

Т.Б. НИКИТИНА канд. техн. наук

УПРАВЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ ПО H^2 И H^∞ КРИТЕРИЯМ

Розроблена методика синтезу регуляторів багатоканальних систем, що працюють за принципом грубого та точного керування, оптимальних за H^2 і H^∞ критеріями. Методика дозволяє синтезувати багатоканальні системи високої точності та низької чутливості до зміни параметрів і структури моделей об'єктів керування та зовнішніх збурень багатоканальних систем. Наведено приклад застосування розробленої методики для синтезу двоканальної системи, що стежить.

Многоканальные системы, работающие по принципу грубого и точного управления, позволяют существенно повысить точность управления, а в ряде случаев обеспечить точность, недостижимую в одноканальных системах. В работах [1] рассмотрены вопросы синтеза многоканальных систем, оптимальных по квадратичным критериям качества. Такие регуляторы позволяют получить высокие динамические характеристики при известных моделях многоканальной системы и внешних воздействий. Однако при изменении параметров и структуры математических моделей при использовании синтезированных регуляторов динамические характеристики системы могут существенно ухудшиться вплоть до потери устойчивости [2-3].

Целью данной работы является синтез робастного управления многоканальными системами по смешанному критерию, позволяющему обеспечивать работоспособность системы при заданном изменении моделей объектов управления и внешних воздействий и высокой точности многоканальной системы [4-6].

Рассмотрим алгоритмическую схему многоканальной системы, показанную на рис.1. Задающие воздействия $y_{31}(t), y_{32}(t) \dots y_{3n}(t)$ обычно являются достаточно близкими, в частности, равными между собой координатами. Так, например, в трехканальной стратосферной системе такими координатами являются направления на Солнце, на край диска Солнца и непосредственно на изучаемый объект на Солнце [7]. При этом помехи отдельных измерителей $f_1, f_2 \dots f_n$ как правило существенно отличаются в связи с различными дискриминаторными характеристиками измерительных устройств. К выходу каждого канала приведены возмущения $F_i(t)$.

Каждый канал состоит из неизменяемой части объекта управления w_{0i} и собственно регулятора r_i , структуру и параметры которого необходимо определить. Для формирования управления i -го канала $u_i(t)$ используется

сигнал измеренной ошибки $\varepsilon_{iu}(t)$, также вектор переменных состояния i -го канала $\bar{x}_{ui}(t)$, доступный для измерения.

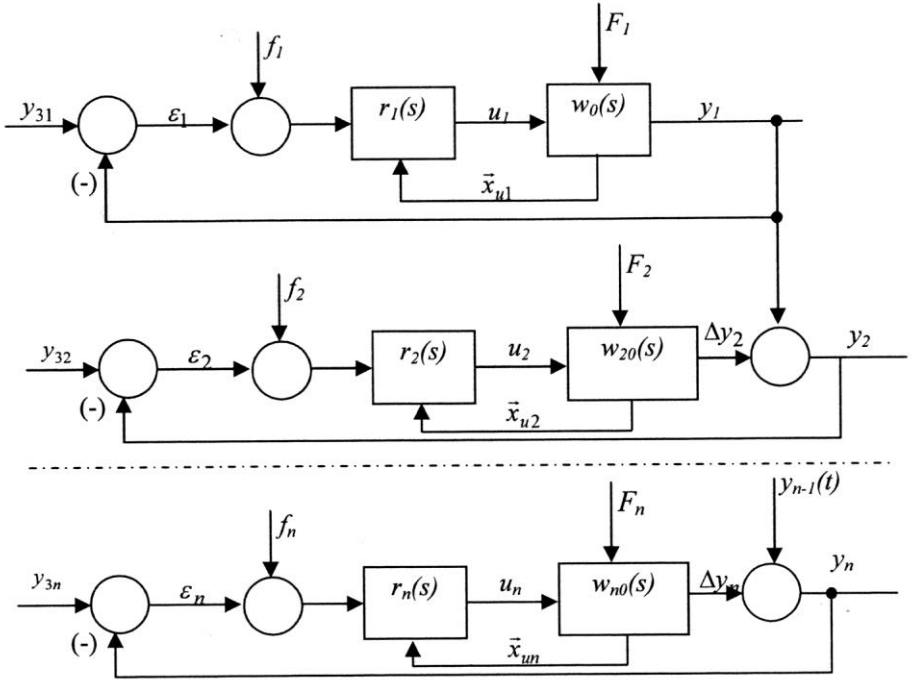


Рис. 1. Схема многоканальной системы.

Задача синтеза регуляторов каналов заключается в минимизации ошибок каналов $\varepsilon_i(t)$ при ограничении управления и переменных состояния. Обычно результирующая точность многоканальной системы определяется ошибкой $\varepsilon_n(t)$ последнего n -ного канала.

Введем вектор задающих воздействий $\bar{y}_3(t) = \{y_{3i}(t)\}$, вектор выходных координат $\bar{y}(t) = \{y_i(t)\}$, вектор выходных координат отдельных каналов $\Delta\bar{y}(t) = \{\Delta y_i(t)\}$, вектор помех измерения $\bar{f}(t) = \{f_i(t)\}$, вектор возмущений $\bar{F}(t) = \{F_i(t)\}$, вектор управлений $\bar{u}(t) = \{u_i(t)\}$, вектора ошибок $\bar{\varepsilon}(t) = \{\varepsilon_i(t)\}$ и измеренных ошибок $\bar{\varepsilon}_u = \{\varepsilon_{iu}\}$. Введем передаточные функции объектов управления $w_{0i}(s)$ и матрицу передаточных функций объекта управления $w_0(s) = \text{diag}\{w_{0i}(s)\}$. Тогда получим следующие матричные уравнения

$$\bar{\varepsilon}(t) = \bar{y}_3(t) - \bar{y}(t),$$

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) &= \Delta\bar{y}(t) + \bar{F}(t), \\ \bar{\varepsilon}_u(t) &= \bar{\varepsilon}(t) + \bar{f}(t), \\ \Delta\bar{y}(t) &= w_0(s)\bar{u}(t), \\ \bar{y}_u(t) &= w_{0u}(s)\bar{u}(t).\end{aligned}$$

Если спектральные плотности внешних воздействий известны и могут быть аппроксимированы дробно – рациональными функциями, то синтез регуляторов может быть сведен к минимуму квадратичного критерия качества. Этот оптимальный регулятор может быть найден в частотной области [7]. Для нахождения такого регулятора необходимо выполнить операции сепарации и факторизации соответствующих матриц спектральных плотностей. Эти операции к настоящему времени достаточно формализованы и имеются соответствующие программные продукты для их решения.

Эта задача может быть также решена и во временной области. При этом уравнение состояния исходной многоканальной системы содержит модели отдельных каналов и модели формирующих фильтров векторов задающих $\bar{x}(t)$ и возмущающих $\bar{F}(t)$ воздействий. Управление по полному вектору состояния, минимизирующее квадратичный критерий, реализуется с помощью наблюдателя. Для определения матриц коэффициентов усиления оптимального регулятора и оптимального наблюдателя необходимо решить две системы уравнений Риккати.

Существенным недостатком оптимальных регуляторов является их достаточно высокая чувствительность к изменению параметров и структуры объекта управления вплоть до полной потери работоспособности и устойчивости. Поэтому в последнее время получила развитие теория синтеза регуляторов, нечувствительных к изменению параметров и структуры объекта управления. Такие регуляторы названы робастными. К настоящему времени разработано несколько подходов к синтезу робастных регуляторов. Рассмотрим один из них, основанный на описании системы в пространстве состояний [4-6].

Вектора задающих $\bar{y}_3(t)$ и возмущающих $\bar{F}(t)$ воздействий, как правило, нельзя считать, сигналами типа белого шума. Обычно система проектируется таким образом, чтобы обрабатывать вектор задающих воздействий $\bar{y}_3(t)$ и компенсировать вектор возмущающих воздействий $\bar{F}(t)$ так, чтобы вектор ошибок $\bar{\varepsilon}(t)$ был достаточно малым вектором. При этом, естественно, полоса пропускания замкнутой системы должна быть достаточно большой либо по меньшей мере соизмеримой со спектрами задающих и возмущающих воздействий, чтобы обработать задающее и компенсировать возмущающие воздействия. Однако полоса пропускания замкнутой системы при этом, не должна быть достаточно широкой, чтобы не усиливать шумы измерительных

устройств и не увеличивать составляющую ошибки системы, вызванную шумами измерительных устройств. Поэтому будем формировать вектора задающих $\vec{x}(t)$ и возмущающих $\vec{F}(t)$ воздействий с помощью моделей – формирующих фильтров с соответствующими матрицами передаточных функций.

С учетом введенных обозначений рассмотрим схему многоканальной системы, рис.2.

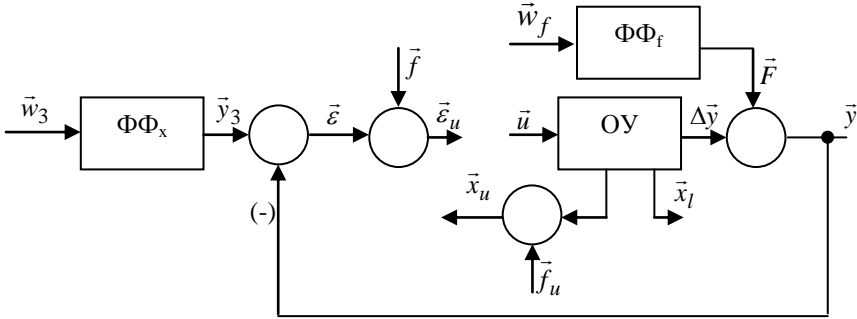


Рис.2. Схема синтезируемой системы.

Введем вектор состояния объекта управления $\vec{x}_0(t)$ и запишем уравнение состояния, вектора выхода $\Delta\vec{y}(t)$ и измерения $\vec{x}_u(t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_0(t)}{dt} &= A_0\vec{x}_0(t) + B_0u(t), \\ \Delta\vec{y}(t) &= C_0x_0(t), \\ \vec{x}_u(t) &= C_u\vec{x}_0(t) + \vec{f}_u(t) \end{aligned}$$

Введем также вектор переменных состояния объекта управления $\vec{x}_l(t)$, которые необходимо ограничивать и запишем уравнение в следующем виде

$$\dot{\vec{x}}_l(t) = C_l\vec{x}_0(t)$$

Введем вектор состояния $\vec{x}_3(t)$ модели (формирующего фильтра) вектора задающего воздействия $\vec{y}_3(t)$ и запишем уравнение состояния и выхода в следующем виде

$$\frac{d\vec{x}_3}{dt} = A_3\vec{x}_3(t) + B_3\vec{w}_3(t), \quad \vec{y}_3(t) = C_3\vec{x}_3(t)$$

Аналогично введем вектор состояния $\vec{x}_F(t)$ формирующего фильтра вектора возмущающего воздействия $\vec{F}(t)$ и запишем уравнения состояния и выхода в следующем виде

$$\frac{d\bar{x}_F}{dt} = A_F \bar{x}_F(t) + B_F \bar{w}_F(t), \quad \bar{F}(t) = C_F \bar{x}_F(t)$$

Основное назначение системы заключается в минимизации вектора ошибки $\bar{\varepsilon}(t)$ отработки с помощью объекта управления вектора задающего воздействия $\bar{y}_3(t)$ и компенсации вектора возмущающего воздействия $\bar{F}(t)$. Как следует из схемы, показанной на рис.

$$\bar{\varepsilon}(t) = \bar{y}_3(t) - \Delta \bar{y}(t) - \bar{F}(t),$$

а выходная координата системы равна

$$\bar{y}(t) = \Delta \bar{y}(t) + \bar{F}(t).$$

Приведем данную систему к стандартному виду, принятому в теории H^2 и H^∞ регуляторов [4]. Введем вектор состояния системы $\bar{x}(t)$, компонентами которого являются векторы состояния объекта управления $\bar{x}_0(t)$, формирующих фильтров задающего $\bar{x}_3(t)$ и возмущающего $\bar{x}_F(t)$ воздействий в следующем виде

$$\bar{x}(t) = \{\bar{x}_0^T, \bar{x}_3^T(t), \bar{x}_F^T(t)\}^T$$

Введем вектор внешних воздействий $\bar{w}(t)$, компонентами которого являются вектора $\bar{w}_3(t)$ и $\bar{w}_F(t)$, возбуждающие формирующие фильтры векторов задающего $\bar{x}_3(t)$ и возмущающего $\bar{F}(t)$ воздействий, а также вектор помехи $\bar{f}(t)$ измерения ошибки системы $\bar{\varepsilon}(t)$ и вектор помех $\bar{f}_u(t)$ измерения вектора переменных состояния $\bar{x}_u(t)$ в следующем виде:

$$\bar{w}(t) = \{\bar{w}_3^T(t), \bar{w}_F^T(t), f(t), \bar{f}_u^T(t)\}^T.$$

Введем вектор измеряемых переменных $\bar{y}(t)$, компонентами которого являются вектор измеренных ошибок системы $\bar{\varepsilon}_u(t)$ и измеренный вектор состояния $\bar{x}_u(t)$ в следующем виде:

$$\bar{y}(t) = \{\bar{\varepsilon}_u^T(t), \bar{x}_u^T(t)\}^T.$$

В вектор контролируемых переменных $\bar{z}(t)$ включим вектор ошибки системы $\bar{\varepsilon}(t)$, вектор переменных состояния $\bar{x}_l(t)$ подлежащий ограничению и вектор управляющего воздействия $\bar{u}(t)$ в следующем виде $\bar{z}(t) = \{\bar{\varepsilon}^T(t), \bar{x}_l^T(t), \bar{u}^T(t)\}$. Запишем теперь уравнение состояния исходной системы, уравнение контролируемых переменных $\bar{z}(t)$ и уравнение измеряемых переменных $\bar{y}(t)$ в стандартной форме, принятой в теории H^∞ :

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + B_1\bar{w}(t) + B_2\bar{u}(t)$$

$$\begin{aligned}\bar{z}(t) &= C_1 \bar{x}(t) + D_{11} \bar{w}(t) + D_{12} \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) &= C_2 \bar{x}(t) + D_{21} \bar{w}(t) + D_{22} \bar{u}(t)\end{aligned}$$

На основании схемы, показанной на рис.2, и с учетом введенных векторов матрицы системы соответственно равны

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} A_0 & & \\ & A_3 & \\ & & A_F \end{bmatrix}; & B_1 &= \begin{bmatrix} & & \\ B_3 & & \\ & B_F & \end{bmatrix}; & B_2 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ \\ \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -C_0 & C_3 & -C_F \\ C_l & & \\ & & \end{bmatrix} & D_{11} &= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} & D_{12} &= \begin{bmatrix} \\ \\ R_2 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} -C_0 & C_3 & -C_F \\ C_u & & \end{bmatrix} & D_{21} &= \begin{bmatrix} & V_f & \\ & & V_u \end{bmatrix}; & D_{22} &= \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}\end{aligned}$$

В этих матрицах приняты следующие обозначения: R_2 - весовая матрица, учитывающая «вес» управления в норме передаточной функции, V_f , V_n - матрицы, учитывающие интенсивность помех измерений вектора ошибки системы $\bar{\varepsilon}(t)$ и вектора $\bar{x}_u(t)$.

В рамках линейной квадратичной гауссовой проблемы оптимального управления решается задача минимума критерия

$$\begin{aligned}J &= \lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \bar{z}^T(t) \bar{z}(t) dt \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} M \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{x}^T(t) \bar{u}^T(t)] \begin{bmatrix} R_1 & N \\ N^T & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{x}^T \bar{u}^T] \begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{12}^T \end{bmatrix} [C_1 D_{12}] \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} dt \right\}\end{aligned}$$

Для исходной системы

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) + \bar{\xi}(t)$$

возбуждаемой вектором случайных сигналов $\bar{\xi}(t)$ типа белого шума и измеряемого вектора выхода

$$y(t) = C\bar{x}(t) + \bar{\theta}(t)$$

с вектором ошибок измерения $\bar{\theta}(t)$ типа белого шума так, что

$$M \left\{ \begin{bmatrix} \bar{\xi}(t) \\ \bar{\theta}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\xi}^T(t), \bar{\theta}^T(t) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \theta & N_f \\ N_f^T & \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^T & D_{21}^T \end{bmatrix} \delta(t - \tau) = \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 D_{21}^T \\ D_{21} B_1^T & D_{21} D_{21}^T \end{bmatrix} \delta(t - \tau)$$

Наблюдатель в виде фильтра Калмана описывается уравнением

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x}(t) + B_2 u(t) + K_f [\bar{y}(t) - C_2 \hat{x}(t) - D_{22} u(t)]$$

где

$$K_f = (\Sigma C_2^T + N_f) \theta^{-1} = (\Sigma C_2^T + B_1 D_{21}^T) (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

В котором матрица Σ удовлетворяет алгебраическому уравнению Риккати

$$\Sigma A^T + A \Sigma - (\Sigma C_2^T + N_f) \theta^{-1} (C_2 \Sigma + N_f^T) + \Sigma = 0$$

Управление по полному вектору состояния

$$u(t) = F \tilde{x}(t)$$

где матрица коэффициентов усиления

$$F = R^{-1} (B_2^T p + N_c^T) = (D_{12}^T D_{12})^{-1} (B_2^T p + D_{12}^T C_1),$$

а P удовлетворяет уравнению Риккати

$$A^T p + p A - (p B_2 + N_\theta) R^{-1} (B_2^T p + N_\theta) + Q = 0.$$

Заметим, что передаточная матрица оптимального регулятора

$$\tilde{u}(s) = F(s) \tilde{y}(s)$$

при этом имеет следующий вид

$$F(s) = \left| \frac{A - K_f C_2 - B_2 K_c + K_f D_{22} K_c}{-K_c} \right| \left| \frac{K}{0} \right|$$

Таким образом, нахождение оптимального регулятора, минимизирующего H^2 сводится к решению двух уравнений Риккати по управлению

$$A^T X_2 + X_2 A - X_2 B_2 B_2^T X_2 + C_1^T C_1 = 0$$

и по фильтрации

$$A Y_2 + Y_2 A^T - Y_2 C_2^T C_2 Y_2 + B_1 B_1^T = 0$$

Синтез регулятора, минимизирующего H^∞ норму сводится к решению двух уравнений Риккати по управлению

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty (B_2 B_2^T - \gamma^2 B_1 B_1^T) X_\infty + C_1^T C_1 = 0$$

и по фильтрации

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - Y_\infty (C_2^T C_2 - \gamma^2 C_1^T C_1) Y_\infty + B_1 B_1^T = 0.$$

Тогда матрица передаточных функций оптимального регулятора

$$K_\infty(s) = \left| \frac{A_\infty}{F_\infty} \right| \left| \frac{-Z_\infty L_\infty}{0} \right|$$

где

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty,$$

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^T,$$

$$Z_\infty = (I - \gamma - 2Y_\infty X_\infty)^{-1}.$$

Здесь параметр γ такой, что выполняется условие

$$\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma.$$

Рассмотрим применение такого подхода к синтезу двухканальной электромеханической следящей системы [7]. Эквивалентное задающее воздействие формируется от одного источника с формирующим фильтром $V_x(p) = V_x [p(T_x p + 1)]$. Возмущающее воздействие при синтезе системы не учитывается. Минимальное значение дисперсии ошибки двухканальной системы по критерию H^2 составляет $2,1 \cdot 10^{-6}$ рад². Однако при этом величины дисперсий управляющих воздействий и переменных состояния принимают недопустимо большие значения. Учет ограничений на управления и переменные состояния каналов приводит к существенному увеличению дисперсий ошибок как первого канала, так и двухканальной системы в целом составляет соответственно $\bar{\varepsilon}_1^2 = 2,1 \cdot 10^{-5}$ рад², $\bar{\varepsilon}_2^2 = 2,6 \cdot 10^{-6}$ рад². Следует заметить, что эта ошибка в основном определяется помехой измерения ошибки второго канала $f_2(t)$ точнее – отношением интенсивности этой помехи к интенсивности полезного сигнала (отношение сигнал/шум). Помеха измерения $f_1(t)$ ошибки первого канала $\varepsilon_1(t)$ на точность двухканальной системы практически не влияет и определяет только дисперсию ошибки одноканальной системы.

Список литературы: 1. Куценко А.С., Никитина Т.Б. Уточнение параметров нелинейных оптимальных регуляторов каналов многоканальных систем при последовательном синтезе. Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. - №59. с.17 – 25. 2. Никитина Т.Б. Синтез приближенно – оптимальных нелинейных систем цифрового управления технологическими процессами с аналитическими нелинейностями. //Автоматизация виробничих процесів. Київ. - 2003. - №2(17). - С.62-65. 3. Никитина Т.Б. Приближенно оптимальное цифровое управление электроприводами с аналитическими нелинейностями. //Вестник НТУ «ХПИ». Сб. научных трудов. Харьков: НТУ «ХПИ». - 2003. - №10. Т1. - С.321-322. 4. Limebeer D., Green M., Walker D. “Discrete Time H^{∞} control” Proc. Of Conf. on Decision and control, Tampa, Fl., Dec. 1989. 5. Khargonekar P., Petersen I., Rotea M.,” H^{∞} optimal control with state feedback “, IEEE Trans. Automat. Contr., AC – 33, pp.783 – 786, 1988. 6. J.Doyle, K. Glover, P.Khargonekar, and B. Francis, “State – space solutions to standard H^2 and H^{∞} control problems”. IEEE Trans. Automat. Contr., AC – 34, no 8. pp.831 – 847, Aug. 1989. 7. Кузнецов Б.И., Никитина Т.Б., Коломиец В.В. Синтез электромеханических систем со сложными кинематическими цепями. Харьков, УИПА.2005. – 511с.

Поступила в редколлегию 09.03.06