

### 3. Выводы

1. Достаточно хорошее совпадение результатов теоретических исследований и эксперимента подтверждают правомерность допущений, сделанных при теоретическом исследовании, и подтверждает достоверность выбранных расчетных схем и результатов теоретических расчетов.

2. Экспериментально установлено, что волновые редукторы ввиду их конструктивных отличий от обычных зубчатых передач – наличия гибкого колеса и большого числа одновременно находящихся в зацеплении зубьев – обладают высокими демпфирующими свойствами, что снижает динамические нагрузки в элементах передачи и сокращает время переходных процессов при пуске двигателя. Выяснено, что демпфирование в волновых передачах определяется в основном демпфированием в зубчатом зацеплении, а значение коэффициента относительного рассеяния энергии для волновых передач равно  $0.8+1.0$ .

3. Выяснено, что при докритических скоростях вращения генератора изгибные колебания гибких элементов носят вынужденный характер. Установлено, что если скорость вращения генератора  $\omega_r < 0.25\omega_{кр}$ , то изгибные напряжения гибких элементов практически мало отличаются от напряжений при статическом нагружении. Это позволяет при таких скоростях вращения генератора не учитывать динамические явления при расчете гибких элементов СВЗП.

**Список литературы:** 1. Приймаков А.Г., Рудницкий В.И. Напряженно-деформированное состояние и усталостная прочность силовых трехволновых передач с металлополимерными гибкими колесами // Вестник машиностроения. – 1984. – №6. – С.25. 2. Рудницкий В.И., Приймаков А.Г. Расчет напряжения изгиба в гибком металлополимерном колесе трехволновой зубчатой передачи от воздействия генератора волн //ВИНИТИ. Депонированные рукописи. – 1982. – №7. – б/о 803. 3. Рудницкий В.И., Приймаков А.Г., Ткаченко В.Н. Исследование напряженно-деформированного состояния двухслойных гибких колес трехволновых наружных передач // ВИНИТИ. Депонированные рукописи. – 1982. – №7. – б/о 802. 4. Рудницкий В.И., Приймаков А.Г. Теоретическое исследование напряженного состояния двухслойных гибких колес волновых зубчатых передач // Тез. докл. науч.-техн. конф. – Севастополь, 1983. – С.150-151.

Поступила в редакцию 02.04.2009

**Р.В. ПРОТАСОВ**, асп. каф. ТММиСАПР, **А.В. УСТИНЕНКО**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПИ”

### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗУБЬЕВ ЭВОЛЮТНЫХ ПЕРЕДАЧ

*Зниження габаритів зубчастих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Перспективний шлях її розв'язання – застосування еволютних передач із опукло-увігнутим контактом зубців. Отримані рівняння профілів еволютних зубців на основі методу профільних нормалей. Вони необхідні для подальших досліджень якісних показників та міцності еволютних зачеплень.*

*Lowering of dimensions of gears is an actual task of a modern machine industry. The perspective way of its decision is application of evolute gears with the convex-concave contact. On the basis of method of type normal' the equations of evolute teeth are got. They are needed for further researches of high-quality indexes and durability of evolute gearings.*

**Актуальность задачи.** Ведущей тенденцией современного машиностроения является улучшение массогабаритных характеристик зубчатых передач. Основной фактор, влияющий на габариты традиционных эвольвентных зубчатых колес – контактная прочность поверхностей зубьев. Анализируя общеизвестную формулу Герца

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n E}{b_w \rho_{пр}}}, \quad (1)$$

где  $\rho_{пр}$  – приведенный радиус кривизны, являющийся основным геометрическим фактором, влияющим на величину контактных напряжений ( $1/\rho_{пр} = 1/\rho_1 \pm 1/\rho_2$ , здесь знак „+” при двояковыпуклом контакте, а „-”, – при выпукло-вогнутом), мы видим, что за счет увеличения  $\rho_{пр}$  контактные напряжения  $\sigma_H$  можно уменьшить:

а) *увеличив размеры зубчатых колес.* Это следует из уравнения Эйлера-Савари, которое устанавливает связь радиусов кривизны сопряженных профилей  $\rho_1$  и  $\rho_2$  с радиусами центроид  $r_1$  и  $r_2$  соответственно, а также углом зацепления  $\alpha$ . Для полюса зацепления

$$\left( \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} \right) \sin \alpha = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}; \quad (2)$$

б) *применяя выпукло-вогнутое зацепление.* Первый путь приводит к возрастанию габаритов зубчатых передач, а второй является весьма перспективным. Поэтому последние 70 лет ведутся интенсивные работы по созданию новых видов зацеплений с выпукло-вогнутым контактом зубьев. Важным достижением в этом вопросе было создание зацепления М.Л. Новикова [1].

Однако наряду с преимуществами, у него есть и недостатки, в частности, оно может быть только косозубым. В последние годы появилось эволютное зацепление, предложенное А.И. Павловым [2, 3]. В настоящее время довольно подробно рассмотрена геометрия этих передач, качественные показатели, однако оценка их нагрузочной способности выполнена только ориентировочно. Поэтому изучение контактной и изгибной прочности зубьев эволютных передач является важной научно-практической задачей.

**Постановка задачи.** Первым этапом на пути подробного исследования прочности эволютных передач является получение уравнений поверхностей зубьев, что необходимо для:

- 1) определения главных кривизн рабочих поверхностей зубьев;
- 2) исследования качественных показателей зацепления;
- 3) построения параметрических и конечно-элементных моделей, необходимых для исследования контактного взаимодействия зубьев и их изгибной прочности, опираясь на возможности современных САЕ-систем.

Само собой, в работах А.И. Павлова имеются уравнения боковых поверхностей зубьев, но они записаны для частных случаев [4]. Нами поставлена задача записи уравнений в более общем виде, что облегчит дальнейшую автоматизацию исследований и расчетов.

**Уравнения профиля зубьев на основе метода профильных нормалей.** Будем рассматривать профили зубьев колес как взаимоигибаемые кривые. При этом профиль боковой поверхности зуба шестерни является огибающей, а профиль зуба рейки – огибаемый.

Для получения уравнения боковой поверхности зуба по имеющемуся исходному контуру (в данном случае это профиль рейки) можно воспользоваться расчетом плоских зацеплений по Х. И. Гохману, кинематическим методом или методом профильных нормалей [5]. Так как в исследуемых передачах при постоянном отношении угловых скоростей колес полюс зацепления занимает постоянное положение на линии центров, то метод профильных нормалей является предпочтительным.

При построении эволютного зацепления А.И. Павловым был использован новый способ образования его торцевого сечения – построение кривой, описывающей профиль зуба по заданной его эволюте [2]. Для нахождения эволюты использовано построение Бобилье. Описание исходного контура зубчатой рейки было получено им в виде дифференциального уравнения

$$y_1'' = \frac{y_1'(1 + y_1'^2)}{-ky_1' + x_1} \quad (3)$$

в системе координат, начало которой находится в полюсе зацепления, а оси  $x_1$  и  $y_1$  направлены соответственно вдоль и перпендикулярно межцентровой линии.

Его решение было найдено в виде полинома  $n$ -ой степени [4]:

$$y_1 = C_0 + C_1x_1 + C_2x_1^2 + \dots + C_nx_1^n. \quad (4)$$

Для построения рабочего участка профиля зуба координата  $x_0$  должна изменяться в пределах  $[-h_f'; h_a]$ , где  $h_f'$  – высота ножки зуба без учета переходной кривой;  $h_a$  – высота головки зуба (в общем случае эволютной передачи они не равны)

В дальнейшем, для получения уравнения боковой поверхности зуба А.И. Павловым применяется в основном полином третьей степени.

Метод профильных нормалей из основной теоремы зацепления устанавливает взаимосвязь между положением контактной точки на заданном профиле и углом поворота колеса. Система координат  $x_1, y_1$  связана с инструментальной рейкой, а  $x_2, y_2$  – с нарезаемым колесом (рис. 1).

В отличие от систем координат, применяемых в работе [5], направление осей  $O_1x_1$  и  $O_1y_1$  совпадает с принятыми в зависимости (3). Соответственно, в сравнении с [5] несколько изменится вид расчетных зависимостей.

Уравнение нормали в текущей точке профиля имеет вид:

$$(X_1 - x_1)\cos\gamma + (Y_1 - y_1)\sin\gamma = 0. \quad (5)$$

Здесь через  $(x_1, y_1)$  обозначены координаты выбранной точки профиля, а через  $(X_1, Y_1)$  – координаты выбранной точки нормали. Угол  $\gamma$  составлен касательной к профилю с осью  $O_1x_1$ .

Нормаль к профилю в контактной точке должна проходить через полюс зацепления  $P$ , совпадающий с началом  $O$  неподвижной системы координат. В зависимости от формы уравнения профиля для определения  $\gamma$  нужно воспользоваться соответствующими формулами. В нашем случае оно задано в явном виде:

$$y_1 = f(x_1). \quad (6)$$

Тогда угол  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg}\gamma = y_1'. \quad (7)$$

Так как исходным контуром является зубчатая рейка, то величина перемещения рейки относительно неподвижной системы координат

$$a = y_1 \operatorname{tg}\gamma + x_1. \quad (8)$$

Для определения сопряженного профиля в системе координат  $(x_2, y_2)$ , связанной с центром зубчатого колеса (см. рис. 1), воспользуемся уравнениями перехода

$$\begin{cases} x_2 = -(y_1 - a)\sin\varphi_2 + (x_1 + r_2)\cos\varphi_2; \\ y_2 = (y_1 - a)\cos\varphi_2 + (x_1 + r_2)\sin\varphi_2. \end{cases} \quad (9)$$

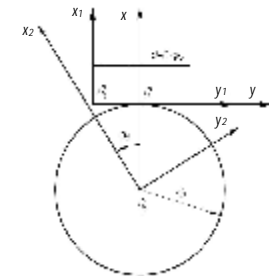


Рис. 1. Применяемые системы координат

В этих уравнениях  $\varphi_2 = a/r_2$ , где  $r_2$  – радиус центроиды (начальной окружности) второго колеса.

Дополнительно, для удобства применения метода профилей нормалей в системах координат на рис. 1, сместим кривую (4) на величину  $-0,25\pi m$  вдоль оси  $O_1 y_1$ . Тогда ось  $O_1 x_1$  будет проходить не через полюс, а через ось симметрии зуба.

В качестве примера построим боковые профили зубьев с односторонним (выпукло-вогнутым) и двусторонним (двойко выпукло-вогнутым) эволютным зацеплением по имеющемуся профилю инструментальной рейки.

Профиль рейки с односторонним зацеплением описывается уравнением [2]:

$$y_1 = 0,15383x_1 + 0,0431889x_1^2 + 0,0180714x_1^3 - 0,25\pi m. \quad (10)$$

Согласно зависимости (7), для нахождения тангенса угла между касательной к профилю и осью  $x$  продифференцируем уравнение, описывающее зубчатую рейку, и, подставив в (8), найдем величину ее перемещения относительно неподвижной системы координат. Далее вычисляем значения угла поворота нарезаемого колеса  $\varphi_2$  и определяем координаты точек профиля зуба в системе координат  $(x_2, y_2)$  по зависимостям (9).

На рис. 2 приведен полученный профиль боковой поверхности зуба модулем  $m = 1\text{мм}$  при радиусе начальной окружности  $r_2 = 100\text{мм}$ .

Профиль рейки с двусторонним зацеплением описывается уравнением

$$y_1 = 0,178105x_1 + 0,195597x_1^3 - 0,25\pi m. \quad (11)$$

Алгоритм построения профиля боковой поверхности зуба шестерни по имеющемуся профилю зубчатой рейки аналогичен описанному выше.

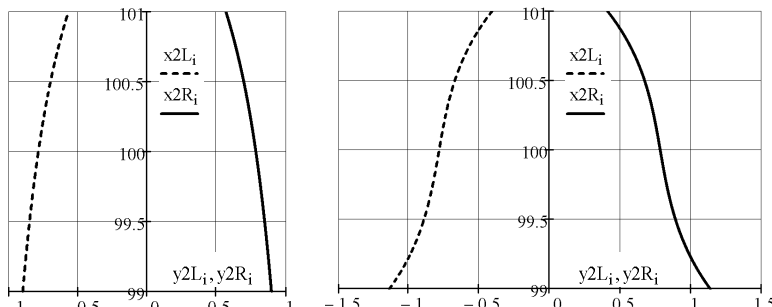


Рис. 2. Профили боковых поверхностей зуба при одностороннем зацеплении

Рис. 3. Профили боковых поверхностей зуба при двустороннем зацеплении

На рис. 3 приведен профиль боковой поверхности зуба модулем  $m = 1\text{мм}$  при радиусе начальной окружности  $r_2 = 100\text{мм}$ .

## УДК 539.3

**Н.А. ТКАЧУК**, докт. техн. наук, зав.каф. ТММиСАПР,  
**А.Н. ТКАЧУК**, асп. каф. ДПМ НТУ «ХПИ»,  
**В.А. ЗАБОЛОТСКИХ**, рук. направления ООО "Ю БИ СИ МЕБЕЛЬ",

**А.А. КАПУСТИН**

## МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ И МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ИЗГОТОВЛЕНИИ ДЕТАЛЕЙ ЛИТЬЕМ

*У статті наведені підходи для розв'язання задачі моделювання фізико-механічних процесів при виготовленні деталей литтям. Описана математична модель досліджуваного процесу. Наведені числові та експериментальні результати дослідження напружено-деформованого стану прес-форм.*

*In the paper the approaches are presented for task's solution of modeling of physical and mechanical processes at manufacturing of details by casting. The mathematical model of the researching process is described. The numerical and experimental results of research of stressed and deformed state of press-forms are resulted.*

**Введение.** В статьях [1-6] сформулирована актуальная и важная задача разработки методов, моделей и алгоритмов для исследования физико-механических процессов при изготовлении деталей литьем. Эти процессы характеризуются следующими особенностями: сложной формой изготавливаемых деталей, а, следовательно, сложной формой полуматриц, в которых происходит формообразование деталей; сложной структурой технологической оснастки (пресс-формы (ПФ), литьевые формы), которые содержат, кроме собственно формирующих полуматриц, также и подкладные плиты, направляющие элементы, элементы охлаждения, газоудаления и т.д., которые находятся в условиях контактного термоупругого взаимодействия; сложным характером нагружения, граничных условий и условий сопряжения: давление подпрессовки, усилие запираания, сопряжение с элементами литьевой машины и т.д.; сложным процессом теплового и контактного взаимодействия расплава с полуматрицами, моделирование которого сопряжено с решением задачи о фазовых переходах, конвективной и контактной теплопередаче.

В работе [3] описана достаточно полная постановка задачи, сведение ее к вариационной, а также предложены общие пути решения. В силу того, что для различных случаев литья степень важности того или иного из перечисленных факторов различна, можно выделить отдельные частные подмодели, описывающие исследуемый физико-механический процесс с учетом его специфики. Решение таких частных задач весьма продуктивно с точки зрения качественного анализа результатов, поскольку количество значимых факторов в этом случае ограничено, а существующие объективно и выявляемые аналитически или численно взаимосвязи не затеваются множеством других. С другой стороны, существенно упрощается экспериментальная проверка адекватности, достоверности и точно-