

УДК 539.3

**О.О.ЛАРИН**, НТУ «ХПІ»**ДОСЛІДЖЕННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ТРИВИМІРНИХ ЦИКЛО–СИМЕТРИЧНИХ КОНСТРУКЦІЙ З ВИПАДКОВИМ РОЗЛАДОМ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО**

Проведено аналіз гармонічних коливань цикло-симетричної конструкції з випадково заданим розладом методом Монте-Карло. Наведено аналіз імовірнісних характеристик АЧХ

It is carried out the analysis of simple harmonic vibrations of cyclic symmetry designs with random mistuning by the direct Monte-Carlo simulations method. It is presented the analyses of the probabilistic characteristics of the FRF.

**Вступ.** У техніці широко розповсюджені конструкції з різноманітними типами симетрії, що зумовлено високою технологічністю їх виробництва, само-збалансованістю, наявністю симетрій у багатьох природних процесах та ін. Одним із найрізноманітніших видів симетричних конструкцій є системи із циклічною симетрією, в яких можна виділити підсистему (сектор) геометричні, механічні й силові параметри якого зберігають свою інваріантність під час обертання на кут  $2\pi/N$  [1,2,3]. Зазначена симетрія обумовлює наявність певних властивостей динамічних характеристик таких систем: форми коливань по куту симетрії розподіляються за гармонічним законом утворюючи стоячі хвилі, в системі присутні кратні власні частоти.

З розрахунковою точки зору дуже важливою властивістю є можливість проведення досліджень динамічної поведінки цикло-симетричної системи (ЦСС) на основі моделі одного сектора з граничними умовами циклічної симетрії. Це дає можливість застосовувати складні моделі, що дозволяють проводити детальний числовий аналіз напружено-деформованого стану всіх конструктивних елементів об'єкту, що досліджується.

Разом із тим, в реальних конструкціях цього типу існує певна невизначеність їх параметрів, яка виникає через стохастичну природу виробничих технологічних процесів і експлуатаційну деградацію властивостей матеріалу та призводить до розладу.

Розлад може суттєво змінити динамічну поведінку ЦС системи та викликати суттєве збільшення амплітуд його вібрацій. Це може бути обумовлено декількома ефектами: по-перше, просторовою локалізацією енергії навколо одного або декількох секторів [3,4]; по-друге, викривлення симетричних власних форм може призвести, підчас коливань, до прояву їх у суперпозиції і як наслідок до істотного збільшення амплітуд вібрацій [5]; по-третє, внаслідок розладу можуть виникати додаткові резонансні режими та розширення резонансних областей у робочому діапазоні частот [6]. Таким чином розлад може призвести до втрати динамічної міцності або до істотного зменшення ресурсу внаслідок втоми матеріалу.

Треба зазначити, що оцінка або прогнозування надійності та ресурсу по-

требує попереднього отримання достовірної інформації відносно напружено-деформованого стану, а для цього необхідно використовувати моделі сектора великої розмірності, які враховують основні конструктивні особливості, що в значному ступені ускладнює, а інколи і унеможливує отримання числових результатів. Це особливо актуально для систем з випадковим розладом, бо перше в таких системах внаслідок втрати симетрії необхідно проводити розрахунки по моделі всієї системи в цілому, а не моделі сектору, по-друге випадковість параметрів у цих системах вимагає визначення імовірнісних характеристик відклику системи, що сполучено з проблемою розрахунку відповідної детермінованої задачі для необхідного числа реалізацій випадкового розладу.

Тому, навіть незважаючи на інтенсивний розвиток можливостей і ресурсів сучасних комп'ютерних систем актуальними залишаються розробки методів, що знижують обчислювальну вартість задач скінчено-елементного аналізу ЦС конструкцій з випадковим розладом [8-13]. Це мотивувало розвиток методів конденсації розмірності задачі (розкладання в ряд по власним формам симетричної системи [9], метод синтезу форм коливань [10,11] та використання формули Шермона-Моррісона-Вудбарі [12,13]), які дозволяють побудувати більш ефективні схеми моделювання з використанням скінчено-елементних моделей лише одного сектору системи. Проте для систем з великою кількістю секторів, як, наприклад, робочі колеса газових або парових турбін, кількість випадкових параметрів може бути досить великим, що значно збільшує кількість необхідних ітерацій у моделюванні Монте-Карло (МК) та в значному ступені ускладнює отримання числових результатів навіть для системи конденсованої розмірності. Через це для отримання практично важливих кількісних результатів широко застосовуються наближені методи статистичного параметричного аналізу [7, 14-17]. Використання будь-якого наближеного методу вимагає оцінки його меж застосування та похибок, що виникають.

**Постановка задачі.** В роботі проведено дослідження, випадкових коливань тривимірної ЦС системи з випадковим розладом, проаналізовані ефекти, що виникають у аналізі імовірнісних характеристик З цією метою було побудовано ЦС систему відносно малої розмірності, що дозволяє отримати результати під час застосування прямого моделювання Монте-Карло на основі моделі усієї системи в цілому. Розроблена скінчено-елементна модель представлена на рисунку 1, вона складається з 20 секторів зв'язаних по ободу (та утворює таким чином з'єднання секторів по типу бандажування), у кожному секторі задано випадковий розлад у вигляді зосереджуваного пружного елемента, що має випадкову жорсткість, яка моделювалась як центрована нормальна величина з середньоквадратичним відхиленням, значення якого призводить до змінення у межах 10 відсотків першої парціальної власної частоти сектору системи (додачне значення жорсткості призводить до зменшення частоти на 10 відсотків, а від'ємне значення – до збільшення частоти на 4 відсотка). Система виводилась з положення рівноваги гармонічною силою з одиничною амплітудою, яка прикладена до першого сектору, забезпечуючи таким чином збудження всіх резонансів у досліджуваному діапазоні частот.

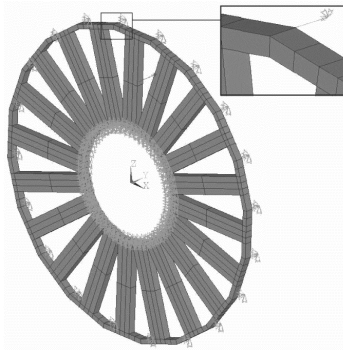


Рисунок 1 – Скінчено-елементна модель ЦС системи з доданим пружним елементом, що дозволяє моделювати випадковий за жорсткістю розлад

**Дослідження систем із детермінованим розладом.** В роботі проведено дослідження детермінованої задачі з розладом що заданий у одному секторі. Так на рис. 2 наведено отримані амплітудно-частотні характеристики (АЧХ) для декількох секторів системи, представлені графіку демонструють залежність АЧХ вузла першого сектору від віддалення сектору в якому прикладений розлад.

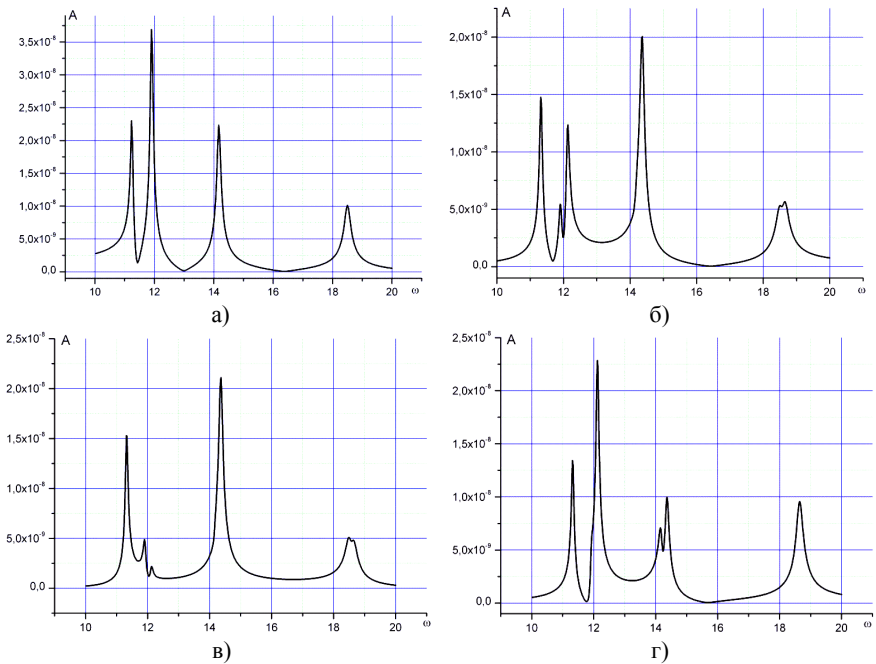


Рисунок 2 – АЧХ для системи з детермінованим розладом, що заданий у одному секторі (АЧХ ЦС системи – а), розлад задано у 5, 15 та 17 секторах – б), в) та г) відповідно)

**Дослідження систем з випадковим розладом.** Під час використання методу Монте-Карло важливою проблемою є аналіз кількості реалізацій необхідних для визначення ймовірностних характеристик відклику системи. Так на рис. 3 наведено графіки збігання математичного сподівання (МС) та середньоквадратичного відхилення (СКВ) амплітуд коливань у залежності від кількості ітерацій. Аналіз процесу збігання характеристик випадкових АЧХ вказує, що на резонансній частоті воно є значно повільніше і вимагає більшого числа ітерацій.

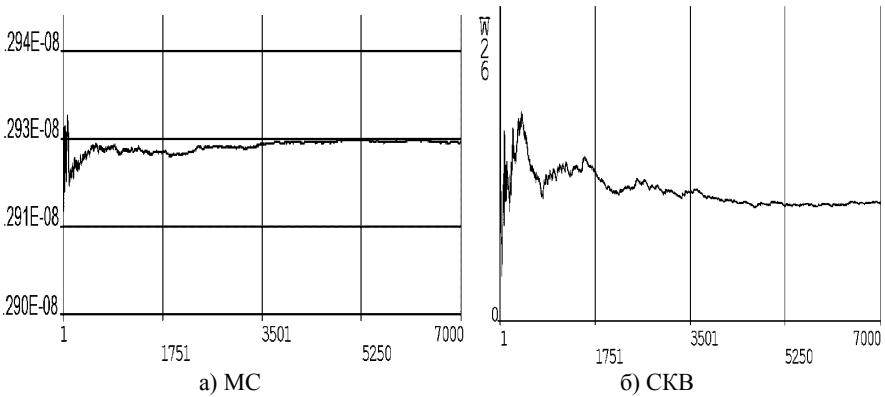


Рисунок 3 – Графік збігання схеми МК

На рис. 4, а представлено МС (товста лінія) та верхня границя можливого розкиду реалізацій АЧХ, що визначено за правилом «3 сигма». Особливої уваги потребує наявність того факту, що МС АЧХ не співпадає з АЧХ ЦС системи (див. рис. 2, а та 4, а), яка є результатом обчислення АЧХ у разі нульових значень МС параметрів розладу, а отже широко застосовується у наближених підходах типу статистичної лінеаризації.

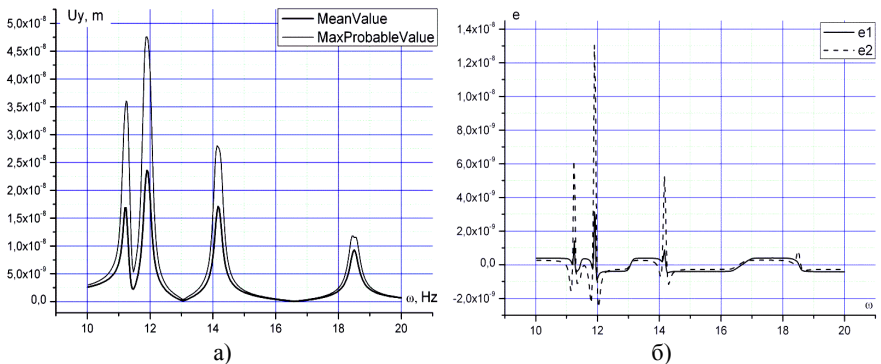


Рисунок 4 – МС АЧХ розраховані методом МК  
(а) – МС АЧХ, б) – похибка визначення МС АЧХ методом МК

Наявність таких значних відхилень може бути пояснено якщо розглянемо обчислення МС рівняння вимушених випадкових коливань

$$([K(\alpha)] - \omega^2 \cdot [M(\alpha)] + i \cdot [D(\alpha)]) \cdot q = [Z(\omega, \alpha)]q = f, \quad (1)$$

де  $[K]$ ,  $[M]$  и  $[D]$  – матриці жорсткості, мас та демпфування відповідно;  $[Z(\omega)]$  – матриця динамічної жорсткості;  $\omega$  – частота збурення;  $q$  – амплітудні значення переміщень;  $f$  – вектор амплітуд зовнішньої вимушеної сили, а  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]'$  – вектор випадкових параметрів розладу, штрихом позначено операцію транспонування.

Матриця  $[Z(\omega, \alpha)]$  у рівнянні (1) може бути представлена в вигляді суперпозиції динамічної матриці жорсткості нерозлагодженої системи  $[Z_0(\omega)]$  та матриці розладу  $[\Delta Z(\alpha, \omega)]$ :

$$([Z_0(\omega)] + [\Delta Z(\alpha, \omega)]) \cdot q = f. \quad (2)$$

Тоді безпосереднє обчислення МС рівняння (2)

$$M[(Z_0 + \Delta Z(\alpha))q] = M[Z_0 q] + M[\Delta Z(\alpha)q] = f. \quad (3)$$

Враховуючи, що матриця жорсткості ЦС системи є детермінованою, а матриця розладу у наслідок випадковості параметрів розладу є випадковою так само як і вектор амплітуд коливань, та, враховуючи правило обчислення МС від добутку 2 випадкових величин отримаємо

$$Z_0 M[q] + M[\Delta Z(\alpha)]M[q] + K_{\Delta Z, q} = f, \quad (4)$$

де  $K_{\Delta Z, q}$  – кореляційний момент між розладом та вектором амплітуд коливань.

У більшості випадків математичне очікування розладу є нульовим

$$M[q] = Z_0^{-1} f - Z_0^{-1} K_{\Delta Z, q} = q_0 - Z_0^{-1} K_{\Delta Z, q}. \quad (5)$$

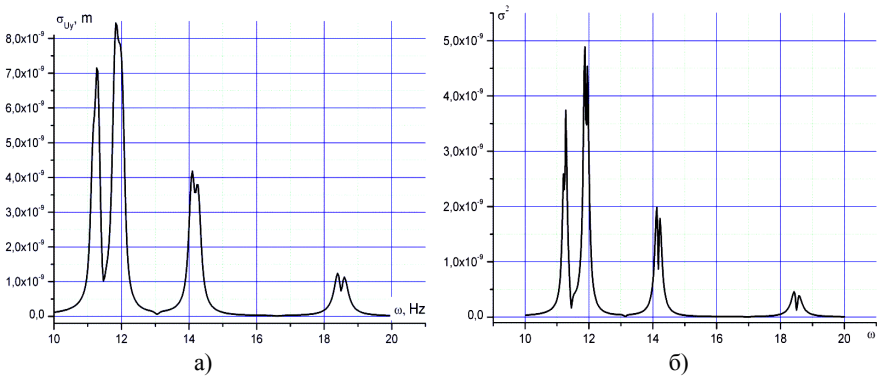


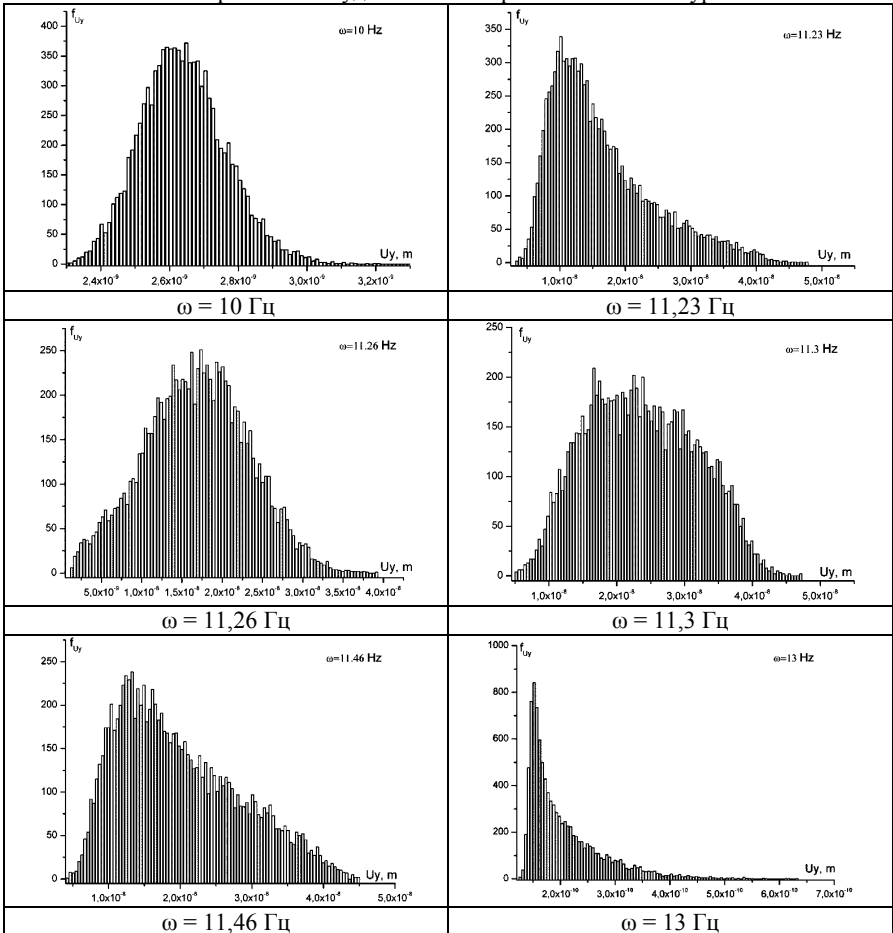
Рисунок 5 – СКВ АЧХ розраховані методом МК

Отже відмінність ЦС розвитку та МС системи з центрованим розладом пояснюється наявністю великої кореляції між параметрами розладу та вектором амплітуд переміщень. Зрозуміло, що ця кореляція тим менша чим менше СКВ параметрів розладу. Відповідне порівняння наведено на рисунку 46, де

пунктирною та суцільною лінією позначено абсолютну похибку МС АЧХ розраховані методом МК для розладу СКВ якого має таке значення, що забезпечую змінення першої власної частоти парціального сектору у межах 5 та 2 відсотків відповідно. З наведених результатів видно, що похибка визначення МС АЧХ для розладу СКВ якого забезпечую змінення першої власної частоти парціального сектору у межах до 2 відсотків, не перевищує 10% на резонансних режимах.

На рис. 5 представлено СКВ АЧХ розраховані для розладу СКВ якого має таке значення, що забезпечую змінення першої власної частоти парціального сектору у межах 5 та 2 відсотків відповідно рис. 5, а та 5, б. З наведених результатів видно, що СКВ АЧХ має більшу кількість резонансів ніж МС, що відповідає прояву явища розшарування частот ЦС системи внаслідок розладу.

Гістограми амплітуд коливань на різних частотах збурення



В таблиці наведено гістограми амплітуд коливань у згінному напрямку для різних фіксованих значень частоти. Наведені гістограми вказують на те, що щільність ймовірності амплітуд коливань змінюється не тільки кількісно, але й якісно.

**Висновки:** В даній роботі проведено дослідження випадкових вимушених коливань, проаналізовані деякі особливості поведіння такої системи. Треба зазначити, що існування суттєвої кореляції між параметрами розладу та АЧХ значно зменшує можливість застосування статистичної лінеаризації визначення математичного очікування в рамках наближеного підходу має велику похибку на резонансних піках АЧХ, яка зменшується до інженерно допустимих значень лише при досить малих значеннях СКВ параметрів розладу (СКВ розладу має таке значення, що забезпечують змінення першої власної частоти парціального сектору у межах 2 відсотків). Отримані гістограми вказують на суттєву залежність закону щільності ймовірності амплітуд коливань від частоти збурення. Наявність цього явища не може бути враховано у лінеаризованій постановці оскільки лінійне представлення априорі зберігає закон розподілу щільності ймовірності. Крім того отримані гістограми вказують на те, що параметричний імовірнісний аналіз у класичному вигляді оцінки МС та СКВ не є достатнім, бо для даної системи на деяких частотах збурення мода не співпадає з МС, а отже потребує окремого аналізу, як характеристика, що вказує на найбільш ймовірну реалізацію АЧХ.

Разом із тим треба зазначити, що для отримання добрих значень збігання МС та СКВ відклику системи потрібно велика кількість ітерацій методу МК, яка значно зростає зі збільшенням кількості випадкових параметрів у системі. Так для 20 випадкових параметрів добре збігання по МС на резонансних піках спостерігалось лише при кількості ітерацій у 10000, при цьому час розрахунку скінчено-елементної моделі відносно малої розмірності (2160 ступенів волі) на персональному комп'ютері (процесор 2x2 ГГц, оперативна пам'ять 2 ГБ) з використання паралельної схеми розрахунку складав понад 6 годин. Таким чином можливості використання прямого моделювання МК для реальних ЦС конструкцій з випадковим розладом суттєво обмежені.

**Список літератури:** 1. *Іванов В. П.* Колебания рабочих колес турбомашин. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с. 2. *Лукин Б.С.* Об исследовании колебаний циклически симметричных конструкций методом конечных элементов // Динамика и прочность машин. – Харків: ХПІ, 1979. – Вип. 31. – С. 12-21. 3. *Зиньковский А.П., Бусленко И.Н., Матвеев В.В.* Локализация колебаний бандажированного лопаточного венца рабочего колеса турбомашин // Проблемы прочности. – Киев: Институт проблем прочности АН Украины, 1994. – № 7. – С. 53-62. 4. *C.Pierre, O.Mehmed, J.Judge* Experimental investigation of mode localization and forced response amplitude magnification for a mistuned bladed disk // Transactions of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 940-950. 5. *J.H.Griffin, J.A.Kenyon* Experimental demonstration of maximum mistuned bladed disk forced response // Transactions of the ASME. J. of Turbomachinery. – 2003. – Vol. 125. – P. 673-681. 6. *Жовдак В.О., Ларін О.О., Головка О.М.* Вимушені коливання циклосиметричного лопаткового апарату з випадковим технологічним розладом // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків, НТУ «ХПІ». – 2007. – № 38. – С. 58-68. 7. *E.P.Petrov, D.J.Ewins* Analysis of the worst mistuning patterns in bladed disk assemblies // Transactions of the ASME. J. of Turbomachinery. – 2003. – Vol.

125. – P. 623-631. **8.** *Соболь И.М.* Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1972. – 64 с. **9.** *J.H.Griffin, D.M.Feiner* Mistuning identification of bladed disks using a fundamental mistuning model - Part I: theory // Transactions of the ASME. J. of Turbomachinery. – 2004. – Vol. 126. – P. 150-158. **10.** *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – Part I: theoretical models // Transactions of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 89-99. **11.** *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – Part II: application // Transactions of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 100-108. **12.** *Petrov E.P., Sanliturk K.Y., Ewins D.J.* A new method for dynamic analysis of mistuned blade disk based on the extract relationships between tuned and mistuned systems // Transaction of the ASME. – Vol. 124. – 2002. – P. 586-597. **13.** *J. Ewins, E. P Petrov, K. Y. Sanliturk, R. Elliott.* Quantitative Prediction of the Effects of Mistuning Arrangement on Resonant Response of a Practical Turbine Bladed Disc // Proceedings of the 5th National Turbine Engine High Cycle Fatigue (HCF) Conference, Chandler, AZ. – 2000. **14.** *A.Sinha* Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos // Transactions of the ASME. J. of Vibration and Acoustics. – 2006. – Vol. 128. – P. 449-457. **15.** *E.P.Petrov* A sensitivity-based method for direct stochastic analysis of nonlinear forced response for bladed disks with friction interfaces // Proceedings of GT2007 ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air, Montreal, Canada. – 2007. – P. 24-35. **16.** *Евланов Л.Г., Константинов В.М.* Системы со случайными параметрами. – М.: Наука, 1976. – 568 с. **17.** *Жовдак В.А., Смирнова Л.М., Солошенко В.А.* Задача статистической динамики для циклически симметричных систем со случайной расстройкой // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье: Сборник научных трудов ХГПУ. – Харьков: ХГПУ, 1999. – № 7, ч. 1. – С. 280-283.

*Надійшла до редколегії 28.11.2008.*