

**CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRESIÓN DE LOS ENUNCIADOS EN LA
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA SUSTRACCIÓN DE TIPO
COMPARACIÓN**

**NATALIA VIÑA URUEÑA
OSCAR ANDRES GUZMAN BASTIDAS**

**Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

**Directora
DICLENY CASTRO CARVAJAL
Magister en Educación**

**UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD CIENCIA DE LA EDUCACIÓN
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
IBAGUÉ- TOLIMA
2018**



ACTA DE SUSTENTACIÓN PÚBLICA DE TRABAJOS DE GRADO

Fecha: Julio 3 de 2018
Hora: 16:28
Lugar: Facultad de Ciencias de la Educación

Título del Trabajo: Características de la comprensión de los enunciados de la resolución de problemas para la sustracción de tipo con comparación

Autor(es): Natalia Viro Urueña Código 051100552012
Oscar Andrés Guzmán B. Código 051100562012

Asesor: Profesora Dirleny Castro Carrvajal

		JURADO	
		Puntaje máximo	
		<u>Miguel E. Villaroya</u>	<u>Carlos A. Márquez</u>
1. Informe Final (Máximo 80 Puntos)			
1.1 Cumplimiento de los objetivos del proyecto	15	15	15
1.2. Revisión Bibliográfica y cumplimiento de las normas de presentación.	5	5	5
1.3. Metodología Usada de acuerdo al tipo de trabajo	15	12	12
1.4. Interpretación y discusión de resultados.	25	22	22
1.5. Calidad del trabajo y aporte al conocimiento.	20	17	17
2. Sustentación Pública (Máximo 20 Puntos)			
2.1. Preparación, organización y presentación del material	4	4	4
2.2. Claridad en la exposición e interpretación de los resultados y conclusiones	10	9	9
2.3. Dominio del tema y precisión de las propuestas	6	6	6
Puntaje Final:		90	90

Calificación (Puntaje/20): Letras-Número Cuatro cinco 4.5 Concepto: Meritorio

En constancia firman:

Nombre Jurado: Miguel E. Villaroya R. Nombre Jurado: Carlos A. Márquez N.

Firma: [Firma]

Firma: [Firma]

Nombre Asesor: Dirleny Castro C.

Director de Programa: Edwin Bernal Castillo

Firma: [Firma]

Firma: [Firma]

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
1. OBJETIVOS	12
1.1. GENERAL.....	12
1.2. ESPECIFICOS.....	12
2. MARCO TEORICO	13
2.1. COMPRESIÓN:	15
2.1.2. Definición de comprensión.	17
2.1.3. Niveles de comprensión lectora.....	18
2.2. COMPRESIÓN POR ESTADIOS DE APRENDIZAJE	19
2.2.1. Sensoriomotor	20
2.2.2. Preoperacional	20
2.2.3. Operaciones concretas.....	21
2.2.4. Operaciones formales.....	21
2.3. COMPRESIÓN MATEMÁTICA	22
2.3.1. Comprensión como dominio de contenidos.....	22
2.3.2. Comprensión como significación.	23
2.3.3. Comprensión como dominio conceptual.....	24
2.4. COMPRESIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	25
2.5. PENSAMIENTO NUMÉRICO	25
2.6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	26
2.6.1. Estándares de competencias en matemáticas.	27
2.6.2. Análisis de un problema aritmético verbal.	29
2.6.3. Enfoques en la resolución de problemas.....	32
2.6.4. Categorías semánticas de la sustracción.	35
2.6.5. Lenguaje simbólico.....	39
2.6.6. Estudio de dificultades.....	42

2.6.7.	Estrategia de solución.	48
2.7.	DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	56
3.	MARCO METODOLÓGICO	64
3.1.	HIPÓTESIS	64
3.2.	VARIABLES	64
3.3.	TIPO DE INVESTIGACIÓN	65
3.4.	POBLACIÓN	67
3.5.	MUESTRA INTENCIONAL	68
3.6.	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS	68
3.6.1.	Cuestionario #1..	70
3.6.2.	Cuestionario #2.	71
4.	ANÁLISIS DE RESULTADOS	72
4.1.	ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO #1	72
4.1.1.	Descripción Cualitativa de las Preguntas.	72
4.2.	DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DE LOS RESULTADOS	73
4.2.1.	Niveles de comprensión lectora.....	74
4.2.2.	Comprensión matemática.....	76
4.2.3.	Resolución de problemas (sentencias).....	80
4.2.4.	Estructura del enunciado	81
4.2.5.	Componentes semánticos	83
4.2.6.	Categoría semántica (comparar).	84
4.2.7.	Conocimientos previos.	85
4.2.8.	Estrategia de solución.	87
4.3.	ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO #2.....	88
5.	CONCLUSIONES	93
5.1.	CONCLUSIONES ESPECIFICAS.....	93
5.2.	CONCLUSIONES GENERALES.....	95

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... 98

ANEXOS 100

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Mapa Conceptual De Teóricos En La Resolución De Problemas Aritméticos	14
Figura 2. Fases De Resolución De Problemas Según El Modelo Descrito De Polya ...	51
Figura 3. Fases De Resolución De Problemas Según Labarrere Sarduy.....	51
Figura 4. Momentos Fundamentales De Una Resolución De Problemas Aritméticos Verbales.	54
Figura 5. Capacidad De Abstracción	55
Figura 6. Nivel De Variables.....	65
Figura 7. Categoría Niveles De Comprensión Lectora.	75
Figura 8. Dominio De Contenido Matemático En Los Estudiantes.	77
Figura 9. Comprensión Como Significación Matemática En Los Estudiantes.	78
Figura 10. Comprensión Conceptual Matemático En Los Estudiantes.....	79
Figura 11. Sentencias Canónicas Y No Canónicas.....	80
Figura 12. Estructura Del Enunciado.....	82
Figura 13. Categoría Componentes Semánticos.....	84
Figura 14. Categoría Semántica Enfocada En El “Más Que” Con La Operación De La Resta	85
Figura 15. Categoría Conocimientos Previos Evidenciados En La Resolución De Problemas	86
Figura 16. Estrategias De Solución En Problemas Aritméticos Verbales De Tipo Comparación.	88

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Tipos De Problemas Verbales De Categoría Semántica Cambio	35
Tabla 2. Estructura De La Categoría Semántica Cambio	36
Tabla 3. Tipos De Problemas Verbales De Categoría Semántica Combinar	36
Tabla 4. Estructura De Categoría Semántica Combinar	36
Tabla 5. Tipos De Problemas Verbales De Categoría Semántica Comparar	37
Tabla 6. Estructura De Categoría Semántica Comparar.....	38
Tabla 7. Tipos De Problemas Verbales De Categoría Semántica Igualar	38
Tabla 8. Estructura De Categoría Semántica Igualar	39
Tabla 9. Tipos De Propositiones Y Sentencias.	44
Tabla 10. Porcentajes De Éxito En La Resolución De Problemas.....	46
Tabla 11. Porcentajes De Éxito De 14 Tipos De Paev Aditivos En Dos Estudios Empíricos.....	47
Tabla 12. Método Ideal De Resolver Problemas	52
Tabla 13. Procedimiento Generalizado Para La Resolución De Problemas.	61
Tabla 14. Categorías De Niveles De Comprensión Lectora.	74
Tabla 15. El Dominio De Contenido Matemático En Los Estudiantes.	76
Tabla 16. Comprender Como Significación Matemática En Los Estudiantes	77
Tabla 17. Comprensión Como Domino Conceptual En Los Estudiantes.....	78
Tabla 18. Sentencias Canónicas Y No Canónicas.	80
Tabla 19. Estructura Del Enunciado.	82
Tabla 20. Categoría Componentes Semánticos	83
Tabla 21. Categoría Semántica Enfocada En El “Más Que” Con La Operación De La Resta	85
Tabla 22. Categoría Conocimientos Previos A Través De La Resolución De Problemas	86
Tabla 23. Estrategias De Solución En Problemas Aritméticos Verbales De Tipo Comparación.	87

RESUMEN

En este estudio se examina las características de la comprensión de los enunciados en la resolución de problemas para la sustracción de tipo comparación, en estudiantes de grado 4°, por medio de unos cuestionarios realizados a 38 estudiantes de una institución educativa oficial en la ciudad de Ibagué. Con esto se pretende organizar la información de manera descriptiva apoyado por autores célebres en la educación matemática como lo es Maza (1991), Luceño (1999), Puig y Cerdan (1988) entre otros; que brindan insumos para la estructuración de procesos fundamentales en la comprensión de enunciados. Las categorías formadas desde las respuestas de los niños, tales como comprensión lectora, comprensión matemática, formulación de métodos de solución y otras (están orientadas por el marco teórico), que son fundamentales para un entendimiento más claro y práctico en los niños, deben ser analizadas de manera detallada para poder generar una verdadera comprensión en los enunciados.

Con respecto a los problemas, arrojan resultados heterogéneos; considerando que, para la comprensión adecuada, los estudiantes deben encontrarse en los mayores niveles de cada categoría al cursar el grado 4°, es decir, se encuentra dificultades en cada una de las categorías establecidas en este documento.

Palabras clave: resolución de problemas, comprensión, categorías, estructura, comparar.

ABSTRACT

In this research the characteristics of the mathematical formulations understanding in problem-solving for comparison-type subtraction are examined in 38 fourth graders of an official educative Institution in Ibaguè through some questionnaires. This is intended to organize the information in a descriptive manner, supported by mathematics education famous authors as Maza (1991), Luceño(1999), Puig and Cerdan (1988), among others; who provide input for fundamental processes structuration in mathematical formulations understanding. The categories formed from students' answers, as reading comprehension, mathematics comprehension, formulation of settlement methods, and other (they are oriented by the theoretical framework) are essential for a clearer and more practical understanding among children and should be analyzed in detail to generate genuine comprehension of the mathematical formulations.

Regarding problems, they show mixed results; considering that, for a proper comprehension, students must be at the highest levels of each category when studying 4th grade, namely, they are found difficulties in each of the categories established in this document.

Keywords: problem-solving, comprehension, categories, structure, to compare.

INTRODUCCIÓN

El estudiante debe resolver problemas cuya estrategia de solución requiera la comprensión y las relaciones del enunciado con la operación de la resta como su inversa a la suma y se espera que esta capacidad se desarrolle durante los primeros años de la escuela primaria, (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Además, los niños deben desarrollar una comprensión adecuada para lograr las competencias matemáticas que requiere para la resolución de problemas de tipo comparación con la operación resta, y de este modo pueda plantear una solución con estructura aritmética y la solución final (conclusión mediante el análisis detallado del problema).

El punto de partida en el aprendizaje matemático del niño(a), en los grados de tercero a quinto, es la necesidad de implementar la resta como operación pertinente para la solución de una situación problémica de tipo comparación, sin embargo, por medio de una herramienta de recolección de información (cuestionario) y dialogando con la maestra del grado cuarto de una institución educativa pública, se reconoció una dificultad en la comprensión del enunciado a la hora de resolver este tipo de problemas.

La resolución de problemas ha sido una competencia matemática de suma importancia a tratar, donde se debe tener la capacidad de identificar y relacionar las partes del enunciado y la pregunta para poder plantear una solución. Según estudios anteriores, los niños del grado cuarto no tienen dificultades cuando la operación está implícita, sin embargo, cuando se trata de leer y usar el contexto del enunciado para comprenderlo y así abordar el problema, es más difícil; por esta razón se necesita identificar características de la comprensión de los enunciados que los niños poseen.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN:

¿Cuáles son las características de la comprensión de los estudiantes de grado 4° de una institución educativa acerca de los enunciados en la resolución de problemas para la

sustracción?

Este problema de investigación surge durante varios momentos de los autores, tales como, experiencias escolares, experiencias universitarias (asignaturas en matemáticas e investigaciones pedagógicas) y practicas docentes que muestran una dificultad a la hora de resolver un problema de matemáticas en cualquier nivel. De allí surge la inquietud sobre ¿dónde iniciar la investigación?, la cual llevo a la predicción sobre si los estudiantes leen comprensivamente o superficialmente un enunciado.

Como la enseñanza es un proceso formativo desde las primeras edades y al realizar un cuestionario general dentro uno de los cursos investigativos del programa licenciatura en matemáticas, se decidió investigar en estudiantes de grado cuarto sobre el proceso de lectura en problemas matemáticos, donde mostraron manejo aritmético, pero por alguna razón evidenciaban confusiones en operaciones a realizar, en dar una respuesta al problema, entre otras. Lo que indico una dificultad en comprensión de enunciados.

Gracias a orientaciones de docentes durante nuestra formación académica, delimitamos la atención a un tipo de problema específico, del cual se pueda hallar resultados significativos. En las primeras edades la resta es una operación algo difícil, por lo tanto, se designó esta operación; pero dentro de la misma estructuración del problema hay varios tipos de enunciados, por lo tanto, a consideración de los autores, se eligió la categoría comparar por tener un nivel más alto de lectura.

1. OBJETIVOS

1.1. GENERAL

Reconocer las características de la comprensión de los estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Ibagué acerca de los enunciados en la resolución de problemas de tipo comparación con la resta.

1.2. ESPECIFICOS

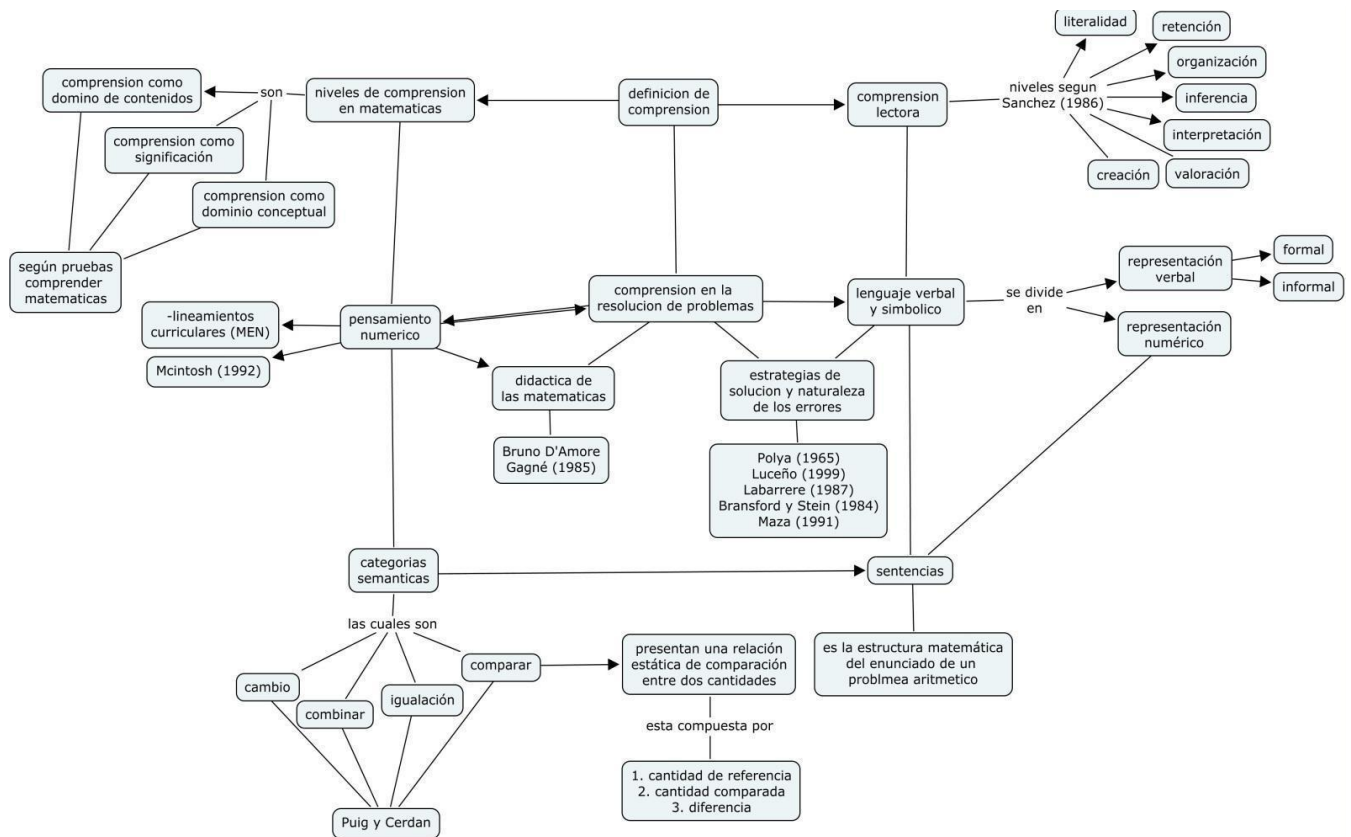
- Contrastar la estructura semántica de *comparación* en los problemas de Resta y lo que plantean los estudiantes de grado 4° determinando el uso que le dan al lenguaje verbal.
- Describir y Analizar las dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado 4° para resolver problemas de Comparación para la sustracción y que evidencian elementos de su comprensión.

2. MARCO TEORICO

A lo largo de este capítulo se abordará diferentes investigaciones realizadas por autores y / o trabajos de grado que se enfocan en la resolución de problemas aditivos y de sustracción, donde se estudiarán temas relacionados con la comprensión de los enunciados, tales como: definiciones, categorías semánticas, enfoque de problemas lingüísticos, de variables estructurales y de sentencias, comprensión lectora y matemática, representaciones verbales/numéricas y estructura del enunciado; los cuales darán un soporte conceptual para ayudar a diseñar unas características de comprensión en los estudiantes respecto al objeto matemático propuesto.

La siguiente red muestra las ideas y teorías del marco teórico y las conexiones que existen entre ellos con el propósito de visualizar el contenido temático de este trabajo de grado; seguidamente se explicará de manera breve, cada una de las partes que conforman el marco teórico.

Figura 1. Mapa conceptual de teóricos en la resolución de problemas aritméticos



Fuente: Los autores.

En el anterior mapa se muestra la relación de todos los elementos necesarios para resolver comprensivamente un problema, aunque el estudiante no conozca de la existencia de estos procesos, se ejecutan de manera intrínseca en el momento de resolver un problema. A través de la historia sobresalen una gran cantidad de autores que han realizado estudios sobre dicho problema y cada vez encuentran los mismos u otros factores para la resolución de un problema, por lo tanto, es fundamental identificar cada uno de estos para generar una comprensión en la lectura de enunciados.

Este capítulo lo conforman seis apartados, el primero es la sección denominada comprensión, donde se hará un acercamiento a este concepto, desde la lectura general y algunos tipos de comprensión lectora, ya que es necesario tener una base inicial de este concepto para continuar con el trabajo.

La segunda parte, presenta la comprensión matemática que especifica tres tipos de entendimiento matemático (comprensión como dominio de contenidos, comprensión como significado y comprensión como dominio conceptual), los cuales pueden ser aplicados dependiendo el propósito de la competencia que se quiere lograr.

En la tercera sección se presenta la comprensión en resolución de problemas, que muestra la aplicabilidad de la comprensión en los enunciados, observando la relación de la comprensión lectora, con la comprensión matemática.

En la cuarta parte, se revisa el pensamiento numérico desde lo que establece el Ministerio de Educación Nacional (MEN) como uno de los conocimientos básicos en matemáticas, a través de los estándares básicos de competencias matemáticas (2008) y los Lineamientos Curriculares (1998), debido a que la institución educativa donde se realizó el trabajo está regida por estos.

En la quinta sección, se tienen en cuenta algunas de las teorías existentes de la resolución de problemas, a través de investigaciones, libros e incluso estándares internacionales los cuales muestran las diferentes variantes que posee un problema aritmético verbal, en la comprensión de su enunciado, por ejemplo.

Finalmente, en el marco teórico, se tratará sobre la didáctica de las matemáticas, haciendo énfasis en la enseñanza y el aprendizaje, específicamente de la resolución de problemas aritméticos como tema y/o modelo didáctico para la enseñanza; sin embargo, se centró más en el aprendizaje, para poder interpretar las concepciones que se generan por parte de los estudiantes a la hora de intentar resolver un problema; luego se presenta el proceso de enseñanza que ayuda a los estudiantes a comprender y resolver de manera eficiente, un problema aritmético que involucra lenguaje verbal.

2.1. COMPRENSIÓN:

Indagar en el área de las matemáticas por la categoría comprensión, permite hacer una

descripción de las formas como se dice que se sabe y se aprende matemáticas, puesto que las personas generalmente llaman a “comprender matemáticas” como saber sumar, restar, multiplicar, dividir y aprender fórmulas para saber utilizarlas en ciertas situaciones; aunque es una parte de lo que en realidad significa en las matemáticas, sin lugar a dudas existe una definición más amplia de esta palabra, sobre todo en la resolución de problemas. Para aproximarnos a entender este concepto, se tendrá en cuenta *la comprensión*, desde el desarrollo de código lector.

2.1.1. Conceptos previos de comprensión: En el mundo educativo la lectura es el principio fundamental para la absorción y transmisión de conocimiento, por ende, a los estudiantes se les debe desarrollar esa habilidad, prácticamente como una necesidad, a través de su escolaridad. Por supuesto, el maestro también debe tener la capacidad necesaria a la hora de leer un texto para así poder involucrar en los estudiantes de manera satisfactoria en este hábito.

En la lectura “es importante mencionar el rol que juegan factores como el contexto, expectativas del lector, base de conocimientos, así como las variables del propio texto, su estructura, contenido, forma, etc.” (Romero, 2012, p.11). Sin embargo, de lo anterior, se tendrá un enfoque más preciso en el contenido y forma del texto.

- A parte de los factores que se nombraron en el párrafo anterior, la lectura tiene una clasificación realizada por Cassany (1998), Citado por Romero (2012), Que son:
 - Lectura extensiva que se lee por placer o interés
 - Lectura intensiva que se lee para obtener una información de un texto
 - Lectura rápida y superficial que se lee para obtener información de un texto
 - Lectura involuntaria que se lee por las calles en forma involuntaria. (p. 12).

Contextualizando estas clasificaciones con el objetivo del trabajo, aclara los dos tipos de lectura que se harán énfasis, los cuales son lectura rápida y superficial y lectura intensiva,

la primera es la realidad que se evidencia en los niños en la lectura, y la segunda es el tipo de lectura que, se espera, alcancen los estudiantes para obtener una comprensión adecuada de los textos.

2.1.2. Definición de comprensión. Cuando se habla de leer, es inevitable no hablar de leer comprensivamente, entender la lectura, comprender un párrafo, entre otros, pero ¿qué es en realidad leer comprensivamente?, Según el diccionario de la lengua española, (2014) la definición de comprensión es: “facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas. Conjunto de propiedades que permiten definir un concepto, por oposición a extensión”. Es decir, el propósito es entender y clasifica partes de una lectura para apropiarlas como conceptos.

Respecto a la anterior definición, ahora se puede plantear el concepto de comprensión lectora, debido a la relación entre la lectura y sus diferentes tipos de interpretación que pueden generar de ésta; para ello Pérez (2005) plantea una definición dividida en tres partes:

- El lector utiliza una serie de estrategias que le permiten construir un modelo de significado para el texto a partir tanto de las claves que le proporciona el texto, como de la información que sobre dichas claves almacena en su propia mente.
- El lector construye dicho modelo utilizando sus esquemas y estructuras de conocimiento, y los distintos sistemas de claves que le proporciona el autor como, por ejemplo, claves grafofonéticas, sintácticas y semánticas, información social...
- Estas estrategias deben, en gran parte, inferirse, ya que el texto no puede ser nunca totalmente explícito e, incluso, el significado exacto de las palabras debe inferirse también a partir del contexto (p.122).

La comprensión lectora, según Solé (1992) es:

El proceso de elaborar el significado por la vía de aprender las ideas relevantes de un texto y relacionarlas con las ideas que ya se tienen, sin importar la longitud o brevedad del párrafo, el proceso se da siempre de la misma forma. (citado por Romero 2012, p.15).

El autor refiere a dar sentido a lo que se lee, al vincularlo con los presaberes y se puede inferir que la comprensión solo se logra cuando existe una correlación entre ideas nuevas y conocidas.

Básicamente, la comprensión lectora trata de la relación entre definiciones o temas nuevos con pre-saberes que permiten crear conceptos articulados al contexto del lector y de esta forma pueda entender, analizar, interpretar e incluso clasificar la lectura.

2.1.3. Niveles de comprensión lectora. Cuando se lee un texto, siempre está implícita la parte de comprenderlo (como se mencionó al inicio del 3.1.2.), y para esto se puede considerar un proceso ordenado tal como lo propone Sánchez (1986), (citado por Romero, 2012), con los siguientes niveles: literalidad, retención, organización, inferencia, interpretación, valoración y creación.

Literalidad: recoge formas y contenidos explícitos.

Retención: captación y aprehensión de los contenidos del texto.

Organización: ordena vinculaciones y elementos que se dan en el texto.

Inferencia: descubre aspectos implícitos en el texto.

Interpretación: reordena en un nuevo enfoque los contenidos del texto.

Valoración: formula juicios basándose en la experiencia y valores.

Creación: se expresa con ideas propias, integrando las ideas que ofrece el texto a situaciones parecidas a la realidad (p. 19).

Es importante destacar que, en la educación, así como en las matemáticas, la manera más conveniente de aprender e interiorizar algún conocimiento, es diseñando una serie de niveles que desarrollen competencias necesarias para el entendimiento de algo en

particular y además que este proceso sea una acción en “cadena”, es decir, para ver un nivel superior es necesario haber visto el nivel anterior necesario; y de este modo tratar el tema de la comprensión lectora como una formación de procesos cognitivos y en consecuencia generar construcción de conocimiento.

Para desarrollar un nivel de comprensión alta en el momento de leer un texto, es necesario saber la definición de oración y de proposición, pues generalmente son términos que suelen ser confundidos. Según el diccionario de lengua española postula la definición de oración como: “Estructura gramatical formada por la unión de un sujeto y un predicado.” (RAE, 2014).

Por otra parte, la definición de proposición, que nos interesa para este documento, la postula Bello citado por Mantecón (1982) donde dice que “la proposición es la palabra con que se designa una unidad de menor intensidad semántica y extensión sintáctica que la de oración.”, por lo que se puede asegurar que una oración es la conformación de una o varias proposiciones.

2.2. COMPRENSIÓN POR ESTADIOS DE APRENDIZAJE

Cuando se estudia el pensamiento del niño frente a su aprendizaje en cualquier área del conocimiento, es fundamental tener un proceso histórico frente a los estudios realizados por Piaget, pues si se quiere encontrar características de la comprensión en la lectura de enunciados, es necesario conocer el comportamiento mental según las edades que propone dicho autor y de este manera, comprender que los diferentes procesos de aprendizaje van asociados a la edad y en consecuencia, se organizan los ejes conceptuales, de acuerdo a un nivel de complejidad para cada año de escolaridad.

“Piaget creía que el conocimiento evoluciona a lo largo de una serie de etapas” (Tomas y Almenara, 2008, pág. 3), de esto podemos deducir que, dependiendo de la edad del estudiante, su comprensión puede ser influenciada por diferentes factores en cada momento. Las etapas propuestas por Piaget son:

2.2.1. Sensoriomotor

En el estadio sensoriomotor (de 0 a 2 años), el bebé se relaciona con el mundo a través de los sentidos y de la acción, pero, al término de esta etapa será capaz de representar la realidad mentalmente. El periodo sensoriomotor da lugar a algunos hitos en el desarrollo intelectual. Los niños desarrollan la conducta intencional o dirigida hacia metas (golpear un sonajero para que suene). También, los niños llegarán a comprender que los objetos tienen una existencia permanente que es independiente de su percepción (permanencia de objeto). Además, existen unas actividades que en este periodo experimentarán un notable desarrollo: la imitación y el juego (Tomas y Almenara, 2008, p. 4).

La comprensión para esta etapa se basa en que el bebé realice acciones que le generen una respuesta y de esta forma intuya el conocimiento mediante repeticiones durante su proceso de imitación y juego.

2.2.2. Preoperacional

La capacidad de pensar en objetos, hechos o personas ausentes marca el comienzo de la etapa preoperacional. Entre los 2 y los 7 años, el niño demuestra una mayor habilidad para emplear símbolos, gestos, palabras, números e imágenes con los cuales representa las cosas reales del entorno. Ahora puede pensar y comportarse en formas que antes no eran posibles. Puede servirse de las palabras para comunicarse, utilizar números para contar objetos, participar en juegos de fingimiento y expresar sus ideas sobre el mundo por medio de dibujos. (Tomas y Almenara, 2008, p. 8).

La comprensión para el niño se expande exponencialmente al pasar a la siguiente etapa, debido al uso de la expresión verbal y gráfica para manifestar su percepción del mundo

al cual es participe; donde la manipulación y observación son las que influyen para lograr su entendimiento.

2.2.3. Operaciones concretas

Durante los años de primaria (7 a 11 años), el niño comienza a utilizar las operaciones mentales y la lógica para reflexionar sobre los hechos y los objetos de su ambiente. Por ejemplo, si le pedimos ordenar cinco palos por su tamaño, los comparará mentalmente y luego extraerá conclusiones lógicas sobre el orden correcto sin efectuar físicamente las acciones correspondientes. Esta capacidad de aplicar la lógica y las operaciones mentales les permite abordar los problemas en forma más sistemática que un niño que se encuentra en la etapa preoperacional (Tomas y Almenara, 2008, p. 11).

Para estas edades, la comprensión comienza a usar completamente la razón de hechos y al mismo tiempo diseñar estructuras mentales en relación de pre-saberes con conocimientos nuevos.

2.2.4. Operaciones formales

Una vez lograda la capacidad de resolver problemas como los de seriación, clasificación y conservación, el niño de 11 a 12 años comienza a formar un sistema coherente de lógica formal. Al finalizar el periodo de las operaciones concretas, ya cuenta con las herramientas cognoscitivas que le permiten solucionar muchos tipos de problemas de lógica, comprender las relaciones conceptuales entre operaciones matemáticas (por ejemplo, $15 + 8 = 10 + 13$), ordenar y clasificar los conjuntos de los conocimientos. Durante la adolescencia las operaciones mentales que surgieron en las etapas previas se organizan en un sistema más complejo de lógica y de ideas abstractas (Tomas y Almenara, 2008, p.16).

En esta última etapa los niños deben de tener un pensamiento lógico superior capaz de comprender relaciones y estructuras que sean semejantes frente a problemas con operaciones concretas.

2.3. COMPRENSIÓN MATEMÁTICA

Como se ha planteado anteriormente, la comprensión está ligada al razonamiento y/o traducción de textos relacionando conceptos nuevos con pre saberes; si se refiere a la comprensión matemática, es acertado pensar que su definición no es muy diferente. Sin embargo, para el ámbito de la educación matemática, se puede distinguir tres tipos de comprensión, donde el sujeto puede tomar vía hacia cualquiera de estos, el que sea más factible, para lograr un entendimiento matemático.

Los tres tipos de comprensión en las matemáticas, que se mencionan a continuación, planteadas por la secretaria de educación, adquieren los nombres dependiendo de su perspectiva, en el sentido como se enseña; el primero es la comprensión como dominio de contenidos que representa la parte disciplinar, segundo es la comprensión como significación refiriéndose a la parte semiótica y, por último, la comprensión como dominio conceptual haciendo énfasis en lo cognitivo (SED, 2005).

2.3.1. Comprensión como dominio de contenidos

En la perspectiva tradicional, comprender matemáticas significa “saber contenidos matemáticos”, en tanto el énfasis se hace en el uso de información, producto de la repetición y la automatización. Se le dará más relevancia al qué, qué al cómo, en el contenido más que en el proceso. comprender matemáticas significa poseer información, por ejemplo, saber utilizar algoritmos, seguir reglas aun sean descontextualizados. Se aprende, pero no se asimila. Lo importante es mostrar que se tiene un saber matemático y no una habilidad obtenida a través de la matemática y transferible a otros espacios de razonamiento sobre la realidad (SED, 2005,

p.7).

Este tipo de comprensión se mantiene en la enseñanza actual, pese que al Ministerio de Educación, a través de los estándares de matemáticas, sugieren que se enseñen por competencias y evalúa por competencias, se insiste en enseñar contenidos.

Para algunos, esta forma de comprensión es la más usual en matemáticas, es decir, la manera más fácil de enseñarla, sin saber si hubo aprehendizaje, es repetir hasta memorizar contenidos; para otros las matemáticas se convierten en una obligación, que, aunque no le encuentran sentido o relación con su contexto, se impone como algo fundamental para la vida.

2.3.2. Comprensión como significación. A continuación, seguimos presentando algunas ideas del documento de las pruebas comprender de matemáticas de la serie de cuadernos de evaluación, de la Secretaría de Educación del Distrito (SED), que se publicaron con el propósito de evaluar las prácticas evaluativas en su momento; este documento presenta de manera sintetizada tres tipos de comprensión en matemáticas y son muy oportunas para este trabajo. Sobre la comprensión como significación, cita el siguiente texto:

Sierpinska (1990), (citada por Godino, 2004), considera como básico para la didáctica de la matemática la idea de significado, que a su vez también la relaciona con la actividad de comprensión:

"Comprender el concepto será· entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será· probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (SED, 2005, p. 7).

“Dentro del marco, de carácter semiótico, comprender significa la conexión entre redes internas (representaciones) y externas (lenguaje). La idea de representación mental se vincula con la de representación semiótica; no hay representaciones mentales al margen del lenguaje...”, “significados personales que están estrechamente vinculados con el sentido, un para qué, una intencionalidad, de la actuación matemática en el contexto escolar” (SED, 2005, p. 7).

A diferencia de la perspectiva anterior, este tipo de comprensión pretende dar sentido a las matemáticas en la realidad, generar procesos de pensamiento y no para memorizar definiciones; con el objetivo de mejorar el razonamiento y la resolución de problemas mediante procesos relacionados directamente con el contexto.

2.3.3. Comprensión como dominio conceptual

La comprensión como dominios conceptuales se entiende como la actividad cognitiva de transformación o ampliación de un campo conceptual. En la psicología cognitiva, Piaget utiliza el concepto de esquema, caracterizándolo como una totalidad dinámica organizadora de la acción, que posee plasticidad y es capaz de cambiar en función de nuevas situaciones. En este enfoque, la formación de conceptos matemáticos se refleja en la manera como se modifican los esquemas cognitivos. Siguiendo a Vergnaud (1995) - orientado por Piaget, y complementando su enfoque cognitivo con otras variables de carácter situacional y cultural-, la comprensión matemática implica el concurso de los tres componentes: a) situaciones en que se exige el concurso del concepto, b) invariantes operatorias que hacen relación a las funciones cognitivas, tales como inferencias, apropiaciones de acciones organizadas, generalizaciones, y c) significantes con las que la apropiación del concepto se relaciona con un conjunto variado de representaciones simbólicas que sirven como representación y como instrumentos de comunicación y apoyo al pensamiento (SED, 2005, p. 7).

En síntesis, el dominio conceptual en matemáticas da importancia a la vinculación entre conceptos, partiendo de unos conceptos ya establecidos y a partir de estos, introducir otro nuevo que sean dependientes, directa o indirectamente, con el objetivo de crear un esquema mental el cual facilite la apropiación de los conocimientos matemáticos.

2.4. COMPRENSIÓN EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La interpretación de “comprensión” se torna más precisa al enfocarlo en un problema aritmético verbal. Puig y Cerdán (1988), señala en su libro que “la comprensión son las transformaciones que el que lee realiza sobre la base del texto usando los esquemas o modelos conceptuales que le parecen pertinentes con el fin de dotarlo de sentido” (p. 26), es decir, que el objetivo de la comprensión es asumir una aclaración del enunciado, por medio de conceptos previos, y poder reestructurar el problema de tal forma que facilite la elaboración de un plan de solución y poder dar respuesta a la pregunta de este.

Por otro lado, D`Amore (1997) postula que un proceso en la comprensión consiste en la invención de problemas y su reestructuración, con el objetivo de generar preguntas respecto a los enunciados, y así construir un análisis significativo de un problema; en palabras de (D`Amore, 1997) “plantear un problema es solo un modo de comprenderlo mejor, de analizarlo mejor” (p. 25).

Los estudiantes, generalmente, poseen un bloqueo cognitivo dirigido hacia cambios de esquemas mentales, dicho de otra forma, un cambio estructural a un concepto que ya se conoce, genera un pensamiento de negación hacia este, de tal manera que cuando se quiere escribir un enunciado en otras palabras, pero con el mismo sentido u objetivo, se llega a pensar que se trata de un problema completamente diferente (sin relación alguna).

2.5. PENSAMIENTO NUMÉRICO

Al referirnos a las situaciones de resoluciones de problemas para la escolaridad, es una

competencia que se debe proponer para todos los pensamientos matemáticos sugeridos en los lineamientos curriculares del (MEN, 1998), que son: pensamiento numérico y sistema numérico, pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento métrico y sistemas de medidas, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, y pensamiento aleatorio y sistemas de datos (p. 25).

Aunque la resolución de problemas está vinculada en todos los pensamientos mencionados anteriormente (problemas algebraicos, problemas de funciones, problemas de medición, etcétera), debido al enfoque de este documento, se profundizará sobre el pensamiento numérico puesto que el tema central es la resolución de problemas con la resta, a partir de la comprensión de sus enunciados.

Según los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) “...vamos a hablar del pensamiento numérico como un concepto más general que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, etcétera” (p. 26) haciendo referencia a los conceptos aritméticos que el estudiante debe desarrollar para enfrentar diversas situaciones que requieran un análisis matemático en diferentes contextos.

Según McIntosh (1992), “el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones” (citado por MEN, 1998, p. 26).

Según el concepto anterior, señala que el niño debe estar capacitado no solo para saber realizar diferentes operaciones aritméticas, sino que también pueda relacionarlos con el contexto y así poder tener una comprensión formal e informal de las matemáticas, es decir, entender el mundo abstracto conjunto al mundo natural.

2.6. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Este apartado, está estructurado con relación a la resolución de problemas mostrando su clasificación, estructura, representaciones, estatutos que rigen el sistema educativo para los problemas y los comportamientos que pueden generar en los estudiantes a la hora de comprender y resolver un problema.

Debido a la naturaleza del trabajo es importante hacer un particular énfasis en esta sección, para obtener un mejor análisis de la problemática, ya que es fundamental conocer las investigaciones, teorías y leyes que enfocan la comprensión de los enunciados en la resolución de problemas.

2.6.1. Estándares de competencias en matemáticas. La educación matemática está regida por unos estándares de los cuales el estudiante debe alcanzar en un tiempo determinado de escolaridad, con el fin de construir bases sólidas en el área de matemáticas a la hora de enfrentarse a los conceptos y a su relación con el contexto. Por esto la resolución de problemas debe formarse a una temprana edad; el MEN en Colombia y los estándares internacionales NCTM de educación matemática, plantean los siguientes estándares para la resolución de problemas en grados iniciales, a continuación, son:

Estándares del MEN Colombia (2008):

Del ministerio de educación nacional, se tuvieron en cuenta los siguientes estándares del pensamiento numérico para grado 4°, teniendo en cuenta su relación con la resolución de problemas con la resta de tipo comparación:

- a. Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
- b. Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición, transformación, comparación e igualación. (p.82)

Los estándares internacionales NCTM de educación matemática Thales de España (2000):

- a. Aplicar y adaptar una variedad de estrategias para resolver problemas.
- b. Resolver problemas que surjan de las matemáticas y de otros contextos.
- c. Controlar el proceso de resolución de problemas matemáticos y reflexionar sobre él. (p.186).

En lo que respecta al primer estándar del MEN y NCTM, se puede reconocer la necesidad de desarrollar unas competencias en resolución de problemas para los estudiantes, con el fin de dar herramientas conceptuales para poder enfrentar un problema de distintas formas con sus saberes previos en matemáticas.

Lo que indica el segundo estándar del MEN y NCTM, es la adaptación del estudiante al comenzar a resolver un problema verbal con cualquier tipo de contextos y estructurado de cualquier forma, es decir, tener la capacidad de relacionar la información obtenida en el enunciado y comprenderlo de tal forma que pueda relacionarlo con conceptos matemáticos y llegar a una solución que cumpla la necesidad del problema.

Ahora bien, una vez alcanzado los anteriores estándares el estudiante debe desarrollar un control total en los procesos de comprensión lectora y matemática, hasta el punto de que pueda adaptar de manera biyectiva conocimientos matemáticos en contextos cotidianos.

En Colombia, el sistema de evaluación está enfocado por competencias , debido a esto existen múltiples pruebas que atañen a este proceso, como lo son las pruebas PISA la cual se es aplicada en grado superiores (estudiantes de 15 a 16 años), por lo tanto es pertinente conocer a manera general los niveles que un estudiante debe de alcanzar en matemáticas durante el proceso de su escolaridad, entre ellas el tema de resolución de problemas que se evalúa por los estándares desde tercero de primaria hasta grado once

de la educación media.

Es pertinente conocer el nivel que debe alcanzar un estudiante, para así poder construir bases sólidas en lo que se refiere a la comprensión para la resolución de problemas y de esta forma cumplir con las competencias propuestas, partiendo desde primaria para lograr el nivel 6 propuesto por PISA (pruebas pisa 2012. Descripción de la escala de competencias matemáticas 2003-2009).

2.6.2. Análisis de un problema aritmético verbal. Para tener un amplio análisis de un enunciado hay que profundizar en tres aspectos que influyen en la comprensión de un problema, de tal modo que sean claros los focos de estudio en los problemas. Según Neshier (1982), citado por Puig y Cerdán (1988) propone los siguientes aspectos: la componente sintáctica, la estructura lógica y la componente semántica.

La componente sintáctica consta del acercamiento gramatical en el cual está escrito un problema de esta forma influyen características como el tamaño del problema, la complejidad gramatical, la presentación de los datos, la situación de la pregunta en el texto del problema y la secuencia o el orden de presentación de los datos. (Puig y Cerdán,1988).

Por otro lado, los enunciados no solo son un conjunto de palabras que relacionan datos o información para usarlos y encontrar una respuesta, sino también deben tener un orden lógico y coherente el cual permite una conexión entre definiciones matemáticas con el contexto del que se hable; es decir a la hora de crear o leer un problema aritmético es necesario que posea una estructura lógica con el objetivo de no crear conflictos epistemológicos.

Puig y Cerdán (1988) describen de manera precisa que los enunciados de los problemas tienen una estructura general definida en dos partes, las cuales son: la parte informativa y la pregunta del problema (p.92). Sin embargo, cuando se habla de la parte informativa esta tiene usualmente dos divisiones en los problemas postulados por Puig y Cerdán

(1988):

Un enunciado está estructurado en tres proposiciones, dos primeras que señalan la información y una tercera que indica la pregunta del problema que pueden ser descritas de la siguiente forma:

Hay n x que son A $(\exists_n x)Ax$

Hay m x que son B $(\exists_m x)Bx$

¿Cuántos x hay que son P ? $(\exists_? x)Px$

Los predicados A y B determinan clases disjuntas y el predicado P corresponde a la clase que es la unión de las clases anteriores. (p.96)

Ahora bien, siguiendo este orden lógico que proponen los autores, (pp. 96-97) se cumplen unas condiciones tanto para la suma como para la resta:

Suma:

No hay x que sean a la vez A y B $-(\exists x)(Ax \wedge Bx)$

Cualquier x que sea A es P $(\forall x)(Ax \rightarrow Px)$

Cualquier x que sea B es P $(\forall x)(Bx \rightarrow Px)$

Cualquier x que sea P es A o B $(\forall x)(Px \rightarrow (Ax \vee Bx))$

Resta:

No hay x que sean a la vez B y P $-(\exists x)(Bx \wedge Px)$

Cualquier x que sea P es A $(\forall x)(Px \rightarrow Ax)$

Cualquier x que sea B es A $(\forall x)(Bx \rightarrow Ax)$

Cualquier x que sea A es P o B $(\forall x)(Ax \rightarrow (Px \vee Bx))$

Las condiciones mencionadas, tienen el propósito de reconocer los tipos de estructura que poseen los enunciados de los problemas, además no salen de este tipo de caracterización, por lo tanto, es posible clasificar los problemas dependiendo del orden

de las proposiciones.

Según D'Amore (1997), aunque la estructura de un problema ya esté definida, si el estudiante tiene una capacidad de estructuración diferente pero no alejada del rigor científico original de éste, es posible generar diferentes planteamientos al mismo problema por parte del estudiante dependiendo de la facilidad de comprensión.

Por lo que podemos decir que, aunque se encuentre una estructuración lógica en los enunciados, no es la única forma de plantearlos o interpretarlos, pues dichas estructuras dependen de la lectura comprensiva de sus resolutores, pero es un hecho que para muchos estudiantes influye el modo de planteamiento de un problema para darle una respuesta.

Por último, tenemos la componente semántica, la cual se fundamenta en el análisis de la conexión entre las tres proposiciones dentro del enunciado, mostrando diferentes tipos de relaciones dependiendo de las palabras de las proposiciones, Neshet (1982), propone siete tipos de palabras:

- a. argumentos: dependencia semántica entre los argumentos cuantificados numéricamente que aparecen en las proposiciones que subyacen al texto del problema.
- b. adjetivos: dependencia semántica debida a adjetivos que califican los argumentos cuantificados.
- c. agentes: dependencia semántica de vida a los agentes a los que se hace referencia en el texto.
- d. localización: dependencia semántica debida a la relación espacial entre objetos.
- e. tiempo: dependencia semántica debida a la relación temporal entre los acontecimientos a los que hace referencia el texto.
- f. verbo: dependencia semántica que se expresa mediante los verbos que aparecen en el texto.

g. términos relacionales: dependencia semántica debida a términos relacionales que afectan a dos argumentos cuantificados dados. (Citado por Puig y Cerdán, 1988, p.98).

Este componente posee una categorización la cual muestra las variaciones de los términos usados anteriormente que se mostrará en el apartado 3.6.4. *Categorías semánticas de la sustracción.*

2.6.3. Enfoques en la resolución de problemas. Tal cual como menciona Castro (1994) en su tesis, una resolución de problema o como se refiere el autor del problema aritmético enunciado verbalmente (PAEV), postula cuatro enfoques que se deben tener en cuenta a la hora de investigar en PAEV; determinados como: enfoque lingüístico, enfoque de variables estructurales, enfoque de sentencias abiertas y enfoque de estructura semántica.

Los enfoques propuestos a continuación, son importantes en la comprensión de problemas aritméticos, debido a que es una unión de componentes lectores que involucran tanto partes individuales como globales de interpretación en un texto. Esto es relevante en la investigación, ya que en lo que respecta a la resolución de problemas en el área de matemáticas, es fundamental no solo poseer el conocimiento aritmético, sino también una comprensión lectora para determinar un camino de solución coherente. A continuación, se hablarán de cada uno de ellos.

El enfoque lingüístico

Durante más de 70 años, los investigadores han explorado las dificultades en relación con la resolución de problemas enunciados verbalmente. Es algo natural que algunos de estos investigadores se enfocaron en la etapa del lenguaje de este objeto matemático identificando dificultades en tres características lingüísticas que son: la habilidad lectora, la legibilidad de textos y factores lingüísticos (Castro, 1994, p.66).

En lo que respecta con la habilidad lectora, no refiere a si sabe o no leer, sino a la habilidad comprensiva de textos, debido a que existe una relación entre la lectura y el avance en resolver problemas, es decir, a mejor comprensión y habilidad lectora, mejor entendimiento y solución de problemas verbales.

Ahora, la legibilidad es un factor complejo que tratar, debido a la diversidad de lenguajes encontrados en las matemáticas (castellano, la notación indo-arábiga de los números, el sistema de notación algebraico, el lenguaje del cálculo de proposiciones, etc.), todos con diferentes niveles de comprensión y significados, por consiguiente, si no se entiende el idioma no se inicia el análisis verdadero de los enunciados.

El enfoque de variables estructurales

Existen dos tipos de análisis para las variables estructurales de un enunciado de resolución de problemas; primero el análisis global de variables, que trata de expresar la dificultad del problema como la suma de las dificultades aportadas por cada una de las variables estructurales, tales como: longitud del problema, complejidad gramatical de sus oraciones, la operación con la que resuelve el problema o el orden en la que aparece la información.

Segundo el análisis parcial de variables, donde consiste en estudiar el efecto de determinados factores sobre el rendimiento de los sujetos, (se especifican en un par de temas relacionados a la dificultad de resolución de problemas).

El enfoque de sentencias abiertas

En este enfoque según Grows (1974) clasifica los problemas aritméticos de adición y sustracción de acuerdo a las sentencias abiertas que subyacen en el problema, con el ánimo de distinguir entre ellas distintos niveles de rendimiento. En síntesis, se busca averiguar los procesos o métodos que usan para resolver un problema siguiendo estos parámetros:

- Identificar los métodos de solución empleados por los niños y determinar su frecuencia de uso.
- Indagar la extensión con la que diferentes métodos de solución son usados por los niños para resolver sentencias abiertas similares.
- Examinar la relación entre el número de soluciones correctas y tipos de métodos empleados (Citado por Castro, 1994, p.45).

El enfoque semántico

Para resolver un PAEV (problema aritmético enunciado verbal) es necesario conocer el significado del texto en el que está enunciado el problema; el sujeto debe comprender el enunciado verbal y traducirlos a expresiones matemáticas que representen la estructura del problema, para poder llegar a un esquema matemático que satisfaga la necesidad de resolución.

En los enunciados de un PAEV como lo dice Jerman (1973) citado por Castro (1994), existen las palabras claves que guían al lector sobre el proceso que debe seguir para desarrollar el problema, aunque las palabras claves no afecten directamente el nivel de dificultad en la resolución de problemas, cuando la presencia o no de las mismas actúan como distractores, afecta el nivel de dificultad en el problema, debido a que existe distinción entre el significado de una palabra usada en el lenguaje usual y la misma palabra en el lenguaje matemático.

- A lo que respecta con estructuras alternativas de información cuantitativa, relativas a problemas de adición y sustracción, Heller y Greeno (1978) (citado por Castro, 1994), distinguen tres esquemas:
 - Causa/ cambio
 - Combinación
 - Comparación

Estos esquemas que mencionan los autores serán tomados en cuenta en este

documento con el nombre de *categorías semánticas* y se ampliará en el siguiente apartado. Ya que cada categoría muestra una estructuración diferente en los enunciados cambiando el sentido de un problema y pueden ser un factor influyente en la comprensión de problemas en los estudiantes.

2.6.4. Categorías semánticas de la sustracción. En el documento de Puig y Cerdán (1988) afirman que algunos investigadores llegaron a un acuerdo sobre clasificar los PAEVs (problemas aritméticos enunciados verbales) en cuatro categorías semánticas, las cuales son: cambio, combinación, comparación e igualación; y se describirán a continuación:

Cambio: se incluye en esta categoría los problemas verbales en los que las relaciones lógicas aditivas están embebidas en una secuencia temporal de sucesos; esto es, en estos problemas se pueden distinguir tres momentos diferentes en los que se describe como una cantidad inicial es sometida una acción, directa o sobreentendida, que la modifica. Las tres cantidades presentes en el problema reciben los nombres de cantidad inicial, final y cambio o diferencia entre la inicial o final (p.99).

En la siguiente tabla se muestra los diferentes diseños de problemas de tipo cambio.

Tabla 1. Tipos de problemas verbales de categoría semántica cambio

Cambio 1. Juan tenía a. Le dan b. ¿Cuántos tiene ahora?
Cambio 2. Juan tiene a. Da b. ¿Cuántos le quedan?
Cambio 3. Juan tenía a. Pedro le dio algunos. Ahora tiene c. ¿Cuántos le dio pedro?
Cambio 4. Juan tenía a. Dio algunos a pedro. Ahora tiene c. ¿Cuantos dio a pedro?
Cambio 5. Juan tenía algunos. Pedro le dio b. ahora tiene c. ¿Cuántos tenía?
Cambio 6. Juan tenía algunos. Dio b a pedro ahora tiene c. ¿Cuántos tenía?

La siguiente tabla muestra la estructura de la categoría cambio en base a la tabla 1.

Tabla 2. Estructura de la categoría semántica cambio

	INICIAL	CAMBIO	FINAL	CRECER	DECRECER
CAMBIO 1	d	d	i	*	
CAMBIO 2	d	d	i		*
CAMBIO 3	d	i	d	*	
CAMBIO 4	d	i	d		*
CAMBIO 5	i	d	d	*	
CAMBIO 6	i	d	d		*

Combinar: se incluyen en esta categoría los problemas en los que se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte-parte-todo. La pregunta del problema puede versar acerca del todo o acerca de una de las partes, con lo que hay dos tipos de problemas de combinar. Combinar 1 se resuelve mediante una suma y combinar 2, mediante una resta (p.101).

En la siguiente tabla se muestra los diferentes diseños de problemas de tipo combinar.

Tabla 3. Tipos de problemas verbales de categoría semántica combinar

Combinar 1. Hay a hombres. Hay b mujeres. ¿Cuántas personas hay?
Combinar 2. Hay a hombres. Hay b personas. ¿Cuántas mujeres hay?

La siguiente tabla muestra la estructura de la categoría cambio en base a la tabla 3.

Tabla 4. Estructura de categoría semántica combinar

	PARTE	PARTE	TODO
COMBINAR 1	d	d	i
COMBINAR 2	d	i	d

No hay un tercer tipo (i, d, d) porque las partes son intercambiables.

Comparar: se incluye en esta categoría los problemas que presentan una relación estática de comparación entre dos cantidades. Las cantidades presentes en el problema se denominan cantidades de referencia, cantidad comparada y diferencia; la cantidad comparada aparece a la izquierda de la expresión « *mas que* » o « *menos que* », y la cantidad de referencia a su derecha. Dado que el sentido de la comparación puede establecerse en más o menos, y dado que se puede preguntar por cualquiera de las tres cantidades, el número de tipos posibles de problemas de comparación es seis (p.102).

La lectura comprensiva de enunciados en problemas con la resta ha sido un tema relevante en el análisis crítico de las matemáticas, al preguntar a colegas, estudiantes y entre los mismos autores de este documento, se reconoce una falencia en el momento de comprender un problema verbal en los diferentes temas de las matemáticas. Al realizar una retrospectiva de este hecho, se identificó un posible origen a esta falencia; desde la época escolar, donde iniciamos con problemas de suma y resta, se observa un buen manejo de conceptos matemáticos, pero no de lectura crítica a manera de relacionar dichos conceptos con el contexto. Para los problemas de comparación, los cuales suelen ser resueltos por medio de una conversión de palabras a operaciones, es una de las principales categorías, donde no se desarrolla una lectura crítica de comparar, por lo tanto, se designó este como foco de investigación.

A continuación, se muestra los diferentes diseños de problemas de tipo comparar.

Tabla 5. Tipos de problemas verbales de categoría semántica comparar

Comparar 1. Juan tiene a. Pedro tiene b. ¿Cuántos tiene Pedro más que Juan?
Comparar 2. Juan tiene a. Pedro tiene b. ¿Cuántos tiene Pedro menos que Juan?
Comparar 3. Juan tiene a. Pedro tiene c más que Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?
Comparar 4. Juan tiene a. Pedro tiene c menos que Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?
Comparar 5. Pedro tiene b. Pedro tiene c más que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?
Comparar 6. Pedro tiene b. Pedro tienen c menos que Juan. ¿Cuántos tiene Juan?

La siguiente tabla muestra la estructura de la categoría cambio en base a la tabla 5.

Tabla 6. Estructura de categoría semántica comparar

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MAS	MENOS
COMPARAR 1	d	d	i	*	
COMPARAR 2	d	d	i		*
COMPARAR 3	d	i	d	*	
COMPARAR 4	d	i	d		*
COMPARAR 5	i	d	d	*	
COMPARAR 6	i	d	d		*

Igualación: las tres categorías anteriores son las categorías básicas según algunos autores, -por ejemplo, Carpenter y Moser (1983)- distinguen una cuarta categoría: problemas de igualación. Estos problemas se caracterizan porque hay en ellos una comparación entre las cantidades que aparecen establecidas por medio del comparativo de igualdad « *tantos como* » (p.103).

A continuación, se muestra los diferentes diseños de problemas de tipo igualar.

Tabla 7. Tipos de problemas verbales de categoría semántica igualar

Igualar 1. Juan tiene a. Pedro tiene b. ¿Cuántos tiene que ganar Pedro para tener tantos como Juan?
Igualar 2. Juan tiene a. Pedro tiene b. ¿Cuántos tiene que perder Pedro para tener tantos como Juan?
Igualar 3. Juan tiene a. Si Pedro gana c, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?
Igualar 4. Juan tiene a. Si Pedro pierde c, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Pedro?
Igualar 5. Pedro tiene b. Si Pedro gana c, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene

Juan?

Igualar 6. Pedro tiene b. Si Pedro pierde c, tendrá tantos como Juan. ¿Cuántos tiene Juan?

La siguiente tabla muestra la estructura de la categoría cambio en base a la tabla 7.

Tabla 8. Estructura de categoría semántica igualar

	REFERENCIA	COMPARADA	DIFERENCIA	MAS	MENOS
IGUALAR 1	d	d	i	*	
IGUALAR 2	d	d	i		*
IGUALAR 3	d	i	d	*	
IGUALAR 4	d	i	d		*
IGUALAR 5	i	d	d	*	
IGUALAR 6	i	d	d		*

Fuente: (Puig y Cerdán, 1988, pp. 98- 104)

2.6.5. Lenguaje simbólico. En este apartado Maza (1991) hace referencia a los tipos de escritura que poseen las matemáticas, el primer tipo consiste en la representación verbal que expresa con palabras del acervo cultural los elementos del referente y el segundo tipo, las representaciones numéricas que obedecen al simbolismo numérico clásico.

Representación verbal:

En lo que respecta a la representación verbal, se pueden identificar dos tipos de lenguaje, formal e informal, los cuales pueden influenciar considerablemente las respuestas de un niño hacia un mismo problema escrito de dos maneras diferentes; por ejemplo:

- *Lenguaje informal*

El enunciado está planteado en un contexto que describe el proceso matemático en el mismo lenguaje cotidiano, de tal forma que induce a crear una relación representativa ya sea con números u objetos, como se muestra en el siguiente ejemplo de Maza (1991):

Hay cinco gallinas y ocho gusanos. Si cada gallina se come un gusano, ¿Cuántos gusanos quedan sin ser comidos?

Respuesta: cada gallina es como una ficha grande. Cada gusano como una ficha pequeña. Las pongo una en frente de otra y por cada gallina quito un gusano. Así cinco veces. Al final quedan tres fichas pequeñas, o sea, tres gusanos (p.41).

- *Lenguaje formal*

El enunciado posee un contexto, pero en este caso induce la lectura a encontrar un valor y una relación más directa en los datos proporcionados, es decir, solo permite una relación numérica, como lo muestra el ejemplo de Maza (1991):

“Hay cinco gallinas y ocho gusanos. ¿Cuántos gusanos más que gallinas hay?

Respuesta: ocho menos cinco es igual a tres” (p.41).

Aunque se llegue a la misma conclusión el tipo de comprensión y la relación con su contexto es distinta, es más fácil para los estudiantes asociar de una forma más explícita los enunciados con lenguaje informal mejorando su capacidad de justificar el procedimiento; con los enunciados formales, el estudiante solo le queda la posibilidad de asociarlo a manera de sentencias, y dependiendo del nivel de comprensión en matemáticas, así mismo será el nivel de la justificación.

Representación numérica: A lo que refiere con la representación numérica, según Maza (1991), es al uso de sentencias, pero con la particularidad de ser expresadas en dos formas: canónica y no canónica. Cuando se habla de sentencias canónicas, se refiere a la estructura aditiva o sustractiva donde la cantidad desconocida siempre está al lado derecho del igual y la sentencia en sí representa el planteamiento del enunciado de un problema, de la siguiente manera:

$$a + b = \blacksquare$$

$$a - b = \blacksquare$$

Ahora bien, cuando se habla de sentencias no canónicas, se refiere a la estructura aditiva o sustractiva, pero la cantidad desconocida está entre las dos cantidades de las cuales se van a operar en el lado izquierdo del igual y también representa la estructura aditiva o sustractiva del enunciado. De la siguiente manera:

$$a + \blacksquare = c$$

$$\blacksquare - b = c$$

$$a - \blacksquare = c$$

En los párrafos anteriores se habló de dos sentencias que representa el enunciado de un problema las cuales son de estructura canónica y no canónica, sin embargo, si se desea dar respuesta a un problema, siempre se aplicará la estructura canónica; esto no requiere mayor complejidad cuando el enunciado indica dicha estructura, pero cuando el enunciado indica una estructura no canónica, para poder hallar un resultado es necesario llevarlo a una forma canónica, y al hacer esto, la sentencia generada no representará el enunciado pero si a su método de solución, es decir, no necesariamente una sentencia canónica puede reflejar el estado inicial del problema para llegar a un resultado.

Un ejemplo claro es:

Tienes cuatro lápices de colores y te dan varios más. Al fin tienes siete en total. ¿Cuántos lápices te dieron?

La sentencia $7 - 4 = \blacksquare$ viene a representar la estrategia sustractiva que puede efectuarse, pero no refleja el estado inicial del problema ni su estructura aditiva. Cabe entonces que la sentencia numérica $4 + \blacksquare = 7$ refleja más exactamente la situación planteada y ayuda a superar el conflicto estructura aditiva- estrategia sustractiva. (Maza, 1991, p.46).

Es fundamental especificar que el ejemplo anterior refleja, en su mayoría, a los enunciados de tipo comparación en los problemas; ahora bien, si ya se estableció una dificultad en la comprensión en todos los tipos de enunciados de los problemas, se manifiesta con mayor fuerza en la categoría anterior, debido a que la estructura aditiva-

sustractiva que refleja al enunciado no es igual al método que da respuesta.

2.6.6. Estudio de dificultades. En este apartado nos enfocaremos en las dificultades de los estudiantes, pero antes de eso es fundamental saber diferenciar entre un error, una dificultad y un obstáculo; primero que todo se aclara que los términos anteriores están ordenados en forma de escala, del menos al más grave.

Según Cuadrado y Lucchini (2006), definen el error como "...un concepto equivocado o juicio falso. Por su parte, la equivocación se define como el tener o tomar una cosa por otra, juzgando u obrando desafortunadamente" (p. 3). Esto da a entender que el error es una equivocación cometida por el sujeto, pero no por desconocer conceptos, sino por algún descuido generado en ese momento y que él mismo es capaz de autocorregirse.

Usado correctamente, el error es fundamentalmente una fuente de conocimiento, donde el sujeto (con ayuda o sin ella) lo reconoce, y a partir de este, genera uno nuevo que corrija o mejore el anterior. Esto se sustenta con las afirmaciones de Blanco (2003) y Mancera (1998), citado por Cuadrado y Lucchini (2006) donde dicen: "los errores forman parte del proceso de construcción del conocimiento y pueden ser el motor que provoque un avance o un cambio, transformándose así, en un elemento constitutivo e innovador del proceso de aprendizaje" (p. 3).

Cuando el error es corregido a tiempo, no causa mayor problema en el aprendizaje, sin embargo, si sucede lo contrario, puede generar dificultades en el aprendizaje, lo que hace más complejo la adquisición de nuevos conceptos.

Al hablar de dificultades, existen dos tipos, el primero abarca a problemas neurológicos por mal formaciones o daños directos al cerebro, y el segundo a problemas epistemológicos que atañe al aprendizaje lento o inadecuado de conceptos. Debido al foco de atención en este trabajo de investigación, se especificará al segundo tipo de dificultad.

El estudio de dificultades en matemáticas se encuentra ligado a la secuencia de adquisición de conceptos, tal como lo menciona Carrillo (2009) (citado por Fernández, 2013):

Los aprendizajes matemáticos constituyen, además, una cadena de conocimientos que implica haber interiorizado muy bien los conceptos anteriores para poder asimilar los nuevos. El nivel de dificultad de estos conceptos viene marcado, por tanto, por el contenido en sí pero también por las características cognitivas y psicológicas de los escolares (p. 24).

Una concepción muy parecida la toma Aranda, Pérez y Sánchez (2008) “durante el proceso de enseñanza-aprendizaje van apareciendo dificultades que unas veces son consecuencias de aprendizajes anteriores que han sido mal asimilados por el alumno y otras se debe a las exigencias que van surgiendo de los nuevos aprendizajes”.

Con lo anterior podemos decir, que las dificultades son comprensiones equivocadas (errores) de conceptos o aprendizajes anteriores, los cuales no fueron superados por el sujeto, y al ser utilizados en conocimientos nuevos, crean un conflicto entre procesos.

Por último, “cuando las dificultades no se pueden superar, se convierten en obstáculos por que impiden avanzar en la construcción del nuevo conocimiento” (Andrade, p. 1000), es decir, obstáculo es una dificultad que no fue superada por el sujeto, debido a cambios, reemplazos o estructuraciones incorrectas de conceptos.

De los tres anteriores, el trabajo se enfocará en el estudio de dificultades y su relación con la comprensión de los enunciados en la resolución de problemas.

Estudios muestran que existen dificultades específicas en los estudiantes a la hora de comprender y resolver un problema, Puig y Cedan (1988) recoge estas dificultades y las clasifica en tres partes las cuales son: dificultad en la formulación y resolución de sentencias canónicas y no canónicas, dificultades sintácticas y dificultades semánticas.

- Dificultad en la formulación y resolución de sentencias canónicas y no canónicas:

Carpenter y Moser (1983) proponen una serie de dificultades las cuales fueron halladas en un estudio realizado a niños de primero a tercer grado; estas se esquematizan para tener una mejor comprensión de las dificultades:

Tabla 9. Tipos de proposiciones y sentencias.

TIPOS DE PROPOSICION ABIERTAS	
$a + b = ?$	$? = a + b$
$a + ? = c$	$c = a + ?$
$? + b = c$	$c = ? + b$
$a - b = ?$	$? = a - b$
$a - ? = c$	$c = a - ?$
$? - b = c$	$c = ? - b$

Fuente: (Puig y Cerdán, 1988, p.108)

- Las proposiciones canónicas de adición y sustracción ($a + b = ?$, $a - b = ?$) son menos difíciles que las no canónicas ($a + ? = c$, $a - ? = c$).
- Las proposiciones canónicas de sustracción son generalmente más difíciles que las proposiciones canónicas de adición.
- No hay diferencias claras entre las tres proposiciones siguientes: $a + ? = c$, $? + b = c$, $a - ? = c$.
- Las proposiciones de minuendo desconocido ($? - b = c$) es significativamente más difícil que las otras cinco proposiciones de sustracción.
- Las proposiciones con la operación al lado derecho del signo igual (por ejemplo, $c = a + ?$) son significativamente más difícil que las paralelas con la operación a la izquierda (citado por Puig y Cerdán, 1988, p. 108).

Las proposiciones canónicas y no canónicas que toman en el documento de Puig y Cerdán, las abarca Maza con el nombre de sentencias canónicas y no canónicas; el cual da bastante relevancia a la hora de resolver y comprender un problema aritmético al mostrar las distintas combinaciones de sentencias para cada tipo de problema planteado, especificando cuales resuelven y cuales representa estructuralmente al problema.

Lo anterior muestra que los estudiantes poseen dificultad en los enunciados que tienen una sentencia no canónica, es decir el problema refleja esta estructura, pero, su modo de solución es una transformación a sentencia canónica usando la relación entre la suma y la resta.

- Dificultades sintácticas:

Los estudios que se han realizado respecto a esta dificultad pueden agruparse en dos categorías en función de la finalidad perseguida y la metodología utilizada; de variables que tienen que ver con: formato de presentación del problema, la longitud del enunciado, estructura gramatical, la posición de la pregunta, la presencia o no de datos y el tamaño de los números. Puig y Cerdán (1988).

Nesher y otros (1982) exhiben una serie de resultados cualitativos pertinentes a la estructura de los enunciados (proposiciones y pregunta), en relación con la escritura del problema. De ellos se tendrán en cuenta los siguientes:

- a. Cuando los problemas verbales se presentan por medio de grabados, dibujos o materiales concretos, resulta más sencillo, al menos en los primeros niveles.
- b. La longitud del enunciado, el número de oraciones que lo forman y la posición de la pregunta son variables que, en los estudios del primer tipo, son útiles para explicar la dificultad del problema; la estructura sintáctica de un problema de cambio parece poco probable que la dificultad añadida sea tan grande como la que supone pasar de un

- problema de cambio a uno de comparación.
- c. El tamaño de los números y la presencia de símbolos en vez de números concretos incrementa la dificultad del problema; los números grandes no pertenecen al campo de experiencia numérica de los niños y – en cierto sentido- no pertenece al concepto numérico que tienen formado.
 - d. La relación entre el orden de aparición de los datos en el enunciado y el orden en que deben ser colocados a la hora de realizar con ellos la operación necesaria para resolver el problema es también una de las fuentes de dificultad que han sido identificadas. En particular cuando se presenta los datos en orden inverso. (citado por Puig y Cerdán, 1988, p.109)

- Dificultades semánticas:

Puig y Cerdán (1988) diseñan una tabla comparando resultados obtenidos por autores como Nesher, Riley y otros, sobre el porcentaje de éxito en la resolución de problemas aditivos, como se muestra a continuación:

Tabla 10. Porcentajes de éxito en la resolución de problemas

Dependencia semántica	Problemas de adición	Problemas de sustracción
Argumentos	80,03	52,56
Adjetivos*	72,73	59,47
Agentes	80,39	50,48
Tiempo	77,90	38,00
Verbos	77,89	72,11
Términos relacionales	57,32	60,14

La categoría Localización se combinó con Adjetivos, ya que ambas eran muestras pequeñas y muy similares respecto a sus medias

Fuente: (Puig y Cerdán, 1988, p.111).

La tabla anterior, nos permite ver que existen diferentes niveles de comprensión dependiendo del enfoque del enunciado de un problema aritmético verbal y también de su operación de resolución, destacando que la resta, en los problemas, es más complejo para la mayoría de los estudiantes en todo tipo de dependencia semántica.

La tabla 10 se tuvo en cuenta para la comparación de estudios a las soluciones correctas de problemas de las categorías semánticas como se muestra a continuación:

Tabla 11. Porcentajes de éxito de 14 tipos de PAEV aditivos en dos estudios empíricos

	Nesher (1982)	Riley y otros (1983)	
	2°-6°	1°	2°
Combinar 1	79	100	100
Combinar 2	52	39	70
Cambio 1	82	100	100
Cambio 2	75	100	100
Cambio 3	72	56	100
Cambio 4	77	78	100
Cambio 5	48	28	80
Cambio 6	49	39	70
Comparar 1	76	28	85
Comparar 2	66	22	75
Comparar 3	65	17	80
Comparar 4	66	28	90
Comparar 5	60	11	65
Comparar 6	54	6	35

Fuente: (Puig y Cerdán, 1988, p.111).

Con lo anterior, solo se puede destacar un símil de porcentajes frente a la categoría de comparación respecto a las otras, pero no es posible extraer más información, debido a que los autores no especifican el modo de obtención de los resultados, es decir, si los problemas involucraban suma, resta o ambas; o si se enfocaron en la solución aritmética

pertinente al problema o a la respuesta de la pregunta; si los estudiantes lograron identificar y relacionar las proposiciones o vincular la dependencia semántica del enunciado para dar solución al problema, aspectos que se consideran en este documento. Por lo tanto, se considera como registro histórico del estudio de la problemática.

2.6.7. Estrategia de solución. Basados en los autores Carpenter, Hieber y Moser (1981-1982), propone tres modos diferentes de resolución de problemas que poseen los niños, los cuales son:

1) elaboración de un modelo con dedos o con objetos físicos, 2) mediante el uso de secuencias de recuento, o 3) recurriendo al recuerdo de hechos numéricos básicos. Y a estos, hallan los resultados recurriendo a estrategias que se pueden denominar como sigue:

- Contar todos
- Contar hacia arriba desde el primero
- Contar hacia arriba desde el mayor
- Quitar de
- Contar hacia abajo desde
- Quitar hasta
- Contar hacia abajo hasta
- Añadir hasta
- Contar hacia arriba desde
- Emparejar

(citado por Puig y Cerdán, 1988, p.103).

Cada modo está diseñado según la capacidad de comprensión que posee el estudiante a la hora de leer un enunciado y lograr obtener una respuesta que sea pertinente a este; el primero hace alusión al manejo de material manipulativo (tangible), facilitando la recolección de la información necesaria para poder resolver el problema.

La segunda trata de un conteo repetitivo de manera ordenada partiendo de los datos, para confirmar el proceso de adición y/o sustracción. Y finalmente en la tercera, hace relación a pre-saberes matemáticos o conceptos adquiridos previamente en consecuencia a la resolución de problemas.

Polya (1965), a partir de la necesidad de generar una lectura crítica, analítica y comprensiva, postula unas fases a seguir para resolver un problema, las cuales son: 1) familiarizarse con el problema, 2) trabajar para una mejor comprensión, 3) búsqueda de una idea útil, 4) ejecución del plan y 5) visión retrospectiva. A continuación, se describen:

Cuando se habla de 1) familiarizarse con el problema, esto indica una lectura del enunciado con el fin de visualizar a manera general el problema, intentando comprenderlo e identificado el propósito de este, y de esta forma, enfocar la atención para preparar la mente en el reconocimiento de factores influyentes para resolverlo.

Ahora, a lo que respecta con 2) trabajar para una mejor comprensión, se puede decir que no está desvinculado con el punto anterior, debido a que es necesario leer el enunciado hasta el punto de tener claridad de este y a su vez poder identificar los factores claves tales como la incógnita, los datos y las condiciones, con el propósito de relacionarlos y manipularlos a su antojo.

Una vez que alcanza la fase anterior, es necesario usar los factores mencionados para generar 3) una idea que aporte a la comprensión y/o vía de solución del problema, para ello es necesario analizar y comprender cada una de las partes del enunciado, crear diferentes combinaciones de dichos factores, comparar entre los conocimientos previos y lo postulado en el problema, y de este modo generar cualquier tipo de idea relacionada al problema; la palabra “cualquier” refiere al tipo de ideas pertinentes o no al problema, es decir, no necesariamente una idea generada por el enunciado será útil para este, pero no importa qué tipo de idea sea, siempre será indispensable para el razonamiento del lector (Polya, 1965).

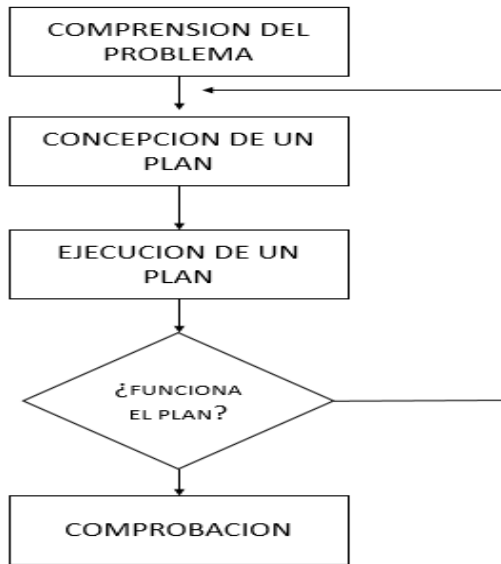
Postuladas estas ideas que contribuyen a la comprensión del problema y dando claridad de cómo empezar a resolverlo se puede hablar de 4) ejecución del plan, que es aplicar los procesos cognitivos realizados en las fases anteriores, con el fin de esquematizar una serie de pasos para generar un resultado que no solo satisfaga al problema, sino también contribuya a una comprensión de esta respuesta *Ibíd.*

Para finalizar, la fase de 5) visión retrospectiva, es poner a prueba si la solución a la que se llegó satisface el problema y qué puntos de vista se pueden generar para poder reescribir u organizar detalles, para construir el mismo problema, pero de varias maneras. Dejando así, la posibilidad de encontrar soluciones alternas a este *Ibíd.*

.
Estas fases de solución son fundamentales para la comprensión de un problema; debido a que los estudiantes observan el enunciado con el objetivo de localizar datos del problema y encontrar un valor numérico que dé respuesta a una pregunta. Sin embargo, no logra articular las proposiciones del enunciado, de tal forma, que haya una comprensión contextualizada. Resolver problemas al estilo de Polya, permite que el estudiante logre una capacidad argumentativa y proceso de pensamiento para resolver un problema.

Luceño (1999), acomoda las fases de Polya (1965) (mencionada en los párrafos anteriores) a manera de gráfico, para visualizar de forma más clara, el proceso que un estudiante debe tener a la hora de resolver un problema:

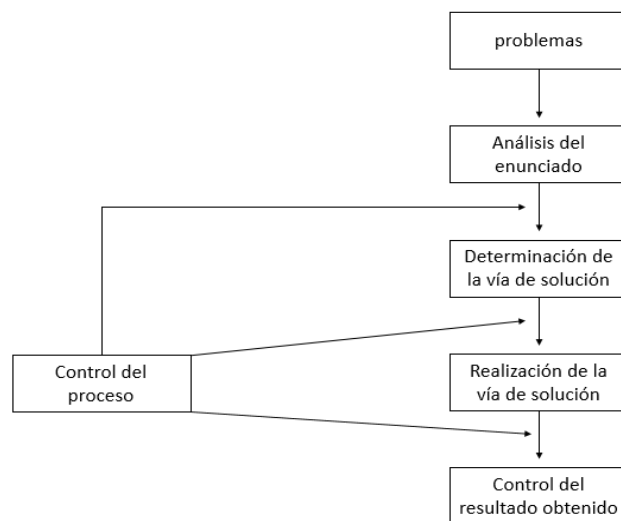
Figura 2. Fases de resolución de problemas según el modelo descrito de Polya



Fuente: Luceño, (1999, p. 18).

Labarrere (1987), (citado por Luceño,(1999), muestra que, “siguiendo las fases establecidas en su momento por Polya añade en la última fase, no solo el control del resultado, sino de todo el proceso de solución y lo esquematiza como se muestra a continuación” (p.20).

Figura 3. Fases de resolución de problemas según Labarrere Sarduy



Fuente: Luceño, (1999, p.20).

El control del proceso es una fase que, a consideración nuestra, es fundamental para la comprensión del problema con el objetivo de generar un razonamiento y una crítica durante todas las fases de este, e ir reescribiendo o postulando ideas que contribuyan a la solución con sentido del problema.

Así, el esquema de Labarrere Sarduy está relacionado con el proceso de investigación que pretende este trabajo dirigido a la comprensión del enunciado en la resolución de problemas de tipo comparación con la resta, debido a su estructuración más específica de las fases a realizar, para comprender y resolver un problema.

Por otro lado, Bransford y Stein (1993), postulan el método IDEAL de resolver problemas, lo cual es una simple nomenclatura para las etapas de comprensión y resolución de un problema que serán descritas a continuación:

Tabla 12. Método IDEAL de resolver problemas

I	Identificación de los problemas
D	Definir los problemas
E	Exploración de análisis alternativos
A	Actuar conforme a un plan
L	Logros alcanzados

Fuente: Luceño. (1999, p. 20).

I = identificación de los problemas

En esta primera etapa, la intención del autor es dar la importancia que merecen los problemas y la evidencia de la existencia de estos en la cotidianidad con el objetivo de generar un interés en la resolución de problemas, para que las personas sean conscientes de la necesidad en entenderlos, cuestionarlos y resolverlos; y si por algún motivo se llega a un estancamiento en este, no evadir su resolución como si no fuera parte de un proceso formativo del pensamiento.

D= definir los problemas

En esta parte, se aclara que es necesario obtener todas las causas o factores que influyen en el problema y los cuales serán usados para relacionarlos y comprenderlo de una mejor manera. A su vez estos factores localizados, serán utilizados para determinar vías de solución.

E = exploración de análisis alternativos

Esta etapa consiste en postular todas las vías de resolución de problemas que pueden generarse, donde se incluye el análisis riguroso del problema, la postulación de estrategias de solución en base a conceptos previos y la búsqueda de instrumentos conceptuales que permite crear un plan de solución.

A= actuar conforme a un plan

Básicamente, en este aspecto, refiere a la ejecución del plan realizado anteriormente, para determinar si se da respuesta o no al problema.

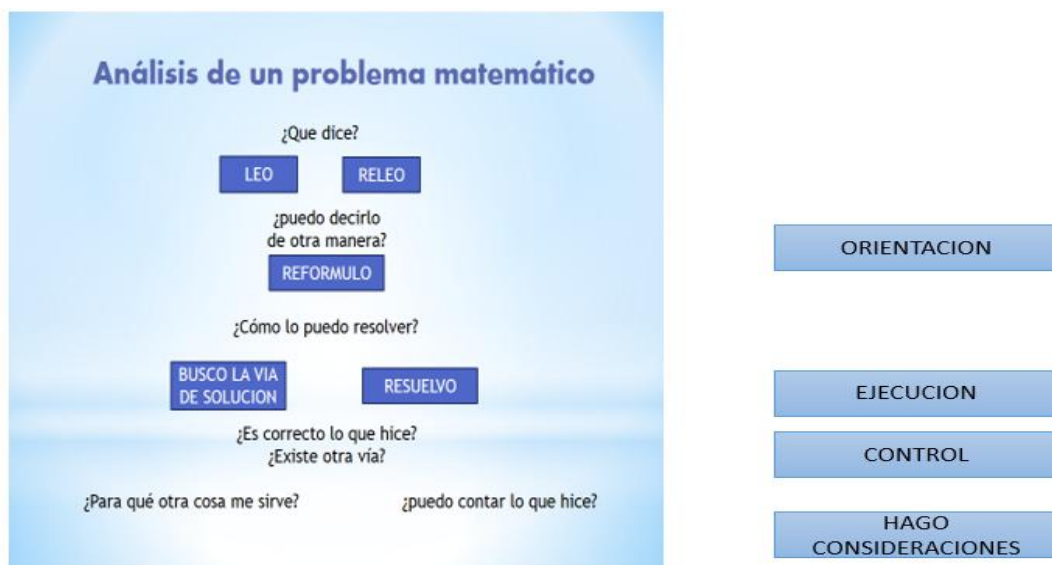
L= logros alcanzados

La interpretación de los resultados del plan para saber si se logró dar respuesta o no al problema; reflexionar sobre los resultados y determinar si existen más métodos de solución o en su defecto, que parte del plan está mal enfocado hacia la pregunta.

Este método es conveniente para direccionar el tipo de comprensión que se debe generar en las personas a la hora de enfrentarse a un problema, lo cual es pertinente a este propósito de investigación, debido a que los estudiantes no logran usar adecuadamente la resolución de problemas para la resta, por consiguiente, no le ven sentido al resolverlo, llevándolos finalmente a ver las matemáticas separadas de su realidad.

Luceño (1999), propone una representación para el modo de resolver un problema por parte del estudiante, conjunto al docente:

Figura 4. Momentos fundamentales de una resolución de problemas aritméticos verbales.



Fuente: Luceño, (1999, p.23)

Lo anterior, propone un procedimiento conveniente para resolver un problema y que, a su vez, los estudiantes logren una comprensión efectiva (modelo constructivista), clasificando el proceso de solución comprensiva de un problema en tres momentos: orientación, ejecución y control. Para cada momento existen pautas que justifican el procedimiento. En orientación, se fundamenta el análisis intensivo del enunciado del problema, en la ejecución relaciona la comprensión de las partes del enunciado y determina una vía de solución matemática que satisfaga el problema, finalmente para el control es un replanteamiento del proceso cognitivo realizado en los dos momentos anteriores, donde comprueba la ejecución y se cuestiona sobre mas métodos distintos que den la misma respuesta a lo leído en el enunciado.

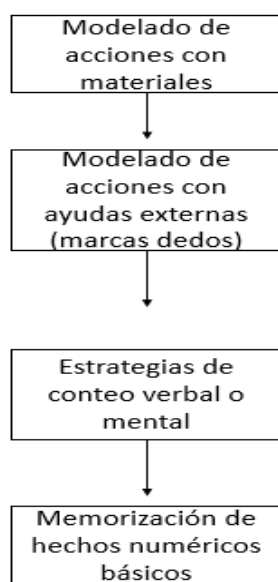
Lo que propone el modelo constructivista según Flórez (1994) es que “el verdadero aprendizaje humano es una construcción de cada alumno que logra modificar su estructura mental, y alcanzar un mayor nivel de diversidad, de complejidad y de

integración” (p.235), es decir, el sujeto cambia sus conceptos a medida que avanza en su estudio vivencial y experimental, de tal forma que puede evolucionar sus pre-saberes en un conocimiento más específico y organizado.

El conocimiento humano no se recibe pasivamente, ni del mundo ni de nadie, sino que es procesado y construido activamente por el sujeto que conoce. En segundo lugar, la función cognoscitiva está al servicio de la vida, es una función adaptativa, y en consecuencia lo que permite el conocimiento al conocedor es organizar su mundo, su mundo experimental, vivencial (Flórez. p.235).

Maza (1991) menciona un proceso de estrategias que poseen los estudiantes según su nivel de escolaridad o capacidad analítica para resolver problemas, el cual es:

Figura 5. Capacidad de abstracción



Fuente: Maza, 1991

Esto muestra desde donde se debe comenzar a mostrar problemas en los estudiantes con el fin de evolucionar el análisis de los enunciados y aumentar su motivación para

resolverlos; además, generar pertinencia en los problemas verbales.

2.7. DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Este apartado, no solo se enfocará en la parte lúdica de las matemáticas, sino también se hablará de manera profunda sobre teorías de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; iniciando desde lo general hasta llegar a lo específico (resolución de problemas).

Cuando se habla de aprendizaje, por lo menos es necesario conocer una definición básica sobre esta, para poder entender los tipos de aprendizaje que se postularán en el siguiente apartado. Ahora, según la real academia española (2014), plantea que el aprendizaje es: “Adquirir el conocimiento de algo por medio del estudio o de la experiencia”, sin embargo, esta definición no es suficiente para el objetivo del trabajo, más si se habla de didáctica de las matemáticas, Panizza (2003) en su documento muestra que el aprendizaje “es una construcción sucesiva que se da por la interacción de ese sujeto con el medio, (idea fundamentada de Piaget)” (p. 82). Con esto se da a entender que el ámbito social no solo el escolar, son factores fundamentales en la adquisición de conocimientos, por lo tanto, desde la escuela se debe recrear e identificar unas condiciones vivenciales que permitan una construcción de saberes matemáticos.

Una concepción de aprendizaje definida por Brousseau (1986), mencionada por Panizza (2003):

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje... (p.82).

Lo anterior, reitera la definición constructivista de aprendizaje que propone Piaget, el cual consiste en generar estados de cuestionamiento frente a los presaberes y generar un pensamiento crítico y lógico para adoptar nuevos saberes.

Además, Godino (2004) deja en evidencia la definición de aprendizaje según las orientaciones curriculares “el aprendizaje significativo supone comprender y ser capaz de aplicar los procedimientos, conceptos y procesos matemáticos, y para ello deben coordinarse el conocimiento de hechos, la eficacia procedimental y la comprensión conceptual”. En síntesis, ya sea conocimientos interiorizados o no, si la persona que logra adquirirlos de cualquier manera puede ser considerada como aprendizaje. De lo anterior se genera un interrogante el cual es, ¿Cuántas y cuáles formas de aprender existen?

Para dar respuesta a la pregunta anterior, se tomará en cuenta el texto de D’Amore (1997), *problemas: pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*, donde menciona ocho tipos de aprendizaje según Gagné (1985), que se expondrán a continuación:

Tipo I: aprendizaje de señales

Se trata de aprender algo a través de un estímulo que produce efecto si es repetido muchas veces; incluso si el estímulo no produce ningún efecto, se obtiene la respuesta.

Tipo II: aprendizaje estímulo/respuesta

Es distinto del primero en base al resultado. La respuesta del sujeto, en este caso, es un acto preciso y circunscrito, mientras en el primer tipo se trata de una respuesta genérica y emotiva.

Tipo III: concatenación

Se trata de una multiplicidad de aprendizajes del tipo II, concatenados entre sí.

Tipo IV: asociación verbal

Se trata de una subespecie del tipo precedente, en que la respuesta R es una palabra del idioma.

Tipo V: aprendizaje de discriminaciones

Los aprendizajes de tipo II, incluso formando parte de una concatenación, se producen de forma aislada. Se trata, de aprendizajes “simples”.

Tipo VI: aprendizaje de conceptos

Tal tipo de aprendizaje está fuertemente ligado a la capacidad de “representación interna”, es decir, a la capacidad de manipular simbólicamente el ambiente externo, sin intervenir sobre él físicamente, imaginando simplemente tales manipulaciones.

Tipos VII: aprendizaje de reglas

En este caso se trata de una asociación verbal que comunica una idea, a tener presente como regla. Es decir, no basta saber repetir la concatenación verbal para poder decir que se ha aprendido la regla; como máximo se sabrá expresar la idea.

Tipo VIII: resolución de problemas

Se trata pues, aceptando esta jerarquía, del aprendizaje más elevado y sublime. “la acción de resolver un problema se concluye, en estos casos, con un aprendizaje verdaderamente sustancial. El cambio de capacidad del individuo es más claro y explícito que en otro tipo de aprendizaje”. (Citado por D’Amore, 1997, p.27)

A pesar del enfoque conductista de estos tipos de aprendizaje, es un hecho que, en la realidad, aún es muy evidente esta corriente en la educación, más cuando se habla de la educación matemática, generando individuos llenos de teorías, pero sin ninguna clase de interiorización.

Aunque la intención de este documento no es seguir en la etapa tradicionalista-conductista, es pertinente conocer esta perspectiva que el aprendizaje tuvo y aún sigue teniendo (en algunos casos) en la actualidad.

Otro punto de vista para el aprendizaje es desde la tendencia constructivista como lo afirma Flórez (1994), del cual menciona un proceso de construcción interna de conocimientos, donde el estudiante, usando sus pre-saberes, relaciona conocimientos nuevos, conjunto a los ya adquiridos y forma un conocimiento mejorado para avanzar en el pensamiento cognitivo (p.234).

Para entender el aprendizaje desde una teoría constructivista, implica aceptar que:

- El estudiante requiere de una experiencia novedosa para conocer. Las experiencias pasadas ya produjeron el aprendizaje correspondiente (hipótesis fenomenológica).
- El estudiante aprende intencionalmente. Hay una determinación por “resolver” la situación novedosa (hipótesis teleológica).
- El estudiante aprende a partir de sus conocimientos previos que modifica o adecua con el fin de incluir coherentemente la nueva experiencia (hipótesis de la acción inteligente y de la modelación sistémica).
- El estudiante valora su propio aprendizaje y lo comparte (hipótesis ética). (Waldegg, 1998, p.23).

Según Maza (1991) “si el aprendizaje del alumno ha de ser significativo es porque aquello que se va a aprender responde a una motivación interna y enlaza conceptualmente lo que ya se conoce con lo que se va a conocer” (p.28). Es decir, no hay aprendizaje sin relación entre conceptos.

El ideal del constructivismo es generar en el estudiante un conocimiento significativo (interiorizado), con el fin de no generar vacíos conceptuales, que usualmente poseen la mayoría de las personas. Siguiendo este orden de ideas, cuando el estudiante experimenta una situación educativa que permita desarrollar la crítica, la duda, la

aplicación y la vinculación con los conocimientos previos, es allí donde él “construye” saberes que perdurarán para la vida.

Se habla de didáctica de las matemáticas cuando se “hace entrar en escena al alumno a ese niño que al estar *sujeto* al orden de la institución escolar se convierte en sujeto didáctico” (p. 84), Chevallard (1992), citado por Panizza (2003), quiere decir que el estudiante debe usar sus conocimientos y estrategias para enfrentar distintas situaciones e interiorizarlas, de tal forma que aplica conceptos de manera natural.

Dependiendo del tipo de situación la cual se enfrentan los alumnos, así mismo pone en juego las herramientas usadas por ellos. Es decir, que el uso, el cambio o la modificación de las herramientas que realicen los estudiantes para resolver una situación depende de la resistencia que le ofrezca ese medio. Ibid..

A la hora de resolver un problema de forma didáctica se debe establecer el hecho que el docente intente que la resolución sea responsabilidad entera del alumno, para esto propone Panizza (2003):

Se trata, entonces, de que los alumnos aprendan haciendo funcionar el saber. Es decir, que para el alumno el saber aparezca como un medio de seleccionar, anticipar, realizar y controlar las estrategias que utiliza para resolver la situación que se le ha planteado (p. 85).

Este proceso didáctico es similar al procedimiento de resolución de problemas, por lo que, se puede concluir, para que exista una comprensión de los enunciados es necesario generar espacios matemáticos de los cuales el estudiante tienen completo control.

Ahora bien, una manera didáctica que propone Luceño (1999) vinculando el pensamiento constructivista para la enseñanza de la resolución de problemas y basándose en teorías de otros autores, diseña una serie de fases sustentadas por unas acciones y técnicas que indican como el maestro debe inducir al estudiante a la comprensión de un problema

(p. 22), mostrado en el siguiente esquema:

Tabla 13. Procedimiento generalizado para la resolución de problemas.

PROCEDIMIENTO GENERALIZADO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		
FASES	ACCIONES	TÉCNICAS
<p>1° ¿Qué dice el problema? ¿Lo he comprendido? ¿Entiendo el significado de las palabras de este problema? ¿Cuál es la pregunta?</p>	<p>Leo y releo detenidamente el enunciado del problema</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● Lectura global ● Lectura analítica ● Modelación (esquemas gráficos)
<p>2° ¿puedo decirlo de otra forma?</p>	<p>Reformulo</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● lectura analítica y reformulación (profunda o superficial)
<p>3° ¿cómo lo puedo resolver? ¿Tengo todos los datos necesarios para resolver este problema? ¿Qué información necesito? ¿Qué pasos/acciones debo realizar? ¿Qué hago primero? ¿Cómo debe calcular la solución? ¿Con que operación?</p>	<p>Busco la vía de solución (trazo un plan) Resuelvo (ejecuto el plan)</p>	<ul style="list-style-type: none"> ● lectura analítica y reformulación ● modelación ● determinación de problemas auxiliares (subproblemas) ● tanteo inteligente (ensayo y error) ● analogía con problemas ya resueltos. ● empiezo desde atrás ● resuelvo el problema con datos más

PROCEDIMIENTO GENERALIZADO PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

FASES	ACCIONES	TÉCNICAS
¿Con que operación tengo dificultades?		sencillos ● estimación
4° ¿es correcto lo que hice? ¿Para qué otra cosa me sirve? ¿Se puede resolver de otra manera? ¿Puedo comprobar si es correcto el resultado?	Hago consideraciones (compruebo, analiza la solución y el procedimiento) Repasar cada uno de los pasos y comprobar que no se ha faltado en ninguna de las operaciones	● Comprobación
5° ¿Puedo explicar lo que he hecho, ¿cómo y por qué?	Explico con mis palabras lo que he hecho y anoto otras formas o vías de solución aportadas por los demás	

Fuente: Luceño, (1999, p. 22).

Según lo planteado en el esquema anterior, se puede observar tres clasificaciones, primero una sección denominada “fase” donde muestra los tipos de preguntas que el docente debe motivar en el estudiante, con el objetivo de responderlas y avanzar, por medio de estas, en su proceso cognitivo en el momento de examinar un enunciado.

Como segunda clasificación, están las “acciones”, las cuales se enfocan en los hechos a realizar por los estudiantes para dar respuesta a las preguntas de la primera clasificación; y finalmente, las “técnicas” que se deben ejecutar para poder realizar los hechos planteados en las dos partes anteriores.

Para justificar la efectividad del esquema anterior, se toma una serie de hechos que propone Maza (1991) sobre los estudiantes que son:

- Los niños son capaces, desde muy temprana edad, de enfrentarse a una ancha variedad de problemas que, con la edad, se va ampliando.
- Al enfrentarse a estos problemas generan, asimismo, un numeroso grupo de estrategias informales.
- Que estas estrategias se adaptan a las características de cada problema hasta aproximadamente el segundo curso de escolaridad, de manera que distintos problemas se resuelven de distinta manera, pese a que obedezcan a la idea adulta de suma o resta únicamente.
- Que las estrategias así desarrolladas van evolucionando desde una dependencia de objetos y dedos hasta basarse en el conteo mental de palabras numéricas y en la memorización de hechos numéricos básicos.
- Solo en un periodo variable, que podría situarse entre en segundo y tercer cursos de escolaridad, las estrategias se hacen intercambiables pudiéndose aplicar a todos los tipos de problemas. En ese momento se puede afirmar que se ha llegado a unificar la idea de suma o la de resta (p.27).

Lo mencionado anteriormente, indica que el esquema es pertinente para mejorar la comprensión de los estudiantes en los enunciados de un problema.

D'Amore (1997) afirma que el docente debe ser un diseñador de ambientes que motiven el interés matemático en los estudiantes, más cuando se trata de la resolución de problemas, debido a la visión que la mayoría de las personas tiene sobre las matemáticas (una visión abstracta ajena al contexto), entonces los problemas deben reflejar un lenguaje más cotidiano, sin perder el rigor de las matemáticas.

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. HIPÓTESIS

Definimos las siguientes proposiciones como hipótesis de investigación para tratar de explicarlas tentativamente y definir las a través de evidencias empíricas.

A continuación, son:

- Los estudiantes determinan un método de solución al problema usando la aritmética, estableciendo una relación del enunciado con la estructura semántica de comparación.
- Los estudiantes poseen diversas interpretaciones del enunciado, que conlleva a una estructura que da solución al problema.

3.2. VARIABLES

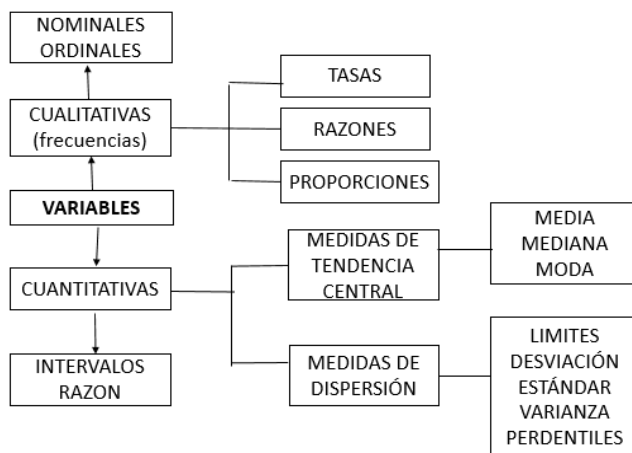
Cuando se trata de matemáticas es muy común escuchar la palabra variable, por esto se ha creado una idea que refiere netamente al campo de las matemáticas, sin embargo, su uso abarca en casi todos los campos de estudio, más en el investigativo. Para tener claridad de lo que significa la palabra “variable” en la investigación, se mostrará a continuación una definición planteada por Arias (2006), la cual dice: “Variable es una característica o cualidad; magnitud o cantidad, que puede sufrir cambios, y que es objeto de análisis, medición, manipulación o control en una investigación” (p. 57).

En este proyecto se tomaron en cuenta tres variables en las respuestas de los estudiantes: la operación aritmética, la respuesta al problema y la justificación del proceso realizado, las cuales muestran el nivel de características en la que el estudiante se encuentra para tener una comprensión del problema.

En las investigaciones, según Curcio (2002), se enfocan en dos tipos de clasificación de

estudio, cuantitativo y/o cualitativo, dependiendo de la naturaleza del trabajo. Las investigaciones de variables cuantitativas se enfocan en características que pueden sumar o promediar, aceptan operaciones matemáticas, en cambio la investigación de variables cualitativas se especializa en características que solo pueden ser contadas, es decir, interpreta datos de manera descriptiva.

Figura 6. Nivel de variables.



Fuente: Curcio, 2002.

Este trabajo de investigación está dirigido hacia un estudio de *variables cualitativas o categóricas con enfoque nominal* que, según Curcio (2002), “refiere a nombres, no proporcionan información diferente a un atributo, excepto en términos de equivalencia o no equivalencia. Son excluyentes y si se asigna números solo se utilizan para distinguir unos objetos de otros” (p.99).

3.3. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Para el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes de grado cuarto de la Institución Educativa Escuela Normal Superior de Ibagué, se utilizarán métodos *descriptivos* de datos, teniendo en cuenta que la naturaleza de este estudio es netamente descriptiva, en donde se pretenden identificar las formas de comprensión de los estudiantes ante una serie de problemas presentados.

Es descriptivo porque trata de indagar por las características o cualidades de un objeto de conocimiento, por ello los datos serán registros de acciones cognitivas de los estudiantes, por medio escrito en las respuestas al cuestionario. A partir de estas respuestas se describirá el desarrollo de la acción del estudiante frente a las situaciones que se le propone respecto al análisis de datos.

Según Curcio (2002), define este tipo de estudio como:

Descriptivo: buscan indagar la incidencia y los valores en que se manifestaron una o más variables. Presentan un panorama de una o más variables, en uno o más grupos de personas u objetos, en determinado momento. En síntesis, como es y cómo se manifiesta un fenómeno en sus componentes, su presencia o ausencia, la frecuencia con que ocurre, en quienes donde y cuando se está presentando dicho fenómeno. (p. 109).

Debido a los objetivos de este trabajo es pertinente optar por un estudio *descriptivo*, ya que el propósito de este es identificar y describir características cualitativas en la comprensión de los enunciados de resolución de problemas con la resta de tipo comparación en los estudiantes de grado cuarto.

Para profundizar sobre la investigación descriptiva, es pertinente consultar otros autores que hablen sobre este, tal como, Arias (2006) que la define de la siguiente forma:

La investigación descriptiva consiste en la caracterización de un hecho, fenómeno, individuo o grupo, con el fin de establecer su estructura o comportamiento. Los resultados de este tipo de investigación se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere (p.24).

Con lo anterior, se puede ver que la investigación descriptiva asume un rol de búsqueda exhaustiva de teoría e implicaciones de esta misma en casos o situaciones particulares,

de tal forma que sea capaz de describir eventos de una manera científica.

3.4. POBLACIÓN

Este trabajo de grado se desarrolló en la institución educativa Escuela Normal Superior de Ibagué (ENSI) sede principal, en el departamento del Tolima, específicamente en la ciudad de Ibagué, ubicada en la calle #30 entre avenidas Guavinal y Ambalá; esta institución se basa en el modelo pedagógico Práctico Reflexivo, que consiste en “determinar relaciones entre la teoría y la práctica pedagógica, es decir, entre el ser y el quehacer de los miembros de la comunidad educativa” (Castro, Obando, Otálvaro, 2011, p.4).

Los estudiantes se ubican en estratos socioeconómicos 2 y 4, entre las edades de 9 a 11 años, esto los ubica en el tercer estadio de Piaget denominado *operaciones concretas*; además se pueden encontrar estudiantes con necesidades especiales. La sección primaria cuenta con un profesor permanente durante toda la jornada escolar, nombrados en propiedad del cargo por el estado; la infraestructura posee espacios que fomentan el desarrollo educativo del estudiante (biblioteca, sala de sistemas, DVD, televisor, video beam y espacios para el libre esparcimiento y recreación).

Para contextualizar la situación escolar, a continuación, se mostrará la misión y visión de la institución mostrada en la revista Panorama Normalista (Castro et al, 2011):

MISION: Formar maestros con idoneidad pedagógica, académica e investigativa para el ejercicio de la docencia en el nivel de preescolar y en el ciclo de educación básica primaria, que respondan a las necesidades de inclusión, modernización y globalización, mediante la reflexión dialogada sobre las prácticas pedagógicas.

VISION: En el año 2015, la Escuela Normal Superior de Ibagué será una institución líder al nivel regional y nacional, con proyección internacional en

el campo de la formación docente, gracias al fortalecimiento de la investigación pedagógica como eje dinamizador de la academia.

3.5. MUESTRA INTENCIONAL

El tipo de muestra en esta investigación es la *muestra intencional*, donde se tuvieron en cuenta los estudiantes de la jornada mañana del grado 4-01 que consta de 39 estudiantes entre 8 a 10 años. Se estableció en la jornada mañana debido al horario de las prácticas pedagógicas establecidas por el programa de la licenciatura en matemáticas. El grado cuarto fue elegido debido a la pertinencia de este trabajo, y el curso uno fue tomado a sugerencia del coordinador de la institución educativa, debido a la facilidad del trabajo de investigación con los estudiantes.

En el programa de licenciatura en matemáticas se tiene organizada la práctica pedagógica en los cuatro últimos semestres con la siguiente estructura: practica uno (observación), práctica dos (básica secundaria), practica tres (media) y practica cuatro básica primaria; debido al foco poblacional del trabajo, situada en el grado cuarto de primaria, se hizo la investigación teórica pertinente en el semestre de la práctica tres para poder aprovechar la práctica cuatro como escenario de la investigación de campo.

El propósito de este trabajo, con la resolución de problemas, surge a partir de recordar experiencias propias como estudiantes, en lo que se refiere a dificultades para comprender un problema en matemáticas, en particular para la resta; y ahora, en nuestra condición de maestros en formación, surge el interés investigativo por abordar esta problemática, como un fenómeno, que pueda ser estudiado, descrito y entender las posibles dificultades en la comprensión de los enunciados de los problemas que involucran la operación resta, y la relación con las categorías semánticas.

3.6. TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

Para conseguir los registros de las acciones cognitivas de los estudiantes y poder

identificar las características en la comprensión en los enunciados, se diseñaron dos cuestionarios, adicionalmente, se realizó un grupo de discusión con el objetivo de recolectar información suficiente que sustente el trabajo; además, el objetivo principal de la información obtenida es analizar el proceso cognitivo que posee el estudiante cuando se enfrenta problemas de comparación y diferencia e intentar clasificar dichos procesos. Debido a la naturaleza del trabajo, el estudio es cualitativo de tipo descriptivo.

Se optó por realizar dos modos de recolección de información que fueron la encuesta y la observación; para tener suficientes registros sobre cómo piensa el estudiante respecto a nuestro propósito investigativo. Para tener claridad de cada una de estas modalidades, se definirá a continuación:

Según Arias (2006), define la encuesta como:

Una técnica que pretende obtener información que suministra un grupo o muestra de sujetos acerca de sí mismos, o en relación con un tema en particular, además la encuesta puede ser oral o escrita: la oral se fundamenta en un interrogatorio cara a cara o por vía telefónica, en el cual el encuestador pregunta y el encuestado responde y la escrita es la que se realiza mediante un cuestionario que es un instrumento escrito de una serie de preguntas (p.72). Así mismo, que los tipos de pregunta se clasifica en tres: preguntas abiertas, preguntas cerradas y preguntas mixtas, para este trabajo ambos cuestionarios son de preguntas abiertas.

Finalmente, la observación, como lo plantea Arias (2006), es:

Una técnica que consiste en visualizar o captar mediante la vista, en forma sistemática, cualquier hecho, fenómeno o situación que se produzca en la naturaleza o en la sociedad, en función de unos objetivos de investigación preestablecidos; se puede dar de dos formas: observación simple o no participante y observación participante, y a su vez ésta se divide en dos

tipos, libre o no estructurada y estructurada (p.9).

En el trabajo de campo se usó la observación participante no estructurada. A continuación, se muestra los 3 momentos de recolección de información que se aplicaron a los estudiantes, cada uno con sus respectivas descripciones:

3.6.1. Cuestionario #1. Este primer instrumento se realizó con el objetivo de reconocer los procesos cognitivos que el estudiante posee a la hora de enfrentarse a enunciados de problemas con resta de tipo comparación diferencia. El diseño de este cuestionario fue basado en la estructura semántica de tipo comparación en la resta, que proponen autores como Maza, Puig y Cerdán, Luceño, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) y los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN), (1998).

El diseño de la primera pregunta: *“Camila quiere tener 15 colores, pero solo tiene 8. ¿Cuántos colores más debe comprar para tener los que quiere?”* fue formulada apoyados en el documento de Puig y Cerdán(1988) y los lineamientos curriculares del MEN, que establecen la estructura semántica de un enunciado de tipo comparación, ubicando la palabra *“mas”* en la pregunta (estructura mostrada en el marco teórico, comparar 1) y, según Maza (1991), la representación estratégica de la sustracción que da solución al problema sería $15 - 8 = \blacksquare$ (sentencia canónica), pero la lectura literal del problema no es la solución de este, que correspondería a una estructura diferente como la siguiente $8 + \blacksquare = 15$ (sentencia no canónica).

El segundo enunciado: *“Santiago tiene 18 chocolates. Andrés tiene 12 chocolates. ¿Cuántos chocolates más que Andrés tiene Santiago? Dibuje como entendió el problema paso a paso, hasta encontrar su solución”*. También fue formulado a partir del documento de Puig y Cerdán (1988), (comparar 1) y se resuelve, como lo postula Maza (1991), con la sentencia canónica $18 - 12 = \blacksquare$ y a su vez la sentencia no canónica $12 + \blacksquare = 18$ representa el enunciado, pero no su método de solución. Al solicitar al estudiante, realizar una representación gráfica de la solución del problema, se buscó que la sentencia canónica establecida evidenciara el esquema mental que realizó, para describir a partir

de sus acciones cognitivas, la manera como comprendió el problema.

El último problema formulado en el cuestionario #1, *“Ana tiene 14500 pesos y Juan tiene 8300 pesos. ¿Cuántos pesos tiene Ana más que Juan?”* Este problema fue tomado textualmente de los DBA (2015) que muestra, según teóricos, la estructura semántica de comparación y se resuelve por la sentencia canónica, así: $14500 - 8300 = \blacksquare$ y su representación no canónica $8300 + \blacksquare = 14500$.

El cuestionario #1 se realizó con el propósito de averiguar por el primer objetivo específico de este trabajo, y de esta forma, poder indagar por la comprensión de los estudiantes en este tipo de enunciados que formulan problemas de suma y resta.

3.6.2. Cuestionario #2. El segundo instrumento, tiene como propósito, registrar acciones que den cuenta de la comprensión de los estudiantes en el momento de leer el enunciado, haciendo preguntas específicas sobre lo que el estudiante lee en el problema, centrándose en la argumentación y la descripción de lo que plantea el enunciado y no en la solución. Para el diseño de estas preguntas se tuvieron en cuenta los estudios de autores como Polya, 1965, Maza, 1991, Bransford y Stein, 1993, Luceño, 1999, donde señalan y explican cómo se debe comprender y resolver un problema de tipo comparación en la resta y de este modo poder caracterizar la comprensión de los estudiantes de grado 4 cuando resuelven problemas de tipo comparación con la resta.

A continuación, se muestra el problema del cuestionario número dos, *“Diego tiene 8 caramelos más que Laura. Diego tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Laura?”* y se realizaron las siguientes preguntas abiertas las cuales fueron tomadas del esquema que propone Luceño (1999): *“Cuando lee el problema ¿Qué es lo primero que ve?, ¿Cuáles son las partes del problema?, ¿Cuáles datos da el enunciado para resolver el problema?, ¿Qué operación utilizaría para encontrar una respuesta y por qué? Y ¿Hay otra manera de solucionar el problema? Explíquela.*

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Se tendrá en cuenta, en las respuestas de los estudiantes, el uso que hacen de las proposiciones que encuentran en el enunciado de un problema, en particular será nuestro propósito y estará reflejado en los problemas, el uso de la categoría comparación diferencia para la resta.

4.1. ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO #1

Criterios de Análisis

El análisis de la información obtenida por el cuestionario #1 fue mediante unas categorías establecidas a partir del marco teórico, lo cual nos facilita comprender y ubicar las respuestas de los estudiantes. El cuestionario consta de 3 problemas que involucran la resta, en los que será importante la comprensión de su enunciado, a continuación, son:

- 1- PREGUNTA 1: Camila quiere tener 15 colores, pero solo tiene 8. ¿Cuántos colores más debe comprar para tener los que quiere?
- 2- PREGUNTA 2: Santiago tiene 18 chocolates. Andrés tiene 12 chocolates. ¿Cuántos chocolates más que Andrés tiene Santiago? Dibuje como entendió el problema paso a paso, hasta encontrar su solución.
- 3- PREGUNTA 3: Ana tiene 14500 pesos y Juan tiene 8300 pesos. ¿Cuántos pesos tiene Ana más que Juan?

4.1.1. Descripción Cualitativa de las Preguntas. Para analizar cada problema, se tuvieron en cuenta las categorías establecidas en este documento y sustentadas en el marco teórico, de tal forma que dirige la interpretación de las respuestas escritas por los estudiantes, para identificar si tienen una comprensión adecuada de los enunciados en la resolución de problemas o, por el contrario, existen procesos incompletos en la

identificación de dichas categorías y al mismo tiempo mostrar las posibles dificultades.

A continuación, se presenta la relación de las respuestas de los estudiantes y los conceptos que se plantearon en este documento:

Como todos los problemas pertenecen a la misma categoría semántica de tipo comparación, entonces se establecieron criterios para interpretar todas las preguntas por igual; los estudiantes deben evidenciar en sus respuestas un énfasis en la pregunta planteada, además dentro de la misma respuesta debe mostrar el uso de argumentos, agentes, verbos y términos relacionales, que permitan identificar cada uno de los componentes semánticos. También deben plantear la operación aritmética (sentencia) que resuelva el problema que evidencie más su comprensión implícita del enunciado y no solo su lectura literal, realizando la operación matemática de manera correcta para observar los conceptos matemáticos que domina el estudiante.

En la justificación, se busca indicios de interpretación estructural en el enunciado de tipo comparación cuando optan por elegir una operación y si logran relacionar todas las proposiciones o guiarse solo por palabras claves en el enunciado.

4.2. DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DE LOS RESULTADOS

En este apartado se analizará cada una de las categorías establecidas a partir del marco teórico y otras que emergieron en las respuestas de los estudiantes, también su nivel de ocurrencia en las respuestas dadas por los estudiantes, para cada una de las preguntas del cuestionario.

Las siguientes categorías estarán relacionadas con las tres preguntas del cuestionario; estas a su vez serán el marco donde analizaremos las respuestas de los estudiantes:

- Niveles de comprensión lectora
- Comprensión matemática

- Resolución de problemas (sentencias)
- Estructura del enunciado
- Componentes semánticos
- Categoría semántica comparar
- Conocimientos previos
- Estrategias de solución

4.2.1. Niveles de comprensión lectora: Los criterios para identificar esta categoría se basan en el nivel de lectura comprensiva del estudiante al momento de enfrentar los problemas verbales, mostrando las siguientes sub-categorías que están estructuradas de tal forma que una es consecuente de las anteriores:

- a- Literalidad
- b- Retención
- c- Organización
- d- Inferencia
- e- No categorizables*

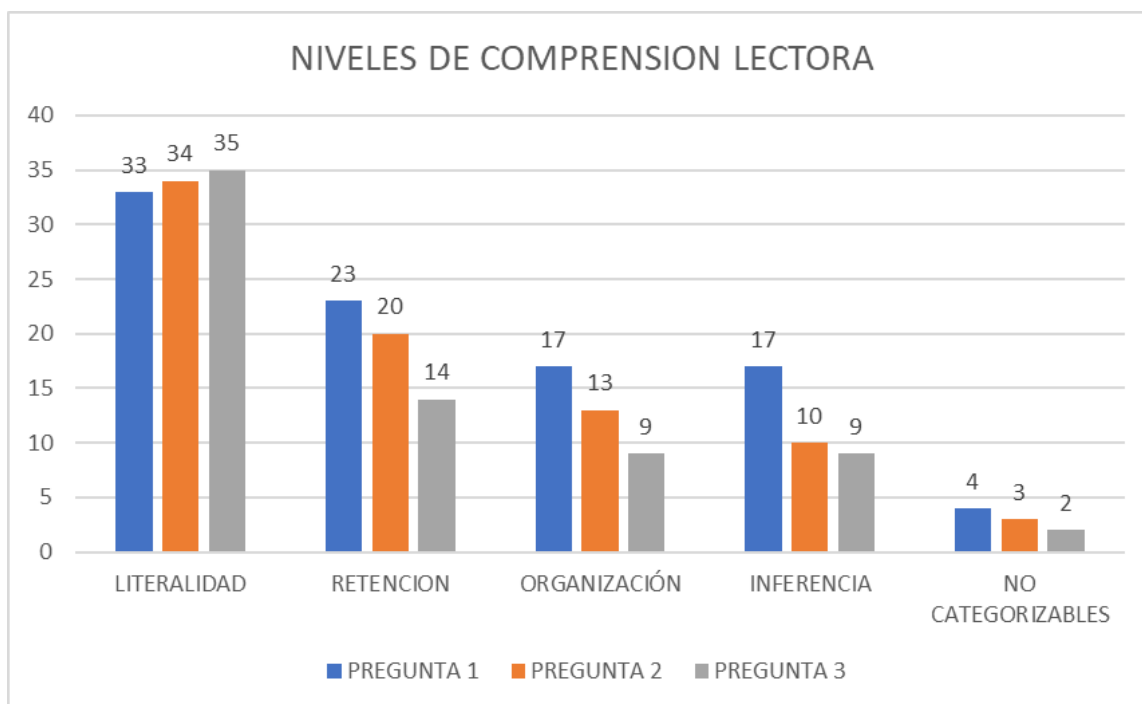
(El inciso “e” señala las respuestas que no se le identificaron ningún indicio de alguna de las sub-categorías anteriores).

A continuación, se muestra la gráfica de la categoría, dividida en las 5 sub-categorías para las preguntas 1, 2 y 3 del cuestionario.

Tabla 14. categorías de niveles de comprensión lectora.

	LITERALIDAD	RETENCION	ORGANIZACIÓN	INFERENCIA	NO CATEGORIZABLES
PREGUNTA 1	33	23	17	17	4
PREGUNTA 2	34	20	13	10	3
PREGUNTA 3	35	14	9	9	2

Figura 7. Categoría niveles de comprensión lectora.



Fuente: los autores

Cada uno de los niveles de comprensión lectora están definidos en el marco teórico, estos se interpretaron de tal forma que se pudieran reflejar en las respuestas de los estudiantes. La forma de analizar los datos según cada parte fue la siguiente:

- a- Literalidad: cuando el estudiante reconozca del contenido explícito en el enunciado, ubicando los datos y operación suma en su respuesta. Pues esto evidencia una lectura literal de la información que brindada el enunciado del problema.
- b- Retención: el estudiante alcanza este nivel cuando además de reconocer toda la información explícita en el enunciado, interpreta estos contenidos. Es decir, intenta responder a la pregunta del problema con los datos obtenidos.
- c- Organización: se logra cuando se supera los dos niveles anteriores y además tiene un orden lógico entre los elementos que da el enunciado, esto se ve reflejado en la coherencia entre la respuesta al problema y la justificación del proceso realizado.

- d- Inferencia: es el último nivel para este tipo de problemas y se alcanza una vez logra interpretar e identificar información que no está explícita (implícita) en el enunciado; se reconoce en el estudiante cuando, en sus respuestas, incluye un valor numérico, un dato o propone una operación que no está establecida literalmente en el enunciado.

Teniendo en cuenta lo anterior, se observó que la mayoría de los estudiantes están ubicados en el nivel de literalidad. La inferencia no se logra sin la organización que implica la coherencia y orden lógico entre los elementos del enunciado, difícilmente se llegó al nivel de inferencia correcto. Situación que preocupa, puesto que, en el grado cuarto, según los estándares básicos de competencias en matemáticas, debieron superar este proceso en lo que respecta la resolución de problemas aditivos y aun así, la mayoría de estudiantes no han superado la literalidad en la comprensión de enunciados de problemas que involucren la categoría comparación en la resta.

4.2.2. Comprensión matemática: Cuando se va a resolver un problema, no solo es importante la comprensión lectora, sino que también lo son, la interpretación y conceptos matemáticos en el cual están involucrados cada parte del enunciado. Esta categoría se divide en tres sub-categorías, las cuales son:

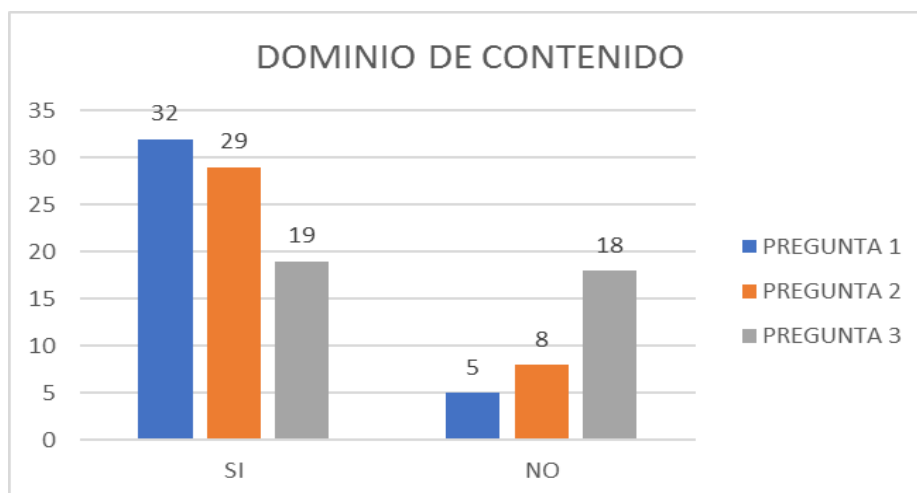
- a- Dominio de contenido
- b- Dominio como significación
- c- Dominio conceptual

A partir de estas, se pretende describir la comprensión de los estudiantes en estas subcategorías, que a su vez, están asociadas a la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 15. El dominio de contenido matemático en los estudiantes.

	PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
SI	32	29	19
NO	5	8	18

Figura 8. Dominio de contenido matemático en los estudiantes.



Fuente: los autores

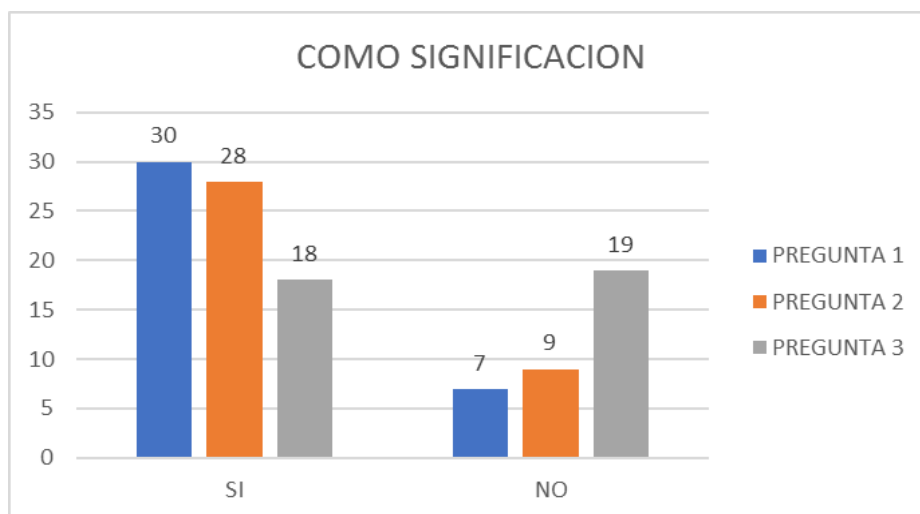
De acuerdo con los procedimientos realizados por los estudiantes en las respuestas que intentaron en cada una de las preguntas del cuestionario #1, se observó con mayor frecuencia que presentaban una operación suma o resta de manera automatizada, en el sentido de sumar o restar, aún sin hacer un razonamiento contextualizado del problema. Esta fue la tendencia en las tres preguntas.

Cuando se habla de dominio de contenido, refiere al desarrollo de algoritmos que posee el estudiante, independientemente si la operación planteada por ellos es la pertinente o no para resolver el problema, es decir, realizó correctamente la operación aritmética. Al analizar los problemas 1 y 2, los niños saben resolver las operaciones aritméticas planteadas, pero para el 3er. problema, se encuentra un nivel homogéneo entre los estudiantes que si poseen dominio y los que no lo poseen, esto da muestra que para las cifras de este problema presentan un mayor grado de dificultad en resolverlo.

Tabla 16. Comprender como significación matemática en los estudiantes

	PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
SI	30	28	18
NO	7	9	19

Figura 9. Comprensión como significación matemática en los estudiantes.



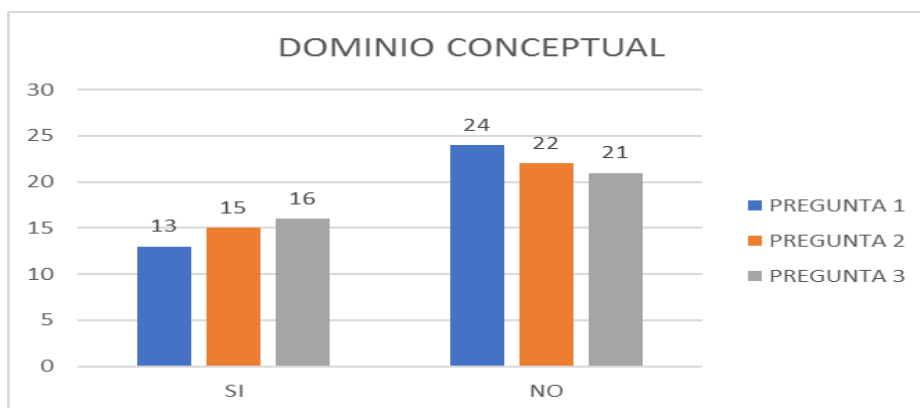
Fuente: los autores

Los enunciados de los problemas del cuestionario #1, tienen la intencionalidad de averiguar por la estructura aditiva, de forma canónica y no canónica y por la categoría semántica: comparar. Estos son los objetos matemáticos por los que indaga este trabajo. También, se pudo ver que los estudiantes logran comprender los significados de los elementos del enunciado, utilizando sus significados personales para lograr vincularse a las situaciones propuestas en cada problema, que les permitió familiaridad con su entorno y esto facilitó en parte su comprensión.

Tabla 17. Comprensión como domino conceptual en los estudiantes

	PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
SI	13	15	16
NO	24	22	21

Figura 10. Comprensión conceptual matemático en los estudiantes.



Fuente: los autores

En el sentido que lo plantea Piaget o la psicología cognitiva, basada en sistemas de procesos de información, el 50% de los estudiantes de grado cuarto de esta muestra (intencional), les cuesta desarrollar un proceso cognitivo para solucionar un problema, que dé cuenta de la comprensión matemática, relacionando conceptos, a través de acciones organizadas y que permitan ver la manera como se relacionan con las operaciones que vinculan a estos conceptos. Lo que evidencia una dificultad en la comprensión de los enunciados y no se logra identificar el objeto matemático.

Para que un estudiante tenga dominio conceptual en las 3 preguntas, deben resolverlo por la operación de la resta planteada correctamente, pues todos estos están estructurados (intencionalmente) con base en la categoría comparación- diferencia, donde las palabras “más que” están en cada una de ellos y al relacionarlas con las cantidades de referencia y comparada, logran interpretar que el proceso aritmético que permite obtener el resultado es por medio de la resta; sin embargo, más del 50% no lograron este nivel de comprensión matemática.

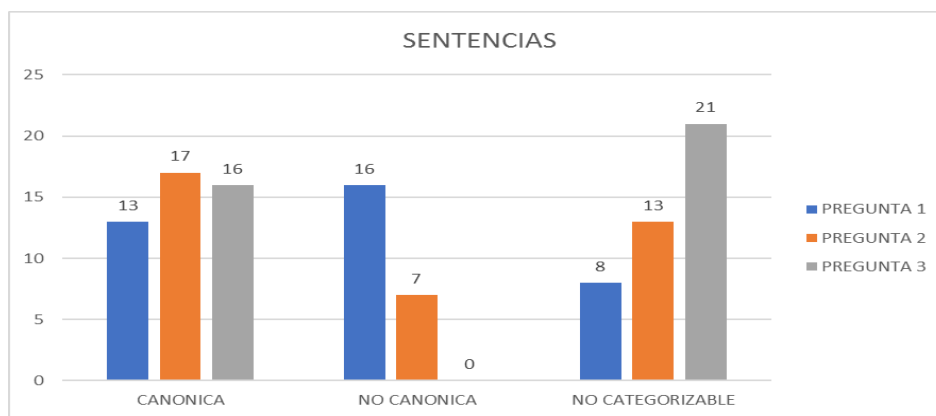
Para terminar esta sesión, cabe resaltar que el dominio conceptual es una subcategoría de la comprensión matemáticas que debe ser tratada con más profundidad. Sin embargo el objetivo de este trabajo, es determinar si los estudiantes comprenden los enunciados de tipo comparación y al observar los niveles de esta categoría, se encuentran que no son muy alentadores para estudiantes de grado cuarto.

4.2.3. Resolución de problemas (sentencias): Para resolver un problema aditivo existen dos formas aritméticas de hacerlo: por suma o mediante la resta, siempre y cuando utilice la información del enunciado adecuadamente, en el sentido lógico de las proposiciones y estrategias de solución al problema, así que el estudiante puede optar por cualquiera de las dos formas, pero es importante que, a su vez, evidencie un proceso cognitivo coherente, respecto a la estructura aditiva. En esta categoría, se tendrá en cuenta si el estudiante resuelve el problema por la forma canónica o no canónica, de manera estructurada y o mediante estrategias aritméticas que resuelven el problema.

Tabla 18. Sentencias canónicas y no canónicas.

SENTENCIAS	PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
CANONICA	13	17	16
NO CANONICA	16	7	0
NO CATEGORIZABLE	8	13	21

Figura 11. Sentencias canónicas y no canónicas



Fuente: los autores

Como se estableció en un capítulo anterior, las sentencias son operaciones planteadas de tal forma que reflejan la estructura aritmética del enunciado, el estudiante puede proponer dos tipos de sentencia, la canónica, que matemáticamente resuelve el problema y la no canónica, que refleja la estructura del problema.

A continuación, se mostrará cada tipo de sentencia que sugería cada una de las

preguntas, para los estudiantes que no plantearon alguna de las dos formas se les asignó como no categorizable:

SENTENCIAS CANONICAS:

Pregunta 1: $15 - 8 = \blacksquare$

Pregunta 2: $18 - 12 = \blacksquare$

Pregunta 3: $14500 - 8300 = \blacksquare$

SENTENCIAS NO CANONICAS:

Pregunta 1: $\blacksquare + 8 = 15$

Pregunta 2: $\blacksquare + 12 = 18$

Pregunta 3: $\blacksquare + 8300 = 14500$

Aunque los estudiantes tienen la posibilidad de plantear la operación de los problemas de forma canónica o no canónica, aun así, hay muchos estudiantes que no lo logran organizar la información de esta forma para los enunciados de tipo comparación, por tanto, se reconoce una dificultad para resolver problemas de estructura aditiva que involucran sentencias canónicas y no canónicas, como consecuencia de la ausencia para comprender la estructura del enunciado y estrategias para resolver un problema de tipo comparación para el caso de la resta.

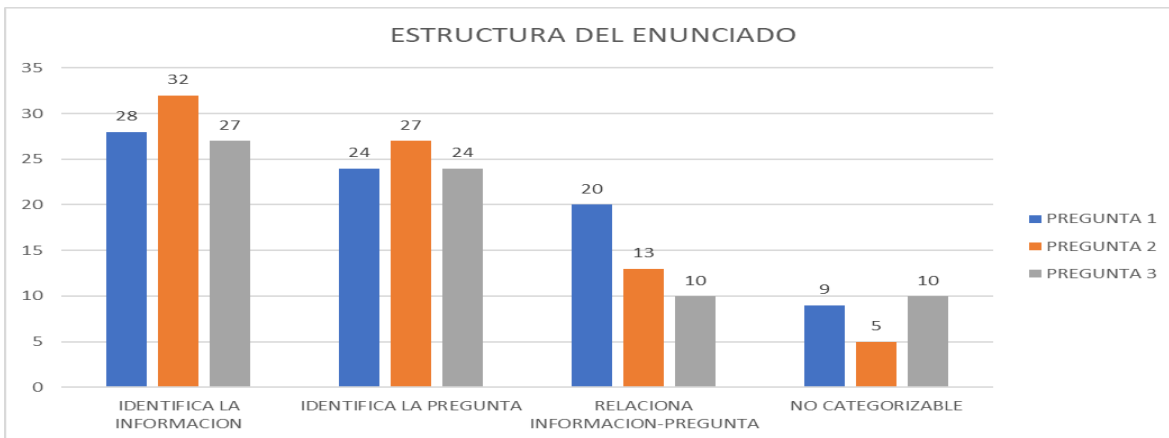
4.2.4. Estructura del enunciado: A partir de lo que afirman Puig y Cerdán (1988), los enunciados de los problemas tienen una estructura general, definida a través de tres proposiciones: dos que son informativas y una que corresponde a la pregunta del problema, en este sentido, las respuestas de los estudiantes fueron analizadas en torno a: si identifica la información que le está suministrando el problema, si identifica la pregunta del problema y finalmente si relaciona de manera lógica y organizada la información y la pregunta (los que se encuentran en esta sección han logrado identificar la información y la pregunta); para otras respuestas se les consideró no categorizables. En esta categoría, se observó si el estudiante lograba identificar cada una de estas partes del enunciado para poder comprender el problema aritmético verbal propuesto. Se consideró importante que el estudiante reconociera el propósito de cada una de las

proposiciones en la resolución del problema.

Tabla 19. Estructura del enunciado.

	IDENTIFICA LA INFORMACION	IDENTIFICA LA PREGUNTA	RELACIONA INFORMACION-PREGUNTA	NO CATEGORIZABLE
PREGUNTA 1	28	24	20	9
PREGUNTA 2	32	27	13	5
PREGUNTA 3	27	24	10	10

Figura 12. Estructura del enunciado.



Fuente: los autores

Para analizar la estructura general de los enunciados, se tuvo en cuenta, la información como el reconocimiento de sujetos, cantidades y proposiciones, evidenciados en las respuestas y justificaciones de los niños, es decir, si dentro de lo que ellos escribieron están planteados los nombres, los números y un orden coherente respecto al enunciado. Para reconocer si el estudiante identifica la pregunta, simplemente debe mostrar un intento por responderla, dando cuenta del proceso que realizó.

Indagar por la estructura de los enunciados es otra de las categorías que aporta de manera significativa a la intención de este trabajo, puesto que permite dar cuenta de la influencia que tienen los planteamientos de un problema en la forma en que el estudiante propone una respuesta. De esta manera, se puede observar la variabilidad que hubo en las respuestas de las tres preguntas del cuestionario, evidenciando con ello, que hubo

distintas interpretaciones para proponer el orden de las proposiciones del enunciado, tanto en la parte informativa como en la pregunta del problema.

Al observar la gráfica se puede determinar que hay diferentes cambios entre preguntas dependiendo de las sub-categorías establecidas, para la pregunta #1 un alto número de estudiantes cumplen satisfactoriamente la categoría de estructura del enunciado, pero para las preguntas #2 y #3 los estudiantes oscilan entre las demás sub-categorías. Por lo que se puede concluir que existe algún factor en estas dos preguntas que les dificulta a los estudiantes en identificar y relacionar la información y la pregunta.

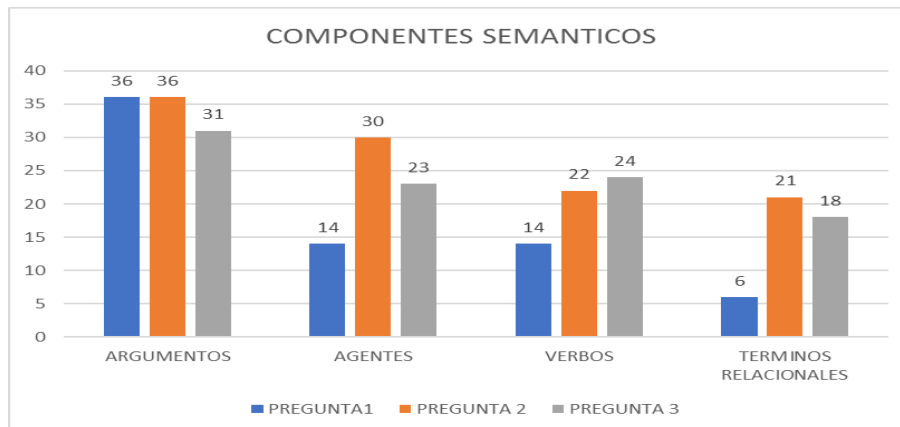
4.2.5. Componentes semánticos: Esta categoría muestra qué partes del enunciado identifican los estudiantes, las cuales utilizan para resolver completamente el problema de tipo comparación; si los 37 estudiantes que fueron encuestados cumplen con todas estas, están muy próximos a comprender los enunciados de tipo comparación. Las partes son:

- a- Argumentos
- b- Agentes
- c- Verbos
- d- Términos relacionales

Tabla 20. Categoría componentes semánticos

COMPONENTE	ARGUMENTOS	AGENTES	VERBOS	TERMINOS RELACIONALES
PREGUNTA1	36	14	14	6
PREGUNTA 2	36	30	22	21
PREGUNTA 3	31	23	24	18

Figura 13. Categoría componentes semánticos.



Fuente: los autores

Las interpretaciones de cada una de las respuestas de los estudiantes con estos aspectos estuvieron orientadas en relación con lo que plantea Puig y Cerdán en el marco teórico. Resalta considerablemente la cantidad de estudiantes que identifican los argumentos (datos numéricos), pero en los demás varían la cantidad que logran identificarlos. Esto se reconoce en como escribieron las respuestas de los problemas, mostrando un interés en su mayoría por el número, más que por la estructura para resolver el problema.

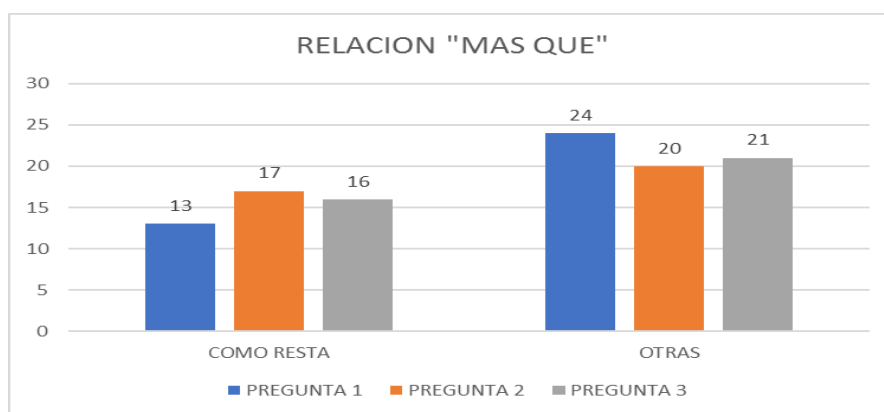
Al observar específicamente la pregunta #1, en relación con los agentes, se evidencia una dificultad sobre ésta, debido al planteamiento del enunciado, ya que, al poseer un solo sujeto, no permite comparar cada uno de los datos a otro agente explícito. Posiblemente esta dificultad afecte al reconocimiento de los verbos que influye en el sentido que se le da al texto en tiempo y acción y a su vez en los términos relacionales encargados de establecer una comparación entre proposiciones.

4.2.6. Categoría semántica (comparar). En este punto, el foco de atención es si el estudiante resuelve el problema por medio de la sentencia canónica, que es la pertinente para los problemas de tipo comparación. Por lo que el niño debe plantear una resta a partir del término relacional “más que”.

Tabla 21. Categoría semántica enfocada en el “más que” con la operación de la resta

	PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
COMO RESTA	13	17	16
OTRAS	24	20	21

Figura 14. Categoría semántica enfocada en el “más que” con la operación de la resta



Fuente: los autores

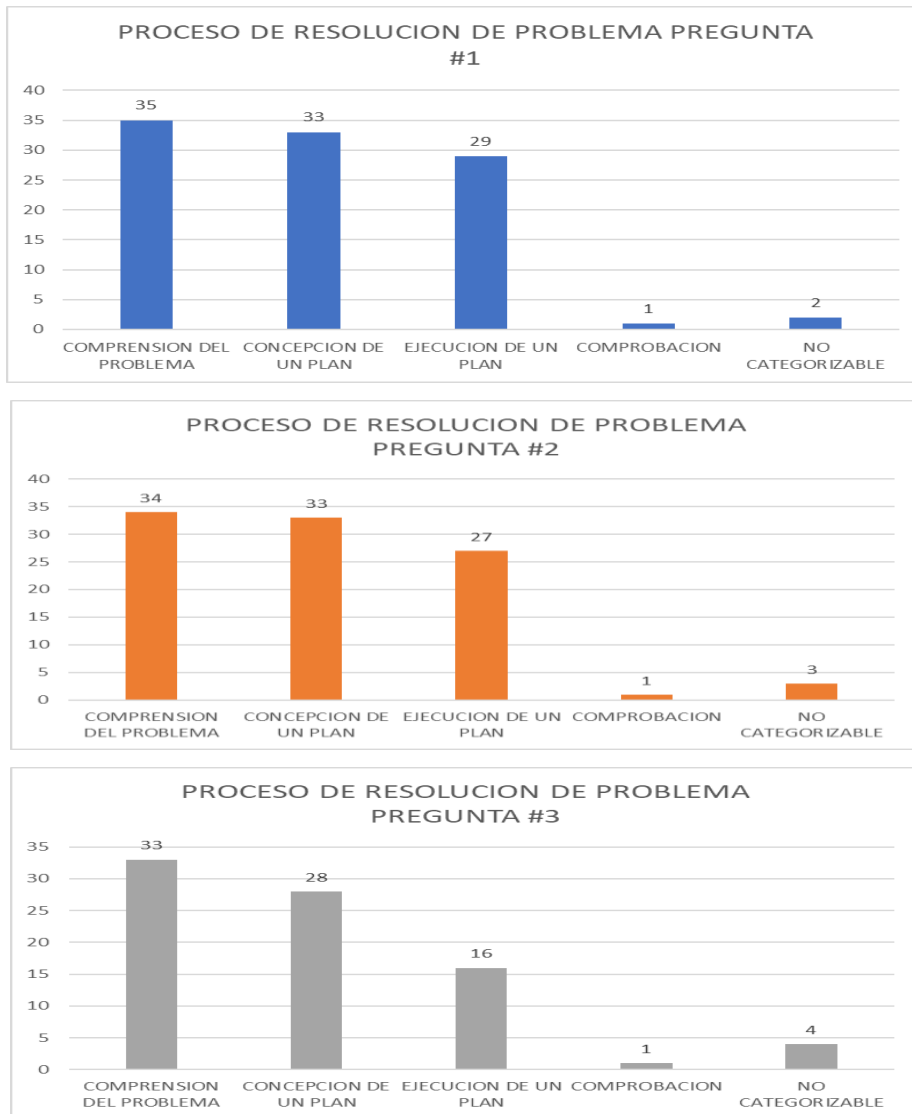
Los estudiantes muestran dificultad en reconocer el termino relacional “más que” como una comparación que indica la operación de la resta, donde es más visible en la pregunta #1 posiblemente por la existencia de un solo agente en el enunciado; además en la pregunta #3 puede ser un factor influyente el tamaño de los números. Con esto podemos deducir que la interpretación del “más que” puede ser afectada por más componentes del enunciado, no necesariamente por su función de comparar proposiciones.

4.2.7. Conocimientos previos. Para esta categoría se analizó los pre-saberes que los estudiantes de grado cuarto deben tener, según las competencias del pensamiento numérico en el grado 3°, además, al estar trabajando con un texto guía, los estudiantes también muestran un proceso aritmético para resolver un problema, sin embargo, no es sinónimo de comprensión replicar dicho proceso; pero es una excelente guía para generar procesos mentales en la resolución de problemas.

Tabla 22. Categoría conocimientos previos a través de la resolución de problemas

PROCESOS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS	PREGUNTA 1	PREGUNTA 2	PREGUNTA 3
COMPRESION DEL PROBLEMA	35	34	33
CONCEPCION DE UN PLAN	33	33	28
EJECUCION DE UN PLAN	29	27	16
COMPROBACION	1	1	1
NO CATEGORIZABLE	2	3	4

Figura 15. Categoría conocimientos previos evidenciados en la resolución de problemas



Fuente: los autores

Las etapas para resolver un problema que se muestran en las gráficas, están propuestas por Polya(1965), citado por Luceño (1999), donde la etapa básica es comprensión del problema y su etapa final es comprobación. Se puede observar que la mayoría de los estudiantes logran llegar satisfactoriamente hasta la tercera etapa: ejecución de un plan, con el objetivo de dar una respuesta a la pregunta del problema. Pero, para llegar a la etapa final, debe saber reconocer las dos sentencias y su relación entre ellas, por lo que le da un verdadero significado a la palabra comprensión; pues, al comprobar su plan, está razonando si existe un método diferente que llegue al mismo resultado y al mismo tiempo cuestiona su proceso aritmético en relación con la información obtenida en el enunciado.

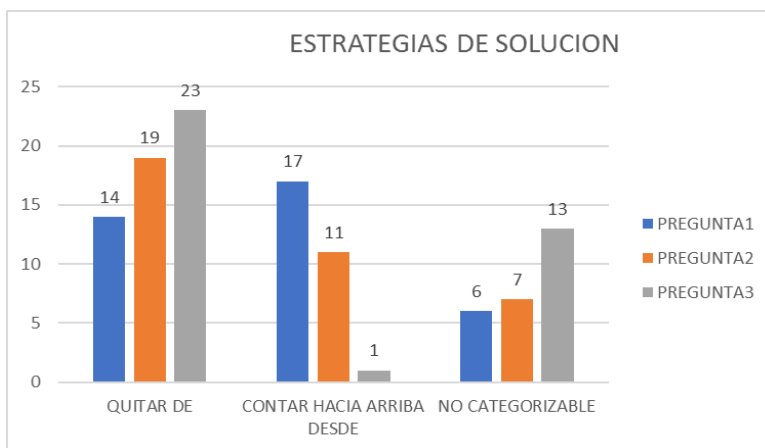
Al ubicarse un solo estudiante en dicha etapa, muestra que el proceso no se completó para los demás, por lo tanto, se puede afirmar que la mayoría se conforma con obtener un resultado directo sin cuestionar su proceso aritmético. Además, en la pregunta #3 se observa una cantidad de estudiantes que se encuentran entre los procesos concepción de un plan y ejecución de un plan, lo cual puede tener como causa el tamaño de los datos en el enunciado.

4.2.8. Estrategia de solución. Según Puig y Cerdán (1988), existen diez estrategias de solución que recurren los estudiantes al momento de resolver un problema aritmético, sin embargo, para esta categoría solo se consideró dos de estos, debido a la naturaleza de los problemas enfocados en la resta de tipo comparación, los cuales son “quitar de” y “contar hacia arriba desde”.

Tabla 23. Estrategias de solución en problemas aritméticos verbales de tipo comparación.

ESTRATEGIAS DE SOLUCION	QUITAR DE	CONTAR HACIA ARRIBA DESDE	NO CATEGORIZABLE
PREGUNTA 1	14	17	6
PREGUNTA 2	19	11	7
PREGUNTA 3	23	1	13

Figura 16. Estrategias de solución en problemas aritméticos verbales de tipo comparación.



Para la primera estrategia “quitar de”, consiste en separar del total la otra cantidad y se tiene la solución por el recuento de lo que queda, es decir, los estudiantes realizan una resta; los que logran llegar a esto, es debido a la organización de los números, obteniendo una respuesta razonable. Para la siguiente subcategoría “contar hacia arriba desde” invoca acciones aditivas, consiste en contar desde la cantidad menor hasta la mayor, en otras palabras, cuando se responde por medio de una suma. Finalmente, encontramos la no categorizables que es donde se ubican las respuestas que no realizaron bien las operaciones o plantearon algo completamente diferente de lo que demanda el problema.

4.3. ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO #2

CRITERIO DE ANALISIS

El cuestionario 2 consta de un problema *Diego tiene 8 caramelos más que Laura. Diego tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Laura?*; se analizará con el objetivo de complementar el análisis del cuestionario #1, debido que el enfoque de las preguntas es de carácter cualitativo y precisa las características en el enunciado, a través de las siguientes preguntas:

- *Cuando lee el problema ¿Qué es lo primero que ve?*
- *¿Cuáles son las partes del problema?*
- *¿Cuáles datos da el enunciado para resolver el problema?*
- *¿Qué operación utilizaría para encontrar una respuesta y por qué?*
- *¿Hay otra manera de solucionar el problema? Explíquela.*

DESCRIPCION DE LOS RESULTADOS

A continuación, se analizará la cantidad de ocurrencia de las características en cada una de las preguntas con base al problema *Diego tiene 8 caramelos más que Laura. Diego tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Laura?*

Pregunta 1. Cuando lee el problema ¿Qué es lo primero que ve?

Según Puig y Cerdán (1988), postulan una estructura del problema dependiendo de qué categoría semántica sea; como nuestro foco es la categoría comparación, muestra la siguiente estructura en el problema.

La categoría comparación se divide en tres partes: *la referencia, comparada y diferencia*. En este problema la incógnita se encuentra en la parte de referencia y los datos en las otras dos, de la siguiente manera:

Comparada: Diego tiene 34 caramelos.

Diferencia: Diego tiene 8 caramelos más que Laura.

Referencia: ¿Cuántos caramelos tiene Laura?

Al observar las respuestas, se identifica tendencias en los estudiantes para elegir partes específicas del problema, dando a entender que no leen el enunciado en su totalidad debido al objetivo de encontrar fragmentos fundamentales para su resolución; justificando las dificultades del primer cuestionario, donde la comprensión del enunciado

fue mínima. Cuando se lee un problema, lo primero que se debe ver es la relación de toda la información en el enunciado.

Pregunta 2. ¿Cuáles son las partes del problema?

Puig y Cerdán proponen una estructura lógica del enunciado de un problema, de tal forma que tiene 3 proposiciones, dos primeras que contienen la información (informativas) y una tercera que indica la pregunta del problema. Como se muestra a continuación:

Hay n x que son A $(\exists_n x)Ax$

Hay m x que son B $(\exists_m x)Bx$

¿Cuántos x hay que son P? $(\exists_p x)Px$

Aplicando este esquema en el enunciado del problema, las variables n y m son los datos numéricos, x es el sustantivo que complementa las cantidades para formar las proposiciones A y B, finalmente P es la pregunta.

Dentro del problema se estructuró de la siguiente forma:

Proposición A: Diego tiene 8 caramelos más que Laura. ($n=8$ y $x=caramelos$)

Proposición B: Diego tiene 34 caramelos. ($m=34$ y $x=caramelos$)

Pregunta: ¿cuántos caramelos tiene Laura? (p= pregunta)

Al observar los resultados, muestra que la mayoría de los estudiantes no reconocen todas las proposiciones que conforma un problema o las desconocen, posiblemente influenciados por la necesidad de identificar lo importante para resolverlo; es decir, les interesa más como resolverlo que como entenderlo.

Pregunta 3. ¿Cuáles datos da el enunciado para resolver el problema?

Según la real academia española, un dato es la información sobre algo concreto que permite su conocimiento exacto o sirve para deducir las consecuencias derivadas de un hecho. Siguiendo esto, se considera dato en un problema, a las cantidades numéricas que sirven para hallar otra cantidad desconocida. Teniendo en cuenta la relación que presentan en su contexto.

Los estudiantes, al solicitarle un reconocimiento de los datos en el enunciado, señalan la parte numérica en conjunto a otros componentes que la acompañan, de tal forma que señalan proposiciones en vez del dato. Esto da muestra de vacíos conceptuales en la resolución de problemas, generando confusiones en identificación de partes específicas del enunciado. Si el niño no sabe la diferencia entre un dato y una proposición, puede generar dificultades en la comprensión del problema.

A la luz de la información obtenida, la mayoría de los estudiantes no son capaces de identificar los datos o confunden el término con las proposiciones, por lo que lo hace un factor influyente en las categorías de comprensión de una resolución de problemas.

Pregunta 4. ¿Qué operación utilizaría para encontrar una respuesta y por qué?

Maza postula una clasificación de sentencias para resolver un problema, las cuales son: la sentencia canónica y no canónica donde una representa el método de solución ($34 - 8 = \blacksquare$) y la otra la estructura aritmética del enunciado ($8 + \blacksquare = 34$). Esta pregunta tiene como propósito, determinar cuál es el tipo de sentencia que el estudiante usa para comprender y resolver el problema.

La mayoría optó por el método de solución canónico para el problema de tipo comparación, y un caso particular que realizó el método no canónico; sin embargo, existe aún una gran cantidad de estudiantes que no justifican como realizan dicha operación con los datos, por lo que no se puede concluir si aplican algún método de solución mencionado anteriormente o si existió una comprensión detallada del enunciado.

La estructura del problema y el tamaño de los datos influye en la selección de solución canónico o no canónico que determinen los estudiantes, para este caso, la sentencia no canónica es más compleja, debido a que el conteo aditivo que deben realizar debe contener números más grandes donde la capacidad memorística no es suficiente, por lo tanto, optan por determinar la operación que brinde el resultado directamente. Esto concuerda con las soluciones del cuestionario #1, debido a que al tener datos pequeños o grandes y el orden de las proposiciones, guía al estudiante en el método de solución más fácil para cada uno de ellos.

Pregunta 5. ¿Hay otra manera de solucionar el problema? Explíquela

El objetivo de esta pregunta es reconocer si los estudiantes tienen la capacidad de identificar la relación entre las sentencias canónicas y no canónicas, de tal forma que al haber seleccionado un método de solución en la pregunta anterior, sean capaces de observar y determinar, desde otra perspectiva, la solución al problema, generando un análisis más profundo del enunciado.

Al observar los resultados de esta pregunta, se evidencia que en los estudiantes existe una dificultad en la relación entre sentencias, 29 de 37 estudiantes optan por resolver el problema con operaciones no relacionadas inversamente a la resta (como la multiplicación y división) y que no brindan el mismo resultado a la sentencia canónica elegida en el punto anterior.

Al no encontrar una relación entre sentencias, subyace una dificultad en la comprensión del problema, debido a que no logran completar el proceso de resolución de un problema, que no queda solo en la realización de una operación aritmética, si no que recae en el análisis, lectura de factores y organización del enunciado, relación entre proposiciones, tamaño de números y postulación de métodos de solución y alternativos para el problema.

5. CONCLUSIONES

5.1. CONCLUSIONES ESPECIFICAS

Con relación al primer objetivo: Contrastar la estructura semántica de Comparación de los problemas de Resta y lo que plantean los estudiantes de grado 4° determinando el uso que le dan a los indicios verbales.

- Los estudiantes al intentar resolver los problemas muestran en sus respuestas que no todos logran establecer una relación entre los datos y la pregunta que suministra el enunciado.
- Según lo observado, entre 10 y 17 estudiantes aproximadamente responden a la pregunta del problema relacionando las tres proposiciones en conjunto; pero la mayoría responde con un número sin tener en cuenta de los componentes semánticos.
- En lo que se refiere a la concepción del término relacional “más que” como una resta, muestra que la mayoría interpreta dicho termino como una suma, por lo que se puede intuir que los estudiantes trabajan más con sinónimos para definir una operación en vez de vincular toda la información con este término.
- Aunque se evidencia que los estudiantes identifican las partes de un enunciado, suelen confundirse entre proposiciones y datos, con esto se deduce que dan bastante relevancia a los números debido a que el problema es parte de la asignatura de matemáticas.

Con todo lo anterior, se concluye que los estudiantes saben leer y logran identificar cada uno de los componentes del enunciado, pero no establecen una relación entre estos para ejecutar el procedimiento algorítmico adecuado, por lo que los problemas de tipo

comparación son interpretados de otra forma.

Con relación al segundo objetivo: describir y analizar las dificultades y errores que presentan los estudiantes de grado 4° para resolver problemas de Comparación para la sustracción.

- Al analizar las respuestas (tomando como respuesta todo lo que escribieron) muestra que los estudiantes poseen dominio de contenido matemático, es decir, saben organizar, sumar y restar los números e identificar quien es mayor y menor; al mismo tiempo, intentan relacionar los algoritmos con el enunciado para responder la pregunta, pero existe una dificultad, en más de la mitad de los estudiantes, donde realizan una operación diferente a la que sugiere la comparación entre las proposiciones con la pregunta y el término “más que” (categoría comparación). Los estudiantes deben identificar la sentencia canónica con la lectura del enunciado, debido a que es la pertinente para obtener el resultado.
- Como se estipuló en conclusiones anteriores, los niños saben leer literalmente, reconocen las partes del enunciado intuitivamente, es decir, usan el sujeto, verbo, argumentos y el termino relacional del enunciado como parte de la respuesta, pero no alcanzan a llegar a una lectura inferencial, es probable que al ser un problema del área de matemáticas se condicionen a solo números y algoritmos, sin prestar mayor atención a la forma como están planteadas las proposiciones dentro del enunciado, situación que obstaculiza la comprensión del problema.
- En los planteamientos algorítmicos, varios estudiantes proponen la solución de forma no canónica o incluso otras estructuras erróneas que no tienen relación con el enunciado, esto es una dificultad si se considera el nivel estudiantil donde están ubicados, pues la competencia de comprensión de problemas en la resta debió estar alcanzada finalizando el tercer grado de escolaridad.

- A lo que respecta la relación de orden de los datos, no se evidencia dificultad alguna, por lo que se puede concluir que el contenido matemático está claro para la gran mayoría.

Para el nivel de grado cuarto, la comprensión y resolución de problemas con la resta debería estar alcanzada en todos los estudiantes, sin embargo, aún existen dificultades en una parte de la población, donde no tienen claro que la estructura aritmética que da solución al problema (canónica) es distinta a la estructura que refleja el enunciado del problema (no canónica).

5.2. CONCLUSIONES GENERALES

En relación al estudio realizado en el marco teórico sobre los problemas de tipo comparación con resta y la información obtenida en el análisis de los cuestionarios, se obtienen varias conclusiones: la primera es la existencia de un pensamiento unificado de los problemas en los estudiantes, es decir, no importa como este estructurado el enunciado, pues para el niño solo hay una cosa importante, obtener un resultado para responder la pregunta; por lo que da a entender que para ellos todos los problemas son iguales y lo que cambia son los datos y los sujetos, dificultando el proceso de lectura comprensiva que debe tener.

La segunda es la importancia en el cual recae la lectura de textos y textos matemáticos, debido a como lo postula Sánchez(1986) citado por Romero (2012), para obtener una comprensión lectora es necesario cumplir con todas estas etapas, y al comparar los resultados con la teoría se identifica un proceso lector incompleto en los estudiantes. La tercera da relevancia a tres factores para la comprensión matemática las cuales son: dominio de contenido, como significación y dominio conceptual, en donde se muestra una facilidad en el dominio de contenidos matemáticos y relacionarlos con los enunciados, pero a la hora de profundizar sobre el problema, se concluye que generalmente el método de solución lo determina por su facilidad y no por su pertinencia aritmética.

Como cuarto tenemos la estructuración de la sentencias, como lo postula Maza la sentencia canónica en un problema se usa para encontrar la respuesta a la pregunta, pero la sentencia no canónica se usa para reflejar matemáticamente el enunciado y aun que tiene relación entre sí, el proceso aritmético pertinente para los problemas de tipo comparación es la canónica; sin embargo en el análisis obtenido muestra un uso ocurrencia a la no canónica por lo que refleja la dificultad de proponer una estructura que no esté explícito en el problema, además que para los estudiantes es mucho más fácil intentar resolverlos por medio de una suma que de una resta.

Quinta, otro de los factores importantes en la comprensión de problemas de tipos comparación es la relación que debe existir entre la información del enunciado y la pregunta del problema, para lograr esto es necesario tener una buena lectura y buen dominio de contenido y conceptos matemáticos (como se menciona en los puntos anteriores).

La sexta abarca la relevancia de cada uno de los componentes semánticos que están involucrados en los problemas de tipo comparación, donde se puede encontrar en el análisis una dificultad en los términos relacionales, pues el “más que” es tomado como suma porque se aísla de los demás componentes, y se debe entender que todo actúa como un conjunto de comprensión.

5.3. IMPLICACIONES PARA LA INVESTIGACIÓN FUTURA

La comprensión de problemas no solo se enfoca en la resta, sino también en todas sus demás operaciones y conjuntos de números, por lo que pueden existir más características que influyan en las dificultades de comprensión de los enunciados las cuales no se abordaron, donde puede tener factores como operaciones complejas, terminología más avanzada, entre otras.

Además, el uso de libro de textos es algo real en la educación colombiana, por lo que el planteamiento y uso de esta herramienta debe ser analizada a mayor profundidad. Ver su evolución estructural a través del tiempo, si la existencia de distintas editoriales influye

en la formación docente, los teóricos utilizados para formar los contenidos de estos, y muchos otros factores existentes que involucren a los libros de texto, pueden generar una investigación sobre la comprensión de problemas en los estudiantes y obtener resultados que refuten o refuercen este trabajo investigativo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la matemática y la formación de docentes. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 24 (1), 999-1007.
- Aranda, M., Pérez, I. y Sánchez, B.(s.f). *Dificultades en el aprendizaje matemático*. (tesis), universidad autónoma de Madrid.
- Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación introducción a la metodología científica*. Caracas: Episteme.
- Bransford, J. y Stein, B. (1993). *Solución IDEAL de problemas*. Barcelona: Labor, S. A.
- Carpenter, T., Fennema, E. y Franke, M. (1997). Instrucción guiada cognitivamente: una base de conocimiento para la reforma de la enseñanza matemática en primaria. *Revista EMA*, 3 (1), 3-32.
- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. (tesis doctoral), Facultad de ciencias de la educación: universidad de Granada, Granada.
- Castro, J. (2013). *Metodología de la investigación Fundamentos*. Salamanca: amarú ediciones.
- Castro, L., Obando, A., y Otálvaro, L., (2011). Modelo pedagógico práctico reflexivo reflexión y práctica de maestros en la escuela normal superior de Ibagué. *Revista de pedagogía panorama normalista*, 5 (1), 4 - 11.
- Curcio, C. (2002). *Investigación cuantitativa: una perspectiva epistemológica y metodológica*. Manizales: Kinesis.
- D'Amore, B. (1997). *Problemas pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.
- Diccionario de la lengua española, 2014.
- Fernández, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Pautas para maestros en educación primaria*. (tesis de pregrado), Facultad de educación: Universidad nacional de la Rioja. Barcelona.
- Flórez, R. (1994). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá

- Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada: proyecto edumat-maestros.
- Mantecón, B. (1982). La oración y la proposición gramaticales: aplicación didáctica. CAUCE, 5, 219-234.
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Síntesis S.A.
- Ministerio de Educación, cultura y deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*.
- Ministerio de Educación Nacional. (2008). *Estándares básicos de competencias matemáticas*.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares*.
- Luceño, J. (1999). La resolución de problemas aritméticos en el aula. Edición Aljibe.
- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. *Enseñar matemáticas en el nivel inicial y el primer ciclo E.G.B.* Paidós. 59 - 71
- Peinado, Y.; Martín, T.; Corredera, E.; Moñino, N. y Prieto, L. (2010). *Grupos de discusión, métodos de investigación en educación especial*. Recuperado de www.uam.es/personal_pdi/stmaria/jmurillo/InvestigacionEE/Presentaciones/Curso_10/GrupDiscusion_trabajo.pdf
- Perez, M. (2005). Evaluación de la comprensión lectora: dificultades y limitaciones. *Revista de educación, número extraordinario (2005)*, 121-138.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis S. A.
- Romero, A. (2012). *Comprensión lectora y resolución de problemas matemáticos en alumnos de segundo grado de primaria del distrito ventanilla-callao*. (tesis magistral). Facultad de educación: Universidad San Ignacio de Loyola, Lima.
- Secretaría de Educación Distrital y Pontificia Universidad Javeriana. (2005). *Pruebas comprender de matemáticas*. Bogotá.
- Sociedad Andaluza de educación matemática Thales (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*.
- Tomas, J. y Almenara, J. *Máster en paidopsiquiatría. Módulo 1*. Universidad autónoma de Barcelona.

ANEXOS

Anexo A. Cuestionarios

Cuestionario #1

NOMBRES Y APELLIDOS: _____

FECHA DE NACIMIENTO: _____ **FECHA DE HOY:** _____ **GRADO:** _____

Sus ideas son muy importantes para nosotros, les agradecemos mucho por su colaboración al contestar las siguientes preguntas:

¿COMO LO HIZO? POR FAVOR ESCRIBA TODO LO QUE PENSO EN CADA PROBLEMA

1. Camila quiere tener 15 colores, pero solo tiene 8. ¿Cuántos colores más debe comprar para tener los que quiere?
2. Santiago tiene 18 chocolates. Andrés tiene 12 chocolates. ¿Cuántos chocolates más que Andrés tiene Santiago? Dibuje como entendió el problema paso a paso, hasta encontrar su solución.
3. Ana tiene 14500 pesos y Juan tiene 8300 pesos. ¿Cuántos pesos tiene Ana más que Juan?

Cuestionario #2:

NOMBRES Y APELLIDOS: _____ **FECHA DE HOY:** _____ **GRADO:** _____

TENIENDO ENCUENTA EL SIGUIENTE PROBLEMA, RESPONDER LAS PREGUNTAS:

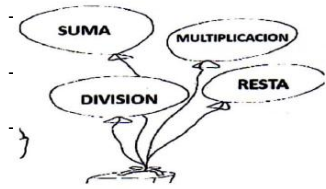
Diego tiene 8 caramelos más que Laura. Diego tiene 34 caramelos. ¿Cuántos caramelos tiene Laura?

Quando lee el problema ¿Qué es lo primero que ve?


¿Cuáles son las partes del problema?

¿Cuáles datos da el enunciado para resolver el problema?

¿Qué operación utilizaría para encontrar una respuesta y por qué?



¿hay otra manera de solucionar el problema? Explíquela.

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 1 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

_____	con C.C N°	_____
Oscar Andrés Guzmán Bastidas		1110531557
_____	con C.C N°	_____
Natalia Viña Urueña		1015436007
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____
_____	con C.C N°	_____

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar

No Autorizar **Motivo:** _____


La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	<input checked="" type="checkbox"/>	Artículo	<input type="checkbox"/>	Proyecto de Investigación	<input type="checkbox"/>
Libro	<input type="checkbox"/>	Parte de libro	<input type="checkbox"/>	Documento de conferencia	<input type="checkbox"/>
Patente	<input type="checkbox"/>	Informe técnico	<input type="checkbox"/>		
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					<input type="checkbox"/>

 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 2 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 “**...Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable**” y 37 “**...Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro**”. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “**los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores**” y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

- Identificación del documento:

Título completo: CARACTERÍSTICAS DE LA COMPRENSIÓN DE LOS ENUNCIADOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA LA SUSTRACCIÓN DE TIPO COMPARACIÓN

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

- Artículo publicado en revista:

- Capítulo publicado en libro:

- Conferencia a la que se presentó:

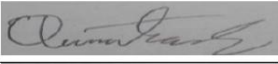
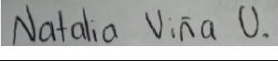
 Universidad del Tolima	PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Página 3 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **25** Mes: **JULIO** Año: **2018**

Autores:

Firma

Nombre:	OSCAR ANDRES GUZMAN BASTIDAS		C.C.	1110531557
Nombre:	NATALIA VIÑA URUEÑA		C.C.	1015436007
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.