

**В.А.ВАНИН**, д-р техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»,  
**А.А.ГРИГОРЬЕВ**, асп., НТУ «ХПИ»

## ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ СИНФАЗНЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Показано, що зміни амплітуди поперечних синфазних високочастотних коливань пружного середовища, індукованих однорідним полем коливань тиску, описуються системою рівнянь Максвелла. Вивчені умови, при яких в пружно – пластичному суцільному середовищі виникає однорідне поле високочастотних коливань тиску.

It is shown that the changes of the amplitude of the cross-section inphase high-frequency oscillations of the elastic medium induced by the homogeneous field of the pressure oscillations are described by the set of equations of Maxwell. The conditions which cause an elastic medium of the high-frequency pressure oscillations in an elastoplastic field are examined.

**Введение и постановка задачи.** Колебания среды, которую в современной науке именуют вакуумом, а 100 лет назад называли эфиром, в гауссовой системе физических единиц описываются уравнениями Максвелла [1]

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t, & \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \cdot q, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}, & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{E}, \vec{H}$  – напряженности электрического и магнитного поля,  $q(M)$  – плотность электрического заряда в точке  $M$ ,  $\vec{J}(M)$  – плотность тока, созданного движением свободных зарядов;  $c$  – скорость света. В статье [2] было показано, что система (1) является факторизацией известного уравнения для поперечных упругих смещений  $\vec{u}(M, t)$  сплошной однородной среды [3]:

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = -G \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + \operatorname{rot} \vec{L}, \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность среды;  $G$  – модуль сдвига;  $\vec{L}$  – векторный потенциал для поля плотностей  $\vec{f}$  внешних (массовых) сил. При этом напряженности  $\vec{E}, \vec{H}$  получили определенную механическую трактовку:

$$\vec{E} = G \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{L}, \quad \vec{H} = (G/c) \cdot \partial \vec{u} / \partial t, \quad (3)$$

где  $c = \sqrt{G/\rho}$  – скорость распространения поперечных колебаний.

Но, как уже отмечалось в нашей статье [2], а ранее в книге А.Пуанкаре [4], система уравнений Максвелла (1) имеет и другие факторизации, которые приводят к иным трактовкам для напряженностей.

Так, если вычислить от каждой части соотношений (3) ротор, а также принять обозначение  $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{\psi}$ , то мы придем к равенствам

$$\vec{E} = G \cdot \operatorname{rot} \vec{\psi} - \vec{L}, \quad \vec{H} = (G/c) \cdot \partial \vec{\psi} / \partial t.$$

Теперь напряженность  $\vec{H}$  пропорциональна угловой скорости вращения среды, и это позволяет трактовать второе слагаемое формулы

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H}$$

для *силы Лоренца*, действующей на заряд  $Q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , как известный в механике *эффект Магнуса* [5].

Однако, и после указанных изменений, трактовки напряженностей не отвечают современным представлениям о природе электромагнитного поля. Как и для некоторых полей квантовой механики [6], это поле будем считать *волновым*, то есть образующимся при синфазных высокочастотных колебаниях. В волновом поле напряженности  $\vec{E}(M, t)$ ,  $\vec{H}(M, t)$  описывают не сами эти величины, а **амплитуды их колебаний** в точке  $M$  для момента времени  $t$ .

Изучая свойства синфазного поля колебаний упругой среды, обладающего дополнительным свойством однородности колебаний, мы получим уравнения для указанных волновых полей, которые, как и следовало ожидать, окажутся уравнениями Максвелла вида (1). После чего мы предложим модель упругой активной среды, обеспечивающую выполнение этого дополнительного свойства, и назовем ее *средой Максвелла*.

**Однородные стоячие волны.** Уравнение (2) не учитывает продольные колебания упругой среды, которые сопровождаются изменением давления и плотности. Если эти скалярные величины изменяются синфазно, то им отвечают *стоячие волны*. Известно, что стоячая волна, как правило, не имеет постоянной амплитуды в пределах всего колеблющегося объема, но из этого правила существуют исключения, которые будем называть *однородными волнами*. В статье [7] указывалось, что однородные стоячие волны существуют у винтового стержня, навитого с постоянным углом подъема; очевидно, что такие волны возникают и при колебаниях тонкой сферической оболочки.

Оказывается, что подобные волны существуют и в упругих объемах, лишенных первоначальной кривизны. Так, в последние годы активно развивается *моментная теория упругости* [8, 9], описывающая сплошную среду системой уравнений Коссера:

$$\begin{cases} \rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \vec{u} - (\mu + \alpha) \text{rot rot } \vec{u} + 2\alpha \text{rot } \vec{\delta} + \vec{f}, \\ j \cdot \partial^2 \vec{\delta} / \partial t^2 = (2\gamma + \beta) \text{grad div } \vec{\delta} - (\gamma + \varepsilon) \text{rot rot } \vec{u} + 2\alpha \text{rot } \vec{u} - 4\alpha \vec{\delta} + \vec{g}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mu$ ,  $\lambda$  – модули упругости, подобные известным модулям Ламэ [10],  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  – дополнительные модули упругости модели Коссера,  $\vec{\delta}$  – угол разворота зерна,  $j$ ,  $\vec{g}$  – плотности моментов инерции и массовых сил.

У однородной стоячей волны в *среде Коссера* все пространственные производные равны 0, и система (4) сводится к уравнению

$$j \cdot \partial^2 \vec{\delta} / \partial t^2 + 4\alpha \cdot \vec{\delta} = 0, \quad (5)$$

которому отвечает однородное поле синфазных гармонических колебаний зерен, происходящих с круговой частотой  $\omega_c = 2\sqrt{\alpha / j}$ .

Указанные колебания могут, например, объяснить причину существования спина у фотона и других элементарных частиц, но для целей данного ис-

следования они бесполезны. Электромагнитное поле является полем поперечных колебаний, поэтому в качестве несущего (и, одновременно, донорского) поля здесь могут выступать только лишь продольные колебания (то есть, колебания давления и плотности). У среды, обладающей нужными свойствами, материал зерна должен иметь коэффициент сжатия, значительно превышающий такой же коэффициент для остальной среды; пример такой среды будет описан в этой статье далее. Но прежде, не сосредотачиваясь здесь на деталях решения этой задачи (которая, к тому же, может иметь и другие решения), мы выведем уравнения для соответствующих волновых полей.

**Усреднение динамических характеристик синфазного поля.** Если плотность упругой среды переменная, то уравнение ее линейных колебаний имеет следующий вид:

$$\partial(\rho \cdot \partial \bar{u} / \partial t) / \partial t = \text{grad}(K \text{div} \bar{u}) - \text{rot}(G \text{rot} \bar{u}), \quad (6)$$

где  $K$  – модуль объемного сжатия,  $K = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu)) \cdot G$ ;  $\mu$  – коэффициент Пуассона; остальные обозначения даны ранее. Левая часть уравнения (6) при отсутствии скорости переноса определяет изменение импульса, а правая часть – упругую силу, являющуюся причиной этого изменения.

Будем считать, что плотность  $\rho$ , а также модули  $K$ ,  $G$  изменяются по синфазному гармоническому закону, то есть

$$\rho = \rho_0 + \rho_* \cdot \sin \omega_{np} t, \quad K = K_0 + K_* \cdot \sin \omega_{np} t, \quad G = G_0 + G_* \cdot \sin \omega_{np} t,$$

причем коэффициенты, используемые в правых частях этих равенств, одинаковы для всего колеблющегося объема и являются медленно изменяющимися во времени величинами либо константами. Теперь естественно и решение уравнения (6) искать в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t,$$

причем, поскольку амплитуды  $\rho_*$  и  $p_*$  изменения плотности и давления пропорциональны величине  $\text{div} \bar{u}_*$ , то эта дивергенция не зависит от координат и времени, и это означает, что **мы моделируем поперечные колебания среды**. Подставим это решение в левую часть уравнения (6) и получим:

$$\begin{aligned} \partial \bar{u} / \partial t &= \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \sin \omega_{np} t + \omega_{np} \cdot \bar{u}_* \cdot \cos \omega_{np} t; \\ \partial^2 \bar{u} / \partial t^2 &= \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 \sin \omega_{np} t + 2\omega_{np} \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \cos \omega_{np} t - \omega_{np}^2 \cdot \bar{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t; \\ \partial(\rho \cdot \partial \bar{u} / \partial t) / \partial t &= \rho_* \cdot \omega_{np} \cdot \cos \omega_{np} t \cdot \partial \bar{u} / \partial t + (\rho_0 + \rho_* \cdot \sin \omega_{np} t) \cdot \partial^2 \bar{u} / \partial t^2 = \\ &= \rho_* \cdot \omega_{np} \cdot \cos \omega_{np} t \cdot \left( \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \sin \omega_{np} t + \omega_{np} \cdot \bar{u}_* \cdot \cos \omega_{np} t \right) + \\ &+ (\rho_0 + \rho_* \sin \omega_{np} t) \left( \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 \sin \omega_{np} t + 2\omega_{np} \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot \cos \omega_{np} t - \omega_{np}^2 \bar{u}_* \cdot \sin \omega_{np} t \right) = \\ &= \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 (\rho_* \sin^2 \omega_{np} t + \rho_0 \sin \omega_{np} t) + \bar{u}_* \cdot (\rho_* \cdot \omega_{np}^2 \cos 2\omega_{np} t - \rho_0 \omega_{np}^2 \cdot \sin \omega_{np} t) + \\ &+ \omega_{np} \cdot \partial \bar{u}_* / \partial t \cdot (\rho_* \cdot 1.5 \cdot \sin 2\omega_{np} t + \rho_0 \cdot 2 \cdot \cos \omega_{np} t). \end{aligned}$$

Частота  $\omega_{np}$  считается очень большой (для электромагнитного поля она, например, превосходит частоту покоя электрона, равную  $1,2 \cdot 10^{19}$  Гц), и

следить за подробностями столь быстро изменяющегося процесса не обязательно. Вместо этого выполним усреднение результата по промежутку времени  $T \gg 2\pi / \omega_0$ , для чего вычислим среднее интегральное значение левой части уравнения (6) на промежутке  $[t, t - T]$ . Несложно видеть, что

$$\frac{1}{T} \int_{t-T}^t \sin^2 \omega_{np} \tau d\tau = \frac{0,5}{T} \int_{t-T}^t (1 - \cos 2\omega_{np} \tau) d\tau = 0,5 - \frac{0,25}{T \cdot \omega_{np}} \cdot \sin 2\omega_{np} \tau \Big|_{t-T}^t \approx 0,5,$$

а результаты интегрирования остальных слагаемых равны (либо близки) нулю.

Следовательно, среднее интегральное значение левой части уравнения (6) равняется

$$0,5 \cdot \rho_* \cdot \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2.$$

Такое же усреднение правой части приводит к следующему очевидному результату:

$$\begin{aligned} & 0,5 K_* \cdot \text{grad div } \bar{u}_* - 0,5 G_* \cdot \text{rot rot } \bar{u}_* = \\ & = \|\text{grad div } \bar{u}_* = 0\| = -0,5 G_* \cdot \text{rot rot } \bar{u}_*. \end{aligned}$$

То есть, мы снова получили уравнение вида (2)

$$\rho_* \cdot \partial^2 \bar{u}_* / \partial t^2 = -G_* \cdot \text{rot rot } \bar{u}_*, \quad (7)$$

но не для поперечных смещений упругой среды, а для амплитудной функции соответствующих синфазных колебаний.

Если эта теория действительно описывает электромагнитное поле, то становится ясно, что скорость света  $c$  определяется равенством

$$c^2 = G_* / \rho_*, \quad \text{а не} \quad c^2 = G_0 / \rho_0,$$

и, при упруго – пластической деформации материала, на отдельных участках гистерезисной кривой (см. рис. 1 и его подробное разъяснение в статье [2]) мы получаем совсем другой результат, чем дает линейная теория Гука. Косвенное подтверждение этого вывода можно найти в современной экспериментальной астрономии. Точные измерения параметров орбиты Луны, выполненные с использованием лазерных лучей и уголко-вых отражателей, установленных на ее поверхности, показали, что Луна удаляется от Земли со скоростью 1 мм в год. Такое поведение планет противоречит закону всемирного тяготения Ньютона, но может быть легко объяснено соответствующим снижением величины скорости света  $c$ , которое, если верить принятой модели эфира и рис. 1, продолжается и в наше время.

Если по тем же правилам, что описаны выше и в работе [2], от уравнений (7) перейти к уравнениям Максвелла, то мы получим:

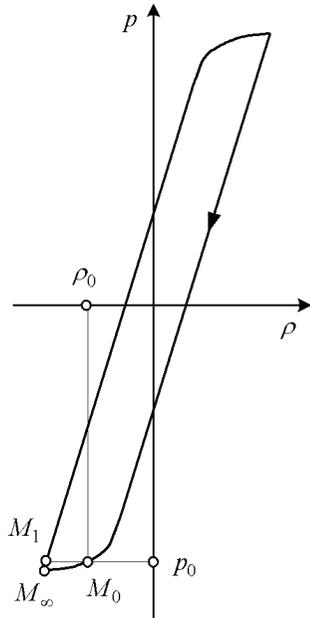


Рисунок 1

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E}_* = -c^{-1} \partial \vec{H}_* / \partial t; & \text{div } \vec{E}_* = 4\pi \cdot q_*; \\ \text{rot } \vec{H}_* = c^{-1} \partial \vec{E}_* / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}_*; & \text{div } \vec{H}_* = 0, \end{cases}$$

где величины  $\vec{E}_*$ ,  $\vec{H}_*$ ,  $\vec{J}_*$  определяют амплитуды пульсаций для напряжений  $\vec{E}$ , угловой скорости вращения среды  $\vec{H}$  и плотности токов  $\vec{J}$ .

Чтобы выполнить усреднение силы Лоренца  $\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H}$  учтем равенства

$$\vec{E} = \vec{E}_* \cdot \sin \omega_{np} t; \quad \vec{H} = \vec{H}_* \cdot \sin \omega_{np} t$$

и примем, что заряд имеет постоянную массу  $m_0$ , а его объем изменяется по формуле

$$Q = Q_0 + Q_* \cdot \sin \omega_{np} t.$$

Тогда уравнение движения заряда примет следующий вид:

$$\begin{aligned} m_0 \cdot d\vec{v} / dt &= Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{H} = \\ &= (Q_0 + Q_* \sin \omega_{np} t) \vec{E}_* \sin \omega_{np} t + (Q_0 + Q_* \sin \omega_{np} t) \vec{v} \times \vec{H}_* \sin \omega_{np} t, \end{aligned}$$

и усреднение ее правой части приводит к аналогичной формуле для амплитудной функции электродинамической силы Лоренца (коэффициент 0,5, как и в остальных случаях, здесь вынесен за скобку и сокращен):

$$\vec{F} = Q_* \cdot \vec{E}_* + Q_* \cdot \vec{v} \times \vec{H}_*.$$

При записи уравнений электродинамики индекс «\*» в обозначениях величин отбрасывается, но это обстоятельство не изменяет их физического смысла.

**Неоднородные поля синфазных колебаний шарового слоя.** В работе [11], где исследовались колебания цилиндрических стержней, было указано, что у таких стержней существует много частот синфазных колебаний. Такая же ситуация характерна для упругих тел любой формы, например, шарового слоя

$$T: \{ R_1 \leq r \leq R_2 \text{ (рис. 2)}. \}$$

Чтобы получить частоты стоячих волн для продольных колебаний этого слоя, будем искать решение уравнения для потенциала

$$a^{-2} \cdot \partial^2 \psi / \partial t^2 = \Delta \psi$$

в виде  $\psi = \hat{\psi}(r) \cdot \exp(i\omega t)$ , где  $a = \sqrt{K/\rho}$  – скорость распространения сферической волны продольных колебаний,  $i = \sqrt{-1}$ . Подстановка приводит к известному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\hat{\psi}'' + (2/\rho) \cdot \hat{\psi}' + \omega^2 / a^2 \cdot \hat{\psi} = 0,$$

имеющему общее решение

$$\hat{\psi}(\rho) = C_1 \cdot \sin(\omega r / a) / r + C_2 \cdot \cos(\omega r / a) / r.$$

Следовательно,

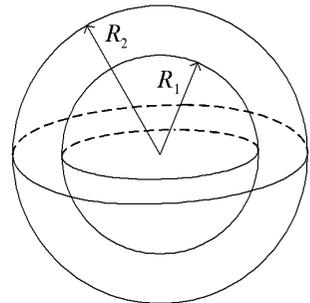


Рисунок 2

$$\begin{aligned}\bar{u}(r,t) &= \exp(\omega t) \cdot \text{grad } \hat{\psi}(r) = \\ &= \exp(\omega t) \cdot [C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)' + C_2 \cdot (\cos(\omega r/a)/r)'] \cdot \vec{i}_r.\end{aligned}$$

Далее нужно учесть граничные условия на внешней и внутренней поверхности слоя, которые для этого случая сводятся к равенству нулю нормального давления

$$\text{def } \bar{u}_{rr} + (\mu/(1-2\mu)) \text{div } \bar{u} = 0,$$

то есть

$$\partial u_r / \partial r + (\mu/(1-2\mu)) \cdot (\partial u_r / \partial r + (2/r) \cdot u_r) = 0.$$

Чтобы избежать в этом вспомогательном примере громоздких выкладок, примем значение коэффициента Пуассона  $\mu = 0$ . В результате получаем:

$$\begin{cases} C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)'' + C_2 \cdot (\cos(\omega r/a)/r)'' \Big|_{r=R_1} = 0, \\ C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)'' + C_2 \cdot (\cos(\omega r/a)/r)'' \Big|_{r=R_2} = 0. \end{cases}$$

Однородная система для неизвестных коэффициентов  $C_1, C_2$  имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю; это условие сводится к тригонометрическому уравнению, имеющему множество решений.

В частном случае, когда  $R_1 = 0$  и шаровой слой превращается в полный шар радиуса  $R$ , решение, ограниченное в центре шара, имеет вид

$$u(r,t) = \exp(\omega t) \cdot \text{grad } \hat{\psi}(r) = C_1 \cdot (\sin(\omega r/a)/r)' \cdot \exp(\omega t) \cdot \vec{i}_r,$$

а внешнее граничное условие сводится к уравнению

$$(\sin(\omega r/a)/r)' \Big|_{r=R} = 0 \quad \text{или} \quad \sin x/x = \cos x/(1-x^2/2),$$

где выполнена замена  $x = \omega R/a$ .

Последнее уравнение легко анализируется: оно имеет решение  $x_k$  на каждом промежутке вида  $(\pi k, \pi(k+1))$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , причем

$$x_1 \approx 2,09; x_2 \approx 5,94; x_3 \approx 9,20, \text{ и так далее.}$$

Таким образом, многочисленные «параллельные» поля синфазных пульсаций возникают и внутри шара. Но с увеличением номера  $k$  возрастают градиенты изменения скорости, что, после учета трения, приведет к быстрому угасанию поля. В привилегированном положении находятся продольные колебания, имеющую частоту  $\omega_1$ : они «звучат» дольше, и для их поддержания требуется меньше энергии.

И тут необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство. Для этой частоты во внутренних областях шара относительная плотность  $\Delta E_c$  энергии синфазных колебаний мала и изменяется пропорционально  $r^2$  (рис. 3). Следовательно, «мир поперечных колебаний», созданный внутри шара, будет устроен таким образом, что мас-

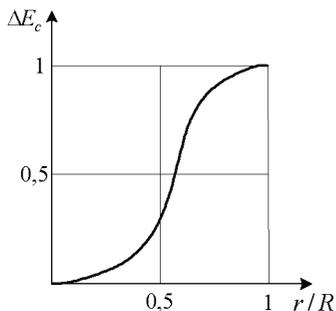


Рисунок 3

сивные частицы, берущие много энергии от синфазного поля, соберутся вблизи поверхности шара. Легким частицам (фотонам и нейтрино) для поддержания баланса много дополнительной энергии не нужно, поэтому для них вся внутренность шара будет «прозрачной».

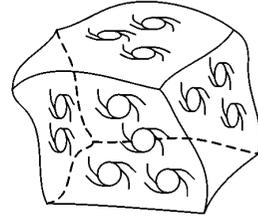


Рисунок 4

Заметим, что аналогичные закономерности наблюдаются при распределении материи во Вселенной. Современные астрономы утверждают, что галактики распределены неравномерно, и их скопления образуют относительно тонкие оболочки (*стенки*) вокруг *межгалактических пузырей* (рис. 4). При продольных колебаниях пузырей на их стенках могут возникать синфазные однородные поля, например, электромагнитные. Показательно, что внутри пузырей светящейся материи нет.

**Упругая среда Максвелла.** В предыдущем пункте мы рассматривали синфазное поле продольных колебаний среды внутри шара; ясно, что эти колебания будут высокочастотными лишь для шара малого размера.

Чтобы получить высокочастотное синфазное поле для большого объема упругой среды эти колебания нужно изучать не внутри шара, а за его пределами. Простейшей задачей указанного плана является следующая. Пусть в упругой однородной среде равномерно распределены твердые частицы шарообразной формы; требуется составить уравнения продольных колебаний указанной гетерогенной среды и проанализировать его решения.

Будем считать, что анализируемая среда испытала в прошлом интенсивную упруго – пластическую деформацию и находится в точке  $M_0$  гистерезисной кривой (рис. 1). При этом материал твердых частиц соответствует точке  $M_1$ , где модуль сжатия увеличивается на два – три порядка.

Опишем структуру упругой гетерогенной среды, синфазные колебания которой обладают свойством однородности.

Примем, что примесь состоит из частиц, представляющих собой жесткую пустотелую тонкую оболочку сферической формы (рис. 5). Заметим, что в силу высокой жесткости материала, процесс деформирования такой оболочки можно считать равномерным, а поле давлений в материале оболочки – однородным. В этой модели будем также считать, что высокочастотные колебания давления среды  $p(t)$  воздействуют лишь на внешнюю поверхность частицы.

Пусть радиус частицы, равен  $R$ ; тогда площадь ее поверхности составляет  $S = 4\pi R^2$ , а объем –  $W = (4/3)\pi R^3$ . Толщину оболочки обозначим  $\delta R$ . Рассмотрим одну такую частицу (рис. 5), находящуюся в поле внешнего давления  $p$ ; в силу постановки задачи это поле также следует считать однородным. Внутреннее давление в материале оболочки обозначим  $p_q$ , а модуль сжатия –  $K_q$ . Примем, чтобы не усложнять выкладки, коэффициент Пуассона  $\mu$  равным 0. Тогда из уравнения  $div \vec{u} = p_q / K_q$  получаем формулу для радиальной деформации

$$u_r(r, t) = (p_q(t) / K_q) \cdot (r + C / r^2),$$

а неизвестную величину  $C = \text{const}$  определим из однородного граничного условия  $\text{def } \bar{u}_{r,r} = (u_r)'_r = 0$  на внутренней поверхности оболочки:

$$u_r(r, t) = (p_q / K_q) \cdot (r + 0,5 \cdot (R - \delta)^3 / r^2) \approx \\ \approx y_R(t) = (p_q(t) / K_q) \cdot (3/2) \cdot R,$$

где  $y_R$  – радиальное смещение оболочки.

На верхней границе оболочки в статике имеем условие

$$K_q \cdot u'_r = p, \quad \text{откуда}$$

$$p_q = p / (1 - (R - \delta R)^3 / R^3) \approx p / (3 \cdot \delta R / R);$$

в динамике это условие учитывает силы инерции и принимает другой вид:

$$K_q \cdot u'_r = p - (M_q \cdot d^2 y_R / dt^2) / S.$$

Учтем, что

$$K_q \cdot u'_r = p_q \cdot (1 - (R - \delta R)^3 / R^3) \approx 3 p_q \cdot \delta R / R = 3 y_R \cdot K_q \cdot \delta R / (1,5 R^2),$$

$$M_q = \rho_q \cdot S \cdot \delta R$$

и получим

$$2 y_R \cdot K_q \cdot \delta R / R^2 = p - \rho_q \cdot \delta R \cdot d^2 y_R / dt^2,$$

то есть

$$d^2 y_R / dt^2 + 2 \cdot (a_q / R)^2 y_R = p / (\rho_q \cdot \delta R), \quad (8)$$

где  $a_q$  – скорость звука в материале оболочки,  $a_q = \sqrt{K_q / \rho_q}$ .

Если внешнее давление изменяется по гармоническому закону

$$p = P \cdot \sin \omega t,$$

то уравнение (8) имеет очевидное решение

$$p = \frac{P / (\rho_q \cdot \delta R)}{2 \cdot (a_q / R)^2 - \omega^2} \cdot \sin \omega t.$$

Проанализируем это решение, для чего, прежде всего, найдем резонансную частоту

$$\omega_q = \sqrt{2} \cdot a_q / R.$$

**В низкочастотной области**, где  $\omega \ll \omega_q$ , радиальная деформация  $y_R$  изменяется пропорционально давлению  $p = P \cdot \sin \omega t$ , то есть здесь динамикой деформирования частицы можно пренебречь. В результате уравнения продольных колебаний гетерогенной среды принимают следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \partial \bar{v} / \partial t = -\text{grad } p, \quad 2 \cdot (K_q / R^2) y_R = p / \delta R, \\ K_0^{-1} \partial p / \partial t = -\text{div } \bar{v} - (\varepsilon \cdot S / W) \cdot dy_R(t) / dt \end{array} \right.$$

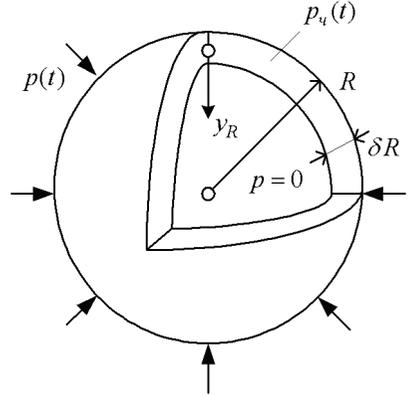


Рисунок 5

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \partial \bar{v} / \partial t = -grad p, (K_0^{-1} + 1.5 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot K_u^{-1}) \cdot \partial p / \partial t = -div \bar{v}, \end{array} \right. \quad (9)$$

где  $\varepsilon$  – объемная доля примеси,  $\delta$  – относительная толщина оболочки,  $\delta = \delta R / R$ ,  $\rho_0, K_0$  – плотность и модуль объемного сжатия упругой среды (для точки  $M_0$ , см. рис. 1).

Система уравнений (9) является факторизацией волнового уравнения для давления

$$\hat{a}_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p, \quad (10)$$

где  $\hat{a}_{np} = \sqrt{\hat{K} / \rho_0}$ ,  $\hat{K}^{-1} = K_0^{-1} + 1.5 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot K_u^{-1}$ .

**В высокочастотной области**, где  $\omega \gg \omega_u$ , ускорение  $d^2 y_R / dt^2$  изменяется пропорционально давлению  $p = P \cdot \sin \omega t$ , и здесь фактически можно пренебречь внутренним давлением  $p_u$ . В результате система уравнений для продольных колебаний гетерогенной среды принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \partial \bar{v} / \partial t = -grad p, \quad d^2 y_R / dt^2 = S \cdot p / M_u \\ K_0^{-1} \partial p / \partial t = -div \bar{v} - (\varepsilon \cdot S / W) \cdot dy_R(t) / dt \end{array} \right. , \quad (11)$$

или

$$a_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta p - (\omega_{np} / a_{np})^2 p, \quad (12)$$

где частота

$$\omega_{np} = \sqrt{3 \cdot (\varepsilon / \delta) \cdot \rho_0 / \rho_u} \cdot a_{np} / R, \quad a_{np} = \sqrt{K_0 / \rho_0}.$$

Уравнение Клейна – Гордона (12) имеет искомого решение

$$p = p_* \cdot \sin \omega_{np} t, \quad \text{где } p_* = const.$$

Но, чтобы это решение отвечало поставленной задаче, необходимо выполнить условие  $\omega_{np} \gg \omega_u$ , то есть

$$\varepsilon / \delta \gg \sqrt{2} \cdot K_u / K_0. \quad (13)$$

Поскольку величина  $\varepsilon$  мала, то, чтобы соблюсти условие (13), величина  $\delta$  должна быть меньше, по крайней мере, еще на три порядка, что создает понятные технические трудности; кроме того, синфазная частота получилась слишком большой. Этим трудностям можно избежать, если увеличить массу оболочки, не изменяя ее жесткости, что не сложно сделать на практике. Например, если масса заполнит весь объем шара, то уравнение (8) изменится и станет таким:

$$(3 / \delta) \cdot d^2 y_R / dt^2 + 2 \cdot (a_u / R)^2 y_R = p / (\rho_u \cdot \delta \cdot R).$$

Это означает, что резонансная и синфазная частоты уменьшатся в  $\sqrt{\delta / 3}$  раз, а формула для синфазной частоты примет вид

$$\omega_{np} = \sqrt{\varepsilon \cdot \rho_0 / \rho_u} \cdot a_{np} / R \approx \sqrt{\varepsilon} \cdot a_{np} / R.$$

Например, если принять

$$\omega_{np} = 10^{20} \text{ 1/c}, a_{np} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ м/c}, \varepsilon = 10^{-12},$$

то мы получим  $R \approx 5 \cdot 10^{-18}$  м, что соответствует ожидаемому размеру для частицы примеси, возникающей в некоторых моделях квантовой физики.

Надо понимать, что конкретная модель оболочки была проанализирована в этой статье только лишь для того, чтобы показать принципиальную реализуемость изучаемого эффекта на основе известных механических свойств гетерогенной среды. Природа, если ей действительно понадобилась бы такая оболочка для организации синфазного поля равномерных колебаний давления, могла бы без особого труда реализовать ее в форме «снежинки» из тонких кристаллических нитей, показанной на рис. 6, либо, что еще более вероятно, цилиндрической трубки, остающейся в эфире после пролета фотона. В квантовой физике считают (см. [6]), что пространство, обладающее свойствами вакуума, формируется траекториями фотонов, и описанная выше теория не противоречит этому мнению.

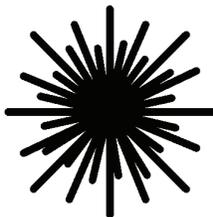


Рисунок 6

Кроме того, отдельные частицы твердой примеси могут иметь различные размеры и характеристики; при этом синфазная частота  $\omega_{np}$  и само уравнение Клейна – Гордона (12) возникает как результат их усредненного воздействия на исследуемые здесь свойства гетерогенной среды.

**Диссипация и источник энергии для однородного поля колебаний давления.** Мы получили искомое поле синфазных колебаний, и осталось понять, откуда оно берет энергию для поддержания этих колебаний на постоянном уровне.

Заметим, что учет линейного внутреннего трения приводит к изменению уравнения (12), которое приобретает следующий вид:

$$a_{np}^{-2} \partial^2 p / \partial t^2 = \Delta(p + \mathcal{G} \cdot \partial p / \partial t) - (\omega_{np} / a_{np})^2 p, \quad (14)$$

где  $\mathcal{G}$  – коэффициент трения, определяемый с учетом выбора вязкой модели трения Кельвина-Фойгхта или гистерезисной модели трения Бока-Шлиппе-Колара [12]. При однородных колебаниях давления поле производной  $\partial p / \partial t$  также является однородным, и  $\Delta(v \partial p / \partial t) \equiv 0$ . Следовательно, **эти колебания не теряют своей энергии по причине действия внутреннего линейного трения**, и мы получили очень важное, но, к сожалению, не достаточное усло-

вие для обеспечения их стабильности. Даже из текста предыдущего пункта становится понятно, что существуют и другие затраты энергии, которые нужно покрывать за счет некоторого источника.

Вывод уравнений, описывающих энергетические обмены моделируемых полей, составит предмет отдельной публикации; там же мы будем изучать прикладные аспекты развиваемой теории. Но уже здесь заметим (и это утверждение полностью соответствует современным космологическим теориям), что источником стабильности однородного синфазного поля является энергия расширения среды. Изучаемая среда расширяется, и, как указывалось в статье [2], происходящий в этой среде переход части материала из состояния  $M_0$  на гистерезисной кривой в состояние  $M_1$  (см. рис. 1, путь  $M_0M_\infty M_1$ ) сопровождается выделением кинетической энергии, то есть **среда Максвелла является активной**. Эта дополнительная энергия нивелирует влияние диссипативных факторов, не учтенных в уравнении (14).

Теперь можно установить связь между однородными и неоднородными полями синфазных колебаний, рассмотренными в этой статье. Относительно медленный процесс расширения шара создает во внешнем шаровом слое необходимые условия для функционирования однородного поля высокочастотных колебаний давления и волнового поля синфазных поперечных колебаний, описываемого уравнениями Максвелла.

### **Выводы.**

Показано, что изменения амплитуды поперечных синфазных высокочастотных колебаний упругой среды, индуцированных однородным полем колебаний давления, описываются системой уравнений Максвелла для электромагнитного поля.

Рассмотрены конкретные примеры синфазных неоднородных полей колебания давления в упругой среде (стоячих волн в шаровом слое и шаре).

Составлена физическая и математическая модели упруго – пластической деформации сплошной среды и изучены условия, при которых в этой среде возникает синфазное однородное поле высокочастотных колебаний давления.

**Список литературы:** 1. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1964. 2. Ванин В.А., Григорьев А.А. Вектор переноса энергии при поперечных смещениях упругой среды // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010. – № 37. – С.59-68. 3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 4. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. 5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газов. – М.: Наука, 1978. 6. Вихман Э. Квантовая физика. – М.: «Наука», 1974. 7. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С.92-104. 8. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. 9. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера // Механика твердого тела. – № 4. – 2007. – С. 100-113. 10. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974. 11. Ванин В.А., Григорьев А.А. Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С.29-38. 12. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971.

*Поступила в редколлегию 25.10.2010*