MATCHING OBTENIDO SEGÚN EL ORDEN DE ENTRADA DE LOS AGENTES

Yasmín Farés
Profesora Titular
Álgebra lineal
Facultad de Ciencias Económicas
UNCuyo
Marisel Joffrés
Jefe de Trabajos Prácticos
Álgebra Lineal
Facultad de Ciencias Económicas
UNCuyo

Introducción

En Estados Unidos las residencias médicas fueron introducidas a principios del siglo XX como una forma opcional para hacer posgrado en medicina. Los estudiantes interesados en hacer un internado o residencia se ofrecían a una clínica médica en una especialización determinada, y los hospitales que ofrecían posiciones obtenían mano de obra relativamente barata. El número de posiciones ofrecidas al principio fue mayor que el número de graduados que aplicaban, por lo tanto, comenzó una competencia entre los hospitales por los internos.

Con el objeto de poder resolver el problema de asignar los estudiantes a los distintos hospitales es que aparecen los primeros algoritmos de asignación o macheo. Estos algoritmos tienen en cuenta las preferencias de los estudiantes sobre los hospitales y recíprocamente.

Gale y Shapley formularon en 1962 un modelo al que llamaron modelo de asignación o matrimonio. Dicho modelo se basa en poder realizar una asignación entre los individuos de dos conjuntos finitos y disjuntos que cumpla ciertas condiciones. A este tipo de asignación se la llama matching. Haremos referencia a los conjuntos mencionados como el conjunto de hombres y el conjunto de mujeres.

Debe tenerse en cuenta que los individuos de cada uno de los conjuntos tienen un orden de preferencias sobre los individuos del otro conjunto. A partir de esto surge el concepto de matching estable. Un matching es estable si todos los individuos tienen una pareja "aceptable" y no existe ningún par de individuos que se prefieran entre ellos más que al individuo que le asigna el matching.

Gale y Shapley probaron que para todo *Modelo de Asignación* o *Mercado de Matrimonio* (conjunto de hombres, conjunto de mujeres y listas de preferencias) existe al menos un matching estable. En la demostración desarrollaron un algoritmo que permite encontrarlo, llamado *Algoritmo de Aceptación Diferida*. En cada paso de dicho algoritmo todos los hombres hacen propuestas simultáneamente a las mujeres de sus listas de preferencias. A partir de entonces, distintas modificaciones del algoritmo fueron estudiadas.

Roth y Vande Vate diseñaron un algoritmo que introduce a los individuos secuencialmente, en un orden arbitrario, en el sistema, conocido como *Algoritmo de Aceptación diferida con entrada secuencial*. En este proceso en que un nuevo individuo entra al mercado un matching que era estable se puede convertir en inestable. Blum y Rothblum desarrollaron un procedimiento natural para retornar a la estabilidad en el nuevo mercado extendido. Millán también estudia el algoritmo de aceptación diferida con entrada secuencial y enuncia una condición suficiente sobre el orden en que entran los individuos de un lado del mercado para obtener el matching óptimo para ellos.

En este trabajo desarrollamos la teoría necesaria para el estudio del algoritmo de entrada secuencial, con el fin de analizar la relación entre el orden en el que entran los individuos en la aplicación del algoritmo y el matching que se obtiene como salida de dicho algoritmo.

El trabajo está organizado en tres secciones. En la primera sección introducimos las definiciones básicas acerca de la teoría de matching y ejemplificamos algunas de ellas. En particular, definimos el concepto de ciclo y el de matching cuasi-estable, y proporcionamos la demostración de algunos resultados que son muy útiles en el estudio del algoritmo de aceptación diferida con matching de entrada arbitrario. En la segunda sección estudiamos dicho algoritmo y demostramos que si el matching de entrada es cuasi-estable, el matching obtenido como salida del algoritmo resulta estable. En la tercera sección describimos el algoritmo de entrada secuencial y estudiamos el concepto de orden óptimo y los resultados obtenidos por Millán. Proponemos ejemplos que permiten observar que la condición de orden óptimo no resulta necesaria para la obtención del matching M-óptimo como salida del algoritmo de entrada secuencial.

1. Conceptos Previos

Definición 1: Un ***modelo de asignación o mercado de matrimonio*** $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{P})$ consiste de dos conjuntos finitos y disjuntos M y W, $M = \{m_1, m_2, \cdots, m_r\}$ $(conjunto\ de\ hombres)$ y $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_p\}$ $(conjunto\ de\ mujeres)$ y un conjunto de listas de preferencias $P = \{P(m_1), P(m_2), \cdots, P(m_r), P(w_1), P(w_2), \cdots, P(w_p)\}$ donde cada lista $P(m_i)$ es un orden de los elementos del conjunto $W \cup \{m_i\}$ y de forma similar cada lista $P(w_i)$ es un orden de los elementos del conjunto $M \cup \{w_i\}$. Definidas de esta manera podemos decir que las preferencias de cada individuo son transitivas, estrictas y completas.

Ejemplo 1:

Sea el mercado (M, W, P) donde $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ y P definida por:

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_2, w_1, w_3, m_1, w_4 & \qquad P(w_1) = m_1, m_2, m_3, w_1 \\
P(m_2) = w_1, w_4, w_3, m_2, w_2 & \qquad P(w_2) = m_1, m_3, w_2, m_2 \\
P(m_3) = w_1, w_3, w_2, w_4, m_3 & \qquad P(w_3) = m_2, w_3, m_1, m_3 \\
 & \qquad P(w_4) = m_1, m_2, w_4, m_3
\end{array}
$$

En la lista de preferencias $P(m_1) = w_2, w_1, w_3, m_1, w_4$, observamos que el individuo m_1 prefiere en primer lugar a w_2, en segundo lugar a w_1, en tercer lugar a w_3 y su cuarta elección es permanecer sólo, es decir w_4 es una mujer no *aceptable* para él.

Definición 2: Un ***matching*** μ es una función biyectiva del conjunto $M \cup W$ sobre si mismo, de orden 2 ($\mu^2 = id$), tal que si $\mu(m) \neq m$, luego $\mu(m) \in W$ y si $\mu(w) \neq w$, luego $\mu(w) \in M$.

Notemos que la condición $\mu^2 = id$ implica que $\mu(m) = w$ si y sólo si $\mu(w) = m$.

Un ejemplo de matching para el mercado anterior es $\mu = \begin{cases} w_1 & w_3 & w_2 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & w_4 \end{cases}$

Definición 3: Un individuo v ***prefiere*** el matching μ_1 al matching μ_2 si él prefiere $\mu_1(v)$ a $\mu_2(v)$, lo que anotamos como $\mu_1(v) >_v \mu_2(v)$. Un individuo v es ***indiferente*** entre el matching μ_1 y el matching μ_2 si $\mu_1(v) = \mu_2(v)$. Un individuo v ***prefiere*** el matching μ_1 ***al menos tanto como*** al matching μ_2 si él prefiere $\mu_1(v)$ a $\mu_2(v)$ o es indiferente entre ellos, lo que anotamos como $\mu_1(v) \geq_v \mu_2(v)$.
Decimos que $\mu_1 \geq_M \mu_2$ si $\mu_1(m) \geq_m \mu_2(m)$ para todo $m \in M$. Análogamente definimos $\mu_1 \geq_W \mu_2$.

Veremos ahora algunas características de los matchings que permiten clasificarlos en matchings que pueden ocurrir y permanecer y cuáles no. Observando las listas de preferencias, uno podría adelantar que un matching donde uno de los individuos está en pareja con alguien que en su lista de preferencias está después que él mismo será un matching que se desarmará.

Definición 4: Un matching μ es ***individualmente racional*** si para cada individuo $v \in M \cup W$ se verifica que $\mu(v) \geq_v v$.

Una pareja (m, w) ***bloquea*** un matching μ si $w >_m \mu(m)$ y $m >_w \mu(w)$.

Definición 5: Un matching μ es un ***matching estable*** si es individualmente racional y no existe pareja bloqueadora.

Al conjunto de todos los matchings estables en un mercado de matrimonio (M, W, P) lo simbolizamos con $S(M, W, P)$ o simplemente $S(P)$.

Gale y Shapley probaron que un matching estable siempre existe para cualquier mercado de matrimonio.

Teorema 1: Para todo mercado de matrimonio (M, W, P) existe un matching estable.

La demostración de este teorema consiste en la descripción de un algoritmo que produce un matching estable, conocido como el *Algoritmo de aceptación diferida (DA).*

El matching $\mu_1 = \begin{cases} w_2 & w_1 & w_4 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & w_3 \end{cases}$ del mercado anterior no tiene pareja bloqueadora pero no es individualmente racional pues w_4 prefiere permanecer sólo antes que estar en pareja con m_3. El matching $\mu_2 = \begin{cases} w_2 & w_3 & w_1 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & w_4 \end{cases}$ es individualmente racional pero tampoco es estable pues (m_2, w_4) es una pareja bloqueadora.

Puede resultar interesante saber si hay algún matching estable al que todos los hombres prefieran al menos tanto como a cualquier otro matching estable, y análogamente para las mujeres. Definimos entonces los matchings *M-Óptimo* y *W-Óptimo*.

Definición 6: Sea (M, W, P) un modelo de asignación. Un matching estable μ es ***M-óptimo*** si $\mu \geq_M \mu^*$ para cualquier otro matching estable μ^***.** Análogamente se define matching ***W-óptimo***.

En el mercado de asignación del ejemplo anterior el único matching estable es:

$$\mu_M = \mu_W = \begin{cases} w_2 & w_1 & m_3 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & w_3 & w_4 \end{cases}$$

Definición 7: Una mujer w y un hombre m se dicen ***alcanzables*** si ellos son pareja en algún matching estable.

Propiedad 2: En todo mercado donde las preferencias son estrictas el conjunto de individuos que permanecen solos en un matching estable es el mismo para todo matching estable.

Gale y Shapley probaron también que si las preferencias son estrictas, tal como las hemos definido nosotros, en cualquier mercado de matrimonio existe un matching estable *M-óptimo* μ_M y un matching estable *W-óptimo* μ_W.

En este mismo contexto se probó que: (Knuth) las comunes preferencias de los dos lados del mercado son opuestas sobre el conjunto de matchings estables. Es decir si μ y μ^* son dos matching estables, entonces todo hombre prefiere μ al menos tanto como a μ^* si y sólo si toda mujer prefiere μ^* al menos tanto como μ. Es decir $\mu \geq_M \mu^*$ si y sólo si $\mu^* \geq_W \mu$.

Definición 8: Para dos matchings cualesquiera μ y μ^* se definen las correspondencias $\boldsymbol{\mu} \vee_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\mu}^*$ y $\boldsymbol{\mu} \wedge_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{\mu}^*$ que asignan a cada $m \in M$ su más preferida y menos preferida pareja respectivamente entre $\mu(m)$ y $\mu^*(m)$. También se definen $\boldsymbol{\mu} \vee_{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{\mu}^*$ y $\boldsymbol{\mu} \wedge_{\boldsymbol{W}} \boldsymbol{\mu}^*$ que asignan a cada $w \in W$ su más preferida y menos preferida pareja respectivamente entre $\mu(w)$ y $\mu^*(w)$. Podría suceder que estas correspondencias no resulten matchings, pero el siguiente teorema asegura que:

Teorema 2: (Conway) Cuando las preferencias son estrictas, si μ y μ^* son matchings estables, entonces $\mu \vee_M \mu^*$, $\mu \wedge_M \mu^*$, $\mu \vee_W \mu^*$ y $\mu \wedge_W \mu^*$ son matchings y además son estables. Más aún $\mu \vee_M \mu^* = \mu \wedge_W \mu^*$ y $\mu \vee_W \mu^* = \mu \wedge_M \mu^*$.

De esto se concluye que el conjunto de matchings estables tiene estructura de látice con los operadores $\vee_W$ y $\wedge_W$.

Perfil de preferencias reducido

Sea el mercado (M, W, P), y $P(v)$ la lista de preferencias de cada $v \in M \cup W$ formada por todos los individuos aceptables para v con la inclusión de v como última entrada.

De la optimalidad de μ_M y μ_W se desprende que: si (m, w) es una pareja de mutuamente aceptables y $w >_m \mu_M(m)$ o $m >_w \mu_W(w)$ luego m y w no son alcanzables.

Teniendo en cuenta esto podemos "reducir" las listas de preferencias de cada individuo de la siguiente forma:

i. Remover de cada lista de mujeres aceptables para un hombre m todas las mujeres w más preferidas que $\mu_M(m)$ y de la lista de cada mujer w todos los hombres m más preferidos que $\mu_W(w)$.

ii. Remover de la lista de hombres aceptables para cada mujer w todos los hombres m que son menos preferidos que $\mu_M(w)$ y de la lista de mujeres aceptables para cada hombre m todas las mujeres menos preferidas que $\mu_W(m)$.

iii. Después de haber hecho los pasos i y ii, si m no es aceptable para w en esta lista ya modificada, entonces remover de la lista de m a la mujer w y similarmente de la lista de cada mujer w remover todos los hombres m, para los cuales esa mujer w no es aceptable.

Al conjunto de listas de preferencias resultante se lo denomina ***Perfil de listas reducido*** para el mercado original y se anota $P(\mu_M)$. Si en cada uno de estos pasos reemplazamos a μ_M por cualquier matching estable μ, el perfil de listas reducido será $P(\mu)$.

Ejemplo 2:

Sea el mercado (M, W, P) donde $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ y sea P dada por:

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_2, w_6, w_1, w_3, w_4 & P(w_1) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 \\
P(m_2) = w_2, w_3, w_1, w_5 & P(w_2) = m_3, m_2, m_1, m_4 \\
P(m_3) = w_5, w_2, w_6 & P(w_3) = m_3, m_4 \\
P(m_4) = w_5, w_1, w_6, w_3, w_2, w_4 & P(w_4) = m_1, m_4, m_5 \\
P(m_5) = w_4, w_5, w_1, w_2, w_3, w_6 & P(w_5) = m_2, m_1, m_5, m_4, m_3 \\
 & P(w_6) = m_4, m_1, m_2
\end{array}
$$

En este caso los matching estables *M-óptimo* y *W-óptimo* son

$$
\mu_M = \left\{ \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & w_3 \\ w_6 & w_1 & w_2 & w_5 & w_4 & w_3 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \mu_W = \left\{ \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & w_3 \\ w_1 & w_5 & w_2 & w_6 & w_4 & w_3 \end{array} \right.
$$

Aplicamos los pasos i, ii y iii a la lista de preferencias P.:

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = \cancel{w_2}, w_6, w_1, \cancel{w_3}, \cancel{w_4} & P(w_1) = m_1, m_2, \cancel{m_3}, \cancel{m_4}, \cancel{m_5} \\
P(m_2) = \cancel{w_2}, \cancel{w_3}, w_1, w_5 & P(w_2) = m_3, \cancel{m_2}, \cancel{m_1}, \cancel{m_4} \\
P(m_3) = \cancel{w_5}, w_2, \cancel{w_6} & P(w_3) = \cancel{m_3}, \cancel{m_4} \\
P(m_4) = w_5, \cancel{w_1}, w_6, \cancel{w_3}, \cancel{w_2}, \cancel{w_4} & P(w_4) = \cancel{m_1}, \cancel{m_4}, m_5 \\
P(m_5) = w_4, \cancel{w_5}, \cancel{w_1}, \cancel{w_2}, \cancel{w_3}, \cancel{w_6} & P(w_5) = m_2, \cancel{m_1}, \cancel{m_5}, m_4, \cancel{m_3} \\
 & P(w_6) = m_4, m_1, \cancel{m_2}
\end{array}
$$

Entonces el perfil de preferencias reducido $P(\mu_M)$ es:

$$
\begin{array}{ll}
P(m_1) = w_6, w_1 & P(w_1) = m_1, m_2 \\
P(m_2) = w_1, w_5 & P(w_2) = m_3 \\
P(m_3) = w_2 & P(w_3) = \\
P(m_4) = w_5, w_6 & P(w_4) = m_5 \\
P(m_5) = w_4 & P(w_5) = m_2, m_4
\end{array}
$$

$$P(w_6) = m_4, m_1$$

Definición 9: Una lista ordenada de hombres $(m_1, m_2, \cdots, m_r)$ es un ***ciclo*** para un perfil de preferencias reducido $P(\mu)$ si:

- para $i = 1, \cdots, r-1$, la segunda mujer en $P(\mu)(m_i)$ es $\mu(m_{i+1})$, es decir la primera mujer en $P(\mu)(m_{i+1})$.
- la segunda mujer en $P(\mu)(m_r)$ es $\mu(m_1)$, es decir la primera mujer en $P(\mu)(m_1)$.

Lo anotamos $\sigma = (m_1, m_2, \cdots, m_r)$ y decimos que m_i genera σ, para $i = 1, \cdots, r-1$.

Roth y Sotomayor probaron que existe un ciclo para un perfil de lista reducida $P(\mu)$ si y sólo si existe algún hombre m_i que tiene más de una mujer aceptable en su perfil $P(\mu)(m_i)$.

Si observamos el ejemplo anterior el único ciclo que aparece en la lista de preferencias reducida es (m_1, m_2, m_4).

Matchings cuasi-estables

En lo que sigue nos referiremos a una clase de matchings que Blum, Roth y Rothblum presentan en su trabajo *Vacancy chains and equilibration in senior-level labor markets* [1], los matchings *cuasi-estables*. Los matchings cuasi-estables para los hombres (para las mujeres) surgen cuando un matching se desequilibra por el ingreso de un nuevo hombre al mercado o el retiro de una mujer del mismo (ingreso de una mujer o retiro de un hombre).

Definición 10: Un matching μ es llamado ***cuasi-estable para los hombres*** si es individualmente racional y si cumple que, si hay parejas bloqueadoras, éstas estén formadas por hombres solteros. Es decir, si (m, w) es una pareja bloqueadora de μ, entonces $\mu(m) = m$. Análogamente se puede definir matching cuasi-estable para las mujeres.

Trabajaremos solamente con los matchings cuasi-estables para los hombres, a los que nos referiremos simplemente como matchings cuasi-estables.

Denotamos por $Q(P)$ al conjunto de los matchings cuasi-estables. Notemos que $Q(P) \neq \emptyset$, ya que, por ejemplo, el matching en el que cada individuo está soltero es claramente cuasi-estable. Además, todo matching estable es también cuasi-estable, es decir, $S(P) \subset Q(P)$.

Propiedad 3: Sean $\mu, \mu' \in Q(P)$. Entonces $\mu \vee_W \mu' \in Q(P)$.

Demostración:

Sea $\mu^* = \mu \vee_W \mu'$. Veamos primero que μ^* es un matching. Por la definición de $\mu \vee_W \mu'$, es claro que para cada mujer w existe $\mu^*(w)$ y es único. Debemos ver que para cada $m \in M$ existe un único $\mu^*(m)$. Supongamos por el contrario que existe $m \in M$ tal que $\mu^*(w) = \mu^*(w') = m$ siendo $w \neq w'$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $w >_m w'$, que $\mu(m) = w$ y que $\mu'(m) = w'$. Entonces $m = \mu^*(w) >_w \mu'(w)$, y como $w >_m w' = \mu'(m)$, tenemos que (m, w) bloquea a μ'. Pero $\mu'(m) = w' \in W$, lo cual contradice la cuasi-estabilidad de μ'. Por lo tanto, a cada hombre m tal que $\mu^*(m) \neq m$, el matching μ^* le asigna una única mujer $w \in W$.

Veamos ahora que μ^* es cuasi-estable para los hombres. Como μ y μ' son ambos individualmente racionales, μ^* también resulta individualmente racional. Supongamos ahora que (m, w) bloquea a μ^* siendo $\mu^*(m) \in W$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\mu^*(m) = \mu'(m)$. Entonces $m >_w \mu^*(w) \geq_w \mu'(w)$ y $w >_m \mu^*(m) = \mu'(m)$, lo que implica que (m, w) bloquea a μ'. Pero $\mu'(m) = \mu^*(m) \in W$, lo cual nuevamente contradice la cuasi-estabilidad de μ'. Por lo tanto, μ^* es cuasi estable, como queríamos probar.

La propiedad anterior y el teorema 2 muestran que el operador $\vee_W$ conserva cuasi-estabilidad y estabilidad. Cabe destacar que si μ y μ' son matchings cuasi-estables, $\mu \wedge_W \mu'$, $\mu \vee_M \mu'$, y $\mu \wedge_M \mu'$ no son necesariamente matchings.

Propiedad 4: Sean $\mu \in S(P)$ y $\mu' \in Q(P)$. Definimos $M(\mu, \mu')$ como el conjunto de hombres m tales que $\mu(m) >_m \mu'(m)$ y además m no pertenece a ninguna pareja bloqueadora para μ', y definimos $W(\mu', \mu)$ como el conjunto de las mujeres w tales que $\mu'(w) >_w \mu(w)$. Entonces, μ y μ' son isomorfismos de $M(\mu, \mu')$ en $W(\mu', \mu)$.

Demostración:

1) Supongamos que $m \in M(\mu, \mu')$. Entonces $\mu(m) >_m \mu'(m) \geq_m m$ y así $\mu(m) \in W$. Sea $w = \mu(m)$. Entonces $w = \mu(m) >_m \mu'(m)$. Pero como $m \in M(\mu, \mu')$, y $\mu' \in Q(P)$, (m, w) no es una pareja bloqueadora de μ', y por lo tanto debe ser $\mu'(w) >_w m = \mu(w)$. Luego, $w \in W(\mu', \mu)$. Esto muestra que $\mu[M(\mu, \mu')] \subset W(\mu', \mu)$, y como todo matching es una correspondencia inyectiva, $|M(\mu, \mu')| \leq |W(\mu', \mu)|$.

2) Supongamos que $w \in W(\mu', \mu)$. Entonces $\mu'(w) >_w \mu(w) \geq_w w$ y obtenemos que entonces $\mu'(w) \in M$. Sea $m = \mu'(w)$. Así, $m = \mu'(w) >_w \mu(w)$. Por la estabilidad de μ se cumple que $\mu(m) >_m w = \mu'(m)$, ya que si fuera $w >_m \mu(m)$, el par (m, w) bloquearía a μ. Además, como $\mu'(m)$ es una mujer, la cuasi-estabilidad de μ' asegura que m no pertenece a ninguna pareja bloqueadora de μ'. Por lo tanto, $m \in M(\mu, \mu')$, lo cual muestra que $\mu'[W(\mu', \mu)] \subset M(\mu, \mu')$. Igual que antes, como todo matching es una correspondencia inyectiva, $|W(\mu', \mu)| \leq |M(\mu, \mu')|$.

De 1) y 2) concluimos que $|M(\mu, \mu')| = |W(\mu', \mu)|$. Entonces μ y μ' son correspondencias inyectivas entre conjuntos finitos de igual cantidad de elementos, y por lo tanto son biyectivas.

Propiedad 5: Sean $\mu \in S(P)$ y $\mu' \in Q(P)$. Entonces $\mu \vee_W \mu' \in S(P)$.

Demostración:

Sean $M(\mu, \mu')$ y $W(\mu', \mu)$ los conjuntos definidos en la propiedad anterior, y sea $\mu^* = \mu \vee_W \mu'$. Por la propiedad 3, μ^* es cuasi-estable, por lo tanto μ^* es individualmente racional. Para ver que μ^* es estable, consideramos tres casos:

1) $m \in M(\mu, \mu')$: Por la propiedad anterior, $w' = \mu'(m) \in W(\mu', \mu) \subset W$. Entonces $\mu'(w') >_{w'} \mu(w')$, y por lo tanto $\mu^*(w') = \mu'(w') = m$ y $\mu^*(m) = w' \in W$. La cuasi-estabilidad de μ^* implica que m no pertenece a ninguna pareja bloqueadora de μ^*.

2) $m \notin M(\mu, \mu')$ y $\mu(m) \in W$: Por la propiedad anterior, para $w = \mu(m)$, $m = \mu(w) \geq_w \mu'(w)$, ya que si no fuera así, $w \in W(\mu', \mu)$ y $m \in M(\mu, \mu')$. Entonces,

$\mu^*(w) = \mu(w) = m$ y $\mu^*(m) = w \in W$. La cuasi-estabilidad de μ^* implica que m no pertenece a ninguna pareja bloqueadora de μ^*.

3) $m \notin M(\mu, \mu')$ y $\mu(m) = m$: La estabilidad de μ implica que para toda mujer w que sea aceptable para m se cumple que $\mu(w) >_w m$, y por la definición de μ^* tenemos que $\mu^*(w) \geq_w \mu(w) >_w m$. En particular, ningún par que contenga a m bloquea a μ^*.

2. Algoritmo de aceptación diferida con matching de entrada arbitrario $\boldsymbol{\mu}$ $(\boldsymbol{DA(\mu)})$

En esta sección estudiaremos la versión del *Algoritmo de aceptación diferida con matching de entrada* presentada por Blum, Roth y Rothblum en su trabajo. La idea esencial es que dado un matching μ inestable en el que existe una pareja bloqueadora formada por un hombre soltero, el algoritmo produce un nuevo matching en el que satisface dicha pareja y repite este proceso hasta que no haya ninguna pareja bloqueadora formada por hombres solteros. Es importante destacar que las parejas bloqueadoras no son elegidas arbitrariamente, ya que si fuera así el algoritmo podría volverse cíclico.

Dado el mercado (M, W, P) y el matching μ, definimos para cada hombre $m \in M$ el conjunto $A_m(P) = \{w \in W \ / \ w >_m m\}$.

✓ Paso inicial:

Sea $\mu^0 = \mu$. Para cada $m \in M$, $A_m^0(P) = A_m(P) - \{\mu_0(m)\}$.

✓ Paso iterativo:

- Si para todo $m \in M$ se verifica que $\mu^{i-1}(m) \neq m$ o $A_m^{i-1}(P) = \emptyset$, el algoritmo termina y $DA_M(\mu) = \mu^{i-1}$.
- De otra forma, es decir, si existe $m \in M$ tal que $\mu^{i-1}(m) = m$ y $A_m^{i-1}(P) \neq \emptyset$, entonces sea $w = max_m A_m^{i-1}$.

Luego:

i. si $\mu^{i-1}(w) >_w m$, entonces $\mu_i = \mu_{i-1}$

ii. si $\mu^{i-1}(w) <_w m$, entonces:

- si $\mu^{i-1}(w) = w$,entonces $\mu^i(w) = m$,
  y para todo $v \in V - \{m, w\}$, $\mu^i(v) = \mu^{i-1}(v)$
- si $\mu^{i-1}(w) = m^*$, entonces $\mu^i(w) = m$ y $\mu^i(m^*) = m^*$ y $\mu^i(v) = \mu^{i-1}(v)$ para todo $v \in V - \{m, w, m^*\}$

- Sea $A_m^i = A_m^{i-1} - \{w\}$ y $A_{m^\blacksquare}^i = A_{m^\blacksquare}^{i-1}$ para todo $m^\blacksquare \neq m$.
- $i = i + 1$

Al matching resultante lo denotamos por $DA_M(\mu)$. Similarmente, si intercambiamos los roles de las mujeres y los hombres, el matching de salida será $DA_W(\mu)$. Es importante mencionar que estos matchings no siempre resultan estables.

Las definiciones y propiedades que presentamos a continuación nos permitirán obtener el resultado principal de esta sección, que afirma que si el matching de entrada del algoritmo es cuasi-estable, entonces el matching que obtenemos como salida resulta estable.

Definición 11: Sea μ' un matching. Decimos que un matching μ es ***μ'-aceptable*** si verifica que

i) $\mu \geq_W \mu'$

ii) Para todo $m \in M$ tal que $\mu(m) <_m m$ se cumple que $\mu(m) = \mu'(m)$.

Un matching μ es ***μ'-estable*** si verifica que:

i) μ'-aceptable

ii) Para cada pareja (m, w) que bloquee a μ se cumple que $\mu(m) = \mu'(m) \in W$.

Denotamos por $S(\mu', P)$ al conjunto de los matchings μ'-estables.

Propiedad 6: Sea μ' un matching. Entonces:

a) $DA_M(\mu') \geq_W \mu'$.

b) Si μ es un matching μ'-estable, entonces $\mu \geq_W DA_M(\mu')$.

Demostración:

a) Sea $\mu^0 = \mu',\ \mu^1,\ \mu^2, \ldots\ldots\ldots, \mu^k$ la sucesión de matchings obtenidos durante la aplicación del algoritmo de aceptación diferida con entrada μ'. Sean m_i y w_i el hombre y la mujer seleccionados por el algoritmo luego de que ha sido establecido el matching μ^{i-1} y tales que $w_i >_{m_i} m_i$ y $m_i >_{w_i} \mu^{i-1}(w_i)$. Entonces $\mu^i(m_i) = w_i$. Así, $\mu^i(w_i) = m_i >_{w_i} \mu^{i-1}(w_i)$ y $\mu^i(w) = \mu^{i-1}(w)$ para todo $w \neq w_i$. Luego, $\mu^i \geq_W \mu^{i-1}$. Iterando este proceso obtenemos que $DA_M(\mu') = \mu^k \geq_W \mu^{k-1} \geq_W \ldots\ldots\ldots \geq_W \mu^1 \geq_W \mu^0 = \mu'$.

b) Sea μ un matching μ'-estable. Sea $\mu^0 = \mu',\ \mu^1,\ \mu^2, \ldots\ldots\ldots, \mu^k$ la sucesión de matchings obtenidos durante la aplicación del algoritmo de aceptación diferida con entrada μ'. Demostraremos por inducción que $\mu \geq_W \mu^i$ para todo $i = 0,1, \ldots, k$:

- Sea $i = 0$: Entonces $\mu \geq_W \mu' = \mu^0$.

- Supongamos que $\mu \geq_W \mu^{i-1}$ y veamos que esto implica que $\mu \geq_W \mu^i$. Sean m_i y w_i el hombre y la mujer seleccionados por el algoritmo luego de que ha sido establecido el matching μ^{i-1} y tales que $\mu^{i-1}(m_i) = m_i$, $w_i >_{m_i} m_i$ y $m_i >_{w_i} \mu^{i-1}(w_i)$. Entonces $\mu^i(m_i) = w_i$, y así $\mu^i(w_i) = m_i >_{w_i} \mu^{i-1}(w_i)$. Además, para toda $w \neq w_i$, $\mu(w) \geq_W \mu^{i-1}(w) = \mu^i(w)$. Por lo tanto, basta probar que $\mu(w_i) \geq_{w_i} \mu^i(w_i)$.

Procederemos por el absurdo. Supongamos que $m_i = \mu^i(w_i) >_{w_i} \mu(w_i)$.

Como μ es μ'-estable, si (m_i, w_i) es una pareja bloqueadora de μ, entonces $\mu(m_i) = \mu'(m_i) \in W$. Sea $w = \mu(m_i)$. Si $w = \mu(m_i) = \mu'(m_i) \in W$ entonces como $\mu \geq_W \mu^{i-1}$ (por hipótesis inductiva) y $\mu^{i-1} \geq_W \mu'$ (por lo probado en a)) obtenemos que $\mu^{i-1}(w) = m_i$, lo que contradice que $\mu^{i-1}(m_i) = m_i$. Luego, no puede ocurrir que (m_i, w_i) sea una pareja bloqueadora de μ. De donde, como hemos supuesto que $m_i = \mu^i(w_i) >_{w_i} \mu(w_i)$, entonces debe ser $\mu(m_i) >_{m_i} w_i$ ya que si no (m_i, w_i) bloquearía a μ. Como (m_i, w_i)es una pareja bloqueadora de μ^{i-1}, entonces se cumple que $\mu(m_i) >_{m_i} w_i >_{m_i} \mu^{i-1}(m_i) = m_i$, y por lo tanto $\mu(m_i) \in W$. Sea $w' = \mu(m_i)$. Como w_i es la mujer más preferida por m_i del conjunto

$A^{i-1}_{m_i}(P)$, tenemos que (m_i, w') no es una pareja bloqueadora de μ^{i-1}. Entonces se debe cumplir que $\mu^{i-1}(w') >_{w'} m_i = \mu(w')$, lo que contradice el hecho de que $\mu \geq_W \mu^{i-1}$.

Otra propiedad necesaria que enunciamos sin demostración es:

Propiedad 7: $DA_M(\mu')$ es μ'-estable.

Las propiedades precedentes son importantes porque afirman que el matching que se obtiene como salida a través del algoritmo de aceptación diferida con matching de entrada μ' es el matching perteneciente a $S(\mu', P)$ menos preferido por las mujeres (es decir, el peor matching para las mujeres en $S(\mu', P)$). Esto resulta interesante ya que nos proporciona una primera descripción del matching $DA_M(\mu')$.

Dado un matching μ' individualmente racional, definimos el conjunto $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ por:

$$\underline{S}^{\mu'}_W(P) = \{\mu \epsilon S(P) : \mu \geq_W \mu'\}$$

Observamos que $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ es el conjunto de los matchings estables que todas las mujeres prefieren al menos tanto como a μ'.

Propiedad 8: Sea $\mu' \epsilon Q(P)$. Entonces $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ es una sublátice no vacía de $S(P)$.

Demostración:

Veamos primero que $\mu_W \geq_W \mu'$. Por la optimalidad de μ_W en $S(P)$ y como $\mu' \vee_W \mu_W \in S(P)$, tenemos que $\mu_W \geq_W \mu' \vee_W \mu_W$. Entonces $\mu_W \geq_W \mu'$.

Por lo tanto, $\mu_W \in \underline{S}^{\mu'}_W(P)$, y así $\underline{S}^{\mu'}_W(P) \neq \emptyset$.

Ahora debemos mostrar que todo subconjunto de dos elementos de $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ tiene cota superior y cota inferior en $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$. Si $\mu_1, \mu_2 \in \underline{S}^{\mu'}_W(P)$ entonces, por la definición de $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$, $\mu_1, \mu_2 \geq_W \mu'$ y $\mu_1 \wedge_W \mu_2$ y $\mu_1 \vee_W \mu_2$ son matchings estables. Además, de la definición de $\vee_W$ y de $\wedge_W$ obtenemos que $\mu_1 \vee_W \mu_2 \geq_W \mu'$ y que $\mu_1 \wedge_W \mu_2 \geq_W \mu'$. Por lo tanto $\mu_1 \vee_W \mu_2$ y $\mu_1 \wedge_W \mu_2$ pertenecen a $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$.

Hemos probado entonces que si μ' es un matching cuasi-estable para los hombres, $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ es una sublátice no vacía de $S(P)$, con los operadores $\vee_W$ y $\wedge_W$. Por lo tanto, $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ contiene al matching estable menos preferido por las mujeres en $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$ (esto es, el peor matching estable para las mujeres en $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$), al cual denotaremos por $\wedge_W \underline{S}^{\mu'}_W(P)$. Además, este matching coincide con el matching estable más preferido por los hombres en $\underline{S}^{\mu'}_W(P)$, al que denotaremos por $\vee_M \underline{S}^{\mu'}_W(P)$. Es decir, $\vee_M \underline{S}^{\mu'}_W(P) = \wedge_W \underline{S}^{\mu'}_W(P)$.

Teorema 3: Sea $\mu' \in Q(P)$. Entonces $DA_M(\mu') = \wedge_W \underline{S}^{\mu'}_W(P) = \vee_M \underline{S}^{\mu'}_W(P)$.

Es decir, $DA_M(\mu') \in S(P)$.

Demostración:

Sea $\mu' \epsilon Q(P)$.

Veamos primero que $S(\mu', P) = \{\mu \in S(P) : \mu \geq_W \mu'\}$. Es claro que $\{\mu \in S(P) : \mu \geq_W \mu'\} \subset S(\mu', P)$, ya que esto se cumple incluso si μ' no es cuasi-estable.

Falta mostrar que $S(\mu', P) \subset \{\mu \in S(P) : \mu \geq_W \mu'\}$.

Sea μ un matching μ'-estable. Queremos ver que μ es individualmente racional. Supongamos que no es así. Es decir, si $\mu(m) <_m m$, entonces por la μ'-aceptabilidad de μ, $\mu'(m) = \mu(m) <_m m$, y si $\mu(w) <_w w$, entonces, $\mu'(w) \leq_w \mu(w) <_w w$. De donde, μ' no sería individualmente racional, lo que contradice la cuasi-estabilidad de μ' .Luego, μ es individualmente racional.

Ahora queremos ver que μ no tiene parejas bloqueadoras.. Supongamos que sí. Sea (m, w) es una pareja bloqueadora de μ. Entonces $w >_m \mu(m)$ y $m >_w \mu(w)$. Por la μ'-estabilidad de μ, $w >_m \mu(m) = \mu'(m)$, y por la μ'-aceptabilidad de μ, $m >_w \mu(w) \geq_w \mu'(w)$, Entonces (m, w) sería una pareja bloqueadora de μ', lo que contradice la cuasi-estabilidad de μ'.

Luego, μ es estable, es decir, $\mu \in S(P)$.

Además, la μ'-estabilidad de μ asegura que $\mu \geq_w \mu'$.Entonces $\mu \in S(P)$ y $\mu \geq_w \mu'$, es decir, $\mu \in \{\mu \in S(P) : \mu \geq_W \mu'\}$.

De lo que acabamos de probar y de la definición de $\underline{S}_W^{\mu'}(P)$ concluimos que:

$$\underline{S}_W^{\mu'}(P) = \{\mu \,\epsilon\, S(P) : \mu \geq_W \mu'\} = S(\mu', P)$$

Por las propiedades 6 y 7 sabemos que el matching $DA_M(\mu')$ es el matching perteneciente a $S(\mu', P)$ menos preferido por las mujeres. Como $\underline{S}_W^{\mu'}(P) = S(\mu', P)$ y la máxima cota inferior en $\underline{S}_W^{\mu'}(P)$ es $\wedge_W \underline{S}_W^{\mu'}(P) = \vee_M \underline{S}_W^{\mu'}(P)$, obtenemos finalmente que:

$$DA_M(\mu') = \wedge_W \underline{S}_W^{\mu'}(P) = \vee_M \underline{S}_W^{\mu'}(P)$$

La siguiente propiedad nos proporciona una descripción explícita del matching $DA_M(\mu')$.

Propiedad 9: Sea $\mu' \epsilon Q(P)$. Entonces $DA_M(\mu') = \mu' \vee_W \mu_M(P)$.

Demostración:

Sea $\mu = \mu' \vee_W \mu_M(P)$. Como $\mu \geq_W \mu'$ y ya hemos visto que $\mu \in S(P)$, entonces $\mu \in \underline{S}_W^{\mu'}(P)$. Además, para $\mu'' \in \underline{S}_W^{\mu'}(P)$ se cumple (por definición de $\underline{S}_W^{\mu'}(P)$) que $\mu'' \in S(P)$ y $\mu'' \geq_W \mu'$. Como μ'' es estable, $\mu'' \geq_W \mu_M$. Por lo tanto, concluimos que $\mu'' \geq_W \mu' \vee_W \mu_M = \mu$. Entonces, μ es el peor matching para las mujeres (esto es, el matching menos preferido por las mujeres) en el conjunto $\underline{S}_W^{\mu'}(P)$, es decir, $\mu = \wedge_W \underline{S}_W^{\mu'}(P)$. Por el teorema anterior, esto implica que $DA_M(\mu') = \wedge_W \underline{S}_W^{\mu'}(P) = \mu = \mu' \vee_W \mu_M(P)$, como queríamos probar.

Propiedad 10: Sea $\mu' \epsilon Q(P)$ y $\upsilon \in M \cup W$. Entonces:

$$[DA_M(\mu')](\upsilon) = \begin{cases} \mu'(\upsilon) & si\ \mu'(\upsilon)\ es\ alcanzable\ para\ \upsilon \\ [\mu_M(P)](\upsilon) & si\ \mu'(\upsilon)\ no\ es\ alcanzable\ para\ \upsilon \end{cases}$$

Demostración:

Sea $\mu = DA_M(\mu')$.

1) Supongamos que ν es una mujer, es decir $\nu = w \in W$. Entonces:

- Si $\mu'(w)$ es alcanzable para w, como μ_M es el peor matching estable para las mujeres tenemos que $\mu'(w) \geq_w \mu_M(w)$, y entonces, como $DA_M(\mu') = \mu' \vee_W \mu_M(P)$, se verifica que $\mu(w) = [\mu' \vee_W \mu_M](w) = \mu'(w)$.

- Si $\mu'(w)$ no es alcanzable para w, como sabemos que $\mu' \vee_W \mu_M$ es estable, tenemos que $[\mu' \vee_W \mu_M](w)$ es alcanzable para w. Luego, si $\mu'(w)$ no es alcanzable para w, se debe cumplir que $[\mu' \vee_W \mu_M](w) = \mu_M(w) >_w \mu'(w)$.

2) Supongamos que ν es un hombre, es decir $\nu = m \in M$. Entonces:

- Si $\mu(m) = [\mu' \vee_W \mu_M](m) = m$, entonces, por la ya probada estabilidad de $\mu = DA_M(\mu')$, concluimos que m está soltero en todo matching estable, en particular $\mu_M(m) = m$, y por lo tanto $[\mu' \vee_W \mu_M](m) = m = \mu_M(m)$, siendo m la única salida alcanzable para m.

- Si $\mu(m) = [\mu' \vee_W \mu_M](m) \in W$ y $\mu'(m)$ es alcanzable para m entonces, como μ es estable y $\mu(m) \in W$, en todo matching estable se cumple que m no está soltero, y por ser $\mu'(m)$ alcanzable para m concluimos que $\mu'(m) = w \in W$. Entonces $m = \mu'(w)$ es alcanzable para w. Luego, por la parte 1) ya probada, tenemos que $\mu(w) = \mu'(w) = m$, y así $\mu(m) = w = \mu'(m)$, como queríamos probar.

- Si $\mu(m) = [\mu' \vee_W \mu_M](m) \in W$ y $\mu'(m)$ no es alcanzable para m entonces $w = \mu(m) \neq \mu'(m)$, ya que μ es estable. Entonces $m = \mu(w) \neq \mu'(w)$ y nuevamente por la parte 1) obtenemos que $m = \mu(w) = \mu_M(w)$.

3. Algoritmo de Entrada Secuencial

En el siguiente algoritmo, llamado *Algoritmo de entrada secuencial*, los individuos entran al mercado de a uno por vez. El procedimiento consiste en aplicar el algoritmo de aceptación diferida con un matching de entrada después del ingreso de cada individuo. El matching final resultante es un matching estable.

Definición 12: Un ***orden*** sobre el conjunto de individuos es una función biyectiva γ con dominio en el conjunto $V = M \cup W$ y codominio en $\{n \in N / \, n \leq |V|\}$. Al conjunto de todos los órdenes lo designamos con Φ. Si $v \in V$, entonces $\gamma(v)$ es el orden en que entra v al mercado. Consideraremos el k-ésimo mercado reducido $\big(M(k), W(k), P(k)\big)$, donde el conjunto $M(k)$ está dado por $M(k) = \{m \in M / \gamma(m) \leq k\}$ y de forma análoga se define $W(k)$.

El *Algoritmo de entrada secuencial* es descripto como sigue:

Sea $\gamma \in \Phi$.

- ✓ Paso inicial:

Sea $k = 1$ y $\big(M(1), W(1), P(1)\big)$ el mercado reducido donde ha ingresado un sólo individuo $v \in V$ tal que $\gamma(v) = 1$.

El matching definido en esta etapa es μ tal que $\mu(v) = v = \gamma^{-1}(1)$.

- ✓ Paso iterativo:

Desde $k = 2$ hasta $k = |V|$, sea $\big(M(k), W(k), P(k)\big)$ el k-ésimo mercado reducido. Para cada $v \in M(k) \cup W(k)$ definimos el matching $\bar{\mu}_{k-1}$ por:

$$\bar{\mu}_{k-1}(v) = \begin{cases} v & si \quad \gamma(v) = k \\ \mu_{k-1}(v) & si \quad \gamma(v) < k \end{cases}$$

Ahora definimos el matching μ_k de la siguiente forma:

- Si $v = \gamma^{-1}(k) \in M(k)$ entonces $\mu_k = DA_{M(k)}(\bar{\mu}_{k-1})$.
- Si $v = \gamma^{-1}(k) \in W(k)$ entonces $\mu_k = DA_{W(k)}(\bar{\mu}_{k-1})$.

Dado cualquier orden $\gamma \in \Phi$, llamamos $\boldsymbol{\mu_\gamma}$ al matching obtenido al aplicar el algoritmo.

Las dos proposiciones siguientes son una consecuencia de resultados obtenidos por Blum, Roth y Rothblum, que Millán enuncia en su trabajo:

Propiedad 11: Sea $\gamma \in \Phi$ Entonces μ_γ es estable.

Demostración: Veamos que el matching $\bar{\mu}_{k-1}$ definido en el algoritmo es cuasi-estable para todo $k \geq 2$. Es claro que cada matching $\bar{\mu}_{k-1}$ es individualmente racional, por lo que falta ver que si hay parejas bloqueadoras de $\bar{\mu}_{k-1}$, las mismas estén formadas por hombres solteros.

Procederemos por inducción.

Si $k = 2$, el mercado es $\big(M(2), W(2), P(2)\big)$ y el matching $\bar{\mu}_{2-1} = \bar{\mu}_1$ está dado por:

$$\bar{\mu}_1(v) = \begin{cases} v & si \quad \gamma(v) = 2 \\ \mu(v) & si \quad \gamma(v) = 1 \end{cases}$$

Por la definición de μ dada en el algoritmo, tenemos que para $v = \gamma^{-1}(1)$, $\mu(v) = v$. Es decir, en $\bar{\mu}_1$ los dos individuos están solteros. Por lo tanto, si forman una pareja bloqueadora, ésta estará formada por un hombre soltero. Luego, $\bar{\mu}_{2-1} = \bar{\mu}_1$ es cuasi-estable.

Supongamos ahora que $\bar{\mu}_{k-1}$ es cuasi-estable y veamos que esto implica que $\bar{\mu}_k$ es cuasi-estable, es decir, que el matching $\bar{\mu}_k$ definido en el paso $k+1$ del algoritmo es cuasi-estable. Como $\bar{\mu}_{k-1}$es cuasi estable, el teorema 3 asegura que $\mu_k = DA_{M(k)}(\bar{\mu}_{k-1})$ o $\mu_k = DA_{W(k)}(\bar{\mu}_{k-1})$ es estable. Sea $\big(M(k+1), W(k+1), P(k+1)\big)$ el mercado reducido en el paso $k+1$ del algoritmo. Entonces

$$\bar{\mu}_k(v) = \begin{cases} v & si \quad \gamma(v) = k+1 \\ \mu_{k-1}(v) & si \quad \gamma(v) < k+1 \end{cases}$$

Como μ_k es estable, se cumple que si $v \in M(k) \cup W(k)$, entonces v no forma pareja bloqueadora. Por lo tanto, si $\bar{\mu}_k$ tiene parejas bloqueadoras, el individuo $v = \gamma^{-1}(k+1)$ debe pertenecer a ellas. Como para $v = \gamma^{-1}(k+1)$ se cumple que $\bar{\mu}_k(v) = v$, obtenemos que $\bar{\mu}_k$ es cuasi-estable, como queríamos probar.

Finalmente, como $\bar{\mu}_{k-1}$ es cuasi-estable para todo $k \geq 2$, por el teorema 3, μ_k resulta estable para todo $k \geq 2$. Luego, el matching μ_γ que obtenemos como salida final del algoritmo es estable.

Propiedad 12: Sea $\gamma \in \Phi$ y sea v tal que $\gamma(v) = |V|$, entonces $\mu_\gamma(v)$ es la pareja más aceptable para v en cualquier matching estable.

Ejemplo 3: Sea el mercado (M, W, P) donde $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ y sea P dada por:

$$P(m_1) = w_1, w_2, w_3 \qquad P(w_1) = m_1, m_2, m_3$$
$$P(m_2) = w_1, w_2, w_3 \qquad P(w_2) = m_1, m_3, m_2$$
$$P(m_3) = w_1, w_3, w_2 \qquad P(w_3) = m_1, m_2, m_3$$

Los únicos matchings estables en este mercado son:

$\mu_M = \begin{cases} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{cases}$ y $\mu_W = \begin{cases} w_1 & w_3 & w_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{cases}$

Sea $\gamma \in \Phi, \gamma = w_1\, m_2\, m_3\, w_2\, w_3\, m_1$.

Apliquemos el algoritmo de entrada secuencial:

- ✓ Sea $k = 1$

$M(1) = \emptyset$
$W(1) = \{w_1\}$
$P(1)$
y $\mu_1 = \begin{cases} w_1 \\ w_1 \end{cases}$

- ✓ Sea $k = 2$

$M(2) = \{m_2\}$
$W(2) = \{w_1\}$
$P(2)$: $P(m_2) = w_1$ y $P(w_1) = m_2$

$\bar{\mu}_1 = \begin{cases} m_2 & w_1 \\ m_2 & w_1 \end{cases}$, como $\gamma^{-1}(2) = m_2 \in M(2)$ entonces

$$\mu_2 = DA_{M_2}(\bar{\mu}_1)$$

Luego, como $\bar{\mu}_1(m_2) = m_2$, $A^0_{m_2} = P(m_2) = \{w_1\} \neq \emptyset$ y $m_2 >_{w_1} \bar{\mu}_1(w_1) = w_1$, entonces: $\mu_2 = \begin{cases} m_2 \\ w_1 \end{cases}$.

- ✓ Sea $k = 3$

$M(3) = \{m_2, m_3\}$
$W(3) = \{w_1\}$
$P(3)$: $P(m_2) = w_1$ y $P(w_1) = m_2\ m_3$
$P(m_3) = w_1$

$$\bar{\mu}_2 = \begin{cases} m_2 & m_3 \\ w_1 & m_3 \end{cases}$$

Entonces $\mu_3 = DA_{M_3}(\bar{\mu}_2)$

- Sea $i = 1$. Como $\bar{\mu}_2(m_3) = m_3$ y $A^0_{m_3} = \{w_1\} \neq \emptyset$, pero $\mu_2(w_1) = m_2 >_{w_1} m_3$, entonces:

$$(\bar{\mu}_2)_1 = \begin{cases} m_2 & m_3 \\ w_1 & m_3 \end{cases}$$

y $A^1_{m_3} = A^0_{m_3} - \{w_1\} = \emptyset$.

- Sea $i = 2$. Como el único $m \in M(3)$ tal que $\bar{\mu}_2(m) = m$ es m_3 y $A^1_{m_3} = \emptyset$; entonces:

$$\mu_3 = DA_{M(3)}(\bar{\mu}_2) = (\bar{\mu}_2)_1 = \begin{cases} m_2 & m_3 \\ w_1 & m_3 \end{cases}$$

✓ Sea $k = 4$

$M(4) = \{m_2, m_3\}$
$W(4) = \{w_1, w_2\}$
$P(4)$: $P(m_2) = w_1\, w_2$ y $P(w_1) = m_2\;\, m_3$
$P(m_3) = w_1\, w_2$ $P(w_2) = m_3\;\, m_2$

$$\bar{\mu}_3 = \begin{cases} m_2 & m_3 & w_2 \\ w_1 & m_3 & w_2 \end{cases}$$

Entonces $\mu_4 = DA_{W(4)}(\bar{\mu}_3)$.

- Sea $i = 1$. Como $\bar{\mu}_3(w_2) = w_2$, $A^0_{w_2} = \{m_3, m_2\} \neq \emptyset$ y siendo $m_3 = max\, A^0_{w_2}$, se verifica que $w_2 >_{m_3} m_3 = \bar{\mu}_3(m_3)$; entonces:

$$(\bar{\mu}_3)_1 = \begin{cases} m_2 & m_3 \\ w_1 & w_2 \end{cases}$$

y como no existe $w \in W(4)$ tal que $(\bar{\mu}_3)_1(w) = w$ concluimos que:

$$\mu_4 = DA_{W(4)}(\bar{\mu}_3) = (\bar{\mu}_3)_1 = \begin{cases} m_2 & m_3 \\ w_1 & w_2 \end{cases}$$

✓ Sea $k = 5$

$M(5) = \{m_2, m_3\}$
$W(5) = \{w_1, w_2, w_3\}$
$P(5)$: $P(m_2) = w_1\, w_2\, w_3$ y $P(w_1) = m_2\;\, m_3$
$P(m_3) = w_1\, w_3\;\, w_2$ $P(w_2) = m_3\;\, m_2$
$P(w_3) = m_2\;\, m_3$

$$\bar{\mu}_4 = \begin{cases} m_2 & m_3 & w_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{cases}$$

Entonces $\mu_5 = DA_{W(5)}(\bar{\mu}_4)$.

- Sea $i = 1$. Como $\bar{\mu}_4(w_3) = w_3$, $A^0_{w_3} = \{m_2, m_3\} \neq \emptyset$ y siendo $m_2 = maxA^0_{w_3}$, se verifica que $\bar{\mu}_4(m_2) = w_1 >_{m_2} w_3$. Luego:
    - $(\bar{\mu}_4)_1 = \bar{\mu}_4$

y $A^1_{w_3} = A^0_{w_3} - \{m_2\} = \{m_3\} \neq \emptyset$.

- Sea $i = 2$. Como $(\bar{\mu}_4)_1(w_3) = w_3$ y $A^1_{w_3} \neq \emptyset$ y siendo $m_3 = maxA^0_{w_3}$, se verifica que $w_3 >_{m_3} w_2 = (\bar{\mu}_4)_1(m_3)$; entonces :

$$(\bar{\mu}_4)_2 = \begin{cases} m_2 & m_3 & w_2 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{cases}$$

y $A^2_{w_3} = \emptyset$.

- Sea $i = 3$. Como $(\bar{\mu}_4)_2(w_2) = w_2$ y $A^2_{w_2} = \{m_3, m_2\} \neq \emptyset$ y siendo $m_3 = maxA^2_{w_3}$, se verifica que $(\bar{\mu}_4)_2(m_3) = w_3 >_{m_3} w_2$; entonces:

$$(\bar{\mu}_4)_3 = (\bar{\mu}_4)_2$$

y $A^3_{w_2} = A^2_{w_2} - \{m_3\} = \{m_2\} \neq \emptyset$

- Sea $i = 4$. Como $(\bar{\mu}_4)_3(m_2) = w_1 >_{m_2} w_2$, entonces:

- $$(\bar{\mu}_4)_4 = (\bar{\mu}_4)_3 = (\bar{\mu}_4)_2 = \begin{cases} m_2 & m_3 & w_2 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{cases}$$

y por lo tanto $\mu_5 = DA_{W(5)}(\bar{\mu}_4) = (\bar{\mu}_4)_4 = \begin{cases} m_2 & m_3 & w_2 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{cases}$.

- ✓ Sea $k = 6$

$M(6) = \{m_2, m_3 , m_1\}$
$W(6) = \{w_1, w_2, w_3\}$
$P(6) = P$:

$P(m_1) = w_1, w_2, w_3$	$P(w_1) = m_1, m_2, m_3$
$P(m_2) = w_1, w_2, w_3$	$P(w_2) = m_1, m_3, m_2$
$P(m_3) = w_1, w_3, w_2$	$P(w_3) = m_1, m_2, m_3$

$$\bar{\mu}_5 = \begin{cases} m_2 & m_3 & w_2 & m_1 \\ w_1 & w_3 & w_2 & m_1 \end{cases}$$

Entonces $\mu_6 = DA_{M(6)}(\bar{\mu}_5)$.

- Sea $i = 1$. Como $\bar{\mu}_5(m_1) = m_1$ y $A^0_{m_1} = \{w_1, w_2, w_3\} \neq \emptyset$ y siendo $w_2 = maxA^0_{m_1}$, se verifica que $m_1 >_{w_1} \bar{\mu}_5(w_1) = m_2$; entonces:

- $$(\bar{\mu}_5)_1 = \begin{cases} m_1 & m_3 & w_2 & m_2 \\ w_1 & w_3 & w_2 & m_2 \end{cases}$$

y $A^1_{m_1} = \{w_2, w_3\}$

- Sea $i = 2$. Como $A^1_{m_2} = \{w_1, w_2, w_3\} \neq \emptyset$ y siendo $w_1 = maxA^1_{m_2}$, se verifica que $(\bar{\mu}_5)_1(w_1) = m_1 >_{w_1} m_2$; entonces

$$(\bar{\mu}_5)_2 = (\bar{\mu}_5)_1$$

Y $A^2_{m_2} = A^1_{m_2} - \{w_1\} = \{w_2, w_3\} \neq \emptyset$.

- Sea $i = 3$. Como $w_2 = maxA^2_{m_2}$ y se verifica que $m_2 >_{w_2} (\bar{\mu}_5)_2(w_2) = w_2$; entonces:

$$(\bar{\mu}_5)_3 = \begin{cases} m_1 & m_3 & m_2 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{cases}$$

Como no existe $m \in M(6)$ tal que $(\bar{\mu}_5)_3(m) = m$, el algoritmo se detiene.

Entonces hemos obtenido que :

$$\mu_\gamma = \mu_6 = DA_{M(6)}(\bar{\mu}_5) = (\bar{\mu}_5)_3 = \begin{cases} m_1 & m_3 & m_2 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{cases}$$

el cual es el matching óptimo μ_M.

Orden Óptimo

Millán define un orden al cual llama *orden óptimo* y demuestra que al aplicar el algoritmo de entrada secuencial con un orden óptimo entonces el matching obtenido es el matching óptimo μ_M.

Para un orden $\gamma \in \Phi$, se define:

$$s = min\{\, k \leq |V| :\ \text{existe un ciclo } \sigma \text{ en el matching } \mu_M \text{ que cumple } \sigma \subset M(k)\}.$$

Sea $\gamma \in \Phi$. γ es un ***orden óptimo*** para M si:

i. $\gamma\big(\mu_M(m)\big) < s$ para todo $m \in M(s)$

ii. $\gamma\big(\mu_M(m)\big) < \gamma(m)$ para todo $m \notin M(s)$.

Propiedad 13: Si γ es un orden óptimo para M, entonces $\mu_\gamma = \mu_M$.

El teorema probado por Millán nos proporciona una condición suficiente sobre el orden de entrada de los individuos para que la salida al aplicar el algoritmo sea el matching M-óptimo.

Ejemplo 4: Si analizamos el ejemplo que hicimos de aplicación del algoritmo con entrada secuencial (ejemplo 3) observamos que dicho orden no es óptimo.

Recordemos que $\gamma = w_1\, m_2\, m_3\, w_2\, w_3\ m_1$ y $\mu_M = \begin{cases} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{cases}$.

Si realizamos el perfil de listas reducido para μ_M podemos ver fácilmente que el único ciclo es $\sigma = (m_2, m_3)$, de donde, para este ordenamiento, $s = 3$. Por lo tanto el orden propuesto no cumple la primera condición de orden óptimo, pues hasta ese momento ninguna de las parejas que les asigna el matching óptimo a los hombres del ciclo ha entrado al mercado.

Ejemplo 5: Sea el mercado (M, W, P) donde $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ y sea P dada por:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_3, w_2 & P(w_1) = m_2, m_1, m_6 \\ P(m_2) = w_2, w_4, w_1 & P(w_2) = m_6, m_1, m_2 \\ P(m_3) = w_4, w_3, w_2 & P(w_3) = m_3, m_4, m_1, m_5 \\ P(m_4) = w_3, w_4 & P(w_4) = m_4, m_3, m_2 \\ P(m_5) = w_5, w_3 & P(w_5) = m_5 \end{array}$$

$P(m_6) = w_1, w_4, w_2$

En este caso los matching estables *M-óptimo* y *W-óptimo* son

$$\mu_M = \begin{cases} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ m_1 & w_1 & w_4 & w_3 & w_5 & w_2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_W = \begin{cases} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & m_6 \\ m_1 & w_1 & w_3 & w_4 & w_5 & w_2 \end{cases}$$

Sea $\gamma \in \Phi$, $\gamma = w_3\ m_4\ w_4\ m_3\ w_1\ m_6\ w_2\ m_2\ w_5\ m_5\ m_1$.

Si aplicamos el algoritmo de entrada secuencial con tal orden γ obtenemos el matching μ_M .

Realizamos el perfil de listas reducido y obtenemos que el único ciclo es (m_3, m_4) y por lo tanto, $s = 4$.

Si bien se cumple la primera condición de la definición de orden óptimo, pues $\mu_M(m_3) = w_4$ y $\mu_M(m_4) = w_3$ y ambas han entrado al mercado al momento 4, no se cumple la segunda condición ya que $w_2 = \mu_M(m_6)$ entra al mercado después que m_6 .

Ejemplo 6: Sea el mercado (M, W, P) donde $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ y sea P dada por:

$P(m_1) = w_2, w_6, w_1, w_3, w_4$ $\quad$ $P(w_1) = m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$
$P(m_2) = w_2, w_3, w_1, w_5$ $\quad$ $P(w_2) = m_3, m_2, m_1, m_4$
$P(m_3) = w_5, w_2, w_6$ $\quad$ $P(w_3) = m_3, m_4$
$P(m_4) = w_5, w_{1,} w_6, w_3, w_2, w_4$ $\quad$ $P(w_4) = m_1, m_4, m_5$
$P(m_5) = w_4, w_{5,} w_1, w_2, w_3, w_6$ $\quad$ $P(w_5) = m_{2,}, m_1, m_5, m_4, m_3$
$P(w_6) = m_4, m_1, m_2$

En este caso los matchings estables *M-óptimo* y *W-óptimo* son:

$$\mu_M = \begin{cases} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & w_3 \\ w_6 & w_1 & w_2 & w_5 & w_4 & w_3 \end{cases} \quad \text{y} \quad \mu_W = \begin{cases} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 & w_3 \\ w_1 & w_5 & w_2 & w_6 & w_4 & w_3 \end{cases}$$

Sea $\gamma \in \Phi$, $\gamma = w_1\ m_2\ m_4\ w_5\ m_1\ m_5\ w_4\ w_6\ w_3\ w_2\ m_3$.

Si aplicamos el algoritmo de entrada secuencial con este orden obtenemos también el matching óptimo μ_M .

En el ejemplo 2 realizamos el perfil de listas reducido para μ_W y luego vimos que el único ciclo es $(m_1, m_2 m_4)$, el cual se cierra con la 5° entrada, pero hasta ese momento no ha entrado, por ejemplo, $\mu_M(m_1) = w_6$, quien entra al mercado en el octavo lugar. Esto muestra que no se cumple la primera condición de orden óptimo. Observamos que tampoco se cumple la segunda condición pues $\mu_M(m_5) = w_4$ y m_5 ingresa en 6° lugar y w_4 después de él.

Los tres últimos ejemplos prueban que ninguna de las dos condiciones de la definición de orden óptimo es necesaria para que al aplicar el algoritmo de entrada secuencial se obtenga el matching M-óptimo.

Nos proponemos continuar y profundizar esta línea de investigación que analiza cómo influye el orden en el que entran los individuos al sistema en el matching que se obtiene al aplicar el algoritmo. Estamos interesadas en poder establecer condiciones necesarias y/o suficientes sobre los órdenes de entrada al aplicar el algoritmo de entrada secuencial para la obtención del matching M-óptimo. Particularmente, nos interesaría establecer condiciones que no involucren el conocimiento previo de cuál es el matching M-óptimo del mercado ni de sus ciclos.

Bibliografía

1. Blum, Y., Roth, A. and Rothblum, U. (1997), "Vacancy chains and equilibration in senior-level labor markets", *J. Econom. Theory*, **76**, 362-411.

2. Gale, D. and Shapley, L. (1962), "College admissions and the stability of marriage", Amer. Math. Monthly, **69**, 9-15.

3. Gusfield, D. and Irving, R.W. (1989), *The Stable Marriage Normal: Structure and Algorithms*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

4. Millán, B. (2013) "Sequencial Entry in one-to-one matching markets", *Revista de la Unión Matemática Argentina*, **54**, No.**2**, 1-14.

5. Roth, A. and Sotomayor, M. (1990), *Two-sided matching: A study in game theoretic modeling and analysis*. Vol. 18 of Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, Cambridge England.