12.

重さ 1 の楕円尖点形式に伴う Artin 表現

小澤 友美（東北大学/Université Paris 13）

12.1 はじめに

12.1.1 本稿の位置付け

本稿は第 25 回整数論サマースクール 2017 における講演「重さ 1 の楕円尖点形式に伴う Artin 表現」の内容をまとめたものである．サマースクールでは時間の都合により割愛せざるを得なかった事柄について詳細な解説を加えた．

重さ 1 の楕円尖点形式に伴う Artin 表現は Deligne-Serre [4] によって構成された．本稿では [4] の概説 [13] J. -P. Serre, “Modular forms of weight one and Galois representations” に沿って説明し，必要に応じて [4] も参照する．

12.1.2 本稿の大まかな内容

本稿は 6 節の本文と 1 節の付録からなる．

前半部 ([13] Part I §1, §2, §3.1, §3.2, §4 に相当する部分)

第 12.2 節で有理数体の絶対 Galois 群の 2 次元 Artin 表現に関する基本事項を述べる．第 12.3 節では楕円モジュラー形式に伴う L-関数とその関数等式，Hecke 固有値の性質を振り返る．第 12.4 節では，本稿の主定理 (重さ 1 の新形式に伴う 2 次元 Artin 表現の存在) 及びその逆に相当する定理の主張を述べる．第 12.5 節では主定理の証明を概説する．特に，(1) Galois 表現の構成を重さ 2 以上の場合に帰着させる方法 (第 12.5.1 節), (2) 重さ 1 の場合に Galois

表現の像が有限になる理由 (第 12.5.2 節，第 12.5.3 節) の二つを重点的に解説する．

後半部 ([13] Part I §3.3, Part II §7 に相当する部分)

第 12.6 節では，2 次元 Artin 表現から得られる射影線形表現の像について考察する．特に，重さ 1 の新形式に伴う Artin 表現が，その射影表現の像に応じて「二面体型」「例外型」のいずれかに分類されることを述べる．第 12.7 節では二面体型の Artin 表現についてさらに詳しく考察する．具体的には，Artin 表現に対応する 2 次体，表現を誘導する指標の性質について述べる．

付録：法 l 表現の標数 0 への持ち上げについて

第 12.5.4 節で認めた，法 l 表現の持ち上げについて証明を与える．

12.1.3　記法と慣習

記法と慣習については基本的に [13] のそれらを踏襲する．有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ を一つ固定し，$G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ でその絶対 Galois 群を表す．本稿を通じて，G の線形表現は全て連続であるとする．$c \in G$ を複素共役とする．Artin により，G の位数 2 の元は共役を除いて一意に定まることが示されている．このような c を一つ選ぶことは，体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を一つ選ぶことに相当する．c の位数は 2 である．

12.2　2 次元 Artin 表現

一般に Artin 表現とは，代数体の絶対 Galois 群の連続な有限次元複素線形表現のことを指す．$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ を n 次元 Artin 表現，V を ρ の表現空間とする，ρ が連続なので ρ の核 $\ker(\rho)$ は G の開部分群で，従って ρ の像は有限群である．ρ の行列式 $\det(\rho)$ とは群準同型 $G \ni \sigma \mapsto \det(\rho(\sigma)) \in \mathbb{C}^\times$ のことである．$\det(\rho(c)) = -1$ のとき ρ は奇，$\det(\rho(c)) = 1$ のとき ρ は偶であるという．ρ が奇 (resp. 偶) であることと，$\det(\rho)$ を類体論を経由して Dirichlet 指標とみなしたときに奇指標 (resp. 偶指標) であることが同値.

次に ρ の Artin 導手を定義する．詳細は [15, Chap. VI, §2] を参照されたい．ρ の核に対応する $\mathbb{Q}$ の有限次 Galois 拡大を F, $F/\mathbb{Q}$ の Galois 群を G' とする．ρ を G' の表現とみなす．素数 p に対し，p での分解群 $D_p \subset G'$ を一つ固定する．整数 $i \geq -1$ に対し，$D_{p,i}$ で D_p の i 次下付き分岐群を表す[*1]．特に $D_{p,-1} = D_p$ が p での分解群，$D_{p,0}$ が p での惰性群に一致し，ある整数

[*1] 下付き分岐群の定義については，例えば [15, Chap. IV §1] を参照されたい．

i_0 が存在して任意の $i \geq i_0$ に対し $D_{p,i} = \{1\}$ となる．$d_{p,i}$ を $D_{p,i}$ の位数，$V^{D_{p,i}}$ を $\rho(D_{p,i})$ の作用で固定される V の部分空間とし，

$$n_p(\rho) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d_{p,i}}{d_{p,0}} \operatorname{codim}(V^{D_{p,i}})$$

とおく．Artin の定理 [15, p. 99 Theorem 1'] により，$n_p(\rho)$ は非負整数である．また，$n_p(\rho)$ は分解群 D_p の取り方によらない．ρ が p で不分岐であることと $n_p(\rho) = 0$ であることが同値である．ρ の像が有限群なので，ほとんどすべての p について $n_p(\rho) = 0$ となる．

定義 12.2.1. ρ の **Artin 導手** $N(\rho)$ を $N(\rho) = \prod_{p:\ \text{素数}} p^{n_p(\rho)}$ で定める．

次に，ρ に伴う **Artin L-関数** $L(s,\rho)$ を以下のように定める：

$$L(s,\rho) = \prod_{p:\ \text{素数}} \det(1 - p^{-s}\rho(\mathrm{Frob}_p); V^{D_{p,0}})^{-1}.$$

ただし，Frob_p は p での数論的 Frobenius 元．右辺の無限積は $\mathrm{Re}(s) > 1$ の範囲で絶対収束する．また，右辺は ρ の同型類のみに依る．ρ が完全可約なので，結局右辺は ρ の指標 $\chi = \mathrm{Tr}(\rho)$ のみに依存する[*2]．従って ρ の Artin L-関数を $L(s, \mathrm{Tr}(\rho))$ と書いて差し支えない．この記法のもとで以下が成立 ([9, p. 9 Theorem]. Theorem の記法については [9, p .6] 参照):

1. (加法性) ρ_1, ρ_2 を G の Artin 表現とすると
$$L(s, \mathrm{Tr}(\rho_1) + \mathrm{Tr}(\rho_2)) = L(s, \mathrm{Tr}(\rho_1))L(s, \mathrm{Tr}(\rho_2)).$$
2. (持ち上げ) H を G の正規開部分群，ρ を G/H の有限次元線型表現，ρ' を自然な全射 $G \to G/H$ と ρ を合成して得られる G の Artin 表現とする．このとき
$$L(s, \mathrm{Tr}(\rho')) = L(s, \mathrm{Tr}(\rho)).$$
3. (誘導表現) H を G の開部分群，σ を H の有限次元線型表現とする．$\rho = \mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ を σ が誘導する G の表現とすると
$$L(s, \mathrm{Tr}(\mathrm{Ind}_H^G \sigma)) = L(s, \mathrm{Tr}(\sigma)).$$

以下では G の **Artin** 表現 ρ が 2 次元で奇であると仮定する．拡張された Artin L-関数を定義する．$\Gamma(s)$ を Γ 関数として

$$\Lambda(s,\rho) = N(\rho)^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\rho)$$

[*2] $\log L(s,\rho)$ を $\mathrm{Tr}(\rho)$ を用いて表した式が [9, p. 11] にある．

とおく[*3]．$\Lambda(s,\rho)$ は全複素平面の有理型関数に解析接続され，$\bar{\rho}$ を ρ の反傾表現とすると以下の関数等式を満たす：

$$\Lambda(1-s,\rho) = W(\rho)\Lambda(s,\bar{\rho}). \tag{12.1}$$

ここで $W(\rho)$ は絶対値が 1 の複素数 (Artin root number) である．これらの性質は，Brauer の誘導定理 [3] を用いて証明された[*4]([9, p. 14 Theorem] とその証明を参照)．特に，Artin L-関数の解析接続と関数等式は，モジュラー形式に伴う L-関数のそれらとは独立に証明された．

予想 12.2.2 (Artin 予想)．$\Lambda(s,\rho)$ は $s=0,1$ を除いて正則である．

注意 12.2.3. Artin 自身が [1] で予想した主張は「ρ が G の自明な表現を含まなければ $\Lambda(s,\rho)$ は s の正則関数」と思われる．[4, §4 (c)] でもこの主張を Artin 予想としている．予想 12.2.2 では [13, §1] にある主張をそのまま述べた．ρ が自明な表現を含む場合 $\Lambda(s,\rho)$ は極を持つ．例えば自明な 1 次元表現に対応する Artin L-関数は Riemann zeta 関数で，$s=1$ で 1 位の極を持つ．

注意 12.2.4. 今日では Serre 予想の解決 [6] に伴い，任意の奇な既約 2 次元 Artin 表現 $\rho : G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(\mathbb{C})$ は重さ 1 の新形式に対応し，従ってその Artin L-関数は全複素平面で正則であることが示されている．

以下では，ρ に関する次の要請 (A) を考える：

要請 12.2.5 (A)．正の整数 M が存在して，導手 が M と素である 任意の G の 1 次元表現 χ に対し，$\Lambda(s,\rho\otimes\chi)$ が $s=0,1$ を除いて正則である．

12.3　楕円モジュラー形式

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ と書く．$k, N \geq 1$ を整数，ε を法 N の Dirichlet 指標とする．重さ k, レベル $\Gamma_0(N)$, 指標 ε の正則モジュラー形式のなす複素ベクトル空間を $M(\Gamma_0(N),k,\varepsilon)$ で表す．すなわち $M_k(\Gamma_0(N),k,\varepsilon)$ の元 f は，上半平面で定義される正則関数で，任意の $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ に対し $f|_k\gamma = \varepsilon(d)f$ を満たし，全ての尖点で正則である．$M(\Gamma_0(N),k,\varepsilon)$ の尖点形式からなる部分空間を $S(\Gamma_0(N),k,\varepsilon)$ で表す．$\varepsilon(-1) = -(-1)^k$ ならば $M(\Gamma_0(N),k,\varepsilon) = \{0\}$ となるので，$\varepsilon(-1) = (-1)^k$ を常に仮定する．$q = e^{2\pi iz}$ とし，$f \in M(\Gamma_0(N),k,\varepsilon)$ の q-展開を $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ と書く．

[*3] 一般に，G の Artin 表現 ρ の Γ-因子は ρ の次元と偶奇に依存する．ここで紹介した Γ-因子 $N(\rho)^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ はあくまで ρ の次元が 2 で奇な場合の因子である．一般の Artin 表現の Γ-因子の定義は [9, Part I §4 (ii), pp. 11–14] を参照されたい．

[*4] より詳しく，Brauer の誘導定理と Artin L-関数の性質 (1)–(3) により，Artin L-関数は有限個の Hecke L-関数の積の比で表される．従ってこれらの Artin L-関数の性質は，Hecke L-関数の有理型関数への解析接続と関数等式，root number の性質に帰着される．

以下では，モジュラー形式として主に新形式を考える[*5]．$a_1 = 1$ を満たす新形式のことを，正規化された新形式という．

定義 12.3.1. $f \in M(\Gamma_0(N), k, \varepsilon)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ に伴う L-関数を以下で定める：

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

$L_f(s)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きな範囲で収束し，f が Hecke 固有形式ならば Euler 積を持つ．$\Lambda_f(s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L_f(s)$ とおくと，$\Lambda_f(s)$ は全複素平面の有理型関数に解析接続され，関数等式

$$\Lambda_f(k-s) = i^k \Lambda_{f'}(s) \tag{12.2}$$

を満たす．ここで $f' = f|_k W$, $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ である．特に $\Lambda_f(s)$ は $s = 0, k$ で高々 1 位の極を持つ．f が $a_0 = 0$ を満たす場合 $\Lambda_f(s)$ は正則である．

特に f が $S(\Gamma_0(N), k, \varepsilon)$ の正規化された新形式ならば，f は Euler 積

$$L_f(s) = \prod_{p \nmid N}(1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p)p^{k-1-2s})^{-1} \prod_{p | N}(1 - a_p p^{-s})^{-1} \tag{12.3}$$

を持ち，$\Lambda_f(s)$ は全複素平面の正則関数に解析接続される．さらに複素数 z の複素共役を $\bar{z}$ として $\bar{f}(z) = \overline{f(-\bar{z})}$ と定めると，$\bar{f}$ は $S(\Gamma_0(N), k, \bar{\varepsilon})$ の新形式で，$f|_k W = c\bar{f}$ となる定数 $c \in \mathbb{C}$ が存在する．従って関数等式 (12.2) は

$$\Lambda_f(k-s) = ci^k \Lambda_{\bar{f}}(s) \tag{12.4}$$

と書き直される．これらの L-関数の性質を最初に示したのは Hecke である (一般には [8])．$k = 1$ の場合の関数等式 (12.4) と，Artin L-関数の関数等式 (12.1) とを比較されたい．

重さ k が 2 以上の場合，$S(\Gamma_0(N), k, \varepsilon)$ の Hecke 固有値はある一つの代数体の整数環に全て含まれるが ([16, Theorem 3.52]), 重さ 1 の場合も同様である．証明は [13, §2.5] を参照されたい[*6]．

12.4　主定理

前節で新形式 f に伴う L-関数の性質を観察したが，それらの性質は，Dirichlet 指標で $L_f(s)$ を捻って得られる L-関数に伝播する．では，捻りに関

[*5] 新形式については [13, §2.3] に簡潔な説明がある．詳細は [8] や [10, §4.6] を参照されたい．新形式に注目する理由は，$S(\Gamma_0(N), k, \varepsilon)$ の任意の元が有限線形和 $\sum_i f_i(d_i z)$ ($N_i \mid N$, $d_i N_i \mid N$, ε は法 N_i で定義され，f_i は $S(\Gamma_0(N_i), k, \varepsilon)$ に属する新形式) として一意的に表されるからである．

[*6] $S(\Gamma_0(N), 1, \varepsilon)$ を重さ 2 以上の尖点形式の空間に埋め込んで，$k \geq 2$ の場合に帰着する．

してそのような良い振る舞いをする Artin L-関数，すなわち要請 12.2.5 を満たす Artin L-関数は，重さ 1 の新形式の L-関数に対応するだろうか．その問いに答えるのがいわゆる "Weil の逆定理" である：

定理 12.4.1 (Weil-Langlands [20], [21], [5]). ρ を G の既約で奇な 2 次元 Artin 表現，N を ρ の Artin 導手，ε を ρ の行列式とする．ρ が要請 (A) を満たすと仮定する．$L(s,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ と書くと，$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ は $S(\Gamma_0(N),1,\varepsilon)$ の正規化された新形式である．

本稿の主定理はこの定理の逆向きに相当する：

定理 12.4.2 (Deligne-Serre [4] Théorème 4.1). f を $S(\Gamma_0(N),1,\varepsilon)$ の正規化された新形式とする．このとき，G の既約な 2 次元 Artin 表現 ρ で

$$L_f(s)=L(s,\rho)$$

なるものが存在する．さらに ρ の Artin 導手は N, 行列式は ε である．

これら二つの定理により，以下の二つの集合の間の全単射が得られた：

$$\{f \mid \text{正規化された重さ 1 の新形式}\}$$
$$\text{定理 12.4.1} \uparrow \quad \downarrow \text{定理 12.4.2}$$
$$\{\rho : G \to GL_2(\mathbb{C}) \mid \text{既約，奇で要請 12.2.5 を満たす Artin 表現}\} / \cong \text{(同型)}$$

特に Artin 予想が正しければ，要請 12.2.5 が自明に成り立つので，任意の G の奇な既約 2 次元 Artin 表現が重さ 1 の新形式に対応する．

12.5 主定理 12.4.2 の証明

f を $S(\Gamma_0(N),1,\varepsilon)$ の正規化された新形式とする．第 12.3 節の終わりで述べた通り，f の Hecke 体 $\mathbb{Q}(\{a_n; n\geq 1\})$ は代数体で，a_n は代数的整数である．したがって，有限次 Galois 拡大 $E/\mathbb{Q}$ を，その整数環 O_E にすべての a_n が含まれるように取れる．素数 l に対し，l を含む O_E の素イデアル $\mathfrak{p}_l$ を一つ取り，$k_l=O_E/\mathfrak{p}_l$ を $\mathfrak{p}_l$ での剰余体とする．

12.5.1 モジュラー形式に伴う法 l 表現の存在

まず l を素数として，Nl の外不分岐な半単純連続表現 $\rho_l : G\to GL_2(k_l)$ で，任意の素数 $p\nmid Nl$ に対し

$$\det(1-\rho_l(\mathrm{Frob}_p)T)=1-a_pT+\varepsilon(p)T^2 \bmod \mathfrak{p}_l$$

を満たすものを構成する．以下の手順で，重さ 2 以上の場合の l-進表現の存在に帰着する：

手順 1

$m \equiv 0 \bmod (l-1)$ なる偶数 $m \geq 4$ を取り，$M(\Gamma, m, 1)$ に属する唯一の Eisenstein 級数

$$E_m(z) = 1 - \frac{b_m}{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{m-1}(n) q^n \quad (\sigma_{m-1}(n) = \sum_{0<d|n} d^{m-1})$$

を考える．ただし b_m は m 番目の Bernoulli 数である．Clausen-von Staudt の定理 [19, Theorem 5.10] により，E_m の Fourier 係数を l-進整数とみなすことができ，さらに $E_m \equiv 1 \bmod l$ となる．従って $fE_m \equiv f \bmod \mathfrak{p}_l$ となり，法 $\mathfrak{p}_l$ で f と合同な重さ 2 以上の尖点形式 fE_m が得られた．

手順 2

fE_m は法 $\mathfrak{p}_l$ で Hecke 固有形式だが，標数 0 ではそうでないので，fE_m に l-進 Galois 表現が伴うとは限らない．そこで以下の Deligne-Serre の補題を用いて，$S(\Gamma_0(N), m+1, \varepsilon)$ の元 g で，任意の素数 $p \nmid Nl$ に対して $g|T_p = b_p g$, $b_p \equiv a_p \bmod \mathfrak{p}_l$ を満たすものをとる．

補題 12.5.1 (Deligne-Serre の補題 [4] Lemme 6.11). *M を離散付値環 $\mathfrak{O}$ 上の階数有限自由加群とする．$\mathfrak{m}$ で $\mathfrak{O}$ の極大イデアル，k で $\mathfrak{O}$ の剰余体，K で $\mathfrak{O}$ の商体を表す．$\mathcal{T}$ を互いに可換な M の自己準同型の集合とする．$f \in M/\mathfrak{m}M$ を 0 ではない $\mathcal{T}$ の同時固有ベクトル，$T \in \mathcal{T}$ の固有値を $a_T \in k$ とする．このとき，$\mathfrak{O}$ を含む離散付値環 $\mathfrak{O}'$ と，$M' = \mathfrak{O}' \otimes_{\mathfrak{O}} M$ に属する 0 ではない $\mathcal{T}$ の同時固有ベクトル f' で，$f'|T = a'_T f'$ $(T \in \mathcal{T})$ とすると*

$$a'_T \equiv a_T \bmod \mathfrak{m}'$$

を満たすものが存在する．ただし $\mathfrak{m}'$ は $\mathfrak{O}'$ の極大イデアルである．

注意 12.5.2. 補題 12.5.1 は f の固有値の集合 $\{a_T \mid T \in \mathcal{T}\}$ が持ち上げられることを主張しているが，f' が f の持ち上げになっているか ($f' \bmod \mathfrak{m}'$ が f に一致するかどうか) については何も述べていない．

補題 12.5.1 を $\mathfrak{O} = O_{E,(\mathfrak{p}_l)}$ (E の整数環 O_E の素イデアル $\mathfrak{p}_l$ での局所化), $M = S(\Gamma_0(N), m+1, \varepsilon; O_{E,(\mathfrak{p}_l)})$, $\mathcal{T} = \{T_p;\ p \nmid Nl\}$ として適用すると，ある E の有限次拡大 E', $\mathfrak{p}_l$ の上にある E' の素イデアル $\mathcal{P}_l$ とモジュラー形式 $g \in S(\Gamma_0(N), m+1, \varepsilon; O_{E',(\mathcal{P}_l)})$ が存在して，任意の素数 $p \nmid Nl$ に対し

$$g|T_p = b_p g \quad \text{and} \quad b_p \equiv a_p \bmod \mathcal{P}_l$$

が成り立つ．この g に付随する l-進 Galois 表現を $\theta_l : G \to GL_2(E'_{\mathcal{P}_l})$ とする．ただし $E'_{\mathcal{P}_l}$ で E' の $\mathcal{P}_l$ での完備化を表す．θ_l の表現空間の基底を適当

に取り替えて，θ_l の行列表示の成分が $E'_{\mathcal{P}_l}$ の整数環に値を持つとして良い．$\tilde{\rho}_l = \theta_l \bmod \mathcal{P}_l$ を θ の剰余表現とする．これは E' の $\mathcal{P}_l$ での剰余体 k'_l に係数を持つ表現 $\tilde{\rho}_l : G \to GL_2(k'_l)$ で，任意の素数 $p \nmid Nl$ に対し

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\rho}_l)(\mathrm{Frob}_p) = a_p \bmod \mathcal{P}_l, \tag{12.5}$$
$$\det(\tilde{\rho}_l)(\mathrm{Frob}_p) = p^m \varepsilon(p) \equiv \varepsilon(p) \bmod \mathcal{P}_l \tag{12.6}$$

が成り立つ．式 (12.6) の最後の合同式で，仮定 $m \equiv 0 \bmod (p-1)$ を用いたことに注意されたい．

最後に，$\tilde{\rho}_l$ の半単純化を ρ_l として，ρ_l が k_l に係数を持つことを示す．そのためには任意の $\gamma \in \mathrm{Gal}(k'_l/k_l)$ に対し，ρ_l と ρ_l^γ が同型であることを示せば十分．式 (12.5), (12.6) より，任意の素数 $p \nmid Nl$ に対し $\mathrm{Tr}(\rho_l)(\mathrm{Frob}_p), \det(\rho_l)(\mathrm{Frob}_p)$ は k_l に属する．一方で Chebotarëv の密度定理より，有限群 $\rho_l(G)$ の任意の元が $\rho_l(\mathrm{Frob}_p)$ (p は素数，$p \nmid Nl$) の形をしている．従って ρ_l と ρ_l^γ の特性多項式は等しい．ゆえに ρ_l は k_l 上定義される．

12.5.2　Rankin の結果の応用

この節では $\mathrm{Im}(\rho_l)$ の位数の評価に必要となる，尖点形式に伴う L-関数の解析的性質を紹介する．

定理 12.5.3 ([12] II Theorems 3 and 4). *$k \geq 1$ を整数，$f \in S(\Gamma_0(N), k, \varepsilon)$ を恒等的に 0 ではない尖点形式，その q-展開を $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$ とする．$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-s}$ とおく．$F(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > k$ の範囲で絶対収束し，全複素平面で定義される有理型関数に解析接続される．さらに $F(s)$ は $s = k$ で一位の極を持つ*[*7].

以下の命題は定理 12.5.3 を応用して得られるもので，次節で $\mathrm{Im}(\rho_l)$ の位数を評価する際に鍵となる：

命題 12.5.4 ([4] Proposition 5.1). *$k \geq 1$ を整数，$f \in S(\Gamma_0(N), k, \varepsilon)$ を恒等的に 0 ではない Hecke 作用素 T_p ($p \nmid N$) の同時固有形式で，固有値が a_p であるとする．このとき無限級数 $\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s}$ は $\mathrm{Re}(s) > k$ なる範囲で絶対収束し，さらに以下が成り立つ：*

$$\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s} \leq \log(1/(s-k)) + \mathrm{O}(1) \quad \text{as } s \to k.$$

[*7] Rankin はさらに $F(s)$ と $F(2k-1-s)$ の間に成立する関係式 (関数等式) も証明しているが，命題 12.5.4 の証明に必要ない上に記述が複雑なので割愛する．

12.5.3　$\mathrm{Im}(\rho_l)$ の位数の上からの評価

以下 $G_l = \mathrm{Im}(\rho_l)$ と書く．L を E で完全分解する素数の集合とし，$\sup_{l\in L} \# G_l$ が有限であることを示す．

定義 12.5.5. 素数の部分集合 P の上密度 (upper density) upp.dens.(P) とは，極限 $\limsup_{s\to 1, s>1}(\sum_{p\in P} p^{-s})/\log(1/(s-1))$ のことである．この極限は存在し，0 以上 1 以下の値をとる．

命題 12.5.4 を $k=1$ の場合に適用して，以下の補題を示す：

補題 12.5.6 ([13] pp. 215–216)**.** 任意の実数 $\eta > 0$ に対し，素数の集合 P_η で

1. upp.dens.$(P_\eta) \le \eta$ かつ
2. $M_\eta = \# \{a_p \mid p \notin P_\eta\} < +\infty$

となるものが存在する．

証明. まず $\gamma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ に対し，$f^\gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\gamma q^n$ で定義される f^γ は $S(\Gamma_0(N), 1, \varepsilon^\gamma)$ に属することに注意する．f^γ に命題 12.5.4 を適用すると

$$\sum_{p\nmid N} |a_p^\gamma|^2 p^{-s} \le \log(1/(s-1)) + \mathrm{O}(1) \quad \text{as } s \to 1$$

が成り立つ．γ に関する和を取って

$$\sum_{p\nmid N} \left(\sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})} |a_p^\gamma|^2 \right) p^{-s} \le [E:\mathbb{Q}] \log(1/(s-1)) + \mathrm{O}(1) \quad \text{as } s \to 1 \tag{12.7}$$

となる．一方で，任意の実数 $c > 0$ に対し，集合

$$S(c) = \left\{ a \in O_E \middle| \sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})} |a^\gamma|^2 \le c \right\}$$

は有限である．素数の集合 $P_{S(c)} = \{p;\ p \nmid N \text{ and } a_p \notin S(c)\}$ の上密度を調べる．$P_{S(c)}$ の定義から

$$c \left(\sum_{p\in P_{S(c)}} p^{-s} \right) < \sum_{p\in P_{S(c)}} \left(\sum_{\gamma\in\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})} |a_p^\gamma|^2 \right) p^{-s}$$

となる．これを不等式 (12.7) と組み合わせて，左辺の上からの評価

$$c \left(\sum_{p\in P_{S(c)}} p^{-s} \right) < [E:\mathbb{Q}] \log(1/(s-1)) + \mathrm{O}(1) \quad \text{as } s \to 1$$

を得る．すなわち upp.dens.$(P_{S(c)}) < c^{-1}[E:\mathbb{Q}]$ となる．$c = \eta^{-1}[E:\mathbb{Q}]$ として，$P_\eta = P_{S(c)}$ と取れば補題の一つ目の性質が従う．二つ目の性質については，P_η の定義に基づいて $M_\eta = \#\{a_p;\ p \mid N \text{ or } a_p \in S(c)\}$ と書き直せば，$S(c)$ が有限集合なので M_η もまた然り． □

注意 12.5.7. 補題 12.5.6 で実数 $\eta > 0$ を 0 に近づけると，条件 1 より P_η の上密度が 0 に近づくので，P_η は小さくなる．従って P_η に属さない素数 p は増えるが，条件 2 によれば $p \notin P_\eta$ なる a_p は常に有限個しか存在しない．従って，f の Fourier 係数に重複が大量に生じていて，集合 $\{a_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ は有限であると期待される (あくまで直感的な捉え方に過ぎないが).

H_l を $\rho_l(\mathrm{Frob}_p)$ ($p \notin P_\eta$, $p \nmid Nl$) と $GL_2(k_l)$ 上共役な G_l の元からなる部分集合とする．Chebotarëv の密度定理より，有限群 G_l の任意の元が $\rho_l(\mathrm{Frob}_p)$ (p は素数，$p \nmid Nl$) の形をしている．従って任意の $l \in L$ に対し

$$\#H_l \geq (1-\eta)\#G_l, \quad \#\{\det(1-hT) \mid h \in H_l\} \leq M_\eta$$

の二つが成り立つ．2 番目の不等式の右辺は l に依存しないことに注意されたい．以下の命題により，これらの条件を満たす G_l の位数は $l \in L$ に依らない値で上から評価される．

命題 12.5.8 ([4] Proposition 7.2). η を $0 < \eta < 1/2$ なる実数，$M \geq 0$ を整数とする．$GL_2(\mathbb{F}_l)$ の部分群 G に関する条件 $\mathrm{C}(\eta, M)$ を考える：

要請 12.5.9. [条件 $\mathrm{C}(\eta, M)$] ある G の部分集合 H で次の二つを満たすものが存在する：

$$\#H \geq (1-\eta)\#G; \tag{12.8}$$
$$\#\{\det(1-hT) \mid h \in H\} \leq M. \tag{12.9}$$

(要請 12.5.9 ここまで)

このときある定数 $A = A(\eta, M)$ で，任意の素数 l と，条件 $\mathrm{C}(\eta, M)$ を満たす任意の $GL_2(\mathbb{F}_l)$ の部分群 G に対して $\#G \leq A$ を満たすものが存在する．

証明. 不等式 (12.8) より，H の元の個数が l によらない定数で上から評価できれば十分．一方不等式 (12.9) によると，H の元の特性多項式の個数は l によらない定数 M で抑えられている．従って，「H の元の個数」と「H に属する行列の特性多項式の集合の元の個数」の二つを関連づける必要がある．より具体的には，与えられた多項式を特性多項式に持つ行列の個数を数える．

$GL_2(\mathbb{F}_l)$ の部分群 G は，以下のいずれかを満たす (Dickson の分類):

(a) G が $SL_2(\mathbb{F}_l)$ を含む；
(b) G が $GL_2(\mathbb{F}_l)$ の Cartan 部分群 T に含まれる；

(c) G が $GL_2(\mathbb{F}_l)$ の Cartan 部分群 T の正規化群に含まれるが，T 自身には含まれない；

(d) G の $PGL_2(\mathbb{F}_l)$ での像が対称群 S_4, 交代群 A_4 または A_5 のいずれか.

この分類に基づいて，G の位数を l によらない値で評価する.

(a) 与えられた特性多項式を持つ $GL_2(\mathbb{F}_l)$ の元の個数は l^2+l, l^2 または l^2-l である (多項式の根で $\mathbb{F}_l$ に属するものの個数がそれぞれ $2,1$ または 0). 従って $(1-\eta)\#G \leq \#H \leq M(l^2+l)$. 一方 $r=[G:SL_2(\mathbb{F}_l)]$ とすると $\#G = rl(l^2-1)$. よって $(1-\eta)r(l-1) \leq M$, すなわち $l \leq 1+M/(1-\eta)$. 固定した η と M に対し，G が $\mathrm{C}(\eta, M)$ を満たす素数 l は有限個しかない. よってそのような任意の素数 $l \in L$ に対し $\#G \leq A(\eta, M)$ が成り立つように，$A(\eta, M)$ を取れる.

(b) Cartan 部分群の定義より，与えられた特性多項式を持つ T の元の個数は高々 2. 従って $(1-\eta)\#G \leq \#H \leq 2M$, i.e., $\#G \leq 2M/(1-\eta)$.

(c) $G' = G \cap T$, $H' = H \cap T$ とおくと $[G:G'] = 2$. G が $\mathrm{C}(\eta, M)$ を満たすならば，$\#H' \geq (1-\eta)\#G - \#(G \setminus G') = (1-2\eta)\#G'$. よって G' は $\mathrm{C}(2\eta, M)$ を満たす. (b) の議論より $\#G \leq 4M/(1-2\eta)$.

(d) G の $PGL_2(\mathbb{F}_l)$ での位数は高々 60. よって $G \cap SL_2(\mathbb{F}_l)$ の位数は高々 120. 従って与えられた行列式を持つ G の元の個数は高々 120. すなわち与えられた特性多項式を持つ G の元の個数も高々 120. よって $\#G \leq 120M/(1-\eta)$.

□

注意 12.5.10. 第 12.5.3 節の冒頭で素数 l を E で完全分解するものに限定したのは，この条件のもとでは $\mathfrak{p}_l$ での剰余体 k_l が l 元体 $\mathbb{F}_l$ に一致し，G_l に命題 12.5.8 を適用できるからである.

12.5.4　Artin 表現の構成と所望の性質の証明

前節の命題 12.5.8 により，任意の $l \in L$ に対し $\#G_l \leq A$ を満たす定数 $A = A(\eta, M_\eta)$ が存在する. E をその有限次拡大に取り替えて，任意の正の整数 $n \leq A$ に対して 1 の n 乗根が E に含まれるとしてよい (これにより L は小さくなる). $O_E[T]$ の部分集合 Y を

$$Y = \{(1-\alpha T)(1-\beta T) \mid \alpha, \beta \text{ は位数 } A \text{ 以下の 1 の根}\}$$

で定義する．N を割らない素数 p を一つ固定する．任意の $l \in L, l \neq p$ に対し，ある $R_l(T) \in Y$ が存在して

$$1 - a_p T + \varepsilon(p) T^2 \equiv R_l(T) \bmod \mathfrak{p}_l$$

となる．Y は有限集合なので，ある $R(T) \in Y$ が存在して，有限個を除く全ての $l \in L$ に対して

$$1 - a_p T + \varepsilon(p) T^2 \equiv R(T) \bmod \mathfrak{p}_l$$

となる．従って

$$1 - a_p T + \varepsilon(p) T^2 = R(T)$$

となる．特に，任意の $p \nmid N$ に対し $1 - a_p T + \varepsilon(p) T^2$ は Y に属する．

次に $L' = \{l \in L \mid l > A,$ "$R, S \in Y$, $R \neq S$" implies $R \not\equiv S \bmod \mathfrak{p}_l\}$ とおく．$L \setminus L'$ が有限集合なので L' は無限集合．$l \in L'$ なら定義より $\#G_l$ は l で割り切れない．従って，O_l を O_E の $\mathfrak{p}_l$ での完備化とすれば，ρ_l を標数 0 の表現 $\check{\rho}_l : G \to GL_2(O_l)$ に持ち上げられる[*8]．この持ち上げは $\check{\rho}_l(G) \cong \rho_l(G)$ を満たすので，$\check{\rho}_l$ は Nl の外不分岐，$\check{\rho}_l$ の像は有限で，

$$\det(1 - \check{\rho}_l(\mathrm{Frob}_p)T) \in Y \quad (\forall p \nmid Nl)$$

となる．一方，式 (12.5), (12.6) より

$$\det(1 - \check{\rho}_l(\mathrm{Frob}_p)T) \equiv 1 - a_p T + \varepsilon(p) T^2 \bmod \mathfrak{p}_l \quad (\forall p \nmid Nl)$$

が成り立つ．L' の定義から $\det(1 - \check{\rho}_l(\mathrm{Frob}_p)T) = 1 - a_p T + \varepsilon(p) T^2$ となる．Chebotarev の密度定理により $\check{\rho}_l$ の特性多項式は $l \in L'$ によらない．また，$\check{\rho}_l$ の特性多項式が $E[T]$ の元なので $\check{\rho}_l$ は E 上定義される．従って，任意の $l, l' \in L'$ に対し $\check{\rho}_l$ と $\check{\rho}_{l'}$ は E 上の表現として同型．特に $\check{\rho}_l$, $\check{\rho}_{l'}$ はともに N の外不分岐である．これらの同型な表現を ρ と書く．

残るはこの ρ が所望の性質を満たすことの証明である．

命題 12.5.11. 上記の表現 $\rho : G \to GL_2(E)$ は次の三つを満たす：

(i) ρ は既約；
(ii) $L(s, \rho) = L_f(s)$;
(iii) ρ の Artin 導手 $N(\rho)$ が N.

証明. (i) について，ρ が既約でないと仮定する．ρ の表現空間を V, W を V の 1 次元部分表現とする．G の W への作用を χ_1, V/W への作用を χ_2 で表

[*8] 付録第 A.1 節で表現の持ち上げの証明を与える．

す．すると χ_1, χ_2 は N の外不分岐で，$\chi_1\chi_2 = \varepsilon$, $a_p = \chi_1(p) + \chi_2(p)$ $(p \nmid N)$ を満たす．従って

$$\sum_{p\nmid N} |a_p|^2 p^{-s} = 2\sum_{p\nmid N} p^{-s} + \sum_{p\nmid N} \chi_1(p)\bar{\chi}_2(p)p^{-s} + \sum_{p\nmid N} \bar{\chi}_1(p)\chi_2(p)p^{-s}$$

となる．s が 1 に近づくとき $\sum_{p\nmid N} p^{-s} = \log(1/(s-1)) + \mathrm{O}(1)$ となる．一方 ε が奇指標なので $\chi_1\bar{\chi}_2$ は自明指標でない．よって s が 1 に近づくとき $\sum_{p\nmid N} \chi_1(p)\bar{\chi}_2(p)p^{-s} = \mathrm{O}(1)$, $\sum_{p\nmid N} \bar{\chi}_1(p)\chi_2(p)p^{-s} = \mathrm{O}(1)$ となる．結局

$$\sum_{p\nmid N} |a_p|^2 p^{-s} = 2\log(1/(s-1)) + \mathrm{O}(1) \quad (\text{as } s \to k)$$

となり，命題 12.5.4 に矛盾する．よって ρ は既約．

(ii) と (iii) は同時に示される．$\bar{f} \in S(\Gamma_0(N), 1, \bar{\varepsilon})$ を $\bar{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n q^n$ で定義する．関数等式 (12.4) $\Lambda_f(1-s) = ci\Lambda_{\bar{f}}(s)$ を思い出す．一方で Artin L-関数は関数等式 (12.1) $\Lambda(1-s,\rho) = W(\rho)\Lambda(s,\bar{\rho})$ を満たす．ここで

$$F(s) = \Lambda_f(s)/\Lambda(s,\rho), \quad \tilde{F}(s) = \Lambda_{\bar{f}}(s)/\Lambda(s,\bar{\rho})$$

とおくと，二つの関数等式から

$$F(1-s) = \omega\tilde{F}(s) \quad \text{with} \quad \omega = ci/W(\rho)$$

となる．一方 N を割らない素数 p について

$$\det(1 - \rho(\mathrm{Frob}_p)T) = 1 - a_pT + \varepsilon(p)T^2$$

となることが既に分かっているので，このような p における $\Lambda_f(s)$ と $\Lambda(s,\rho)$ の Euler 因子は一致する．従って $F(s) = (N/N(\rho))^{s/2}\prod_{p\mid N} F_p(s)$ と書ける．ただし $F_p(s)$ は

$$F_p(s) = (1 - b_pp^{-s})(1 - c_pp^{-s})/(1 - a_pp^{-s})$$

という形をしている (b_p, c_p は 0 になりうる)．$\Lambda_{\bar{f}}(s)$, $\Lambda(s,\bar{\rho})$ と $\tilde{F}(s)$ についても同様．以下の補題により $N/N(\rho) = F_p(s) = 1$ となる：

補題 12.5.12 ([4] Lemme 4.9)．A を 0 でない複素数，$G(s) = A^s\prod_p G_p(s)$, $H(s) = A^s\prod_p H_p(s)$ を二つの有限 Euler 積とする (特に，有限個を除く全ての p について $G_p = H_p = 1$)．$G(s)$ と $H(s)$ が次の二つを満たすと仮定する：

(i) 0 でない複素数 ω が存在して $G(1-s) = \omega H(s)$;

(ii) 各 p について，$G_p(s)$ と $H_p(s)$ は $(1 - \alpha_p^{(i)}p^{-s})^{\pm 1}$, $|\alpha_p^{(i)}| < p^{1/2}$ なる Euler 因子の有限個の積.

この時，$A = 1$ かつ任意の p に対し $G_p = H_p = 1$.

Artin 表現 ρ の像は有限なので $|b_p|, |c_p| \leq 1$ となるのは明らか．一方 a_p については，Ogg [11] により $p \mid N$ なら $|a_p| \leq 1$ となることが示されている ([4, §1.8] に詳細がある)．よって補題 12.5.12 を適用できる．　□

12.6　Artin 表現の射影一般線型群での像

Artin 表現 $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ と自然な写像 $GL_2(\mathbb{C}) \to PGL_2(\mathbb{C})$ の合成を $\tilde{\rho}$ とする．$\tilde{\rho}$ の像は $PGL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群で，以下のいずれかに同型：

	$\tilde{\rho}(G)$ の群構造	ρ の既約性	要請 12.2.5 (A)
(1)	位数 n の巡回群 C_n $(n \geq 1)$	可約	満たす
(2)	位数 $2n$ の二面体群 D_n $(n \geq 2)$	既約	満たす
(3)	交代群 A_4, A_5 または対称群 S_4	既約	?

重さ 1 の新形式 f に付随する Artin 表現は既約なので，その $PGL_2(\mathbb{C})$ での像は (2) または (3) のいずれかである．(2) の場合 f は二面体型，(3) の場合 f は例外型であるという．一般の 2 次元 Artin 表現 ρ についても同様の言葉遣いをする．

Artin 表現 ρ が指標から誘導される場合，ρ は要請 (A) を満たし，定理 12.4.1 により ρ は重さ 1 の新形式に対応する．特に ρ が二面体型の場合 ρ が誘導表現なので (cf. 第 12.7.1 節) 新形式が対応する．この新形式は，整数係数 2 元 2 次形式に伴うテータ級数の線型結合である ([13, §7.3] に具体例がある)．

一方で例外型の ρ が要請 (A) を満たすかどうかは，Serre 予想が解決 [6] するまで一般には分からなかった．この場合に新形式に対応する ρ を最初に見つけたのは Tate で，ρ は A_4 型，Artin 導手は 133 だった [17, pp. 321–322]．導手が素数で S_4 型の例は [13, §8, §9] で紹介されている．

Tate が用いた方法を述べる．既約で奇な Artin 表現 ρ が与えられているとする．ρ の導手を N, 行列式を ε とする．L-関数 $L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ の係数 a_n をある程度の n まで計算する (仮にある正の整数 A 以下の n とする)．次に $S(\Gamma_0(N), 1, \varepsilon)$ の新形式 f で q-展開が $\sum_{n \leq A} a_n q^n$ から始まるものを探す．A が $S(\Gamma_0(N), 1, \varepsilon)$ の Sturm bound $(N/12) \prod_{p \mid N} (1 + p^{-1})$ 以上なら，そのような f は存在すれば一意に定まる．もし存在しなければ Artin 予想は正しくない (定理 12.4.2 の後の説明を参照)．f に伴う Artin 表現を ρ_1 とする．ρ_1 が ρ と同型なら ρ は要請 (A) を満たす．

注意 12.6.1. Langlands は [7] で保型表現の底変換の理論を用いて，ρ が A_4 型ならば要請 (A) を満たすことを証明した．さらに Tunnell は [18] で，ρ が S_4 型の場合も要請 (A) を満たすことを示した．従って，A_4 型または S_4 型

の Artin 表現には重さ 1 の新形式が対応し，Artin 予想が成立することが，1980 年代初頭には示された．しかし A_5 型の場合は A_4, S_4 とは異なり可解群でないことが影響して，研究が遅れた．A_5 型の Artin 表現 ρ については，Buzzard-Dickinson-Shepherd–Barron-Taylor [2] が $\tilde{\rho}$ の 2 と 5 での分岐に関するある仮定のもとで Artin 予想が正しいことを示した．

12.7　二面体型の Artin 表現

12.7.1　誘導表現

$\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ を Artin 表現，$\mathrm{Im}(\tilde{\rho})$ が D_n $(n \geq 2)$ に同型であるとする．このとき ρ はある 2 次体の指標から誘導される．

ρ を誘導する 2 次体とその指標は，以下のようにして見つける．C_n を D_n の位数 n の巡回部分群[*9]，ω を $\tilde{\rho}$ と自然な全射 $D_n \to D_n/C_n \cong \{\pm 1\}$ の合成とする．ω は G の位数 2 の指標である．ω の核に対応する 2 次体を K, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/K)$ とすると $\tilde{\rho}(G_K) \cong C_n$ となり，$\rho|_{G_K}$ は可約である．つまり G_K の指標 χ, χ' が存在して $\rho|_{G_K} \cong \chi \oplus \chi'$ となる．σ を G_K に属さない G の元とする．$\rho(\sigma)^2 = \rho(\sigma^2)$ は $\rho(G_K)$ の元なので，χ と χ' に対応する各固有空間をそれぞれ保つ．従って $\rho(\sigma)$ は各固有空間を保つか入れ替えるかのいずれかだが，保つとすると ρ 自身が可約となり，ρ が二面体型であることに矛盾する．よって $\rho(\sigma)$ は χ と χ' に対応する固有空間を入れ替える．G_K の指標 χ_σ を $\chi_\sigma(\gamma) = \chi(\sigma\gamma\sigma^{-1})$ $(\gamma \in G_K)$ で定める．χ_σ は G_K に属さない σ の取り方によらない．$\rho(\sigma\gamma\sigma^{-1})$ を

$$\begin{pmatrix} \chi(\sigma\gamma\sigma^{-1}) & 0 \\ 0 & \chi'(\sigma\gamma\sigma^{-1}) \end{pmatrix} = \rho(\sigma\gamma\sigma^{-1}) = \rho(\sigma) \begin{pmatrix} \chi(\gamma) & 0 \\ 0 & \chi'(\gamma) \end{pmatrix} \rho(\sigma)^{-1}$$

と二通りの方法で行列表示し，$\rho(\sigma)$ の対角成分に 0 が並ぶことに注意して右辺を計算すると，$\chi' = \chi_\sigma$ となる．$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & b(\sigma) \\ c(\sigma) & 0 \end{pmatrix}$ と書いて $\rho(\sigma^2)$ を計算すれば $b(\sigma)c(\sigma) = \chi(\sigma^2)$ となることがわかる．従って χ と χ_σ に対応する固有空間の基底をそれぞれ定数倍で調整して，$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & \chi(\sigma^2) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として良い．これは ρ が χ による誘導表現 $\mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}}(\chi)$ に同型であることを示している．

12.7.2　Artin 表現の既約性，Artin 導手と偶奇

逆に K を 2 次体，ω を K に対応する G の指標，χ を G_K の指標とし，$\rho = \mathrm{Ind}_{K/\mathbb{Q}}(\chi)$ とおく．$\mathfrak{f}$ を χ の導手，d_K を $K/\mathbb{Q}$ の判別式とすると，以下が成り立つ：

[*9] $n \geq 3$ ならばこのような部分群 C_n は一意に定まる．

命題 12.7.1 ([13] (7.2.1)). (a) 以下の三条件は同値：
(i) ρ が既約；(ii) ρ が二面体型；(iii) $\chi \neq \chi_\sigma$.
(b) $N(\rho) = |d_K| \cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f})$. ただし $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}$ は $K/\mathbb{Q}$ の絶対ノルム.
(c) ρ が奇であるための必要十分条件は，以下の (i) または (ii) が成立すること：(i) K が虚 2 次体；(ii) K が実 2 次体で χ が混符号 (mixed signature) を持つ，すなわち $c, c' \in G_K$ をそれぞれ K の二つの実素点での Frobenius とすると $\chi(c) \neq \chi(c')$.
(d) $\tilde{\rho}(G) = D_n$ とすると，$\chi^{-1}\chi_\sigma$ の位数が n.

証明. (a) 誘導表現の定義から ρ の G_K への制限は可約．従って $\tilde{\rho}(G_K)$ は巡回群．指数 2 以下の巡回群を部分群にもつ $PGL_2(\mathbb{C})$ の有限部分群は巡回群または二面体群．$\tilde{\rho}(G)$ が二面体群であることと ρ が既約であることが同値なので (i) と (ii) が同値．(ii) と (iii) が同値であることは，Mackey の既約判定法 [14, Proposition 23] に他ならない．
(b) これは誘導表現に関する導手判別式公式である [9, pp. 22–23].
(c) $\mathrm{ver}_{K/\mathbb{Q}} : G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{ab}} \to G_K^{\mathrm{ab}}$ を transfer 写像とする．すなわち $g \in G_K$ なら $\mathrm{ver}_{K/\mathbb{Q}}(g) = g\sigma g\sigma^{-1}$, $g \in G \setminus G_K$ なら $\mathrm{ver}_{K/\mathbb{Q}}(g) = g^2$ である．すると $\det(\rho) = \omega(\chi \circ \mathrm{ver}_{K/\mathbb{Q}})$ となる．ω が奇指標であることと K が虚 2 次体であることが同値．(i) K が虚 2 次体で v を K の複素素点とすると，χ の $K_v^\times$ への制限が自明なので $\mathrm{ver}_{K/\mathbb{Q}}(\chi)$ は偶指標．よって $\det(\rho)$ は奇指標． (ii) K が実 2 次体で v, v' を K の実素点とする．v での Frobenius を $c \in G_K$, v' での Frobenius を $c' \in G_K$ とする．$c' = \sigma c\sigma^{-1}$ となる．従って

$$\chi(c') = \chi(\sigma c\sigma^{-1}) = \chi(cc\sigma c\sigma^{-1}) = \chi(c)(\chi \circ \mathrm{ver}_{K/\mathbb{Q}})(c).$$

ゆえに $\det(\rho)$ が奇指標であることと $\chi(c') = -\chi(c)$ となることが同値．
(d) $\tilde{\rho}|_{G_K} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \chi^{-1}\chi_\sigma \end{pmatrix}$ なので $\tilde{\rho}(G_K)$ の位数が $\chi^{-1}\chi_\sigma$ の位数に等しい．従って $\tilde{\rho}(G) = D_n$ なら $\tilde{\rho}(G_K) = C_n$ で，$\chi^{-1}\chi_\sigma$ の位数は n.

□

注意 12.7.2 ([13] p. 240). K が実 2 次体のとき，導手 $\mathfrak{f}$ の指標 χ が混符号を持つための必要十分条件は，$\mathfrak{f}$ を法として -1 と乗法合同な K の総正な単数が存在しないことである．特に $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{f}) > 1$ となる．従って命題 12.7.1 (b) より ρ の導手は素数になり得ない．

付録 A

A.1　法 l 表現の標数 0 への持ち上げについて

第 12.5.4 節で，$G_l = \rho_l(G)$ の位数が l で割り切れない場合に法 l 表現 $\rho_l : G \to GL_2(k_l)$ を l-進表現 $\tilde{\rho}_l : G \to GL_2(O_l)$ に持ち上げた．この付録では，そのような持ち上げが存在することを証明する．

命題 A.1.1. *l を素数，k を標数 l の有限体，$W = W_{l^\infty}(k)$ を k の Witt 環 ($\mathbb{Q}_l$ の次数 $[k : \mathbb{F}_l]$ の唯一の不分岐拡大の整数環) とする．$\rho : G \to GL_2(k)$ を Galois 表現とし，像 $\rho(G)$ の位数が l と互いに素であると仮定する．このとき，連続な Galois 表現 $\tilde{\rho} : G \to GL_2(W)$ で $\tilde{\rho} \bmod l = \rho$ を満たし，法 l 写像 $GL_2(W) \to GL_2(W/l)$ が同型 $\tilde{\rho}(G) \cong \rho(G)$ を誘導するものが存在する．*

$G' = G/\ker(\rho)$ とおく．仮定から G' の位数は l と互いに素である．ρ を G' の表現とみなして差し支えない．以下，$\rho = \rho_1$ と書く．まず，表現 $\rho_2 : G' \to GL_2(W/l^2)$ で ρ_1 を持ち上げるものが存在することを示す．

各 $g \in G'$ に対し $\phi_2(g) \bmod l = \rho_1(g)$ となる行列 $\phi_2(g) \in GL_2(W/l^2)$ を一つ固定する．これにより写像 $\phi_2 : G' \to GL_2(W/l^2)$ を得る．この ϕ_2 が群準同型になるための障害について考える．ρ_1 は群準同型なので，任意の $g_1, g_2 \in G'$ に対して $\phi_2(g_1)\phi_2(g_2) \equiv \phi_2(g_1g_2) \bmod l$ が成り立つ．すなわち

$$c_2(g_1, g_2) := \phi_2(g_1g_2)\phi_2(g_2)^{-1}\phi_2(g_1)^{-1}$$

は $\Gamma_2 = \ker(GL_2(W/l^2) \to GL_2(W/l))$ に値を持つ．次の事実に注意する：

補題 A.1.2. *整数 $m \geq 2$ に対し，法 l^{m-1} 写像 $GL_2(W/l^m) \to GL_2(W/l^{m-1})$ は全射である．その核を Γ_m とすると，Γ_m は位数は $(\#k)^4$ の Abel 群.*

証明. 法 l^{m-1} 写像が全射であることは，$GL_2(W/l^{m-1})$ の行列の成分をそれぞれ W/l^m に持ち上げれば $GL_2(W/l^m)$ の元になるので従う．Γ_m が Abel 群であることは直接計算で確かめられる．$GL_2(W/l^m)$ の位数が $(\#k)^{4m-3}((\#k)^2 - 1)^2((\#k) + 1)$ であることに注意すると，Γ_m の位数は $\#GL_2(W/l^m)/\#GL_2(W/l^{m-1}) = (\#k)^4$ となる． □

補題 A.1.2 により，自然な完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma_2 \longrightarrow GL_2(W/l^2) \xrightarrow{\bmod l} GL_2(W/l) \longrightarrow 0$$

があり, $GL_2(W/l)$ が Γ_2 に共役で作用する．つまり $g \in GL_2(W/l)$ と $\gamma \in \Gamma_2$ に対し，g の $GL_2(W/l^2)$ への持ち上げを $\tilde{g}$ とすると，この作用は

$$g \cdot \gamma = \tilde{g}\gamma\tilde{g}^{-1}$$

で定義され，右辺は持ち上げ $\tilde{g}$ の取り方によらない．$g_1, g_2, g_3 \in G'$ に対し $\phi_2(g_1g_2g_3)$ を二通りの方法で計算すると，$c_2 : G' \times G' \to \Gamma_2$ は 2-コサイクルであることが分かる．記号を濫用して，そのコホモロジー類も c_2 で表す．c_2 は $H^2(G', \Gamma_2)$ の元である．

一般に，H を有限群，M を $\mathbb{Z}[H]$-加群，H' を H の部分群とすると，写像 $\mathrm{res} : H^i(H, M) \to H^i(H', M)$ と $\mathrm{cor} : H^i(H', M) \to H^i(H, M)$ が定義される．M^H を H-不変な M の元からなる部分加群とすると ($M^{H'}$ も同様に定義する), これらの写像は次数 0 でそれぞれ $\mathrm{res} : M^H \to M^{H'}; m \mapsto m$, $\mathrm{cor} : M^{H'} \to M^H; m \mapsto \sum_{h \in H/H'} hm$ となる ([15, Chap. VII §5, §7] 参照).

補題 A.1.3 ([15] p. 119 Proposition 6)．任意の $i \geq 0$ に対し $\mathrm{cor} \circ \mathrm{res}$ は $H^i(H, M)$ 上の $[H : H']$ 倍写像.

補題 A.1.3 で $H' = \{1\}$ とすると，任意の $i \geq 1$ に対し $H^i(H', M) = \{0\}$ なので $H^i(H, M)$ は $\#H$ 倍写像で消える．G' の位数と Γ_m の位数が互いに素なので $H^2(G', \Gamma_m) = \{0\}$．つまり，ある $x_2 : G' \to \Gamma_2$ が存在して，任意の $g_1, g_2 \in G'$ に対し $c_2(g_1, g_2) = x_2(g_1g_2)x_2(g_1)^{-1}(g_1 \cdot x_2(g_2))^{-1}$ となる．$\rho_2(g) = x_2(g)^{-1}\phi_2(g)$ とおくと $\rho_2 : G' \to GL_2(W/l^2)$ は準同型で $\rho_2 \bmod l = \rho_1$ を満たす.

補題 A.1.4. 法 l 写像が同型 $\rho_2(G') \cong \rho(G)$ を誘導する．

証明. 記号を濫用して ϕ_2 と x_2 をそれぞれ G 上の写像とみなす．$g \in \ker(\rho)$ なら $\phi_2(g) = 1$ としてよい．すると $c_2(g, g) = 1$ となるので $x_2(g) = 1$. つまり $\rho(g) = 1$ なら $\rho_2(g) = 1$ となる．これは法 l 写像 $\rho_2(G') \to \rho(G)$ が単射であることを示している．全射性は明らか. □

同様にして，任意の整数 $m \geq 1$ に対して表現 $\rho_m : G' \to GL_2(W/l^m)$ を表現 $\rho_{m+1} : G' \to GL_2(W/l^{m+1})$ に持ち上げられる．すなわち，我々は G' の表現の射影系 $(\rho_m : G' \to GL_2(W/l^m))_{m \geq 1}$ を得た．この系の射影極限を

$$\check{\rho} = \varprojlim_m \rho_m : G' \to GL_2(W) \cong \varprojlim_m GL_2(W/l^m)$$

とすると，$\check{\rho}$ は命題 A.1.1 の性質を満たす.

■謝辞　素晴らしいサマースクールを企画・運営して下さった世話人の木村巌先生，横山俊一先生に，心より感謝申し上げます．本サマースクールで講演する機会を与えてくださり，ありがとうございます．また，本サマースクールに参加するための旅費，参加費を都築暢夫先生の科研費 (挑戦的萌芽研究 15K13422) からご援助いただきました．特に記して感謝いたします．

参考文献

[1] Emil Artin, *Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), no. 1, 353–363. MR MR3069486

[2] Kevin Buzzard, Mark Dickinson, Nick Shepherd-Barron and Richard Taylor, *On icosahedral Artin representations*, Duke Math. J. 109 (2001), no. 2, 283–318. MR MR1845181 (2002k:11078)

[3] Richard Dagobert Brauer, *On Artin's L-series with general group characters*, Ann. of Math. (2) 48 (1947), 502–514. MR MR0020105 (8,503g)

[4] Pierre Deligne and Jean-Pierre Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 7 (1974), no. 4, 507–530. MR MR0379379 (52 #284)

[5] Hervé Jacquet and Robert P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970. MR MR0401654 (53 #5481)

[6] Chandrashekhar Khare and Jean-Pierre Wintenberger, *Serre's modularity conjecture. I*, Invent. Math. 178 (2009), no. 3, 485–504. MR MR2551763 (2010k:11087)

[7] Robert P. Langlands, *Base change for* GL(2), Annals of Mathematics Studies 96, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1980. MR MR0574808 (82a:10032)

[8] Wen-Ching Winnie Li, *Newforms and functional equations*, Math. Ann. 212 (1975), 285–315. MR MR0369263 (51 #5498)

[9] Jacques Martinet, *Character theory and Artin L-functions*, in: Algebraic number fields: L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), pp. 1–87, Academic Press, London, 1977. MR MR0447187 (56 #5502)

[10] Toshitsune Miyake, *Modular forms*, Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR MR2194815 (2006g:11084)

[11] Andrew P. Ogg, *On the eigenvalues of Hecke operators*, Math. Ann.

179 (1969), 101–108. MR MR0269597 (42 #4492)

[12] Robert Alexander Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions. I. The zeros of the function $\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)/n^s$ on the line $\Re s = 13/2$. II. The order of the Fourier coefficients of integral modular forms*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 35 (1939), 351–372. MR MR0000411 (1,69d)

[13] Jean-Pierre Serre, *Modular forms of weight one and Galois representations*, in: Algebraic number fields: L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), pp. 193–268, Academic Press, London, 1977. MR MR0450201 (56 #8497)

[14] Jean-Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics 42, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR MR0450380 (56 #8675)

[15] Jean-Pierre Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics 67, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. MR MR0554237 (82e:12016)

[16] Goro Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Reprint of the 1971 original. Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kanô Memorial Lectures, 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994. MR MR1291394 (95e:11048)

[17] John Tate, *Problem 9: The general reciprocity law*, in: Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974), pp. 311–322. Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976. MR MR0429839 (55 #2849)

[18] Jerrold Tunnell, *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 5 (1981), no. 2, 173–175. MR MR0621884 (82j:12015)

[19] Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, Second Edition. Graduate Texts in Mathematics 83, Springer-Verlag, New York, 1997. MR MR1421575 (97h:11130)

[20] André Weil, *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen*, Math. Ann. 168 (1967), 149–156. MR MR0207658 (34 #7473)

[21] André Weil, *Dirichlet series and automorphic forms* (Lezioni Fermiane), Lecture Notes in Mathematics 189, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag 1971. MR MR1610485