# 微分空間 II

## -微分空間の基本的な性質 II-

# Diffeological spaces II

## - Fundamental properties of diffeological spaces II -

原口　忠之
Tadayuki Haraguchi

## 要旨 (Abstract)

本稿は，微分空間 **I**[1] に引き続き，Zemmour の著書 "Diffeology[2]" を参考にして，微分空間の基本的な性質について解説することを試みる．ここでは，位相空間で代表される重要な概念を，微分空間に導入できることを紹介する．内容は，以下の通りである．

■1　**直和空間**　任意個の微分空間の直和集合に，微分構造の引き戻し [1, 命題 3.1] の概念を利用して直和微分構造を導入する．

■2　**微分構造の押し出し**　微分空間 $X$ と集合 $Y$ の間に写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき，$X$ の微分構造と写像 $f$ を用いて集合 $Y$ に微分構造を導入する方法（微分構造の押し出し）を紹介する．また，これに関する性質について触れる．

■3　**商空間**　微分空間 $X$ 上の同値関係 "$\sim$" に関する同値類全体からなる商集合を $X/\sim$ とする．自然な射影 $X \to X/\sim$ による $X$ の微分構造の押し出しによって，$X/\sim$ に商微分構造を導入する．

■4　**直積空間**　任意個の微分空間の直積集合に，微分構造の押し出しの概念を利用して，直積微分構造を導入する．

微分空間と滑らかな写像からなる圏は，直和空間，商空間，直積空間，部分空間を定義できることから極限・余極限に関して閉じている．これは，微分空間の極めて重要な性質の 1 つである．

キーワード：微分空間，微分構造の押し出し，直和空間，商空間，直積空間

## 1　直和空間

**定義 1.1.** $\{(X_\lambda, D_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を微分空間の族とする．直和集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ において，次の条件 ■ **D** を満たすユークリッド空間の開集合 $U$ から $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ への写像 $P$ 全体からなる集合を $D_\amalg$ で表す．$D_\amalg$ は微分構造となる．これを直和微分構造とよび，微分空間 $(\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, D_\amalg)$ を直和空間とよぶ．

■ **D**　$U$ の任意の元 $r$ に対して $r$ のある開近傍 $V_r$ と，ある $\lambda \in \Lambda$ における $X_\lambda$ のプロット $Q_\lambda\colon V_r \to X_\lambda$ が存在して，$P|V_r = i_\lambda \circ Q_\lambda$ が成り立つ．ただし，$i_\lambda\colon X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を包含写像とする．

$$\begin{tikzcd} V_r \arrow[d, "\exists Q_\lambda"'] \arrow[dr, "P|V_r"] & \\ X_\lambda \arrow[r, "i_\lambda"'] & \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \end{tikzcd}$$

**定理 1.2.** 集合 $D_{\coprod}$ は直和集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の微分構造となる．また，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，包含写像 $i_\lambda\colon X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が滑らかな写像となるような微分構造において，$D_{\coprod}$ は最も弱い微分構造となる．

*Proof.* **D1** を示す．$C_x\colon \mathbf{R}^n \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $x$ への定置写像とする．このとき，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $x \in X_\lambda$ が成り立つ．$C'_x\colon \mathbf{R}^n \to X_\lambda$ を $x$ への定置写像とするとき，$C_x = i_\lambda \circ C'_x$ が成り立つ．よって，$C_x \in D_{\coprod}$ となる．**D2** を示す．ユークリッド空間の開集合 $U$ から直和集合 $\coprod X_\lambda$ への写像 $P$ は，$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $W_r$ が存在して $P|W_r \in D_{\coprod}$ を満たすとする．このとき，$r$ のある開近傍 $V_r$ と，ある $\lambda \in \Lambda$ における $Q_\lambda\colon V_r \to X_\lambda \in D_\lambda$ が存在して，$P|V_r = i_\lambda \circ Q_\lambda$ が成り立つ．$V_r$ は $U$ の開集合であるから，$P\colon U \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in D_{\coprod}$ となる．**D3** を示す．$D_{\coprod}$ の任意の元 $P\colon U \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と，ユークリッド空間の開集合の間の任意の滑らかな写像 $Q\colon W \to U$ において，$W$ の任意の元 $w$ に対して，$Q(w)$ のある開近傍 $\tilde{V}_{Q(w)}$ と，ある $\lambda \in \Lambda$ に関する $\tilde{Q}_\lambda\colon \tilde{V}_{Q(w)} \to X_\lambda \in D_\lambda$ が存在して，$P|V_{Q(w)} = i_\lambda \circ \tilde{Q}_\lambda$ を満たす．このとき，$V_w = Q_\lambda^{-1}(\tilde{V}_{Q(w)})$ は $W$ の開集合であり，

$$P \circ Q|V_w = (i_\lambda \circ \tilde{Q}_\lambda) \circ Q|V_w$$

を満たす．このとき，$\tilde{Q}_\lambda \circ Q|V_w \in D_\lambda$ であるから，$P \circ Q \in D_{\coprod}$ である．

次に $D_{\coprod}$ が最も弱い微分構造であることを示す．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，包含写像 $i_\lambda\colon X_\lambda \to \coprod_{\lambda\in\Lambda}$ が滑らかであるような $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の任意の微分構造を $D$ とする．任意の $P\colon U \to \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in D_{\coprod}$ と，任意の $r \in U$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ とある $\lambda \in \Lambda$ における $Q_\lambda\colon V_r \to X_\lambda \in D_\lambda$ が存在して，$P|V_r = i_\lambda \circ Q_\lambda$ を満たす．このとき，$D$ の条件から $P|V_r = i_\lambda \circ Q_\lambda \in D$ となる．**D2** の条件から $P \in D$ より $D_{\coprod} \subset D$. □

## 2　微分構造の押し出し

**定義 2.1.** $(X, D_X)$ を微分空間，$Y$ を集合とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．次の条件■ **D** を満たすユークリッド空間の開集合 $U$ から $Y$ への写像 $P$ 全体からなる集合を $f_*(D_X)$ で表す．このとき，$f_*(D_X)$ は $Y$ の微分構造となり，これを写像 $f$ による $X$ の微分構造 $D_X$ の押し出しとよぶ．

■ **D**　$U$ の任意の元 $r$ に対して $r$ のある開近傍 $V_r$ が存在し，次のどちらかの条件を満たす．

(1) 制限写像 $P|V_r$ は定置写像である．
(2) $X$ のあるプロット $Q_r\colon V_r \to X$ が存在して $P|V_r = f \circ Q_r$ が成り立つ．

**命題 2.2.** $f_*(D_X)$ は集合 $Y$ の微分構造となる．また，$f_*(D_X)$ は写像 $f\colon X \to Y$ が滑らかとなるような $Y$ の微分構造において最も弱い微分構造である．

*Proof.* まず $f_*(D_X)$ が $Y$ の微分構造であることを示す．**D1** については，定置写像 $C_y\colon \mathbf{R}^n \to Y$ が $f_*(D_X)$ に属することは，定義から明らかである．**D2** を示す．ユークリッド空間の開集合 $U$ から $Y$ への写像 $P$ は，

$U$ の任意の元 $r$ に対して，ある開近傍 $V_r$ が存在して，制限写像 $P|V_r$ は $f_*(D_X)$ に属するとする．このとき，$r$ のある開近傍 $W_r$ が存在して，制限写像 $P|W_r$ は定置写像であるか，$X$ のあるプロット $Q_r\colon W_r \to X$ が存在して $P|W_r = f \circ Q_r$ が成り立つ．これは，定義から $P \in f_*(D_X)$ である．**D3** を示す．$f_*(D_X)$ の任意の元 $P\colon U \to Y$ と，ユークリッド空間の開集合の間の任意の滑らかな写像 $Q\colon W \to U$ において，$W$ の任意の元 $w$ に対して，$Q(w)$ のある開近傍 $\tilde{V}_{Q(w)}$ が存在して，制限写像 $P|\tilde{V}_{Q(w)}$ は定置写像であるか，$X$ のあるプロット $\tilde{Q}\colon \tilde{V}_{Q(w)} \to X$ が存在して，$P|\tilde{V}_{Q(w)} = f \circ \tilde{Q}$ が成り立つ．このとき，$V_w = Q^{-1}(\tilde{V}_{Q(w)})$ は $w$ の開近傍であり，$P \circ Q|V_w$ は定置写像であるか，$P \circ Q|V_w = f \circ \tilde{Q} \circ Q|V_w$ を満たす．$\tilde{Q} \circ Q|V_w\colon V_w \to X \in D_X$ より，$P \circ Q \in f_*(D_X)$ となる．

次に，$f\colon X \to Y$ が滑らかな写像となるような $Y$ の任意の微分構造を $D_Y$ とする．任意の $P\colon U \to Y \in f_*(D_X)$ と，任意の $r \in U$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して，$P|V_r$ は定置写像であるか，ある $Q_r\colon V_r \to X \in D_X$ が存在して $P|V_r = f \circ Q_r$ が成り立つ．定置写像 $P|V_r \in D_Y$ であり，$f$ は滑らかであるから $P|V_r = f \circ Q_r \in D_Y$ となる．したがって，$f_*(D_X) \subset D_Y$ が成り立つ．□

**命題 2.3.** $(X, D_X)$ を微分空間，$Y, Z$ を集合とし，$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．このとき，

$$g_*(f_*(D_X)) = (g \circ f)_*(D_X)$$

が成り立つ．

*Proof.* $g_* f_*(D_X)$ の任意の元 $P\colon U \to Z$ と $U$ の任意の元 $r$ にに対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して $P|V_r$ は定置写像であるか，$f^*(D_X)$ のある元 $Q_r\colon V_r \to Y$ が存在して $P|V_r = g \circ Q_r$ が成り立つ．さらに，$r$ のある開近傍 $\tilde{V}_r$ が存在して制限写像 $Q_r|\tilde{V}_r$ が定置写像であるか，$D_X$ のある元 $\tilde{Q}_r\colon \tilde{V}_r \to X$ が存在して，$Q_r|\tilde{V}_r = f \circ \tilde{Q}_r$ を満たす．したがって，$P|\tilde{V}_r$ は定置写像であるか，

$$P|\tilde{V}_r = g \circ Q_r|\tilde{V}_r = g \circ (f \circ \tilde{Q}_r)$$

を満たすことから，$P \in (g \circ f)_*(D_X)$ である．

$(g \circ f)_*(D_X)$ の任意の元 $P'\colon U' \to Z$ と，$U'$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r'$ が存在して制限写像 $P'|V_r$ が定置写像となるか，$D_X$ のある元 $Q_r'\colon V_r' \to X$ が存在して $P'|V_r = (g \circ f) \circ Q_r'$ が成り立つ．このとき，$f \circ Q_r' \in f_*(D_X)$ であるから，$P'|V_r = (g \circ f) \circ Q_r' \in g_*(f_*(D_X)$ となる．したがって，**D2** の公理から $P' \in g_*(f_*(D_X)$ である．□

# 3　商空間

**定義 3.1.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$ を微分空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が subduction であるとは次の 2 つの条件を満たすときをいう．

(1) $f$ は全射である．
(2) $f_*(D_X) = D_Y$ を満たす．

subduction $f$ は自然に滑らかな写像である．

命題 2.3から次は明らかである．

**系 3.2.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$, $(Z, D_Z)$ を微分空間とする．$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を *subduction* とするとき，合成写像 $g \circ f$ も *subduction* である．

*Proof.* $(g \circ f)_*(D_X) = g_*(f_*(D_X) = g_*(D_Y) = D_Z$ □

次の結果は明らかである．

**命題 3.3.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$ を微分空間とし，$f\colon X \to Y$ を写像とする．このとき，$f$ が *subduction* であることは，$f$ が次の 2 つの条件を満たすことと同値である．

(1) $f$ は全射である．

(2) $D_Y$ の任意の元 $P\colon U \to Y$ と，$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ と $D_X$ のある元 $Q_r\colon V_r \to X$ が存在して $P|V_r = f \circ Q_r$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} V_r \arrow[d, "\exists Q_r"'] \arrow[dr, "P|V_r"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

**命題 3.4.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$ を微分空間とする．*subduction* $f\colon X \to Y$ が単射であるならば，$f$ は微分同相写像である．

*Proof.* $f$ は滑らかな全単射であるため，逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ が滑らかであることを示せばよい．$D_Y$ の任意の元 $P\colon U \to Y$ と，$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ と $D_X$ のある元 $Q_r\colon V_r \to X$ が存在して，$P|V_r = f \circ Q_r$ を満たす．したがって，

$$f^{-1} \circ P|V_r = f^{=1} \circ f \circ Q_r = Q_r \in D_X$$

であるから $f^{-1}$ は滑らかである． □

**定義 3.5.** 微分空間 $(X, D_X)$ に同値関係 $\sim$ が与えられているとき，商集合を $X/\sim$ と表し，射影を $\pi\colon X \to X/\sim$ とする．このとき，$\pi$ による $D_X$ の押し出しにより定まる $X/\sim$ の微分構造 $\pi_*(D_X)$ を商微分構造とよび，微分空間 $(X/\sim, \pi_*(D_X))$ を同値関係 $\sim$ により定まる $X$ の商微分空間とよぶ．また，自然に定まる subduction $\pi$ を商写像とよぶ．

**定理 3.6.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$, $(Z, D_Z)$ を微分空間とする．$\pi\colon X \to Y$ を商写像とし，$f\colon Y \to Z$ を写像とする．このとき，次の条件を満たす．

(1) $f \circ \pi$ が滑らかであることは，$f$ が滑らかであることと同値である．

(2) $f \circ \pi$ が *subduction* であることは，$f$ が *subduction* であることと同値である．

(3) $f \circ \pi$ が *subduction* であり，$f$ が単射であるならば $f$ は微分同相写像である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

*Proof.* まず (1) を示す．$f \circ \pi$ が滑らかとする．$D_Y$ の任意の元 $P\colon U \to Y$ に対して，$\pi$ は subduction であるから，$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ と $D_X$ のある元 $Q_r\colon V_r \to X$ が存在して，$P|V_r = \pi \circ Q_r$

が成り立つ．$f \circ \pi$ は滑らかであるから，合成写像

$$f \circ P|V_r = f \circ (\pi \circ Q_r) \in D_Z$$

となる．したがって，**D2** の公理から $f \circ P \in D_Z$ であるから，$f$ は滑らかである．反対は明らかである．

次に (2) を示す．$f \circ \pi$ は subduction とする．$f$ が全射であることは明らかであり，$\pi$ が subduction で系3.2より

$$D_Z = (f \circ \pi)_*(D_X) = f_* \pi_*(D_X) = f_*(D_Y)$$

が成り立つ．したがって，$f$ は subduction である．

(3) は命題 3.4と (2) の条件から明らかである． □

**系 3.7.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$ を微分空間とし，$f\colon X \to Y$ を *subduction* とする．このとき，$X$ の任意の元 $x$, $x'$ に対して，同値関係 $x \sim x'$ を $f(x) = f(x')$ で定める．このとき，$X/\sim$ と $Y$ は微分同相である．

*Proof.* 自然な射影 $\pi\colon X \to X/\sim$ は subduction である．$x$ の同値類を $[x]$ で表すとき，$\tilde{f}\colon X/\sim \to Y$ を $\tilde{f}([x]) = f(x)$ で定めると，同値関係 $\sim$ の定義から $\tilde{f}$ は well-defined で単射である．次の可換図を得る．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

このとき，定理 3.6の (3) より $\tilde{f}$ は微分同相写像である． □

## 4 直積空間

**定義 4.1.** $\{(X_\lambda, D_\lambda\}$ を微分空間の族とする．次の条件■ **D** を満たすユークリッド空間の開集合 $U$ から直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ への写像 $P$ 全体からなる集合を $D_\prod$ で表す．このとき，$D_\prod$ は $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の微分構造となる．これを直積微分構造とよび，微分空間 $(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, D_\prod)$ を直積空間とよぶ．命題 4.2から $D_\prod$ は各射影 $pr_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ が滑らかな写像となるような $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の微分構造において，最も強い微分構造である．

■ **D** 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して，射影 $pr_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ との合成写像 $pr_\lambda \circ P\colon U \to X_\lambda$ は $D_\lambda$ に属する．

**命題 4.2.** $D_\prod$ は射影 $pr_\lambda$ による微分構造 $D_\lambda$ の引き戻しの共通部分 $\cap_{\lambda\in\Lambda} pr_\lambda^*(D_\lambda)$ と等しい．

*Proof.* $D_\prod$ の定義から明らかである． □

**命題 4.3.** 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$pr_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ は *subduction* である．

*Proof.* 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して，$P\colon U \to X_\lambda$ を $D_\lambda$ の任意の元とする．写像 $i_\lambda\colon U \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を

$$i_\lambda(r) = \begin{cases} x_i \in X_i & i \neq \lambda \\ P(r) \in X_\lambda & i = \lambda \end{cases}$$

と定めると $i_\lambda$ は $D_\prod$ の元であり，

$$pr_\lambda \circ i_\lambda = P$$

を満たす．したがって，$pr_\lambda$ は subduction である． □

## 参考文献


[1] Tadayuki Haraguchi, 微分空間 **I**, 人間教育学部紀要「人間教育　第 1 巻第 8 号」, 2018　掲載予定

[2] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 165, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.