

**Выводы:**

- 1 Получена функция распределения давления на средней линии сектора подпятника. Были получены графики распределения для нескольких случаев наклона сектора.
- 2 Эпюра распределения давления позволяет определить место на секторе подпятника, где давление достигает максимума. Эта точка совпала с координатой центра давления масляной пленки, то есть с координатой расположения ножки сектора.
- 3 Полученные результаты, в частности функция распределения давления и координата центра давления масляной пленки, были применены в программном комплексе для проведения расчета на определение напряженно-деформированного состояния. Данный способ позволил как можно точнее определить напряжения и деформации возникающие в подпятнике.

**Список литературы:** 1. Чернавский С.А. Подшипники скольжения. – М: Машгиз, 1963. 2. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 2. – М: Наука, 1970. 3. Yukio Hori Hydrodynamic Lubrication. Fundamentals of thrust bearings. – Springer Tokyo, 2006. – PP. 47-61. 4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М: ГИТТЛ, 1950. 5. Shiebel R. Die Gleitlager. Berechnung und Konstruktion. – Berlin, Spr. 1933 (русский перевод, ОНТИ, 1936).

Поступила в редколлегию 13.11.2008

УДК 539.1

**В.И.ЛАВИНСКИЙ**, докт.техн.наук;  
**А.А.ГРИГОРЬЕВ**; НТУ «ХПИ», Харьков

**СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВИНТОВОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ**

Розроблена динамічна модель гвинтового стрижня, призначена для дослідження високочастотних нелінійних коливань і автоколивань. Аналізуються поздовжні та поперечні пов'язані коливання, для чого рівнянням надана симетрична матрична форма із відповідним збільшенням кількості коефіцієнтів зв'язку до 12.

The dynamic model of the spiral rod for research of the high frequency nonlinear oscillations has been developed. The Longitudinal and transverse connected oscillations are being examined, for this reason the equations got a symmetric matrix form with the respective increase of the coupling coefficient number up to 12.

**Введение.** Работа посвящена новым аспектам решения актуальной проблемы изучения нелинейных колебаний и автоколебаний, возникающих в упругих континуальных системах. Известно, что простейшее уравнение автоколебаний Кортевега–де Фриза

$$u'_t + (u + b \cdot u^2 + u''_{xx})'_x = 0 \quad (1)$$

имеет механическую интерпретацию: еще М. Крускал и Н. Забуски показали, что оно описывает уединенные незатухающие волны трансляции  $u = \Psi(x \pm vt)$  (фононы), движущиеся по струне со скоростью  $v$ , зависящей от амплитуды. Фонон является квантовым объектом, имеющим классическое описание. В настоящее время считается, что исследование поведения фононов, движущихся по активной механической среде (например, вибрирующему упругому телу), позволит объединить классическую и квантовую механику, а также, возможно, наметить пути решения универсальных проблем физики, в том числе создания теории единого силового поля.

В данной работе начато изучение этих волн на простых модельных задачах, аналогичных тем, которые описываются уравнением (1). Уравнения нелинейных колебаний винтового стержня, представленные, например, в монографии [1], также являются одномерными, но более сложными, чем (1). Цилиндрический винтовой стержень (пружина) имеет, как и кристаллическая решетка, повторяющуюся пространственную структуру, что делает задачу изучения его автоколебаний особенно важной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

**Постановка задачи.** Рассматриваемая цилиндрическая пружина является частным случаем винтового стержня, у которого все поперечные сечения одинаковы, а винтовая ось наводится с постоянным углом подъема  $\delta$ . Величина  $\text{tg } \delta$  определяет относительное начальное кручение, а  $z^{-1} = d/D$  (где  $d$  – диаметр поперечного сечения,  $D$  – диаметр навивки,  $z$  – индекс) – относительную начальную кривизну стержня. Далее рассматриваются стержни круглого сечения с малой кривизной ( $z > 10$ ) и кручением ( $\delta < 5^\circ$ ). Для указанных условий сформируем систему дифференциальных уравнений, адекватно описывающих свободные нелинейные колебания стержня в широком диапазоне частот и длин волн, и преобразуем ее к виду, пригодному для анализа связанных колебаний и автоколебаний.

**Модели - аналоги. Группы колебаний.** Уравнения модели [1] учитывают 6 степеней свободы сечения стержня; геометрические коэффициенты уравнений зависят от кривизны  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и кручения  $\chi_3$  витка, что приводит к нелинейности:

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot (\bar{v}'_\tau + \bar{\omega} \times \bar{v}) &= \bar{Q}'_0 + \bar{\chi} \times \bar{Q}, & \rho J \cdot \bar{\omega}'_\tau + \bar{\omega} \times \rho J \cdot \bar{\omega} &= \bar{M}'_0 + \bar{\chi} \times \bar{M} + \bar{e} \times \bar{Q} \\ \bar{v}'_0 + \bar{\chi} \times \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{e}, & \bar{\chi}'_\tau &= \bar{\omega}'_0 + \bar{\chi} \times \bar{\omega}, & \bar{M} &= A \cdot (\bar{\chi} - \bar{\chi}_0^{(1)}) \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $\bar{v}, \bar{\omega}$  – линейная и угловая скорость поперечного сечения;  $\bar{Q}, \bar{M}$  – векторы упругих сил и моментов;  $\rho I, \rho J, A$  – диагональные матрицы коэффициентов инерции и жесткости сечения;  $\bar{e}$  – орт касательной к винтовой оси;  $\bar{\chi}, \bar{\chi}_0^{(1)}$  – векторы текущей и начальной кривизны;  $\theta$  – координата сечения (рис. 1);  $\tau$  – «безразмерное время».

Таким образом, в модели [1] рассматривались колебания двух векторов (перемещений и углов) или их 6-ти проекций на главные оси сечения; такие же

уравнения описывали динамическую деформацию стержня при произвольной форме его оси. Однако для стержня с малой кривизной и кручением сила связи между проекциями разнится на порядки. Если, как в статье [3], учесть это различие, то одну группу сильно связанных координат составят перемещение и два угла, а другую – угол и два перемещения.

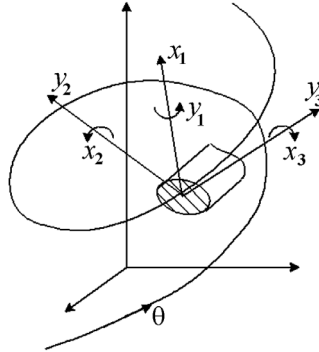


Рисунок 1 – Координаты сечения

В предположении, что отклонения этих векторов от положения равновесия малы, уравнениям (2) удалось придать форму, обычную для анализа связанных колебаний:

$$\begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega y + \Delta \\ -\Omega y^T - \Delta^T & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & -\Omega y - \Delta \\ \Omega y^T + \Delta^T & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

где  $X, Y$  – векторы, составленные из координат  $x_j$  или  $y_j$  (рис. 1), относящихся к группе продольных или поперечных колебаний;  $Qx, Qy$  – отвечающие им упругие силы и моменты;  $Mx, My, Cx, Cy$  – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения (податливости осевого сжатия и поперечного сдвига в этой модели равны 0);  $I, \Theta$  – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка;  $B, \Delta$  и  $\Omega x, \Omega y$  – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат, в которых  $\chi_j$  обозначают отклонения соответствующей кривизны и кручения от начального значения,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & -tg\delta & 0 \\ tg\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi_1 \\ 0 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega y = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие  $B_{21}, -B_{23}, B_{32} = 1$  означает, что начальный радиус кривизны витка (до деформирования) принят равным 1. Матрицы влияния  $\Omega x$  и  $\Omega y$  возникают в результате замены векторных произведений умножением на кососимметричную матрицу.

В группу продольных колебаний входит перемещение  $x_1$  в направлении бинормали (параллельно оси пружины), а в группу поперечных – перемещение  $y_2$  в радиальном направлении (перпендикулярно оси), что определило исторически сложившиеся (для анализа колебаний пружин) названия групп. При этом к поперечным колебаниям отнесены перемещения по координате  $y_3$  (касательной к винтовой оси), которые параллельны движению волны и по принятому в механике правилу считаются продольными.

В статье [2] использованы аналогичные, но линеаризованные уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Delta \\ \Delta & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Delta \\ -\Delta & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

при условиях  $\chi_{1,2,3} = 0$  модель (4) совпадает с моделью (3).

В работе [3] уравнения модели (4) были уточнены путем учета деформации винтовой линии (ранее это уточнение предложено и обосновано в статье [4]). Учет деформаций осевого сжатия и поперечного сдвига является актуальным для расчета пружины с малым индексом, а также для расчета высокочастотных колебаний любой пружины, поскольку, этот фактор кардинальным образом изменяет асимптотику решений характеристического уравнения модели.

В работе [5] уравнения (4) приведены к полностью симметричному виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Delta \\ \Delta & -B^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Delta \\ -\Delta & -B \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где  $Vx_j, Vy_j$  – скорости изменения координат  $x_j$  или  $y_j$ .

**Динамическая модель винтового стержня.** С учетом конечной цели исследований и на основе синтеза методов, данных в работах [1-5], мы получили новую симметричную матричную модель, пригодную для анализа высокочастотных колебаний винтового стержня:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega y x + \Delta \\ \Omega x y + \Delta & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & \Omega y x^T - \Delta \\ \Omega y x^T - \Delta & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где

$$\Omega x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\varepsilon_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega y x = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\varepsilon_1 \\ -\chi_2 & \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}, \Omega x y = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & 0 \\ -\chi_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\varepsilon_3$  – относительное сжатие (растяжение) винтовой оси;  $\varepsilon_{2,1}$  – относительные поперечные сдвиги этой оси в направлении нормали и бинормали.

Уравнения (6) совпадают с (5) при условиях  $\chi_j, \varepsilon_j = 0$ .

В нелинейной модели (6) отклонения кривизны и кручения  $\chi_j$  стержня от равновесных значений определяются моментами упругих сил, как в [1], это же относится и к деформациям  $\varepsilon_j$  его оси, которые в работах [1,2] не учитывались:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= c y_1 \cdot Q y_1; & \chi_2 &= c x_2 \cdot Q x_2; & \chi_3 &= c x_3 \cdot Q x_3; \\ \varepsilon_1 &= c x_1 \cdot Q x_1; & \varepsilon_2 &= c y_2 \cdot Q y_2; & \varepsilon_3 &= c y_3 \cdot Q y_3, \end{aligned}$$

в линеаризованной модели, а также при учете гистерезиса, они считаются постоянными величинами. По условиям линейной пропорциональности напряжений и деформаций все эти величины являются малыми (их значения для кручения и кривизн составляют менее 0,1, для остальных видов деформаций – менее 0,01).

Модель консервативна (матрицы влияния сопряжены).

Диагональные элементы  $m x_j, \dots, c y_j; j = 1, 2, 3$  матриц  $M x, \dots, C y$  вычисляются по следующим формулам ( $\mu$  – коэффициент Пуассона):  $m x_1, m y_2, m y_3, c x_2, c y_1 = 1$ ;  $m x_2, m y_1, c y_3 = (4z^2)^{-1}$ ;  $c x_3 = 1 + \mu$ ;  $m x_3 = (2z^2)^{-1}$ ;  $c x_1, c y_2 = (1 + \mu)/(2z^2)$ .

Произведение соответствующих коэффициентов инерции  $m_i$  и податливости  $c_i$  определяет величину скорости звука  $a_{np}, a_{non}$  продольных или поперечных колебаний.

Уравнения учитывают нелинейную интерференцию и дисперсию волн, что необходимо для воспроизведения автоколебаний.

Заметим, что при анализе автоколебаний с учетом гистерезиса вместо системы (6) допустимо использовать систему (5), но в матрице  $\Delta$  постоянную величину  $\text{tg } \delta$  необходимо заменить переменной величиной  $\text{tg } \delta + \chi_3$ . Кручение  $\chi_3$  фактически играет роль единственного медиатора, связывающего две группы колебаний в этом процессе.

Во всех моделях стержня положительное направление упругих сил выбрано противоположным силам инерции. Модель (6) оперирует с безразмерными величинами. Нормировки выбраны так, что радиус витка пружины  $R$  (начальный радиус кривизны) равняется 1, а продолжительность распространения волны продольной деформации по отрезку стержня, равному  $R$ , также равна 1. Нормировочные множители для сил  $\delta q$  и времени  $\delta T$  находятся по формулам

$$\delta q = 4z^2 / (E \cdot S); \quad \delta T = \sqrt{E / \rho} / (2z \cdot R),$$

где  $E$  – модуль упругости;  $\rho$  – плотность материала стержня;  $S$  – площадь его сечения.

Моменты сил перед нормировкой дополнительно делятся на радиус витка  $R$ .

Динамическая модель (7) становится замкнутой после указания начальных и граничных условий. Различные виды граничных условий типа Штурма

для пружины рассматривались в статьях [6, 7]; в работе [8] исследовалась связь граничных условий и спектра пружины. Эти результаты легко обобщаются на рассматриваемый случай, в частности можно считать доказанным, что если оба граничных условия имеют вид

$$\left[ X(\theta_{l,n}) \quad Y(\theta_{l,n}) \right] + \left[ Q_x(\theta_{l,n}) \quad Q_y(\theta_{l,n}) \right] \cdot G_{l,n} = 0, \quad (7)$$

где  $G_{l,n}$  – неотрицательные матрицы (матрицы податливости опор), то решениями системы уравнений (6), (7) являются незатухающие гармонические колебания.

При расчетах вынужденных колебаний стержней начальные условия считаются нулевыми; при свободных колебаниях они заменяются условиями периодичности. Однако такие описания представляют упругий континуум как механически пассивную среду, и для анализа автоколебаний они неприемлемы. Предполагается, что данный винтовой стержень является активной средой, то есть в нем возбуждены медленно затухающие колебания, создающие вибрационный фон и обладающие механической энергией.

**Частный случай.** Прямому стержню в этой модели соответствуют условия  $\chi_1 = -1$ ;  $\chi_3 = -\text{tg } \delta$ , которые нивелирует влияние начальной кривизны и кручения витка. В результате система (6) распадается на подсистемы – крутильные и продольные колебания описываются волновыми уравнениями, имеющими следующие факторизации:

$$\begin{cases} mx_3 \partial Vx_3 / \partial \tau = \partial Qx_3 / \partial \theta \\ cx_3 \partial Qx_3 / \partial \tau = \partial Vx_3 / \partial \theta \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} my_3 \partial Vy_3 / \partial \tau = \partial Qy_3 / \partial \theta \\ cy_3 \partial Qy_3 / \partial \tau = \partial Vy_3 / \partial \theta \end{cases}, \quad (8 \text{ а})$$

остальные характеристики связаны попарно геометрией стержня:

$$\begin{cases} mx_1 \partial Vx_1 / \partial \tau = \partial Qx_1 / \partial \theta \\ mx_2 \partial Vx_2 / \partial \tau = \partial Qx_2 / \partial \theta - Qx_1 \\ cx_1 \partial Qx_1 / \partial \tau = \partial Vx_1 / \partial \theta + Vx_2 \\ cx_2 \partial Qx_2 / \partial \tau = \partial Vx_2 / \partial \theta \end{cases}, \quad \begin{cases} my_1 \partial Vy_1 / \partial \tau = \partial Qy_1 / \partial \theta + Qy_2 \\ my_2 \partial Vy_2 / \partial \tau = \partial Qy_2 / \partial \theta \\ cy_1 \partial Qy_1 / \partial \tau = \partial Vy_1 / \partial \theta \\ cy_2 \partial Qy_2 / \partial \tau = \partial Vy_2 / \partial \theta - y_1 \end{cases} \quad (8 \text{ б})$$

и участвуют в поперечных (изгибно-сдвиговых) колебаниях прямого бруса, происходящих в 2-ух перпендикулярных плоскостях (описываются уравнениями 4-го порядка).

Уравнения (9 б) уточняют известные уравнения колебаний камертона (учебник [9]); они дополнительно учитывают инерцию изгиба поперечного сечения бруса. Но для основной частоты колебаний камертона данное уточнение не существенно.

**Характеристическое уравнение модели.** При условии  $\chi_j, \varepsilon_j = \text{const}$  уравнения (6) становятся линейными, а модель – линеаризованной.

Решение системы (6) будем искать в форме простой волны, то есть

$$Vx, Vy, Qx, Qy \sim \exp(i \cdot (\omega t + \lambda \theta)),$$

если  $\omega$  и  $\lambda$  – вещественные числа, то волна является бегущей.

Характеристическое уравнение модели (7) связывает круговую частоту  $\omega$  и круговое волновое число  $\lambda$ :

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I - B - \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Theta & i\omega My & \Omega xy + \Delta & i\lambda I + B^T + \Omega x^T \\ i\lambda I + B^T + \Omega x^T & -\Omega xy^T - \Delta & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega yx^T - \Delta & i\lambda I - B - \Omega x & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Клеточная структура матрицы позволила свернуть определитель:

$$\det \begin{bmatrix} -\omega^2 I + Mx^{-1}A_{11} & Mx^{-1}A_{12} \\ -My^{-1}A_{12}^* & -\omega^2 I + My^{-1}A_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$A_{11} = -(i\lambda I - B - \Omega x) \cdot Cx^{-1} \cdot (i\lambda I - B - \Omega x)^* + (\Omega yx + \Delta) \cdot Cy^{-1} \cdot (\Omega yx + \Delta)^T;$$

$$A_{22} = -(i\lambda I - B - \Omega x)^* \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B - \Omega x) + (\Omega xy + \Delta) \cdot Cx^{-1} \cdot (\Omega xy + \Delta)^T;$$

$$A_{12} = (\Omega yx + \Delta) \cdot Cy^{-1} \cdot (i\lambda I - B - \Omega x) - (i\lambda I - B - \Omega x) \cdot Cx^{-1} \cdot (\Omega xy + \Delta)^T,$$

метод преобразования аналогичен тому, который использовался в статье [3] для модели (4) или (5) и ее характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I + B & -\Delta \\ \Theta & i\omega My & -\Delta & i\lambda I - B^T \\ i\lambda I + B^T & \Delta & i\omega Cx & \Theta \\ \Delta & i\lambda I - B & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0. \quad (11)$$

Корни  $\omega^2$  вычислялись как собственные числа матрицы 6-го порядка

$$K = \begin{bmatrix} Mx^{-1}A_{11} & Mx^{-1}A_{12} \\ My^{-1}A_{21} & My^{-1}A_{22} \end{bmatrix},$$

для чего использовалась стандартная программа диалоговой среды MathCAD.

При условиях  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_{xy}, \Omega_{yx}, \Delta = 0$  характеристическое уравнение распадается на два бикубических уравнения для величин  $\omega^2$  или :

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & i\lambda I + B \\ i\lambda I + B^T & i\omega Cx \end{bmatrix} = 0 \quad (12 \text{ a})$$

и

$$\det \begin{bmatrix} i\omega My & i\lambda I - B^T \\ i\lambda I - B & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0 \quad (12 \text{ б})$$

в развернутом виде они имеют следующий вид:

– для продольных колебаний –

$$\begin{aligned} & \lambda^2 (\lambda^2 - 1)^2 - mx_1 mx_2 mx_3 cx_1 cx_2 cx_3 \cdot \omega^6 + [mx_1 mx_2 cx_1 cx_3 + mx_1 mx_3 cx_2 cx_3 + mx_1 mx_3 cx_1 cx_2 + \\ & + \lambda^2 (mx_1 mx_2 cx_1 cx_2 + mx_1 mx_3 cx_1 cx_3 + mx_2 mx_3 cx_2 cx_3)] \cdot \omega^4 - [mx_1 (cx_1 + cx_3) - \\ & - \lambda^2 (2mx_1 cx_1 - mx_1 cx_2 - mx_2 cx_3 - mx_3 cx_2) + \lambda^4 (mx_1 cx_1 + mx_2 cx_2 + mx_3 cx_3)] \cdot \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (12 \text{ а})$$

– для поперечных колебаний –

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 1)^2 - my_1 my_2 my_3 cy_1 cy_2 cy_3 \cdot \omega^6 + [my_1 my_3 cy_1 cy_2 + my_2 my_3 cy_1 cy_3 + my_1 my_2 cy_1 cy_3 +$$

$$+\lambda^2 (m_1 m_2 c_1 c_2 + m_1 m_3 c_1 c_3 + m_2 m_3 c_2 c_3)] \cdot \omega^4 - [c_1 (m_1 + m_3) - (12 б) \\ -\lambda^2 (2m_1 c_1 - m_2 c_1 - m_2 c_3 - m_3 c_2) + \lambda^4 (m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_3 c_3)] \cdot \omega^2 = 0,$$

что приводит к появлению в решениях характеристического уравнения трех пар ветвей: нижних, средних и верхних (рис. 2). При малых значениях  $\lambda^2$  отношение частот средней и нижней ветви или верхней и средней ветви приблизительно равно индексу  $z$ .

Выполненное аналитическое и численно – аналитическое исследование показало, что при условии  $\chi_j, \varepsilon_j \neq 0$  или  $\delta \neq 0$  качественное поведение решений характеристического уравнения отвечает кривым на рис. 2. Доказано, что корни характеристического уравнения (10) зависят от квадратов величин  $\chi_j$  и  $\varepsilon_j$ , а уравнения (11) – от  $\text{tg}^2 \delta$ , что, с учетом малости данных величин, делают результаты этих зависимостей малосущественными.

В статье [10] для нижних ветвей уравнение (10) было сведено к условию вырожденности матрицы 4-го порядка. Оказалось, что нижние ветви являются приближенной факторизацией уравнения (1), и это позволяет рассчитывать на получение низкочастотных волн трансляции (их длины волн значительно больше длины витка). Однако такие решения трудно реализовать на практике, и они имеют только теоретический интерес.

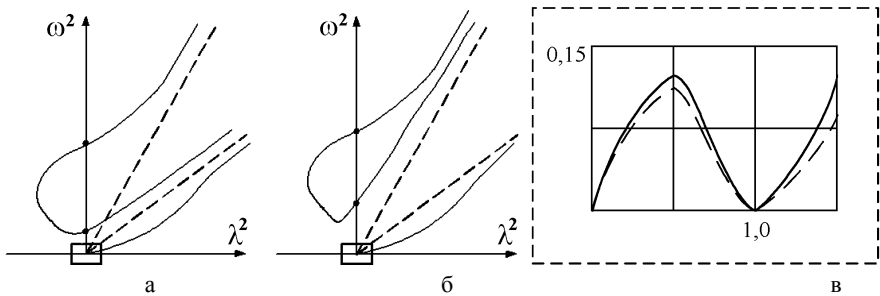


Рисунок 2 – Зависимость волнового числа  $\lambda$  от частоты  $\omega$  для продольных (а) и поперечных (б) колебаний стержня (на позиции в показаны нижние ветви для малых частот). В разрыве между ветвями величина  $\lambda^2$  комплексная.

**Частоты синфазных колебаний винтового стержня.** Как показал анализ, больший интерес вызывают средние и верхние ветви. Оказалось, что на них расположены четыре ненулевые частоты синфазных колебаний; на таких частотах отсутствуют деформации сдвига и существенно уменьшается внутреннее (гистерезисное, вязкое) трение. Но главное свойство этих частот состоит в ином: весь упругий континуум (а в случае длинной пружины он может быть весьма протяженным) колеблется синхронно, без запаздывания. Заметим, что, например, при кручении или сжатии прямого стержня такой режим колебаний не возможен (при синхронном движении соседних сечений не происходит деформации, а значит, нет обмена между кинетической и потенциальной энергией).



Средним ветвям на диаграмме «квадрат волнового числа – квадрат частоты» (рис. 3) соответствуют смещенные из начала координат наклонные прямые линии

$$\omega^2 = a^2 \cdot \lambda^2 + \omega_c^2.$$

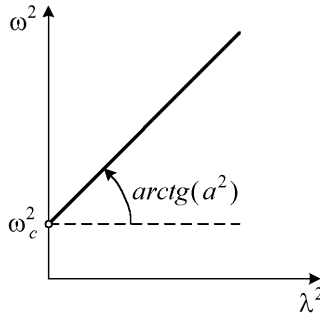


Рисунок 3 – Средняя ветвь

Приведем теоретическое обоснование для выявленной при анализе результатов компьютерного моделирования прямолинейной формы средних ветвей. Если стержень имеет круглую форму сечения, то характеристическое уравнение (12 а) принимает следующий вид:

$$-\lambda^2(1-\lambda^2)^2 + \lambda^2(1+\mu+\lambda^2) + A_1\omega^2((4-2\mu)\lambda^4 + (1+\mu)\lambda^2 + 1) - 2A_1\omega^4(1+\mu) - A_1^2\omega^4((5+4\mu)\lambda^2 + 3 + \mu) + A_1^3\omega^6 \cdot 2(1+\mu) = 0, \quad (13)$$

где  $A_1 = 1/(4z^2) \ll 1$ . Первые два слагаемых этого уравнения приближенно описывают нижнюю ветвь. На точках средней ветви величина  $\omega^2$  имеет порядок  $z^2$ , поэтому, если отбросить малосущественные слагаемые, то уравнение (13) примет вид

$$\omega^2(1+\mu+\lambda^2) - 2A_1\omega^4(1+\mu) = 0,$$

или

$$(1+\mu+\lambda^2) - 2A_1\omega^2(1+\mu) = 0, \\ \omega^2 = (2z^2/(1+\mu)) \cdot \lambda^2 + 2z^2, \quad (14)$$

где величина  $2z^2/(1+\mu)$  при выбранной нормировке совпадает с величиной квадрата скорости звука для поперечных колебаний, а  $2z^2$  – это квадрат синфазной частоты.

При произвольном (не круглом) сечении стержня коэффициенты  $mx_2$ ,  $mx_3$  и  $cx_1$  малы, что позволяет получить приближенное уравнение средней ветви в виде

$$cx_3 + cx_2\lambda^2 - mx_3cx_2cx_3\omega^2 = 0,$$

обобщающим (14). Аналогичное обоснование получено для поперечных колебаний.

При решении уравнений (10) получены формулы для синфазных частот, учитывающие их зависимость от  $\delta$ , а также геометрических характеристик сечения стержня:

для продольных колебаний (средняя и верхняя ветвь) –

$$\omega x_{c.n}^2 = \frac{1}{mx_3cx_2} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[ \frac{1}{my_1cx_2} + \frac{1}{mx_1cy_2} \right];$$

$$\omega x_{c.в}^2 = \frac{cx_1 + cx_3}{mx_2cx_1cx_3} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[ \frac{1}{my_2cx_1} + \frac{1}{mx_2cy_1} \right],$$

для поперечных колебаний (средняя и верхняя ветвь) –

$$\omega y_{c.n}^2 = \frac{1}{my_2cy_3} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[ \frac{1}{my_2cx_1} + \frac{1}{mx_2cy_1} \right];$$

$$\omega y_{c.в}^2 = \frac{my_1 + my_3}{my_1my_3cy_2} + \frac{tg^2\delta}{2} \left[ \frac{1}{my_1cx_2} + \frac{1}{mx_1cy_2} \right].$$

Симметричный вид этих формул, а также формул (12 а, б), является следствием выявленной в статье [3] симметрии между группами колебаний винтового стержня.

Анализ этих формул показал, что начальное кручение  $tg \delta$  оказывает слабое влияние на протекание средних ветвей и этим влиянием при построении линеаризованной модели фонона (модели первого приближения) допустимо пренебрегать. Влияние нелинейных параметров связи  $\chi_j, \varepsilon_j$  оказывается еще более слабым. Заметим, что если бы связь между группами колебаний оказалась сильной, то получить линеаризованную модель фонона было бы невозможно.

Для прямого стержня средние ветви проходят через начало координат и соответствуют волновым уравнениям (рис. 4), нижние и верхние ветви для продольных и поперечных колебаний сливаются. Синфазных частот у средних ветвей здесь нет.

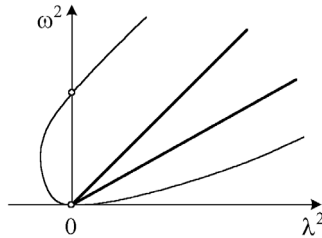


Рисунок 4 – Решения характеристического уравнения для прямого стержня

Приведем приближенные формулы для синфазных частот винтового стержня:

$$\omega x_{c.n} = \sqrt{2} z, \quad \omega y_{c.n} = 2z, \quad \omega x_{c.в} = 2\sqrt{(2+0.5z^{-2})/(1+\mu)} z^2, \quad \omega y_{c.в} = 2\sqrt{(2+z^{-2})/(1+\mu)} z^2.$$

Синфазные частоты средних ветвей располагаются в звуковом, а верхних ветвей – в ультразвуковом диапазоне. Соответствующие периоды колебаний для средних ветвей близки временам распространения звуковой волны по одному витку пружины, а для верхних ветвей – по поперечному сечению винто-

вого стержня:

$$Tx_{c.n} = (\pi \cdot D / a_{non}) / \sqrt{1 + \mu}; \quad Ty_{c.n} = \pi \cdot D / a_{np}; \quad Tx_{c.в}, Ty_{c.в} = 0.5 \pi \cdot d / a_{non},$$

например, для пружины, имеющей средний диаметр навивки  $D = 300$  мм и диаметр проволоки  $d = 10$  мм частоты этих колебаний равны 5 кГц; 3,5 кГц и 190 кГц.

Показательно, что значения нижних синфазных частот не зависят от индекса, а верхних – от радиуса кривизны стержня. Поэтому для моделей первого приближения в высокочастотной области динамический анализ винтового стержня можно заменять более простым анализом прямого стержня.

**Конвективная связь и векторные уравнения колебаний.** При выводе матричных уравнений были отброшены конвективные слагаемые  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  и  $\vec{\omega} \times \rho J \cdot \vec{\omega}$ , которые возникали в уравнении движения при переходе от абсолютных производных  $d/dt$  (для неподвижных осей) к локальным производным  $\tilde{d}/dt$  (для связанных осей):

$$d \vec{a} / dt = \tilde{d} \vec{a} / dt + \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Такое упрощение при динамическом анализе малых колебаний стержней является общепринятым (монография [1]), но для высокочастотных колебаний оно может приводить к заметным погрешностям. Кроме того, оно сокращает число коэффициентов связи продольных и поперечных колебаний в два раза, то есть искажает модель автоколебаний качественно.

После учета новых факторов, матричная модель (6) приобретает следующую векторную форму (знак тильды над локальными производными, как и ранее, опускаем):

$$\left. \begin{aligned} \rho I \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{Q} + \vec{p} \times \vec{\omega}; & \rho J \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{M} + (\vec{e} + \vec{\varepsilon}) \times \vec{Q} + \vec{j} \times \vec{\omega} \\ cQ \cdot \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{v} + (\vec{e} + \vec{\varepsilon}) \times \vec{\omega}; & cM \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{\omega} \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где  $cQ$ ,  $cM$  – диагональные матрицы, составленные из коэффициентов податливости сечения при осевом сжатии, сдвиге и изгибе в двух плоскостях, кручении;  $\vec{p}$ ,  $\vec{j}$  – векторы плотности импульса и момента количества движения,

$$\vec{p} = \rho I \cdot \vec{v} = \{mx_1 \cdot Vx_1; my_2 \cdot Vy_2; my_3 \cdot Vy_3\};$$

$$\vec{j} = \rho J \cdot \vec{\omega} = \{my_1 \cdot Vy_1; mx_2 \cdot Vx_2; mx_3 \cdot Vx_3\}.$$

Матричной факторизацией векторных уравнений (15) движения и упругости является система уравнений для связанных групп продольных и поперечных колебаний

$$\left( \begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} - \left[ \begin{array}{cc} Yx & Yyx \\ -Yyx^T & Yy \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} Vx \\ Vy \end{array} \right] &= \left( \left[ \begin{array}{cc} I & \Theta \\ \Theta & I \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} - \left[ \begin{array}{cc} B + \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Omega y + \Delta & -B^T - \Omega x^T \end{array} \right] \right) \left[ \begin{array}{c} Qx \\ Qy \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \begin{array}{c} Qx \\ Qy \end{array} \right] &= \left( \left[ \begin{array}{cc} I & \Theta \\ \Theta & I \end{array} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} + \left[ \begin{array}{cc} B^T + \Omega x^T & \Omega yx^T - \Delta \\ \Omega yx^T - \Delta & -B - \Omega x \end{array} \right] \right) \left[ \begin{array}{c} Vx \\ Vy \end{array} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где

$$\Upsilon x = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -j_1 \\ -p_2 & j_1 & 0 \end{pmatrix}, \Upsilon yx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j_3 & 0 & p_1 \\ -j_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}, \Upsilon y = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & 0 \\ -p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы сохранить симметричный (сопряженный) вид, гарантирующий гармоничность свободных колебаний, в правую часть уравнения вращений был добавлен фиктивный момент  $\vec{p} \times \vec{v} = 0$ , имеющий аналогичную физическую размерность:

$$\rho J \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} + \vec{\chi} \times \vec{M} + (\vec{e} + \vec{e}') \times \vec{Q} + \vec{j} \times \vec{\omega} + \vec{p} \times \vec{v}.$$

Для решения характеристического уравнения модели (16)

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx - \Upsilon x & -\Upsilon yx & i\lambda I - B - \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Upsilon yx^T & i\omega My - \Upsilon y & \Omega xy + \Delta & i\lambda I + B^T + \Omega x^T \\ i\lambda I + B^T + \Omega x^T & -\Omega xy^T - \Delta & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega yx^T - \Delta & i\lambda I - B - \Omega x & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0$$

используется тот же алгоритм, что и для модели (6), но предварительно в определителе из уравнения (10) выполняются следующие замены блоков:

$$A_{11} \rightarrow A_{11} + \Upsilon x; A_{12} \rightarrow A_{12} + \Upsilon yx; A_{22} \rightarrow A_{22} + \Upsilon y.$$

В заключение заметим, что новая динамическая модель учитывает все известные в механике стержней факторы (кроме эффектов трения), и, априори, способна правильно описывать связанные колебания винтового стержня. Для проверки адекватности модели планируется зарегистрировать в эксперименте режим синфазных колебаний пружины, попадающий на среднюю ветвь характеристического уравнения, и сравнить его частоту с предсказанной теорией.

## Выводы

- 1 На основе анализа и синтеза известных математических моделей разработана новая динамическая модель винтового стержня, предназначенная для исследования нелинейных колебаний и автоколебаний в широком диапазоне частот и длин волн.
- 2 К отличительным особенностям модели относятся следующие ее качества: рассматриваются связанные колебания групп продольных и поперечных деформаций; уравнения имеют симметричную матричную форму; число коэффициентов взаимного влияния групп увеличено максимально (до 12-ти).
- 3 Проанализированы решения характеристического уравнения модели, показано, что они слабо зависят от коэффициентов влияния, выявлена и обоснована прямолинейность протекания ветвей, получены формулы для частот синфазных колебаний.

**Список литературы:** 1. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. 2. Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В. Расчет собственных час-

тот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, № 8. – С. 21-30. 3. Григорьев А.Л., Деряенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПШ», 2004. – Вып. 2 (9). – С. 257-264. 4. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Л.: ЛГУ, 1962. – Вып. 27. – С. 119-134. 5. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Симметричная матричная линеаризованная модель колебаний винтового стержня // II Університетська наук.-практ. конф. магістрантів. Тези доповідей. – Харків: НТУ «ХПШ». – 2008. – Т. 1. – С. 64-66. 6. Полищук Д.Ф. Влияние граничных условий на спектр частот собственных продольных колебаний цилиндрических пружин // Машиноведение. – 1969. – № 3. – С. 31-35. 7. Григорьев А.Л. Операторный метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических пружин // Информационные технологии. Сб. науч. тр. – Харьков: ХГПУ, 1998. – Вып. 6, ч. 4. – С. 54-58. 8. Григорьев А.Л., Деряенко А.И. Алгебраический метод определения собственных частот продольных колебаний цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПШ», 2002. – Вып. 1 (5). – С. 101-109. 9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 10. Деряенко А.И., Король С.А., Григорьев А.А. Идентификация модели винтового бруса колебаний пружины для расчета спектра собственных частот // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2008. – Вып. № 1 (48). – С. 46-50.

*Поступила в редколлегию 04.11.2008.*

УДК 539.3

*Е.И.ЛЮБИЦКАЯ*, НТУ «ХПИ», Харьков

### **ИЗГИБ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ**

Розглянуто геометрично нелінійний згин тонких ортотропних пологих оболонок при поперечному навантаженні які взаємодіють з пружною основою типу Вінклера. На базі теорії R-функцій та варіаційних методів надано розв'язки задачі для оболонок складної форми в плані; наведено алгоритм знаходження верхнього та нижнього критичного навантаження. Досліджено закономірності впливу форми плану та жорсткості основи на напружено-деформований стан ортотропних оболонок.

Geometrically nonlinear behavior of orthotropic shallow shells subjected to the transverse load and resting on Winkler's foundation is investigated. On base of R-function theory and variational methods problem's solution for shells with complex plan form is proposed. The algorithm to finding upper and lower critical loads is developed. Influence of plan form, foundation modulus on a stress-deformation state of orthotropic shells is presented.

В данной работе предлагается один из возможных подходов к решению задач геометрически нелинейного изгиба ортотропных пластин и пологих оболочек, имеющих в плане произвольную форму, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки при учете влияния упругого основания типа Винклера. Подход базируется на применении вариационно-структурного метода R-функций (RFM) [1], методов последовательных нагружений и Ньютона [2]. Для решения задачи о закритической деформации использованы идеи, предложенные в работе [3], которые базируются на методе продолжения по