az még 26 lap? … [Bizonytalanul, kérdő hangsúllyal.]

A sejtés ellenőrzéséhez magától felrajzolja a nyolcszintes várat, majd elkezdi megszámolni a lapokat az alsó sorban. Tanári javaslatra leírja soronként a kapott számokat. Ezek alulról fölfelé haladva: 16, 7, 14, 6, 12, 5, 10, 4, 8, 3, 6, 2, 4, 1, 2 (*3. ábra*). A 12 leírásáig mindig egyesével megszámolja a sorban lévő lapok számát, de a 10-et már úgy írja oda, hogy végignéz az korábbi számokon:

Tanár: Hogyan írtad oda azt a 10-et? Nagyon gyorsan odaírtad.
Judit: Észrevettem, hogy mindig kettő-

vel csökken [szintenként a dőlő lapokra gondol], mert egy párt leveszünk mindig belőle (kezével az alsó sor végén lévő párra mutat). És akkor itt is mindig 1-gyel csökken (a vízszintes lapokat mutatja).



4. ábra: Judit rajza a nyolcszintes várról

A felismert szabályt követve soronként leírja a szükséges lapok számát, majd ezeket a számokat összeadva helyes eredményt (100) kap. A tanár emlékezteti a korábbi sejtésére, Judit a következőképpen magyarázza meg, hogy az miért nem volt helyes:

Judit: Akkor arra [gondoltam], hogy még 26, de ez …
Tanár: És miért volt ez rossz vajon?
Judit: Mert, hogy mindig több kell, vagy, … hát, …ha fentről megyünk lefelé, akkor mindig nagyobb lett és akkor úgy több kellett (két kezével mutatja, hogy szélesedik a vár)

Tanári kérésre azt is meg tudja mutatni, hogy hol van a négyszintes vár a nyolcszintesben.

Tapasztalatok

Az interjúk tapasztalatait a kutatási kérdések alapján foglaljuk össze.

1. *A probléma enaktív, ikonikus, szimbolikus reprezentációi hogyan befolyásolják a megoldást?*

A probléma értelmezését tárgyi tevékenység, a háromszintes vár megépítésével segítettük. A vizsgált 10–11 éves tanulóknak ez nem jelentett problémát, ahogyan az sem, hogy a tevékenység tényleges elvégzése nélkül, látva a háromszintes várat, gondolatban folytatva az építkezést egészítsék ki négyszintessé. Az enaktívról az ikonikus síkra történő váltás egyik esetben sem történt meg önállóan. A negyedikes tanulók a tanár javaslatára tértek át erre a reprezentációs módra, mert enélkül nem tudtak válaszolni az ötszintesre történő kiegészítés kérdésére. Ugyancsak a tanár utasítására jegyezték le a részeredményeiket a rajzok alá. Az ötödikesek a feladatlapon szereplő második utasítás alapján tértek át a rajzolásra, és ezzel egyidejűleg az eredmények számokkal történő lejegyzésére. A gondolkodás áthelyezése az ikonikus illetve a szimbolikus síkra ugyanakkor problémamentes volt. A megoldás során előfordult, hogy váltani kellett oda-vissza a reprezentációs módok között. A sorozat képzési szabályának megfogalmazásánál a szimbolikus és az ikonikus síkon párhuzamosan kellett gondolkodni. Ez mind a négy tanulónak sikerült. Megfigyelésünk összhangban van *Ambrus András* azon megállapításával, hogy az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldás hatékonyságát (Ambrus, 1995). A felismert szabály indoklása során a számsorozat megfigyeléséből kiindulva Ádám (10) és Judit (11) a manipulatív tevékenységet felidézve a rajzon mutatta meg, hogy a második különbségek miért egyenlők 3-mal. A másik két tanuló erre a kérdésre nem adott választ.

2. *Megjelenik-e valamilyen problémamegoldási stratégia a válaszadás során, s ha igen hogyan lehet ezeket jellemezni?*

A manipulatív és a rajzos tevékenység során kétféle építési stratégiát figyeltünk meg: Az egyik egy rekurzív stratégia, az alacsonyabb vár eggyel magasabbra való *kiegészítése* úgy, hogy a szükséges lapokat szintenként melléhelyezik el (pl. Gergő építkezése és rajza). A másik módszerrel közvetlenül az adott szintes vár állítható elő úgy, hogy szintenként egyszerre tesszük le a szükséges lapokat. Ez a korábban említett második típusú sorozatképzésnek felel meg. Olyan rekurzív módszerrel nem találkoztunk, amely az alacsonyabb vár rajzát egy alsóbb szint „alárajzolásával" egészítette volna ki. Ennek valószínűleg az az oka, hogy a tárgyi síkon ez az eljárás nem kivitelezhető.

A lapok összeszámlálása mindig egyesével, soronként történt. Egy alkalommal, Juditnak a nyolcszintes várnál javasolta a tanár, hogy egy-egy sor lapjainak számát írja a rajz mellé. Ezzel segítette a dőlt és vízszintes lapok sorozatának felismerését, és a számlálás helyett a szabálykövetés után a kapott tagok összeadását. Mind a négy tanuló esetében megtörtént a háromszintes vár lapjainak összeszámolása (15 lap) és annak megállapítása, hogy a négyszintessé történő kiegészítéshez 11 lap szükséges. Ennek ellenére egyik tanuló sem használta ezt fel magától a négyszintes vár lapjainak megállapításához. Az ötödikesek, miután a tanár erre emlékeztette őket, könnyen és kétkedés nélkül alkalmazták ezt az összefüggést, a negyedikesek azonban nem tudták felhasználni ezeket az információkat az adott kérdés megválaszolásához. Annak ellenére, hogy többször is eltérő lett a négyszintes vár lapszámára számlálással kapott érték, nem fogadták el ellenőrzésként a 15+11 összeg eredményét, hanem ismételten újrakezdték a számlálást. Jól kitűnik tehát, hogy a szükséges lapok számát kétféle módon meghatározva a negyedikesek nem érzékelték, hogy ugyanarra az eredményre kell jutniuk.

A sorozat újabb tagját, akár a következő tagról (*öt*szintes vár), akár egy közeli, de nem közvetlenül következő tagról (nyolcszintes vár), illetve egy távoli tagról (30-szintes vár) van szó, egyaránt rekurzív módon határozták meg. Az ötödikes Gergő csak a számsorozat folytatásával kapott eredményt, a többi tanuló azonban a szükséges rajzokat is elkészítette.

3. *Mi jellemzi az adott korosztályban a mintakeresést mint általános problémamegoldó stratégiát?*

Mind az n-edik kártyavárhoz szükséges lapok számából álló sorozat (2, 7, 15, 26, …), mind az -szintes kártyavár egyes szintjeinek megépítéséhez szükséges lapok számából álló sorozat (2, 5, 8, 11, …) előfordult a tanulók megoldásaiban. Az első típusú sorozatot mind a négy tanuló használta, a második típusút pedig egy tanuló. A szabályfelismerés a számsorozat alapján megtörtént, mindegyik tanuló rájött, hogy a különbségek sorozata 3-mal nő az első típusú sorozatban. Ennek megfogalmazása pontatlan, utal a sorozat első néhány tagjára: „mindig hozzá kell adni 3-at" (Ádám), „mindig 3-mal nő" (Dávid), 3-mal [növekszik, amit hozzáadunk] (Gergő) és „mindig kettővel csökken … itt is mindig 1-gyel csökken (Judit). Elgondolásukat a sorozat konkrét tagokkal történő folytatásával tették egyértelművé.

A felismert szabály indoklása, ti., hogy hol ez a 3 lapból álló növekmény az építményben, Ádám és Judit esetében sikerült. Mindketten az építkezés folyamatával indokoltak: „Mert a tetejét mindig át kell húzni 1-gyel, hogy megálljon, és arra még kell 2." (Ádám), és „Észrevettem, hogy mindig 2-vel csökken [szintenként a dőlő lapokra gondol], mert egy párt leveszünk mindig belőle (kezével az alsó sor végén lévő párra mutat). És akkor itt is mindig 1-gyel csökken. (a vízszintes lapokat mutatja)" (Judit). Megemlítendő még Judit magyarázata, aki az első, egyenes arányosságra vonatkozó sejtésének helytelenségét a nyolcszintes vár megrajzolásával ellenőrizte, és – igaz, csak tanári kérdésre –magyarázta is, megmutatva a rajzon, hogy az hogyan foglalja magában az alacsonyabb várat.

Összegzés

A három reprezentációs sík használata nem idegen a vizsgált 4–5. osztályos (10–11 éves) tanulóktól. A manipulatív síkon magabiztosan mozognak, a probléma megértését ez a reprezentációs mód nagyon jól segíti. Az ikonikus síkra önmaguktól ugyan nem térnek át, ám tanári javaslatra ezt problémamentesen képesek megtenni. A tapasztalatok számsorozat formájában történő leírása szintén tanári utasításra történik, ugyancsak probléma nélkül. A fiatalabbaknál a reprezentációs módok közötti váltás nehézkesebb, az idősebbek mindkét irányban könnyen váltanak érvelés közben.

A problémamegoldásban használt stratégiák közül kiemelhető a konkrét esetek vizsgálata, a lapok számának meghatározása egyszerű leszámolással.

A sorozat folytatása a tárgyi és rajzos tevékenység folyamatát követve rekurzív módon történik, a felismert szabály melletti érvelés jellemzően az építkezési folyamatra utal. A mintakeresés mint problémamegoldó stratégia két esetben a minta konkrét alkalmazásával lezárul, két esetben pedig megtörténik a minta igazolása is a tárgyi tevékenységre támaszkodva.

A kiinduló probléma tehát jól szolgálja a sorozat modellszerepének megismerését és az induktív gondolatmenet a reprezentációs módok váltogatásával együtt hozzájárul a tanulók összefüggésfelismerő képességének fejlesztéséhez.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Felhasznált irodalom

Ambrus András (1995): *Bevezetés a matematikadidaktikába.*: ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

Bruner, Jerome S. (1974): *Új utak az oktatás elméletéhez.* Gondolat, Budapest.

Bruner, Jerome (2004): *Az oktatás kultúrája.* Gondolat, Budapest.

C. Neményi Eszter (1999): *Relációk, függvények, sorozatok. A törtszám. A negatív szám.* Budapesti Tanítóképző Főiskola, Budapest.

Csíkos Csaba (2010): Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés. *Iskolakultúra,* **20.** 12. sz., 52–60.

Ernest, P. (1991): *The Philosophy of Mathematics Education.* Routledge, London.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010): *Thinking Mathematically.* Pearson, Harlow.

Molnár Gyöngyvér (2004): Problémamegoldás és probléma-alapú tanulás. *Iskolakultúra***, 14.** 2. sz., 12–19.

Pólya György (1985): *A problémamegoldás iskolája, II. kötet.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Pólya György (1988): *A matematikai gondolkodás művészete I. Indukció és analógia.* Gondolat, Budapest.

Rivera, F. (2013): *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics.* Dodrecht, Heidelberg, Springer, New York, London. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2712-0

Schreier, M. (2012): *Qualitative Content Analysis in Practice.* Sage, Los Angeles, London, New Delhi, Singapore, Washington DC.

Wintsche Gergely, Gedeon Veronika, Korom Pál József, Számadó László és Tóthné Szalontay Anna (2016): *Matematika 5. Újgenerációs tankönyv.* Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.

Let's discover the solution: look for a pattern!

With the support of the Content Pedagogy Research Program of the Hungarian Academy of Sciences, we have developed a research program that examines the characteristics of problem-solving thinking in different age groups. In our paper, we analyse students' responses to a question that can represent a proper problem for each age group. Our research focuses primarily on students' capabilities of modelling and recognizing patterns. Our question is the following: how does recognizing patterns and arguing for them lead to discovery. We also examine how do different types of representations of the same problem affect the problem solving process.

Keywords*: problem based learning, patterning, representations, definite pattern, inductive reasoning*

Kónya Eszter és Kovács Zoltán (2018): Fedezzük fel a megoldást: keressünk mintát! *Gyermeknevelés,* **6.** 1. sz., 76–85.