

УДК 539.3:629.833: 621.9.042

Н.Н. ТКАЧУК, НТУ “ХПИ”

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЛ С КИНЕМАТИЧЕСКИ ГЕНЕРИРУЕМЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В роботі досліджується питання створення керованих геометричних і скінченно-елементних моделей тіл з поверхнями складної форми. Вивчені можливості їх застосування в єдиному циклі синтезу геометрії тіл, обмежених кінетично генерованими поверхнями, та аналізу їх напружено-деформованого стану.

The paper concerns a question of creating controlled geometrical and finite-element models of bodies with complicated boundary. The ways of their application in the united cycle of bodies' geometry synthesis and analysis of their stain-stress state are studied for the case when the solids are bounded by kinematically generated surfaces.

Введение. В процессе проектирования различных машин и механизмов часто приходится иметь дело с деталями и узлами, имеющими сложную форму. В некоторых случаях она определяется из условий выполнения тех или иных функциональных требований, относящихся к сопряжению отдельных элементов механизма и взаимному их движению. Помимо этого стоит задача обеспечения удовлетворительных эксплуатационных характеристик: высокой прочности, малого тепловыделения и износа трущихся поверхностей. Таким образом, приходится одновременно учитывать целый ряд требований, выражающихся количественными и качественными соотношениями и относящихся к процессам различной физической природы. Так, в частности, при проектировании звеньев силовых и управляющих механизмов транспортных средств, станков, измерительных приборов, приспособлений с требуемыми кинематическими свойствами возникает необходимость обеспечить прочность и жесткость как самих звеньев, так и конструкции в целом. Соответственно, приходится решать связанную задачу, в которой целевые функции и ограничения выражаются относительно кинематических и прочностных характеристик объекта исследований. Эти характеристики определяются взаимопересекающимися множествами варьируемых параметров, а поэтому кинематический анализ и синтез не может быть выполнен отдельно от исследования напряженно-деформированного состояния (НДС), поскольку результаты решения одной части задачи влияют на процесс решения и исходные параметры другой части поставленной задачи.

Наибольшие трудности подобная взаимосвязанность геометрических и прочностных параметров представляет для элементов конструкций сложной формы, в которых под действием рабочих нагрузок реализуется сложное напряженно-деформированное состояние. Для них невозможно определить аналитические зависимости геометрических и прочностных параметров от конструкционных, и, следовательно, напрямую нельзя найти их оптимальный набор, удовлетворяющий выдвигаемым требованиям.

Примером подобной ситуации может служить задача синтеза геометрии зубьев двухпараметрической передачи [1, 2]. Последовательно осуществляемые этапы генерации рабочих поверхностей и анализа контактной прочности связаны между собой вычисляемыми по полученной сетке точек значениями и направлениями главных кривизн. В частности, задача описания геометрической формы кинематически генерируемых поверхностей (КГП) зубьев двухпараметрической передачи, в которой реализуется два независимых вида движения (например, вращение колес и поступательное смещение), сводится к системе нелинейных уравнений, из которых находятся координаты кинематически сопрягаемых точек на поверхностях зубьев каждого из колес. Построенная таким образом сеть точек и вычисленные по ней значения тензоров кривизн составляют исходную информацию для определения НДС в зоне контакта зубчатых колес передачи. Если полученные напряжения недопустимо велики, то приходится изменять геометрию рабочих поверхностей зубьев. Это можно сделать только нацеленным варьированием одного или нескольких исходных параметров и решением новой задачи геометрического синтеза. Таким образом, формируется цикл итерационного уточнения формы взаимодействующих тел [3].

Этот подход применим также для определения проектных форм и параметров многих деталей и узлов со сложной геометрией контактирующих поверхностей, в частности, беговых дорожек гидрообъемных передач радиального типа [4], зубьев зубчатых передач, профилей кулачков, элементов подшипников.

В настоящее время отсутствуют общие методы решения задач геометрического синтеза и анализа напряженно-деформированного состояния деталей сложной формы в рамках единого параметрического описания всех этапов исследования, что, безусловно, сказывается на оперативности их проведения и качестве получаемых результатов. Так, при решении частной задачи определения НДС соприкасающихся тел возникает проблема сквозной передачи информации между различными этапами исследований, поскольку формат ее представления может существенно различаться.

В полной мере трудности согласования форматов представления и передачи данных об объекте проявляются при проведении конечно-элементного моделирования средствами универсальных программных пакетов Pro/ENGINEER, ANSYS НДС сложнопрофильных тел. Широко используемые для построения конечно-элементных моделей (КЭМ) инструменты автоматизированной генерации конечно-элементных сеток наряду с очевидными преимуществами обладают и многими недостатками. Во-первых, имеется весьма ограниченный набор средств управления параметрами конечно-элементной разбивки, часть из которых неприменима для областей со сложной геометрией. Во-вторых, алгоритмы, заложенные в программных пакетах, универсальны и не учитывают особенности геометрии исследуемого объекта, следовательно, конфигурация элементов не всегда будет рациональной. В-третьих, численные результаты (значения перемещений, напряжений и т.д.), полученные с помощью автоматически построенных сеток, трудно встраиваемы в общий цикл исследований и требуют адаптации к остальным этапам исследований.

Иначе говоря, получаемая сетка трудноуправляема средствами, внешними по отношению к пакетам конечно-элементного моделирования, а получаемые результаты трудносочетаемы с внешними процедурами варьирования геометрии. В то же время, данные пакеты обладают высокой функциональностью и широкими вычислительными возможностями, в силу чего их применение фактически является стандартом при численном исследовании напряженно-деформированного состояния объектов сложной формы.

Указанные замечания приводят к необходимости разработки методов и алгоритмов построения конечно-элементных моделей тел, ограниченных КТП. От получаемых КЭМ требуется параметризуемость и связанность с геометрической моделью посредством набора общих параметров. Процедура генерирования конечно-элементной сетки должна быть удобно реализуема в пакетах конечно-элементного моделирования (CAE), сопрягаться со средствами геометрического моделирования (CAD) и управляться специально разработанными приложениями, нацеленными на решение связанных задач синтеза и анализа того или иного класса объектов. Такой подход, с одной стороны, позволяет охватить большое разнообразие конструкций, а, с другой стороны, отличается специализированностью. Время разработки инструмента для нового класса объектов значительно сократится, поскольку алгоритм построения конечно-элементных моделей и средства управления ими не связаны с особенностями геометрии моделируемых тел. Исследователю необходимо сформулировать геометрическую модель и определить ее параметризацию. При этом не возникает необходимости вносить существенные изменения в ранее разработанные средства автоматизированного построения и управления КЭМ.

В статье предлагается технология генерирования конечно-элементных сеток, которая удобно встраивается в общую схему проектирования. На примере решения задач синтеза геометрии рабочих поверхностей двухпараметрических передач и анализа НДС показана реализация следующих этапов:

- анализ методов решения контактных задач для случая взаимодействия сложнопрофильных деталей,
- разработка схемы параметрического описания геометрии и конечно-элементных моделей тел с кинематически генерируемыми поверхностями,
- создание алгоритма генерации топологически регулярных конечно-элементных сеток,
- оценка качества получаемых конечно-элементных моделей.

Анализ методов решения контактных задач. Поскольку поставленная задача включает в себя несколько взаимосвязанных этапов и требует учета различных факторов, рационально применять разные методы для ее решения. Так, наиболее часто используемые аналитические методы, метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) и метод конечных элементов (МКЭ) обладают различными областями применения, оперируют разными исходными данными, имеют разную точность и вычислительную емкость. На каждом классе задач тот или иной метод проявляет как преимущества, так и свои

недостатки.

Например, одно из первых аналитических решений задачи о контакте двух упругих тел, предложенное Герцем [5], по-прежнему используется в инженерных расчетах, т.к. в качестве исходных данных оно требует лишь значения кривизн обоих тел в точке первоначального контакта и позволяет достаточно точно оценить контактную прочность и жесткость посредством небольшого объема вычислений. При этом принимается приближенное описание геометрии и не учитываются реальные краевые условия, заменяемые условием на бесконечности. Принимаются также предположения о виде НДС в обоих телах, исключающем форму контактной площадки, отличную от эллиптической. Трением и перемещениями в общей касательной плоскости пренебрегается. Похожими ограничениями обладают и другие аналитические методы, большинство которых основано на некотором решении задачи Буссинеска. В связи с этим в случае контакта тел сложной формы они могут применяться лишь для оценочных расчетов.

Метод граничных интегральных уравнений обладает большей полнотой и включает в себя значительное число подходов и направлений [6, 7]. Основной особенностью всех постановок МГИУ является меньшая на единицу размерность задачи и, соответственно, дискретной модели. К достоинствам метода относится то, что краевые условия непосредственно входят в разрешающие интегральные уравнения, и их выполнение не является следствием вариационного принципа, как в МКЭ. Более широкому применению этого подхода мешает то, что большинство постановок оперируют с упрощенной геометрией (плоские и осесимметрические задачи, бесконечные тела и др.). Для тел со сложной геометрией необходимо включать геометрические свойства поверхностей в ядро интегральных операторов. Ядра при этом получаются преимущественно сингулярными, матрицы систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – плотно заполненными и часто плохо обусловленными.

Метод конечных элементов рассматривается в настоящее время как универсальное средство решения задач теории упругости. Имеется широкий инструментарий конечно-элементного моделирования. Вариационная постановка метода предусматривает существование единственного решения и не налагает ограничение на форму исследуемых тел. Вместе с тем, МКЭ связан с большими вычислительными затратами при решении нелинейных задач. Точность представления напряжений на границах тел требует сгущения конечно-элементной сетки в местах приложения нагрузок и контакта с другими телами, что приводит к необходимости перестройки сетки при изменении области контакта.

С учетом указанных преимуществ и недостатков можно сделать вывод о том, что на различных этапах решения поставленной задачи рационально использовать разные методы по отдельности или совместно. Так, например, аналитическое решение Герца удобно использовать в качестве начального приближения и оценки максимальных контактных напряжений. Перспективным является сопряжение методов конечных и граничных элементов для решения контактных задач [8]. При этом применяемые дискретные модели должны обладать общей параметризацией и, по возможности, иметь совпадающие узлы на

границе тел. Предлагается схема решения связанной задачи синтеза геометрии и анализа НДС, удовлетворяющая вышеуказанным требованиям.

Алгоритм решения связанной задачи синтеза геометрии и анализа напряженно-деформированного состояния. Для решения задач анализа контактного взаимодействия тел, ограниченных кинематически генерируемыми поверхностями, и синтеза их конструктивных параметров предлагается следующая схема (рис. 1), дополняющая итерационную процедуру, описанную ранее [3]. Эта схема предусматривает параметризацию всех применяемых моделей общими параметрами, наличие общего формата данных для всех этапов исследования, управляемость параметрами и удобство представления и анализа полученных результатов. Схема не имеет строгого порядка исполнения, однако каждый ее цикл состоит из синтеза геометрии по исходным параметрам, анализа НДС полученных тел и синтеза новых параметров на основе результатов анализа.

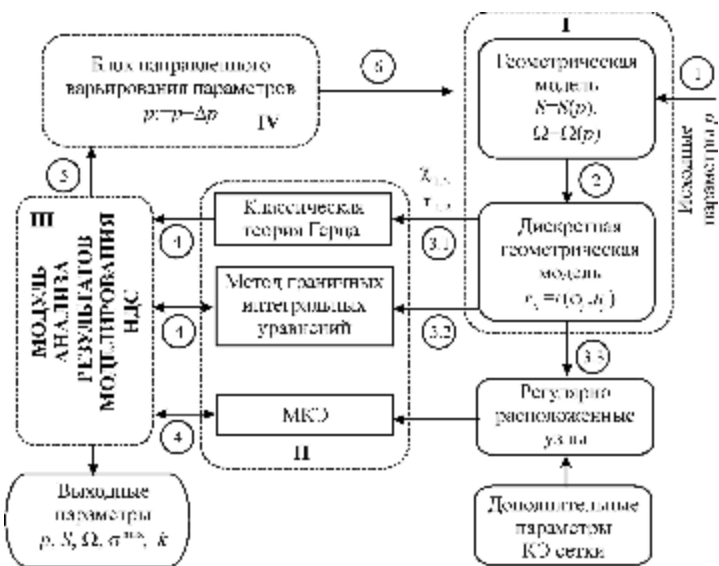


Рис. 1. Схема решения задач анализа контактного взаимодействия тел, ограниченными КПП, и синтеза их конструктивных параметров

На первом этапе применяются кинематические соотношения, которые позволяют определить пары контактирующих точек поверхностей тел, находящихся в том или ином относительном положении. Эти отношения неявно задают форму рабочих поверхностей, от которых в первую очередь зависит характер контакта исследуемых тел. Разрешение кинематических соотношений в конечном числе относительных положений приводит к дискретному семейству точек на поверхности исследуемых тел:

$$r_{ij} = r(\varphi_i, u_j), \quad (1)$$

для которых φ_i, u_j могут быть значениями естественных для каждой из поверхностей параметров φ и u , отвечающих тому взаиморасположению тел, при котором контакт происходит в точке $r(\varphi, u)$ рабочей поверхности. Если каждый из параметров независимо от другого пробегает определенное множество значений, то полученное семейство точек образует дискретную сетку, линии которой близки к координатным линиям на действительной рабочей поверхности (рис. 2).

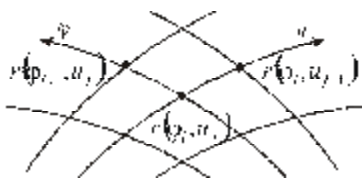


Рис. 2. Координатные линии на рабочей поверхности

На втором этапе осуществляется анализ НДС при контактном взаимодействии элементов исследуемой системы.

С этой целью решается контактная задача, исходными данными в которой являются координаты точек поверхностей тел и прочие геометрические характеристики (кривизны, направления нормалей в этих точках и т.д.). Полученные из решения задачи синтеза геометрические данные могут или непосредственно быть

переданы в процедуру решения контактной задачи, если она решается аналитическими или гранично-элементными методами, или подвергаться последующей обработке, заключающейся, например, в создании конечно-элементной модели (см. рис.1). Каждый из вариантов сопряжен с различными объемами вычислений, точностью и характером информации о НДС сопрягающихся тел.

Каким бы способом не решалась задача на конкретном цикле, результаты требуют анализа (этап III). В первую очередь он заключается в проверке выполнения прочностных ограничений, установлении наиболее нагруженных участков контактирующих поверхностей, где достигаются максимальные контактные давления и касательные напряжения. В зависимости от того, удовлетворяют ли исследователя полученные характеристики, может быть принято решение о прекращении итерационной процедуры или о направленном изменении параметров (этап IV). Сделано это может быть или в рамках какого-либо алгоритма оптимизации по всем параметрам, или исходя из значимости влияния конкретного параметра на прочностные характеристики. В последнем случае необходимо учесть специфику выбора параметров механической системы и изначально отыскать оптимальные значения именно тех параметров, от которых в наибольшей степени зависят требуемые прочность и жесткость контактирующей пары тел.

В частности, такой подход оправдывает себя, когда отдельные подмножества параметров независимо влияют на различные геометрические и прочностные характеристики. Например, контактная прочность, в основном, определяется значениями главных кривизн в сопряженных точках, а потому можно изначально поварьировать лишь те параметры, которые влияют на локальные геометрические свойства контактирующих рабочих поверхностей. Совершить это можно в “малом цикле” (2-3.1-4-5-6, см. рис. 1), включающем в себя лишь оценочные расчеты контактного взаимодействия по классической теории Герца. Это позволяет значительно экономить вычислительные ресур-

сы на начальном этапе решения связанной задачи и получить при этом достаточно точные начальные значения некоторых параметров для последующей вариации. Другая возможность – отказаться от решения контактной задачи на части циклов, определив требуемые для прочности значения толщин и размеров отдельных частей механизма. При этом можно использовать конечно-элементные модели сравнительно низкой точности и варьировать лишь те из параметров, которые влияют на указанные геометрические характеристики. В этом случае требуется, чтобы изменение параметров в этом новом “малом цикле” (2-3.3-4-5-6 на рис.1) не влияло на изменение кривизны контактирующих поверхностей, иначе нарушается уже достигнутая контактная прочность.

Подобный подход осуществим и оправдывает себя, в частности, для двухпараметрических передач. Оптимальную форму рабочих поверхностей лицевой и обратной сторон зуба, обеспечивающую минимальные контактные напряжения и максимальные площади контактных пятен, можно отыскать независимо от значений толщин зубьев, для которых достигается наибольшая изгибная прочность зубьев обоих колес передачи.

Технология генерации топологически регулярных сеток. При прямой генерации конечно-элементной сетки требуется задание следующей информации: матрицы узлов U , матрицы элементов \mathcal{E} и вектора правых частей F [9]. Для трехмерной сетки с призматическими шестигранными элементами матрица узлов состоит из величин $U(i, j), i=1, \dots, N_U, j=1, 2, 3$. Здесь N_U – количество узлов конечно-элементной сетки; j – номер координаты в глобальной системе координат $Ox_1x_2x_3$. Соответственно матрица элементов содержит номера узлов, входящих в k -й элемент (из общего их числа N_e в конечно-элементной сетке): $\mathcal{E}(k, \alpha), k=1, \dots, \alpha=1, \dots, 8$ (8 – число вершин в шестиграннике, при изменении типа элемента меняется и число этих узлов).

Основной характерной особенностью кинематически генерируемых поверхностей является сложность их описания принятым в настоящее время в CAD/CAE-системах способом, соответствующим следующим этапам:

1) строится дискретный набор точек $M_p, p=1, \dots, N_M$, приближающих в этих точках идеальную поверхность S_{id} , в определении которых допускается погрешность ε_M ;

2) на построенное облако точек натягивается некоторая аппроксимирующая поверхность S_{ap} : сплайн-аппроксимация, NURBS-поверхность или другая, которая по 2-м поверхностным координатам L_{ap} восстанавливает декартовы координаты произвольной точки поверхности; при этом в силу аппроксимационного характера S_{ap} допускается погрешность ε_{ap} в определении текущей точки M_{ap} общего положения (в том числе и узлов конечных элементов):

$$|M_{ap} - M_{id}| \leq \varepsilon_{ap}(M_{ap}), M_{ap} \in S_{ap}, M_{id} \in S_{id}, \quad (2)$$

где M_{id} – точка на идеальной поверхности, наименее удаленная от M_{ap} ;

3) полученная поверхность S_{ap} либо отдельно, либо согласованно с другими поверхностями, с которыми она образует некоторый объем, разбивается в автоматическом или полуавтоматическом режиме на конечные элементы, при этом грани конечных элементов (КЭ), выходящие всеми своими узлами на поверхность S_{ap} , отклоняются в своих пределах от нее на величину ϵ_e , обусловленную локальным характером поведения S_{ap} и формой соответствующей грани КЭ.

Таким образом, в рамках традиционной технологии в создании КЭМ участвуют следующие поверхности: S_{id} – идеальная, теоретическая, точная; поверхность S_M , представленная дискретным набором точек M , расположенных достаточно близко к S_{id} ; аппроксимационная поверхность S_{ap} , натянутая на точки M ; граневая поверхность S_G , т.е. поверхность, образованная множеством граней, узлы которых принадлежат S_{ap} и в общем случае не лежат на исходной поверхности S_{id} .

Соответственно при прохождении этой цепочки накапливается ошибка приближения точной поверхности (рис.3) на каждом шаге так, что суммарная погрешность составляет

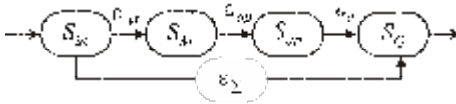


Рис.3. Схема оперирования со сложнопрофильными областями по традиционной технологии и допусаемые погрешности геометрического моделирования

$$\epsilon_{\Sigma} = |\epsilon_M| + |\epsilon_{ap}| + |\epsilon_e|. \quad (3)$$

В соотношении (3) слагаемое ϵ_e может быть минимизировано, и основные погрешности в описании формы поверхности зависят от слагаемых $\epsilon_M, \epsilon_{ap}$. Более того, для погрешностей $\epsilon_M, \epsilon_{ap}$ трудно установить априорные оценки, для управления

данными величинами нет явных механизмов. При полностью автоматизированной разбивке в САЕ-системах эти величины практически бесконтрольны и зависят только от внутренних алгоритмов встроенных строителей конечно-элементных сеток. В результате получаемое множество узлов конечно-элементной модели может иметь непредсказуемую и напрямую не управляемую погрешность расположения относительно идеальной поверхности, что особенно чувствительно для узлов в зоне контактного взаимодействия.

Кроме того, в дополнение к погрешности в описании формы поверхности и сгенерированной таким образом конечно-элементной модели применение большинства распространенных строителей КЭМ дает возможность получить или смешанную (призма – пирамида – тетраэдр), или преимущест-

венно тетраэдральную разбивку исследуемых 3D областей. Это тоже существенно сказывается в худшую сторону на общей точности определения НДС.

Получаемая КЭМ в итоге также имеет непредсказуемую и напрямую неуправляемую погрешность, обусловленную типом и формой используемых конечных элементов. Естественно, что суммарное воздействие 2-х типов суммарных погрешностей (и “поверхностно-узловая”, и “элементная” компоненты) с указанными недостатками может привести к значительному искажению точности конечно-элементного моделирования НДС, особенно в зоне контактного сопряжения сложнопрофильных тел.

В качестве альтернативы такому подходу предлагается алгоритм полуавтоматической генерации топологически регулярных сеток тел, ограниченных КПП (рис.4), включающий:

- генерирование топологически регулярной сетки узлов КЭ с использованием свойств КПП практически с любой наперед заданной точностью на поверхности S_{id} , заданной в этом случае в своих естественных координатах;
- создание множества конечных элементов, полностью или в основном состоящего из шестигранников (для этого требуется, например, соответствующая разбивка 6-ти участков поверхностей, в т.ч. кинематически генерируемых, образующих шестигранную область).

В данном случае можно пренебречь погрешностью ϵ_M , поскольку точ-

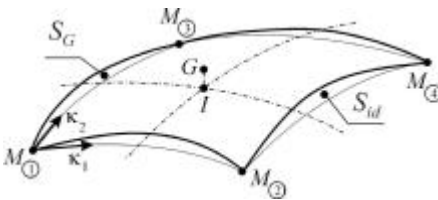


Рис.5. К оценке погрешности “граневой” поверхности

ность синтеза точек кинематически генерируемых поверхностей можно изначально задать достаточно высокой, и величина “поверхностно-узловой” компоненты общей погрешности определяется только степенью отклонения формы “граневой” поверхности S_G от идеальной S_{id} . И хотя и в

этом случае трудно получить априорную оценку ϵ_e , можно получить практически точную апостериорную. Действительно, коль скоро наперед известна параметризация КПП посредством естественных кинематических параметров (обозначим их κ_1, κ_2 , рис.5) и вид “граневой” поверхности конечно-элементной модели, то при совпадении линий расположений узлов КЭ с координатными линиями можем задать на грани элемента параметризацию, общую с участком КПП, который она приближает. В этом случае отклонение грани элемента от идеальной поверхности можно оценить:

$$\epsilon_e \approx |IG| = |\mathbf{r}_G(\kappa_1, \kappa_2) - \mathbf{r}_{id}(\kappa_1, \kappa_2)|, \quad (4)$$

где $\mathbf{r}_{id}(\kappa_1, \kappa_2)$ – радиус-вектор точки I на идеальной поверхности, а



Рис.4. Предлагаемая схема генерирования топологически регулярных сеток

$\mathbf{r}_G(\kappa_1, \kappa_2)$ – радиус-вектор точки G , расположенной на пересечении “граневой” поверхности с нормалью к S_{id} в точке I .

Имея полный контроль над процессом разбивки, можно ставить и решать задачи управления погрешностью ε_e , например:

$$\max_{S_{id}} \varepsilon_e \rightarrow \min ; \quad (5)$$

$$\max_{S_{id}} \varepsilon_e \leq \varepsilon_e^{\wedge} , \quad (6)$$

где ε_e^{\wedge} – заданная величина погрешности.

Для вычисления отклонения ε_e поверхности граней сгенерированных КЭ от “идеальной” поверхности S_{id} можем воспользоваться точным значением координат точек этой поверхности, расположенных внутри грани (это может быть одна центральная точка или набор точек внутри грани и на ее ребрах) [10]. При этом в задачах (5), (6) присутствует ограничение сверху на количество узлов конечно-элементной модели или другое ограничение. В результате становится принципиально возможным построение набора узлов, задающих КЭМ, аппроксимирующую кинематически генерируемую поверхность с наперед заданной точностью.

Другой возможностью является использование точных или эмпирических оценок максимального отклонения граней элементов от точной поверхности, с помощью которых можно определять оптимальные параметры разбивки поверхности, доставляющие решение задачам (5), (6). Примером может служить оценка, справедливая для граней восьмиузлового призматического трилинейного элемента:

$$|\varepsilon_e| \leq \frac{1}{4} k_{\max} s_{\max} , \quad (7)$$

где k_{\max} – максимальное из абсолютных значений главных кривизн, а s_{\max} – длина большего ребра грани. Оценка (7) получена в предположении малости размеров грани элемента путем приближения действительной поверхности касательным эллиптическим параболоидом в окрестности средней точки участка поверхности, приходящегося на эту грань.

Вклад “элементной” компоненты итоговой погрешности конечно-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния может оказаться более значительным, чем “узловой” составляющей, несмотря на то, что тип генерируемых КЭ – шестигранник – сам по себе обеспечивает достаточно точность моделирования НДС. Проблемной является форма конечных элементов, вернее, вопрос ее влияния на точность конечно-элементного моделирования. Кроме этого возникает вопрос управления формой КЭ или хотя бы ее контроля, что будет рассмотрено ниже.

Собственно, алгоритм заполнения матриц U и \mathcal{E} , т.е. непосредственного

задания узлов и конечных элементов, может быть различным и в целом зависит от специфики формы исследуемой поверхности. Один из самых простых способов состоит в задании топологически регулярных разбиений координатных линий в естественной параметризации S_{id} и, соответственно, построении узлов конечно-элементной модели на пересечении этих линий. Для определения внутренних узлов сетки необходимо ввести третью координату κ_3 , которая вместе с поверхностными координатами κ_1, κ_2 параметризует всю внутренность тела. В этом случае внутренние узлы можно размещать на координатных линиях, отвечающих параметру κ_3 и выходящих из поверхностных узловых точек (рис.6).

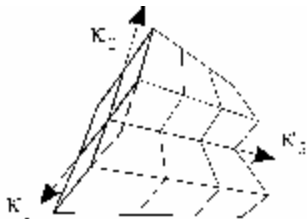


Рис.6. Схема построения внутренних узлов конечно-элементной модели зуба

Получаемую таким образом сетку можно непрерывно деформировать, не испортив регулярность конечных элементов, что дает возможность варьировать зоны сгущения-разрежения узлов. Другой особенностью построенной таким образом КЭМ будет размещение ее узлов на КПП, согласующееся с естественной параметризацией этих поверхностей. Следует отметить также важность обоснованного выбора третьей координаты параметра, от которого в значительной мере зависит форма конечных элементов.

Для создания топологически регулярных конечно-элементных моделей зубьев двухпараметрических передач этот подход вполне применим. Предлагается следующая частная реализация предложенной схемы построения КЭ сетки, во многом повторяющая алгоритм разбиения шестигранных поверхностей в современных конечно-элементных комплексах, применительно к зубу конического колеса двухпараметрической передачи.

Имеются две исходные сети точек, определяемые в параметрах φ и u по формуле (1):

$$r_{ij}^f = r^f(\varphi_i, u_j); \quad r_{ij}^r = r^r(\varphi_i, u_j). \quad (8)$$

Здесь индексы f и r отвечают, соответственно, лицевой и тыльной рабочим поверхностям зуба колеса двухпараметрической передачи. Особенностью параметризации каждой из них является то, что диапазоны изменения параметров φ и u на каждой из сторон зуба можно выбрать одинаковыми, и, как следствие, задать сеть точек на каждом из колес по совпадающим наборам узловых значений параметров $\{\varphi_i\}_{i=1}^n, \{u_j\}_{j=1}^m$. Это позволяет построить внутренние узлы КЭМ зуба на линиях l_{ij} , соединяющих узлы на противоположных его сторонах, отвечающих одинаковым параметрам (φ_i, u_j) .

Полученная в результате сетка, в действительности, будет топологически эквивалентна разбиению параллелепипеда в декартовых координатах с

тем отличием, что для ее построения использованы криволинейные координаты области зуба, ограниченного кинематически генерируемыми поверхностями $r^f(\varphi, u)$ и $r^r(\varphi, u)$. На рис. 7 приводится результат построения КЭМ зуба конического колеса двухпараметрической передачи, построенной таким способом.

В дальнейшем будет проведено сравнение конечно-элементных моделей, построенных по предложенному алгоритму, с получаемой разбиением геометрической модели зубьев двухпараметрической передачи внутренними средствами САЕ-системы. Для этого рабочие поверхности представляются набором сплайнов, приближающих семейство координатных линий для одного из кинематических параметров (рис.8), на которые натягиваются искомые поверхности. Объем зуба задается построенными таким образом 2-мя рабочими поверхностями и еще 4-мя боковыми. Такой способ построения геометрических моделей тел со сложными поверхностями применяется в большинстве САПР и САЕ-комплексов.

В качестве резюмирующего замечания необходимо отметить, что именно особенность синтеза кинематически генерируемых поверхностей позволяет предложить привлекательный алгоритм генерации конечно-элементных сеток сложнопрофильных тел, ограниченных КПП. В то же время открытыми являются вопросы качества формы генерируемых конечных элементов, а также апробация предложенного алгоритма на тестовых задачах.

Форма конечных элементов: управление описание, диагностирование, оценка результирующей погрешности. Как известно [6], форма КЭ сказывается на точности конечно-элементного моделирования НДС, устойчивости и скорости сходимости приближенного решения. Диагностика конечных элементов является стандартным этапом создания КЭМ. Осуществляется она средствами препроцессора САЕ-системы, который оперирует исключительно геометрическими данными. При этом не вычисляются коэффициенты матрицы системы уравнений МКЭ и компонент правых частей. Такие процеду-

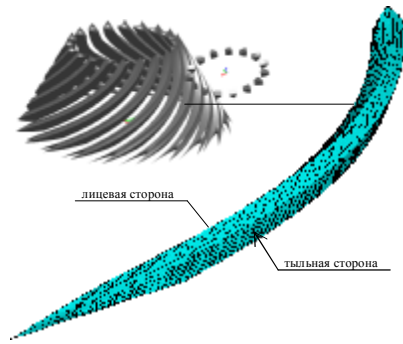


Рис. 7. КЭМ зуба колеса двухпараметрической передачи

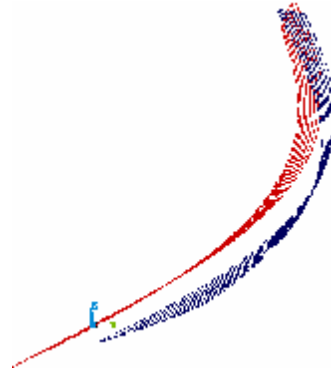


Рис. 8. Сплайны координатных линий

ры преследуют лишь одну цель – до проведения емких вычислений проверить, можно ли с помощью построенной КЭМ получить адекватные результаты, и, если нет, модифицировать или заново перестроить конечно-элементную сетку.

Такая проверка заключается, в первую очередь, в нахождении геометрически вырожденных элементов (с отрицательным объемом, пересекающимися ребрами или гранями и другими недопустимыми отклонениями) и элементов со “слабой” геометрией. Если первые легко определить с помощью однозначных и формализуемых критериев, то в случае со вторыми можно говорить лишь о рекомендациях.

Наличие элементов с сильно искаженной формой, у которых некоторые геометрические характеристики превышают условленные допустимые значения, не всегда приводит к возрастанию ошибки. Проверяемые величины только входят в коэффициенты асимптотических оценок и связаны с источниками погрешности МКЭ не напрямую. С искажением формы конечных элементов связаны в числе других следующие источники погрешности:

I. Зависимость аппроксимационных свойств конечно-элементного базиса от формы конечных элементов. В частности, его однородность, часто необходимая для сохранения порядка аппроксимации [9], требует, чтобы все углы в элементах превышали некоторую величину θ_0 . Это требование проверяется в большинстве САЕ-комплексов. Выбор предельного значения θ_0 основывается на опыте вычислений и определяется возможностями программ-построителей конечно-элементных сеток. Другим примером может служить отношение максимального значения якобиана преобразования координат для изопараметрического элемента к его минимальному значению, входящее в энергетическую оценку точности интерполяции.

II. Применение процедуры численного интегрирования для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых нагрузок, точность которой снижается в случае сильно искаженных элементов. Якобиан преобразования, входящий в подынтегральные выражения, может значительно изменяться внутри одного элемента, в случае чего требуются квадратурные формулы более высокого порядка точности.

К сожалению, даже имеющиеся оценки погрешности, вызываемой факторами **I** и **II**, описывают лишь тенденцию изменения ошибки при уменьшении диаметра разбиения исследуемой области Ω . В связи с этим предлагается вместо отсутствующих теоретических данных использовать для оценки возникающих погрешностей методику численного эксперимента на тестовых задачах: для реальных конечно-элементных сеток варьируется форма конечных элементов, а затем производится оценка конечной точности численного моделирования. При этом подходе требуется проведение следующих этапов исследования (рис.9): *управление* формой конечных элементов (конструктивные параметры p_ϕ); *вычисление* общепринятых описательных характеристик γ формы КЭ; *диагностирование* получаемой сетки конечных элементов по критериям соответствия γ_i рекомендуемым предельным их значениям $\hat{\gamma}_i$:

$\gamma_i \leq \gamma_i^{\wedge}, i = 1, \dots, N_{\gamma}$, где N_{γ} – количество характеристик γ , принятых для того или иного типа КЭ; оценка результирующей погрешности δ путем сравнения полученных результатов конечно-элементного моделирования с известным решением.

В результате применения указанной схемы численных экспериментов получается следующая цепь зависимостей:

$$\gamma_i = \gamma_i(p_{\phi}), i = 1, \dots, N_{\gamma}; \quad (9)$$

$$\delta = \delta(\gamma) = \delta(p_{\phi}). \quad (10)$$

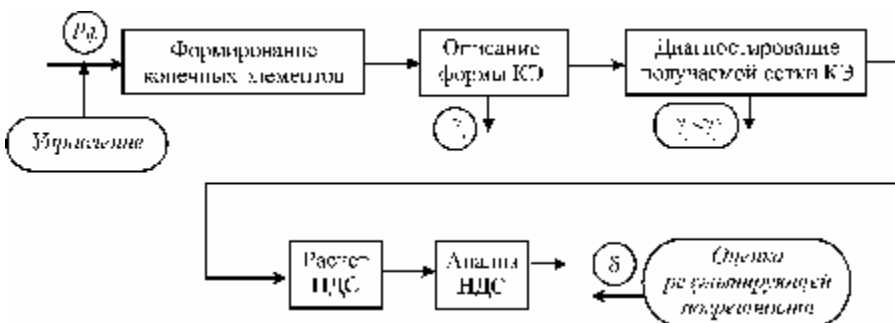


Рис. 9. Этапы численного эксперимента для исследования влияния формы КЭ на погрешность численного моделирования НДС для тестовых задач

Если задаться типом используемых КЭ, то для него можно найти соответствующий набор общепринятых параметров γ_i и их ограничительных значений γ_i^{\wedge} . Так, для призматических шестигранных элементов в САЕ-комплексе ANSYS проверяются значения следующих контрольных параметров (КП): Aspect Ratio, Parallel Deviation, Max Corner Angle, Warping Factor, Jacobian Ratio. Первые четыре вычисляются отдельно для каждой из граней элемента и еще трех дополнительных четырехугольных сечений. При этом учитывается максимальное значение контрольного параметра. Такая проверка препятствует:

- чрезмерной протяженности элемента в каком-либо направлении (Aspect Ratio), которая может вызвать как ошибки в округлении, так и потерю точности решения при наличии существенных градиентов в этом направлении;
- возникновению больших углов и резких изменений ориентации противоположных граней (Parallel Deviation, Max Corner Angle);
- появлению “закрученных” боковых граней, форма которых существенно отличается от плоской (Warping Factor).

Значение якобиана преобразования к изопараметрическим координатам вычисляется во всех узлах призматического шестигранного элемента: в восьми или, если имеются серединные узлы, в двадцати, а также в центральной точке элемента. В изопараметрических координатах элемент имеет форму

единичного куба, и по отношению максимального значения якобиана изопараметрического преобразования к минимуму можно также судить о применимости того или иного элемента. Если оно отрицательно, т.е. якобиан меняет знак внутри элемента, то элемент, естественно, применять нельзя. При больших значениях Jacobian Ratio в элементе увеличивается ошибка численного интегрирования, и, вместе с тем, ухудшаются интерполяционные свойства базиса.

Для каждого типа восьмигранных призматических элементов предлагается набор предельных значений контрольных параметров. Если поставить задачу построения КЭ сетки, элементы которой находятся в рамках приводимых рекомендаций, то для тел со сложной геометрией придется сталкиваться с определенными трудностями при ее решении. Различные контрольные параметры взаимосвязаны между собой, и превышение рекомендованных границ одним параметром часто приводит к превышению их другими.

В то же время параметры γ плохо подходят для управления формой конечных элементов. В этой связи предлагается использовать набор параметров управления формой p_ϕ со следующими требованиями к нему:

- *конструктивность*, т.е. возможность построения КЭ по заданному набору p_ϕ ;
- *однозначность*, т.е. существование только одной формы КЭ (с точностью до смещения, масштабирования, поворота), описываемого данным набором p_ϕ ;
- *независимость*, т.е. возможность варьирования каждого отдельного параметра без изменения остальных;
- *полнота*, которая заключается в охвате всего многообразия возможных форм конечного элемента варьированием значений p_ϕ .

Поставленная задача имеет в общем виде неединственное решение. Например, для четырехузлового элемента, заданного на двумерном многообразии, можно предложить следующий набор 4-х независимых параметров p_ϕ для конструктивного однозначного полного описания их формы (рис.10). Указанный набор не соотносится с контрольными параметрами, проверяемыми для плоского четырехугольника (Aspect Ratio, Parallel Deviation, Max Corner Angle, Jacobian Ratio), а потому их зависимость от ψ, ρ_1, ρ_2 и η будет выражаться довольно сложными соотношениями.

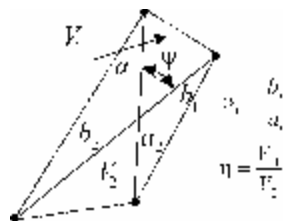


Рис.10. Конструктивные параметры для плоского элемента

В случае пространственного многогранника с восемью узлами потребуется уже 17 контрольных параметров, чтобы однозначно с точностью до сме-

щения, поворота и масштабирования задать форму конечного элемента. Соответственно зависимость контрольных параметров от этих 17-ти будет еще сложнее, что делает такой подход к описанию формы и диагностированию геометрии конечных элементов непрактичным.

Выходом из такой ситуации является упрощение описания формы КЭ посредством пренебрежения теми конструктивными параметрами, влияние которых на КП мало, или же значения которых остаются незначительными для действительных разбиений. Так, например, в результате применения вышеописанного алгоритма построения топологически регулярных сеток зубьев двухпараметрических передач получают элементы характерной формы. Даже при сравнительно малой густоте разбиения лицевой и тыльной поверхности зуба ($n = 6, m = 30$), форма граней, расположенных на этих поверхностях, незначительно отличается от параллелограмма (разница длин противоположных сторон меньше 6%). Вместе с тем при более чем четырех элементах по ширине зуба формы ячеек двух соседних продольных слоев сетки (узлы которых отвечают индексам k и $(k + 1)$ соответственно) практически одна и та же (рис. 11).

В этом случае можно пренебречь большинством параметров и, уменьшая полноту описания, считать, что элемент образован двумя параллельными гранями (ориентацией площадок также можно пренебречь), представляющими собой два одинаковых параллелограмма, повернутых относительно общего центра на угол α и разнесенных вдоль общей нормали на расстояние, равное длине наименьшей стороны параллелограмма (можно принять его равным единице, рис. 12). Можно учесть также сдвиг в относительном направлении плоскости этих параллелограммов, однако он слабо влияет на контрольные параметры и в реальной КЭ модели невелик.

Такой ограниченный выбор конструктивных параметров дает возможность установить искомые зависимости. По ним легко восстановить форму КЭ и вычислить значения контрольных параметров. Например, показанные на рис. 13 элементы при различных значениях α и θ (ρ положено равным 1) и соответствующие им значения Warping Factor позволяют установить максимальный угол закручивания α для различных θ , при которых Warping Factor не превышает ограничения 0,4.

Предложенный выше набор конструктивных параметров помимо этого обладает тем свойством, что он непосредственно связан с параметрами конечного-элементной разбивки, в частности, с количеством узлов в различных на-



Рис. 11. Характер формы элементов

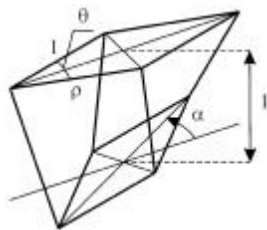


Рис. 12. Упрощенное описание шестигранного элемента

правлениях. Так, значение ρ зависит от высоты зуба, его длины и значений n и m , α определяется количеством элементов по ширине зуба и углом между координатными линиями лицевой и тыльной рабочих поверхностей зуба, θ приблизительно равен углу между координатными линиями.

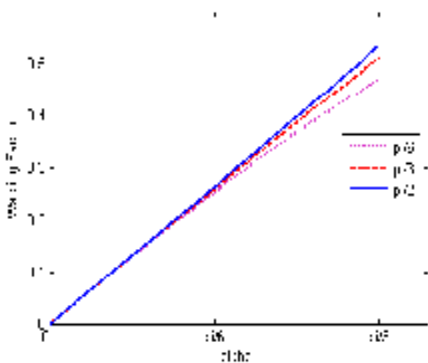


Рис.13. Зависимость значения Warping Factor от конструктивных параметров элементов α

рис.13) в принципе можно оперировать с предварительными оценками качества сетки. Однако, поскольку представляет интерес именно конечная точность моделирования напряженно-деформированного состояния, а инструмент варьирования формой конечных элементов при помощи параметров p_ϕ уже предложен, можно ввести в рассмотрение меру погрешности δ :

$$\delta = \|u_N - u\| / \|u\|, \quad (11)$$

где $u_N = u_N(p_\phi)$ – численное решение, полученное при текущем наборе параметров управления формой конечных элементов p_ϕ ; u – известное решение тестовой задачи; $\|\bullet\|$ – некоторая норма.

В результате проведения серии тестовых расчетов будет получена зависимость погрешности анализа НДС от конструктивных параметров используемых КЭ:

$$\delta = \delta(p_\phi). \quad (12)$$

Естественно, что описанный подход имеет 2 недостатка: нечеткость критерия выбора тестовых задач; отсутствие обоснования возможности распространения результатов, полученных при решении тестовых задач, на решение частных задач. Но эти недостатки всегда присущи подходам с использованием численного эксперимента. Рекомендации относительно допустимых значений конструктивных параметров для достижения требуемой точности могут быть проверены для конкретной задачи. Для этого достаточно сравнить результаты,

Таким образом, предложен механизм внешнего (по отношению к САЕ-системе) управления формой конечных элементов, а также получены непрерывные зависимости внутренних (в данном случае – для САЕ-системы ANSYS) характеристик качества формы конечных элементов, что подтверждает возможность реализации функциональных зависимостей в печочке, представленной на рис.9.

После установления зависимостей $\gamma = \gamma(p_\phi)$ (таких, как на

полученные с помощью двух конечно-элементных моделей: построенной по этим рекомендациям и созданной стандартными средствами конечно-элементной разбивки.

Тестовая задача. Для группы параметров, изображенных на рис.12, была проведена серия тестовых расчетов, целью которых было установление зависимости (12). Выбор набора параметров был обоснован ранее. Тестовая задача была поставлена таким образом, чтобы максимально выделить ошибку, вызванную искажением формы элементов, которая описывается этим набором параметров. Приведем результаты, полученные отдельно для угла закручивания α при фиксированных значениях остальных параметров ($\theta = 90^\circ$, $\rho = 1$).

В единичном кубе было построено множество горизонтальных слоев. В середине каждого слоя располагается область, разбитая на искаженные элементы (рис.14). Она образована двумя квадратными гранями со стороной 0.1, повернутыми относительно друг друга на угол α (рис.15). На верхней грани куба на площадке внутреннего квадрата, стороны которого параллельны ребрам куба, прикладывается пирамидально распределенная нагрузка. На боковых и нижней грани задано нулевое перемещение.

При всех значениях угла α разбиение верхней грани куба остается одинаковым. Линейный закон распределения давления на гранях деформированных элементов позволяет не учитывать ошибку вычисления вектора правых частей, т.к. используемый восьмиузловой элемент SOLID45 допускает билинейное распределение напряжений на плоских гранях, и в нем производится точное интегрирование такой нагрузки.

Результаты значений максимального перемещения u_z в центральной точке верхней грани для различных α , отнесенные к точному значению, изображены на рис.16. Превышение этим отношением единицы указывает на то, что источником

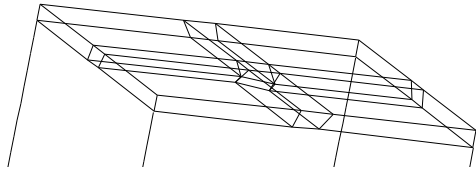


Рис.14. Горизонтальный слой



Рис.15. Столб деформированных элементов

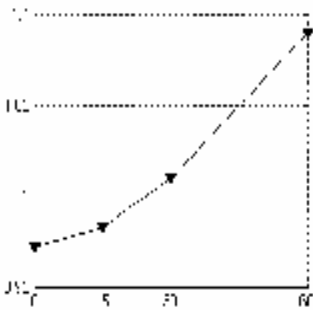


Рис.16. Отношение перемещения к точному значению в зависимости от угла закручивания α

ошибки помимо точности аппроксимации данными элементами служит также численное интегрирование. В точной постановке МКЭ должны были быть получены перемещения меньшие действительных, т.к. КЭ модель обладает большей жесткостью по сравнению с реальным телом. На основании этого можно сделать вывод о неприменимости элементов с углом поворота противоположных граней, превышающих $\pi/6$. Следует отметить, что связанная с численным интегрированием ошибка не уменьшится с измельчением сетки, если угол закручивания останется по-прежнему большим.

Моделирование зуба конического колеса цилиндрико-конической двухпараметрической передачи. В завершение приведем результаты сравнительного расчета НДС зуба конического колеса, произведенного с помощью модели, построенной по предлагаемой в работе схеме с учетом полученных рекомендаций, и КЭ модели, построенной средствами КЭ комплекса ANSYS на базе геометрической модели со сплайн-поверхностями. Для того, чтобы избежать различий, связанных с приложением усилий к узлам модели, была приложена объемная весовая нагрузка к закрепленному по основанию зубу (рис.17). Для сравнения приводится относительная разница суммарных перемещений вдоль верхней кромки зуба, полученных для описанных моделей (рис.18, здесь s – расстояние от текущей точки до нижней вдоль кромки зуба). При одинаковом количестве элементов отличие результатов оказалось незначительным, что подтверждает применимость предложенной схемы построения топологически регулярных сеток для проведения дальнейших расчетов.

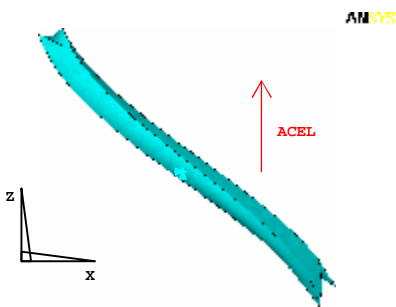


Рис.17. Пространственная модель зуба с приложенными нагрузками

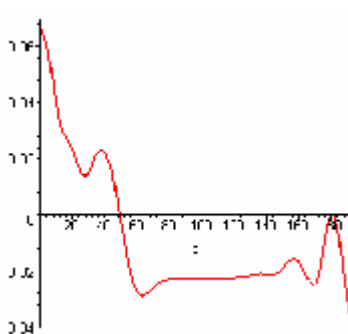


Рис.18. Относительная разница перемещений

Заключение. В статье предложена новая технология конечно-элементного моделирования напряженно-деформированного состояния сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями. Она отличается следующими особенностями:

1. Реализуется общий единый подход к решению разнотипных задач проектирования и исследования на основе параметрического описания геометрии и конечно-элементной сетки. Это обеспечивает оперативность прове-

дения исследований, бесконфликтность в процессе обмена данными, представленными в различных форматах, а также встраиваемость в общий процесс проектирования.

2. Предложен инструмент внешнего по отношению с САЕ-системе управления конечно-элементными сетками, а также считывания внутренних данных из САЕ-системы во внешнюю среду. Этим обеспечивается организация специализированной системы многовариантных исследований НДС тел со сложной геометрией.

3. Исключением (по сравнению с традиционной технологией) промежуточных этапов построения КЭМ исследуемого объекта, что резко увеличивает точность описания его формы. Последнее особенно важно при описании положения узлов конечно-элементной сетки в зоне контакта, поскольку размеры контактных площадок и распределение контактных давлений очень чувствительно к точности определения положения элементов контактных узлов.

4. Переход к исследованию новых типов объектов не предполагает разработки новой системы автоматизированного анализа НДС, а требует лишь добавления к созданному ядру модуля, учитывающего специфику исследуемого объекта.

5. Полученные результаты численных решений тестовых задач подтверждают точность моделирования напряженно-деформированного состояния даже со значительно искаженной формой призматических КЭ.

Полученные положительные результаты оправдывают перспективность развития данных методов исследования. Описанные подходы и алгоритмы в дальнейшем планируется реализовывать в виде комплекса специализированных систем автоматизированного исследования НДС сложнопрофильных тел с кинематически генерируемыми поверхностями.

Список литературы. 1. Ковалюх В.Р. Синтез зубчатых вариаторов на основе колес с равновысокоширокими зубьями и впадинами.: Дисс. канд.техн. наук // Харьков, 1982. – 156 с. 2. Ткачук Н.Н. Особенности реализации кинематического метода расчета двухпараметрических передач // Вестник НТУ “ХПИ”. Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2006. – Вып. 3. – С.133-151. 3. Ткачук Н.Н. Оценка контактных напряжений в сопряжении сложнопрофильных деталей // Вестник НТУ “ХПИ”. Тем. вып.: Машиноведение и САПР. – Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2006. – Вып. 24. – С.137-151. 4. Ткачук А.В., Ткачук Н.Н. Математическое моделирование динамических процессов и напряженно-деформированного состояния элементов гидрообъемной передачи // Вестник НТУ “ХПИ”. – 2003. – Вып. 28. – С. 9-18. 5. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // J. Reine Angew. Math. – 1881. – Vol. 92. – S.156-171. 6. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с. 7. Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 304 с. 8. *Advances in Boundary Element Techniques IV*, Edited by R Gallego and M H Aliabadi. – London, Department of Engineering, Queen Mary, University of London, 2001. – 471 p. 9. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с. 10. Barone S. Gear Geometric Design by B-Spline Curve Fitting and Sweep Surface Modelling // Engineering with Computers. – Springer-Verlag London Limited. – 2001. – Vol. 17. – p.66-74.

Поступила в редколлегию 28.09. 2006