# 微分空間 I

**-微分空間の基本的な性質 I-**

# Diffeological spaces I

- Fundamental properties of diffeological spaces **I** -

原口　忠之
Tadayuki Haraguchi

## 要旨 (Abstract)

可微分多様体の概念を一般化した diffeological space は Souriau[2] によって定義され，多くの研究者によって発展してきた．しかし，日本語での diffeological space の詳細な解説書は存在していない．本稿では，Zemmour の著書 “Diffeology[1]” を参考にして，diffeological space の基本的な性質に関して下記の 4 項目の解説を試みる．可微分構造をもつ空間は diffeological space 以外にも多く存在するため，diffeological space を和訳することは難しいが，ここでは diffeological space を微分空間と記述することにする．また，位相空間論の基本的な知識があると，本稿を読み進める助けになると考える．

**■1　微分空間の公理**　$X$ を集合とする．ユークリッド空間の開集合から集合 $X$ への写像（プロット）からなる集合 $D$ に，ある種の情報（微分構造）を与えることで微分空間 $(X, D)$ を定義する．位相空間論においては，開集合を利用することで，空間の特徴づけをすることが多いが，微分空間はプロットを用いて，様々な概念を定義する．

**■2　微分構造の比較**　集合の位相を比較するとき，離散位相，密着位相の概念が紹介される．同様に微分空間においても離散微分構造，密着微分構造を紹介し，微分構造の強弱を調べる．

**■3　微分構造の引き戻し**　集合 $X$ と微分空間 $Y$ の間に写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき，$Y$ の微分構造と写像 $f$ を用いて $X$ に微分構造を導入する方法を紹介する．

**■4　部分空間**　微分空間 $X$ の部分集合 $A$ に部分微分構造を導入する．また，部分空間に関する性質について触れる．

キーワード：微分空間，微分構造の引き戻し，部分空間

## 1　微分空間の公理

**定義 1.1.** $X$ を集合とする．ユークリッド空間の開集合から $X$ への写像からなる集合 $D$ が，次の 3 つの条件

**D1** 任意のユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ から $X$ への全ての定置写像は $D$ に属する．

**D2** ユークリッド空間の開集合 $U$ から $X$ への写像を $P$ とする．$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在し，制限写像 $P|V_r$ が $D$ に属するならば $P$ は $D$ に属する．

**D3** $D$ の任意の元 $P\colon U \to X$ と，任意のユークリッド空間の開集合 $W$ から $U$ への任意の無限回微分可能写像 $Q$ の合成写像 $P \circ Q\colon W \to X$ は $D$ に属する．

を満たすとき，$D$ を $X$ の微分構造 (diffeology) という．$X$ と微分構造 $D$ をあわせ考えた $(X, D)$ を微分空間 (diffeological space) という．微分構造 $D$ に属する元 $P\colon U \to X$ を $X$ のプロット (plot) という．誤解のおそれがないときは，単に $X$ で微分空間を表す．

微分空間の具体的な例をあげる．

**例 1.2.** ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ において，任意のユークリッド空間の開集合から $\mathbf{R}^n$ への無限回微分可能写像全体からなる集合 $D_{\mathbf{R}^n}$ は，$\mathbf{R}^n$ の微分構造となる．これを標準微分構造とよび，$(\mathbf{R}^n, D_{\mathbf{R}^n})$ を標準微分空間とよぶ．以後，ユークリッド空間には標準微分構造が導入されているとする．

**定義 1.3.** 微分空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が滑らかであるとは，$X$ の任意のプロット $P\colon U \to X$ に対して，合成写像 $f \circ P\colon U \to Y$ が $Y$ のプロットになるときをいう．

**命題 1.4.** 微分空間の間の任意の滑らかな写像 $f\colon X \to Y,\ g\colon Y \to Z$ に対して，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ は滑らかとなる．

*Proof.* $X$ の任意のプロット $P\colon U \to X$ に対して，$f$ は滑らかより $f \circ P$ は $Y$ のプロットであり $g$ も滑らかより，$(g \circ f) \circ P\colon U \to Z$ は $Z$ のプロットとなる． □

**定義 1.5.** $X$, $Y$ を微分空間とする．$f\colon X \to Y$ が微分同相写像であるとは，$f$ は滑らかな全単射であり，逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ も滑らかであるときをいう．$X$ と $Y$ の間に微分同相写像が存在するとき，$X$ と $Y$ は微分同相であるといい，$X \cong Y$ と表す．

## 2　微分構造の比較

**定義 2.1.** $D_1$ と $D_2$ を集合 $X$ の微分構造とする．$D_2 \subset D_1$ を満たすとき，$D_1$ は $D_2$ より強いといい，$D_2$ は $D_1$ より弱いという．$D_1 = D_2$ であるとき，2 つの微分構造は等しいという．

次の結果は明らかである．

**命題 2.2.** $D_1$ と $D_2$ を集合 $X$ の微分構造とし，微分空間 $(X, D_1)$, $(X, D_2)$ を $X_1$, $X_2$ とそれぞれ表す．このとき，$D_1$ が $D_2$ より弱いことは，恒等写像 $1\colon X_1 \to X_2$ が滑らかであることと同値である．

**定義 2.3.** $X$ を集合とする．$P\colon U \to X$ が局所定置写像であるとは，$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して制限写像 $P|V_r$ が定置写像であるときをいう．局所定置写像全体からなる集合を $D_\circ$ で表す．また，ユークリッド空間の任意の開集合から集合 $X$ への写像全体からなる集合を $D_\bullet$ と表す．

**命題 2.4.** $X$ を集合とする．$D_\circ$ は $X$ の最も弱い微分構造である．これを離散微分構造とよぶ．

*Proof.* まず，$D_\circ$ が $X$ の微分構造であることを示す．任意のユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ から $X$ への定置写像は，定義から $D_\circ$ に属するため，**D1** の公理を満たす．ユークリッド空間の開集合 $U$ から $X$ への写像 $P$ は，任意の $r \in U$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して，$P|V_r \in D_0$ とすると，$P\colon U \to X$ は局所定置写像であ

るため，$D_0$ に属する．したがって，**D2** の公理を満たす．$D_\circ$ の任意の元を $P\colon U \to X$，ユークリッド空間の開集合の間の任意の滑らかな写像を $Q\colon W \to U$ とする．$W$ の任意の元 $r$ に対して，$P$ は局所定置写像であるため $Q(r)$ のある開近傍 $V_{Q(r)}$ が存在して，制限写像 $P|V_{Q(r)}$ は定置写像となる．$W_r = Q^{-1}(V_{Q(r)})$ は $r$ の開近傍であり，合成写像 $P \circ Q|W_r$ は定置写像である．よって $P \circ Q$ は局所定置写像であるため $D_\circ$ に属する．したがって，**D3** の公理を満たす．

次に $D_\circ$ が $X$ の最も弱い微分構造であることを示す．集合 $X$ の任意の微分構造を $D$ とする．$P\colon U \to X$ を $D_\circ$ の任意の元とする．任意の $r \in U$ に対して，$P$ は局所定置写像より $r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して制限写像 $P|V_r$ は定置写像となる．ここで，$C_\circ\colon V_r \to \mathbf{R}^n$ を原点への定置写像，$C_{P(r)}\colon \mathbf{R}^n \to X$ を $P(r)$ への定置写像とすると，$P|V_r = C_{P(r)} \circ C_0$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} V_r \arrow[rr, "P|V_r"] \arrow[dr, "C_0"'] & & X \\ & \mathbf{R}^n \arrow[ur, "C_{P(r)}"'] & \end{tikzcd}$$

$C_{P(r)}$ は $D$ に属し，$C_0$ は滑らかな写像であるから **D3** の公理より $P|V_r = C_{P(r)} \circ C_0$ は $D$ に属する．**D2** の公理より $P$ は $D$ に属する．したがって，$D_\circ \subset D$ より $D_\circ$ は $X$ の最も弱い微分構造となる． □

**命題 2.5.** $X$ を集合とする．$D_\bullet$ は $X$ の最も強い微分構造となる．これを密着微分構造とよぶ．

*Proof.* $D_\bullet$ は，ユークリッド空間の開集合から $X$ への写像全体からなる集合であるため，$D_\bullet$ は微分構造であり，最も強い微分構造であることは明らかである． □

**命題 2.6.** $X$ を集合とし，$\{D_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $X$ の微分構造の族とする．このとき，$\cap_\lambda D_\lambda$ は $X$ の微分構造となる．

*Proof.* **D1** を示す．$C_x\colon \mathbf{R}^n \to X$ を定置写像とする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $C_x \in D_\lambda$ であるため，$C_x$ は $\cap_\lambda D_\lambda$ に属する．**D2** を示す．ユークリッド空間の開集合から $X$ への写像 $P\colon U \to X$ は，任意の $r \in U$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して制限写像 $P|V_r$ は $\cap_\lambda D_\lambda$ に属するとする．このとき，全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して $P|V_r$ は $D_\lambda$ に属する．**D2** の公理から $P$ は $D_\lambda$ に属する．よって，$P \in \cap_\lambda D_\lambda$ である．**D3** を示す．$\cap_\lambda D_\lambda$ の任意の元 $P\colon U \to X$ とユークリッド空間の間の無限回微分可能写像 $Q\colon V \to U$ において，各 $\lambda$ に対して $P\colon U \to X$ は $D_\lambda$ に属するため **D3** の条件から $P \circ Q\colon V \to X$ は $D_\lambda$ に属する．よって $P \circ Q \in \cap_\lambda D_\lambda$ である． □

以後，集合 $X$ の微分構造の族 $\{D_\lambda\}$ を $\mathbf{D}$ で表す．

**命題 2.7.** 集合 $X$ の微分構造の族を $\mathbf{D}$ とする．このとき，$\inf(\mathbf{D})$ を

$$\inf(\mathbf{D}) = \bigcap_{D \in \mathbf{D}} D = \{P\colon U \to X \mid \forall D \in \mathbf{D},\ P \in D\}$$

定めると，$\mathbf{D}$ の全ての要素に含まれるような $X$ の微分構造において，最も強い微分構造となる．$\inf(\mathbf{D})$ を $\mathbf{D}$ の下限とよぶ．

*Proof.* 集合 $X$ の離散微分構造 $D_\circ$ を考えると $\inf(\mathbf{D})$ の存在性が保証される．命題 2.6より，$\inf(\mathbf{D})$ が $X$ の微分構造となる．$D'$ を $X$ の微分構造とし，$\mathbf{D}$ の任意の元 $D$ に対して，$D' \subset D$ を満たすとする．このとき，$D'$ の任意の元 $P\colon U \to X$ に対して，$P \in D$ であるから，$P \in \inf(\mathbf{D})$ となる．したがって，$D' \subset \inf(\mathbf{D})$ である． □

**命題 2.8.** 集合 $X$ の微分構造の族を $\mathbf{D}$ とする．このとき，$\sup(\mathbf{D})$ を

$$\sup(\mathbf{D}) = \inf\{D' \colon X \text{ の微分構造} \mid \forall D \in \mathbf{D},\ D \subset D'\}$$

と定めると，$\mathbf{D}$ の全ての要素を含むような $X$ の微分構造において，最も弱い微分構造となる．$\sup(\mathbf{D})$ を $\mathbf{D}$ の上限とよぶ．

*Proof.* 集合 $X$ の密着微分構造 $D_\bullet$ を考えると $\sup(\mathbf{D})$ の存在性が保証される．また $\sup(\mathbf{D})$ が $\mathbf{D}$ の上限であることは明らかである． □

## 3 微分構造の引き戻し

**命題 3.1.** $X$ を集合とし，$(Y, D_Y)$ を微分空間とし，$f \colon X \to Y$ を写像とする．集合 $f^*(D_Y)$ を

$$f^*(D_Y) = \{P \colon U \to X \mid f \circ P \in D_Y\}$$

と定めると，写像 $f$ が滑らかになるような集合 $X$ の微分構造において，最も強い微分構造となる．これを，写像 $f$ による微分構造 $D_Y$ の引き戻しという．

*Proof.* 集合 $X$ に離散微分構造 $D_\circ$ を導入すると，明らかに $f$ は滑らかとなるから $f^*(D_Y)$ の存在性は保証される．$f^*(D_Y)$ が集合 $X$ の微分構造であることを示す．**D1** は明らかに成り立つ．**D2** を示す．ユークリッド空間の開集合と集合 $X$ の間の写像 $P \colon U \to X$ は，$U$ の任意の元 $r$ に対して，$r$ のある開近傍 $V_r$ が存在して，制限写像 $P|V_r$ が $f^*(D_Y)$ に属するとする．このとき，$f \circ P|V_r \colon V_r \to Y$ は $D_Y$ の元である．微分空間 $Y$ に関して **D2** の公理を適用すると，$f \circ P \in D_Y$ である．したがって，$P \in f^*(D_Y)$ である．**D3** を示す．$f^*(D_Y)$ の任意の元 $P \colon U \to X$ と，ユークリッド空間の開集合の間の任意の無限回微分可能写像 $Q \colon W \to U$ に対して，$f \circ P \in D_Y$ であるから，

$$f \circ (P \circ Q) = (f \circ P) \circ Q \in D_Y$$

を満たすため，$P \circ Q \in f^*(D_Y)$ である．

写像 $f$ が滑らかとなる $X$ の任意の微分構造を $D_X$ とする．$D_X$ の任意の元 $P' \colon U' \to X$ に対して，$f \circ P' \in D_Y$ であるから，$P' \in f^*(D_Y)$ となる．したがって，$D_X \subset f^*(D_Y)$ である． □

**補題 3.2.** $X$, $Y$ を集合，$(Z, D_Z)$ を微分空間とし，$f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ を写像とする．このとき，$g$ による $D_Z$ の引き戻し $g^*(D_Z)$ を，さらに $f$ によって引き戻した $f^*g^*(D_Z)$ は，$g \circ f$ による $D_Z$ の引き戻し $(g \circ f)^*(D_Z)$ と等しい．つまり，

$$f^*g^*(D_Z) = (g \circ f)^*(D_Z)$$

が成り立つ．

*Proof.*

$$\begin{aligned} P \colon U \to X \in f^*g^*(D_Z) &\Leftrightarrow f \circ P \in g^*(D_Z) \\ &\Leftrightarrow g \circ (f \circ P) = (g \circ f) \circ P \in D_Z \\ &\Leftrightarrow P \in (g \circ f)^*(D_Z) \end{aligned}$$

□

**定義 3.3.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$ を微分空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が inductive であるとは，次の 2 つの条件を満たすときをいう．

(1) $f$ は単射である．
(2) $D_X = f^*(D_Y)$ である．

写像 $f\colon X \to Y$ が inductive であるとき，定義から自然に $f$ は滑らかである．補題 3.2から次の結果は明らかである．

**系 3.4.** 微分空間の間の 2 つの写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ が *inductive* であるとき，合成写像 $g \circ f\colon X \to Z$ も *inductive* である．

**定理 3.5.** $(X, D_X)$, $(Y, D_Y)$ を微分空間とする．このとき，写像 $f\colon X \to Y$ が *inductive* であることは，次の 2 つの条件と同値である．

(1) $f\colon X \to Y$ は滑らかであり，単射である．
(2) $P(U) \subset f(X)$ を満たすような，$D_Y$ の任意の元 $P\colon U \to Y$ に対して，$f^{-1} \circ P\colon U \to X$ は $D_X$ に属する．

*Proof.* 写像 $f$ を inductive とする．条件 (2) を満たせばよい．$P(U) \subset f(X)$ を満たすような，$D_Y$ の任意の元 $P\colon U \to Y$ に対して，

$$f \circ (f^{-1} \circ P) = P \in D_Y$$

より，$f^{-1} \circ P \in f^*(D_Y) = D_X$ となる．反対を示す．$f^*(D_Y) = D_X$ であればよい．

$$\begin{aligned} P\colon U \to X \in f^*(D_Y) &\Leftrightarrow f \circ P\colon U \to Y \in D_Y \\ &\Leftrightarrow f^{-1} \circ (f \circ P) = P \in D_X \end{aligned}$$

したがって，$f$ は inductive である． □

定理 3.5より次の結果は明らかである．

**系 3.6.** $X$, $Y$ を微分空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ が *inductive* であり全射であるならば，$f$ は微分同相写像である．

# 4 部分空間

**定義 4.1.** $(X, D_X)$ を微分空間とする．$X$ の部分集合 $A$ の微分構造として，包含写像 $j_A\colon A \to X$ による $D_X$ の引き戻し $j_A^*(D_X)$ を自然に導入することができる．これを $A$ の部分微分構造とよび，微分空間 $(A, j_A^*(D_X)$ を $X$ の部分空間という．

$$j_A^*(D_X) = \{P\colon U \to A \in D_X\}$$

**命題 4.2.** $(XD_X)$, $(Y, D_Y)$, $(Z, D_Z)$ を微分空間とする．$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．$g$ が *inductive* であるとき，次の 2 つの条件を満たす．

(1) $f$ が滑らかであることは，$g \circ f$ が滑らかであることと同値である．
(2) $f$ が *inductive* であることは，$g \circ f$ が *inductive* であることと同値である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

*Proof.* まず (1) を示す．$f$ が滑らかであるとき，合成写像 $g \circ f$ は明らかに滑らかである．反対を示す．$g \circ f$ を滑らかとする．$D_X$ の任意の元 $P\colon U \to X$ に対して，

$$g \circ (f \circ P) = (g \circ f) \circ P \in D_Z$$

であり，$g$ は inductive であるから，$f \circ P \in g^*(D_Z) = D_Y$ となる．よって，$f\colon X \to Y$ は滑らかとなる．

次に (2) を示す．系 3.4より induction の合成は induction である．反対を示す．補題 3.2と $g$ が inductive であることに注意すると，

$$D_X = (g \circ f)^*(D_Z) = f^*(g^*(D_Z) = f^*(D_Y)$$

を得る．したがって，$f$ は inductive である． □

**命題 4.3.** $(X, D_X)$ を微分空間とし，$(B, j_B^*(D_X))$ を $X$ の部分空間とする．ただし，$j_B\colon B \to X$ を包含写像とする．$A$ を $B$ の部分集合とする．このとき，$A$ が $X$ の部分空間であることは，$A$ が $B$ の部分空間であることと同値である．

*Proof.* $j_A\colon A \to X$, $i_A\colon A \to B$ を包含写像とする．このとき，$j_A = j_B \circ i_A$ を満たすから，補題 3.2に注意すると

$$j_A^*(D_X) = (j_B \circ i_A)^*(D_X) = i^*(j_B^*(D_X))$$

を得る． □

# 参考文献


[1] P. Iglesias-Zemmour, *Diffeology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 165, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[2] Jean-Marie Souriau, *Groupes differentiels*, Differential geometrical methods in mathematical physics (Proc. Conf., Aix-en-Provence/Salamanca, 1979), Lecture Notes in Mathematics, 836, Springer, (1980), pp.91-128.