

**VISIÓN POR COMPUTADOR APLICADO A MANIPULADOR PARALELO DE  
TIPO PLANAR 3-RRR PARA LA MANIPULACIÓN DE UN OBJETO**

**Ing. Giancarlo Daraviña Peña**  
**CC: 1.115.074.927**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**  
**MAESTRÍA DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**Pereira**

**VISIÓN POR COMPUTADOR APLICADO A MANIPULADOR PARALELO DE  
TIPO PLANAR 3-RRR PARA LA MANIPULACIÓN DE UN OBJETO**

**Ing. Giancarlo Daraviña Peña**  
**CC: 1.115.074.927**

Trabajo de grado para optar el título de  
**Magister en Ingeniería Mecánica**

Dirigido por:  
**Héctor Fabio Quintero Riaza, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA**  
**MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**  
**Pereira**

*“Hay una fuerza motriz más poderosa que el vapor,  
la electricidad y la energía atómica: la voluntad.”*

Albert Einstein

## NOTA DE ACEPTACIÓN

---

---

---

---

---

---

---

**Firma del presidente del jurado.**

---

**Firma del primer jurado.**

---

**Firma del segundo jurado.**

**Pereira, 09 de Febrero**

## **DEDICATORIA**

Dedicado a mis padres: Carlos Daraviña y Patricia Peña, quienes me inspiraron a buscar siempre nuevos conocimientos y perseverar siempre en búsqueda de nuevas experiencias.

A todos los integrantes del grupo de investigación en Procesos de Manufactura y Diseño de Máquinas, por sus consejos, asesoría, apoyo y aliento en cada una de las etapas del proyecto.

Por último, a todos mis compañeros de trabajo, colegas y amigos que con sus aportes han contribuido a la culminación de este proyecto.

## Resumen

En este trabajo se establecerá la implementación de un sistema de visión en un manipulador paralelo de articulaciones rotatorias, con el propósito de calcular las coordenadas cartesianas. Se utilizará una técnica de servo control visual denominada Eye-to-hand que permite observar el área del trabajo del manipulador paralelo, ubicando el actuador final, el marco de referencia y el objetivo a seguir. La cámara captura la imagen del objeto tomado. La imagen es procesada mediante algoritmos creados en el software Matlab extrayendo las características principales de las imágenes tomadas. Cada imagen se someterá a filtros gaussianos para la eliminación de ruido de las cámaras y a un descriptor SURF para estabilizar la imagen, una de referencia respecto a las tomadas por la cámara en intervalos de tiempo. En las imágenes procesadas de cada captura, se determinan las correspondencias entre las imágenes para obtener sus semejanzas utilizando el método RANSAC. Obteniendo el análisis de la semejanza de las imágenes. Luego de establecer la estabilización se procede a implementar el cálculo de la homografía que permitirá realizar el cálculo de las coordenadas en pixeles tomadas en la imagen, convertirlas en coordenadas reales. Al obtener todo el proceso se procede a aplicar el estimador y predictor filtro de Kalman para determinar la posición del objeto cuando el objetivo en qué dirección se desplaza, el cual se tiene resultado una coordenada donde esta es retroalimentada a la cinemática del manipulador paralelo de tipo planar 3-RRR, estableciendo el movimiento de la plataforma móvil hacia el objetivo. Inicialmente se realizando dos pasos: El primer paso fue realizar una trayectoria generada que se realizó en el manipulador sin la intervención del sistema de visión; el segundo lugar se genera la misma trayectoria donde el objetivo es manipulado y guiado con base en la trayectoria generada inicialmente. El resultado es comparar los pares y posiciones angulares de los actuadores sin la intervención del sistema de visión y con el sistema de visión. Como resultado se tiene una comparativa de comportamientos de los datos teóricos y reales que entrega el sistema de visión cuando se aplica el filtro de Kalman.

## TABLA DE FIGURAS

Figura 1. Manipulador paralelo Gough-Stewart .....	6
Figura 2. Manipulador paralelo Tricept .....	7
Figura 3. Servo control visual - Configuración Eye-in-Hand.....	10
Figura 4. Servo control visual - Configuración Eye-to-Hand.....	10
Figura 5. Posición basada en servo control visual.....	11
Figura 6. Imagen basada en servo control visual .....	12
Figura 7. Robot paralelo guiado por cable .....	14
Figura 8. Esquema geométrico del manipulador paralelo planar 3-RRR .....	15
Figura 9. Primera cadena cinemática .....	16
Figura 10. Segunda cadena cinemática.....	17
Figura 11. Tercera cadena cinemática .....	18
Figura 12. Grupo de tercera clase y su disposición vectorial .....	20
Figura 13. Primera cadena vectorial compuesta por los puntos G, I, F .....	21
Figura 14. Segunda cadena vectorial compuesta por los puntos I, H, E .....	23
Figura 15. Tercera cadena vectorial compuesta por los puntos H, G, D.....	25
Figura 16. Primera cadena vectorial compuesta por los puntos A, D, G .....	28
Figura 17. Segunda cadena vectorial compuesta por los puntos B, E, H.....	30
Figura 18. Tercera cadena vectorial compuesta por los puntos C, F, I.....	32
Figura 19. Plataforma móvil compuesta por los puntos G, H, I .....	34
Figura 20. Representación de los centros de masa de los eslabones .....	44
Figura 21. Cámara Logitech C-920.....	56
Figura 22. Modelo pin-Hole .....	56
Figura 23. Proyección de la imagen .....	57
Figura 24. Marco de referencia de la cámara .....	59
Figura 25. Proyección central del modelo mostrando el plano de la imagen y pixeles discretos .....	60
Figura 26. Estructura de soporte para la cámara.....	62
Figura 27. Patrón de calibración .....	63
Figura 28. Error de retroproyección .....	63
Figura 29. Orientación del patrón de calibración frente a la cámara.....	64
Figura 30. Grafica de parámetros extrínsecos 3D.....	65
Figura 31. Imagen capturada .....	65
Figura 32. Imagen sin distorsión proyectiva .....	66
Figura 33 Esquemático que muestra la descomposición por capas de una imagen RGB .....	68
Figura 34. Captura de la imagen del manipulador paralelo.....	68
Figura 35. Histograma de la imagen RGB .....	69
Figura 36. Captura para el análisis y extracción del objetivo rojo .....	70
Figura 37. Imagen binaria de la capa roja .....	70
Figura 38. Imagen binaria de la capa roja aplicando la función erosión. ....	71
Figura 39. Imagen binaria de la capa azul.....	72
Figura 40. Imagen binaria de la capa azul aplicando una erosión.....	72
Figura 41. Detección del objeto, actuador final y marco referencial del manipulador .....	73
Figura 42. Aplicación del algoritmo SURF - Imagen 1.....	75
Figura 43. Aplicación del algoritmo SURF - Imagen 2.....	75
Figura 44. Correspondencias putativas entre la imagen 1 y la imagen 2 .....	76

Figura 45. Correspondencias putativas .....	77
Figura 46. Ubicación de los marcadores en el área de trabajo.....	78
Figura 47. Detección de los marcadores para la determinación de sus centroides.....	79
Figura 48. Control cinemático en lazo abierto.....	80
Figura 49. Configuración Eye-to-hand aplicado al manipulador paralelo 3-RRR.....	81
Figura 50. Trayectoria circular .....	85
Figura 51. Posición angular del servo 1 - Teórico vs Real.....	86
Figura 52. Posición angular del servo 2 - Teórico vs real.....	86
Figura 53 Posición angular del servo 3 - Teórico vs real.....	87
Figura 54. Par motor - Servomotor 1.....	88
Figura 55. Par motor - Servomotor 2.....	88
Figura 56. Par motor - Servomotor 3.....	89
Figura 57. Patrón circular como guía para la generación de una trayectoria .....	89
Figura 58. Detección y estimación del objetivo. ....	90
Figura 59. Oclusión del objetivo.....	91
Figura 60. Estimación de posición angular - Servomotor 1 .....	91
Figura 61. Estimación de posición angular - Servomotor 2 .....	92
Figura 62. Estimación de posición angular - Servomotor 3 .....	92
Figura 63. Estimación del par motor - Servomotor 1 .....	93
Figura 64. Estimación de par motor - Servomotor 2 .....	93
Figura 65. Estimación de par motor - Servomotor 3 .....	94



## CONTENIDO

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1.	MOTIVACIÓN.....	1
1.2.	DEFINICION DEL PROBLEMA.....	2
1.3.	OBJETIVOS.....	4
1.3.1.	Objetivo general.....	4
1.3.2.	Objetivos específicos.....	4
1.4.	ESTRUCTURA DEL TRABAJO.....	4
2.	REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA.....	6
3.	MODELAMIENTO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL MANIPULADOR PARALELO DE 3 GRADOS DE LIBERTAD TIPO 3-RRR.....	15
3.1.	CINEMATICA DIRECTA.....	19
3.2.	CINEMÁTICA INVERSA.....	27
3.2.1.	Solución geométrica.....	28
3.3.	MATRIZ JACOBIANA.....	35
3.4.	MATRIZ JACOBIANA DIRECTA.....	37
3.4.1.	Velocidades angulares de los eslabones.....	37
3.5.	Aceleraciones angulares de los eslabones.....	40
3.6.	MATRICES JACOBIANAS INVERSAS.....	41
3.6.1.	Velocidades angulares de los eslabones.....	41
3.6.2.	Aceleraciones angulares de los eslabones.....	43
3.7.	VELOCIDADES Y ACELERACIONES LINEALES.....	43
3.7.1.	Velocidades lineales de los eslabones.....	44
3.7.2.	Aceleraciones lineales de los eslabones.....	49
3.8.	DINÁMICA DEL MANIPULADOR.....	53
3.8.1.	Análisis Energético.....	53
3.8.2.	Energía cinética del manipulador.....	53
4.	CALIBRACIÓN DE CÁMARAS.....	56
4.1.	MODELO DE LA CÁMARA.....	56
4.2.	FORMACIÓN DE LA IMAGEN Y ORIENTACIÓN DE UN PUNTO EN LA IMAGEN 59	
4.3.	CALCULO DE LOS PARÁMETROS INTRÍNSECOS Y EXTRÍNSECOS DE LA CÁMARA A PARTIR DE LA CALIBRACIÓN.....	61
4.4.	ETAPA DE CALIBRACIÓN.....	62
5.	ALGORITMO DE VISIÓN POR COMPUTADOR PARA LA EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS DEL OBJETO Y CÁLCULO DE LA POSE DEL OBJETO.....	67

5.1.	ALGORITMO DE VISIÓN POR DETECCIÓN DE COLOR.....	67
5.1.1.	Extracción de las capas de colores .....	69
5.2.	DETECTOR DE PUNTOS ESQUINA .....	74
5.3.	DESCRIPTORES.....	74
5.4.	DETECTOR-DESCRIPTOR.....	74
5.5.	RANSAC.....	76
5.6.	HOMOGRAFÍA.....	78
6.	SISTEMA DE CONTROL .....	80
6.1.	SERVO CONTROL VISUAL.....	80
6.2.	FILTRO DE KALMAN.....	82
6.3.	ESTIMACIÓN DE UNA TRAYECTORIA A PARTIR DE FILTRO DE KALMAN.....	89
7.	CONCLUSIONES.....	95
7.1.	RECOMENDACIONES.....	96
7.2.	APORTES.....	97
	BIBLIOGRAFÍA .....	98

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1. MOTIVACIÓN

Recientemente, los manipuladores paralelos han tenido interés en la comunidad científica debido a su superioridad teórica sobre los manipuladores seriales en términos de precisión, velocidad y carga, a pesar de su compleja cinemática y la pequeña área de trabajo comparado con la estructura de los seriales. Por otro lado, los manipuladores paralelos tienen habilidades potenciales para mejorar las operaciones de mecanizado, levantamiento y traslado de grandes masas, y además tiene mayor precisión debido a la coordinación en sus cadenas cinemáticas.

Los manipuladores paralelos ofrecen superioridad rígida dado que, al controlar grandes masas, las cargas pueden propagarse en las cadenas, obteniendo así que la carga solo sea contenida en una cadena y así evitar daños. Actualmente, existe una variedad de manipuladores como los Deltas que son utilizados en sistemas de transporte de elementos a gran velocidad, el manipulador Gough-Stewart como manipulador para cabina de simulaciones de aviación, manipuladores cartesianos como cortadoras de plasma, entre otros manipuladores con configuraciones de cadenas cinemáticas prismáticas, rotacionales o deslizantes.

Últimamente, los sistemas robóticos están acompañados con otro campo muy novedoso que es la visión por computador. La visión es una herramienta que básicamente permite el análisis de detección de objetos cuyo propósito es identificar, analizar y generar bases de datos para propósitos ya sean industriales, de vigilancia o científico. Los manipuladores robóticos con implementación de sistemas de visión permiten conocer la pose y orientación del objeto a partir de múltiples cámaras que están alrededor de su área de trabajo. Las cámaras con sistemas de detección ayudan a que el manipulador vaya directo al objetivo. Esto aumenta más las expectativas en la industria dado que robustece el sistema y, además, si se altera la pose del objeto o cambia de orientación, un sistema de control, utilizando la información de las cámaras, analizará automáticamente la coordenada del elemento.

Los manipuladores paralelos que establecen la manipulación rápida de objetos están acompañados de cámaras especiales con obturadores a gran velocidad, que ejercen múltiples capturas de imágenes en minutos permitiendo así, retroalimentar la coordenada al manipulador. Estas serán determinadas por retroalimentación de la información de las cámaras, permitiendo así generar el movimiento del actuador final hacia el objeto a manipular.

## 1.2. DEFINICION DEL PROBLEMA

Uno de los problemas que tiene los manipuladores que no tienen visión por computador es que su área de trabajo está bajo variables muy arraigadas al entorno. Si alguno de los parámetros del área de trabajo varía, el manipulador operaría de manera incorrecta dado que está programado dentro del área de interés. Para dar solución a este problema, se necesita la intervención de un usuario para corregir el error. Existen formas de corrección para solucionar este problema utilizando secuencias prediseñadas a partir de la geometría del trabajo.

Generalmente se han implementado sistemas multifuncionales que tengan como objetivo realizar inspecciones del producto ya elaborado, analizando sus características, propiedades y dimensiones, con el propósito de evitar retrasos de manufactura y tiempos de producción. En general, algunas empresas tienden a tener producciones masivas y cuyos procesos requiere revisión, el cual es llevado por operadores. Esta tarea es inhumanamente imposible, como requerimiento se implementan sistemas robóticos y de visión para suplir esta tarea.

Los manipuladores usualmente más usados en la industria manufacturera son los seriales. Estos son usados en ensambladoras de automóviles, sistemas de empacados y soldadura. Los manipuladores seriales tienen una estructura más simple comparada con la de un manipulador paralelo donde esta última abarca más cadenas cinemáticas. Los manipuladores seriales son utilizados en visión por computador debido a que su análisis y estudio estructural es de fácil estudio. En cambio, la estructura de los manipuladores paralelos es compleja, pero tiene una ventaja sobre los manipuladores seriales que es su velocidad de operación.

Los manipuladores paralelos, por el simple hecho de ser mecanismos de cinemática cerrada, tienen una plataforma móvil unida a varias cadenas y esto hace que tenga una característica diferente a los manipuladores seriales. Las principales diferencias entre los manipuladores paralelos y seriales son [1]:

- Se tiene áreas de trabajo reducidos, en comparación con los robots seriales actuales en dimensiones semejantes, debido a su morfología.
- Debido a su estructura, son considerados más rígidos que los manipuladores seriales de similares dimensiones e incluso, a diferencia de su masa, la carga manipulada está soportada por varias cadenas.
- A diferencia de los seriales, los paralelos tienen mayor movilidad, estableciendo aceleraciones elevadas sin que se produzcan esfuerzos dinámicos que impidan su realización.
- Básicamente, los robots de cadena cerrada actúan empleando un único accionamiento por cada brazo robótico, el cual estará unido sobre el elemento fijo. Es decir, que la

masa de los accionamientos deja de ser considerada como una masa móvil, facilitando el alcance de valores de aceleraciones mucho más elevados.

Se tiene una clara evidencia sobre la ventaja que poseen con respecto a los seriales, pero también se tiene los inconvenientes debido a la complejidad de su análisis cinemático. En la tabla 1 se presenta se presenta la diferencia entre ambos manipuladores [1]:

*Tabla 1. Comparación de manipuladores seriales y paralelos*

Robot Serie	Robot Paralelo
<b>Estructura poco rígida.</b>	Arquitectura más rígida.
<b>Baja relación de carga / peso del manipulador.</b>	Relación carga/ peso muy superior.
<b>Robot más pesado</b>	Robot más ligero.
<b>Baja precisión.</b>	Alta precisión.
<b>Baja velocidad y aceleraciones.</b>	Altas velocidades y aceleraciones.
<b>Cinemática simple.</b>	Cinemática compleja.
<b>Amplio espacio de trabajo</b>	Espacio de trabajo reducido
<b>Técnica de calibración resuelta.</b>	Calibración compleja.
<b>Posiciones singulares únicamente en el problema inverso.</b>	Posiciones singulares más complejas en directo e inverso.
<b>Tecnología ya desarrollada.</b>	Nueva tecnología.

En la literatura los manipuladores paralelos son muy usados en el ámbito investigativo, también existen algunas aplicaciones de los manipuladores paralelos en manipulación y ensamble de componentes electrónicos. Actualmente existen pocas referencias científicas en la aplicación de visión por computador implementado en manipuladores paralelos de tipo planar, lo que puede conllevar a aumentar el interés en el ámbito investigativo en el desarrollo e implementación de esta tecnología en procesos de manufactura.

Por otra parte, al comparar el análisis matemático de los dos tipos de manipuladores, el proceso y cálculo de la cinemática es más compleja en los paralelos que en los seriales. Esta característica es porque las ecuaciones son mucho más complejas debido a su topología y que sus enlaces convergen en un punto. Así, se cataloga a los manipuladores paralelos como uno de los manipuladores donde el análisis matemático no es trivial.

### 1.3. OBJETIVOS

#### 1.3.1. Objetivo general

- Diseñar e implementar un algoritmo de visión por computador para un manipulador paralelo de tipo planar con el fin de cumplir tareas específicas.

#### 1.3.2. Objetivos específicos

- Obtener un modelo matemático para el estudio de la cinemática y dinámica del manipulador paralelo de tipo planar.
- Diseñar e implementar un algoritmo de visión por computador que permita la extracción de características del objeto y el cálculo de la pose del objeto.
- Implementar calibración de cámaras para la eliminación proyectiva.
- Aplicar un sistema de control cinemático asistido por servo control visual.
- Realizar pruebas de validación del sistema de visión por computadora al manipulador paralelo de tipo planar.

### 1.4. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

En este trabajo de grado se presenta, en el capítulo 2, una revisión bibliográfica basada en la implementación de sistemas de visión en manipuladores paralelos, donde en primera instancia se mencionan términos como el procesamiento digital de imágenes, técnicas de servo control visual, y sistemas de control.

En el capítulo 3 se plantea el modelo matemático que describe la cinemática directa con el que, a partir del cálculo de las coordenadas generalizadas, se obtiene la orientación del actuador final. También se formulan las ecuaciones de la cinemática inversa con las que, a partir de la coordenada del actuador final, se determinan los ángulos requeridos en los actuadores. Por otro lado, se establece el modelo matemático de la dinámica del manipulador para permitir el cálculo del par motor adecuado para los servos motores.

En el capítulo 4 se plantea el diseño de un algoritmo de visión que permita la detección y extracción de características semánticas. Dicho algoritmo contará con metodologías para el análisis de la imagen utilizando procesamiento digital de imágenes; de esta forma, se puede determinar la ubicación espacial del objeto.

En el capítulo 5 se establece el uso de calibración de cámaras que permite la eliminación de la distorsión proyectiva que se realizará a cabo utilizando el método de Zhang [2], permitiendo la minimización del error de retroproyección.

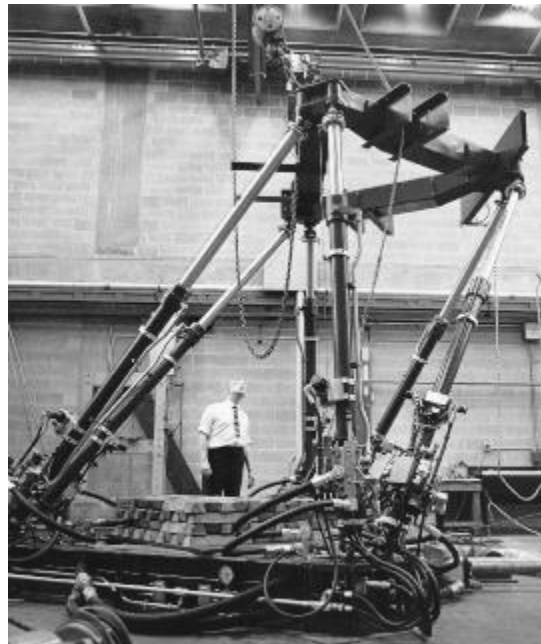
En el capítulo 6 se plantea la metodología de un sistema de control cinemático asistido por servo control visual, en primer lugar, se tendrá como referencia en sistema de visión que permitirá la detección del objetivo y este será incorporado el filtro de Kalman para la determinación y predicción del objetivo cuando sea ocluido.

## 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El primer manipulador paralelo desarrollado fue una plataforma de comprobación de neumáticos en la empresa de Dunlop Rubber Co., el cual fue realizada por Gough en 1947. Este manipulador tiene una morfología de un hexápodo con cadenas prismáticas variables que simulaba el proceso de aterrizaje de un avión. Después Stewart exhibió una plataforma paralela cuya aplicación era para un simulador de vuelo donde este podía proveer los movimientos para la cabina para el simulador de vuelo. Más tarde se implementó otra plataforma Stewart en un proceso de ensamblaje. Esto permitió que los manipuladores paralelos tuviesen un factor importante en el ámbito industrial y científico. Uno de los factores importantes en los manipuladores planares es la capacidad de carga asegurando que las deformaciones en los actuadores sean mínimas. Así, se han llevado a numerosas aplicaciones como posicionamiento de antenas, manipuladores paralelos en plataformas submarinas para inspecciones acuáticas, sistemas de tele operación y en sistemas espaciales.

Desde entonces, la plataforma robótica Gough-Stewart, ver Figura 1 ha sido estudiada por un gran número de autores. Como dichos manipuladores son de 6-GDL, como en el caso de Gough-Stewart, se puede encontrar variedad de estructuras. En este trabajo de grado solo se hará una revisión del estado del arte de manipuladores de 3-GDL. Uno de los robots paralelos más conocidos y más extendidos en diferentes campos industriales es el caso del robot delta.

*Figura 1. Manipulador paralelo Gough-Stewart*



*Fuente:* [3]



Este robot de 3-GDL, tiene una morfología que consta de 3 cadenas cinemáticas idénticas accionadas por 3 motores rotatorios. El robot delta es considerado como uno de los robots paralelos de mayor impacto comercial ya que es utilizado en la industria alimentaria e incluso en la medicina.

Otro tipo de robot de mayor auge a nivel comercial es denominado Tricept [4], Figura 2. Este manipulador tiene como característica que sus tres cadenas son actuadas y posee una cadena cinemática pasiva, la plataforma móvil termina con un movimiento de 2 rotaciones de manera independientes y una de traslación; esta clase de manipulador es aplicado en centros de mecanizado. Por otro lado, Gosselin [5] establece un manipulador esférico 3-RRR cuyo propósito fue para el movimiento rápido de una cámara situada sobre el elemento terminal para orientación dentro de un campo de visión de  $140^\circ$ , este robot tiene la capacidad de generar altas velocidades y aceleraciones. Por otro lado, existen manipuladores de otras configuraciones que son de morfología tipo delta, manipuladores accionados con cables y manipuladores paralelos de baja movilidad. Debido a las múltiples arquitecturas, existen diferentes metodologías que permiten obtener una mejor simplificación del modelo cinemático, un mejor control de la plataforma móvil, y la determinación de singularidades.

*Figura 2 . Manipulador paralelo Tricept*



*Fuente: [6]*

Relacionando con otro tipo de configuraciones de manipulador de 3GDL. Existen varios trabajos relacionados. Firmanni [7] presenta una aproximación eficiente basada en la determinación de fuerzas sin restricciones que son aplicados en las configuraciones 3-RPR,

3-PRR y 3-RRR. Con este método se determinan las singularidades en una variable polinomial de dos y seis grados respectivamente, lo cual permite resolver la cinemática directa del manipulador. Binaund [8] presenta una comparación de la sensibilidad de los manipuladores paralelos de tres grados de libertad. Los autores presentan una metodología que permite obtener los coeficientes de sensibilidad de la pose de movimiento de la plataforma del robot con base en los parámetros geométricos y variables actuadas, lo que permite, que se obtenga una mejor simplificación. Tabbiysm [9] establece un método de linealización el cual analiza intervalos para el análisis de sensibilidad de los manipuladores para la variación de sus parámetros geométricos. Con esta metodología se analizan los manipuladores de cinco eslabones, un manipulador planar 3-RRR y un orthoglide. DallaLibera [10] realiza la investigación con base en la existencia de transiciones en manipuladores de 2-DOF, analizando la traslación a lo largo de una dirección fija y la rotación de la plataforma. Básicamente, se proporciona un análisis de cinemática directa e inversa, lo cual se da una interpretación geométrica de las singularidades. Weihmann [11] establece un método de optimización de evolución diferencial basado en la tasa de cruce y ajuste del factor de mutación para el cálculo de fuerzas; el autor evalúa la fuerza de un manipulador paralelo planar 3-RRR se evalúa considerando límites de actuación y diferentes modos de configuración.

En el análisis dinámico, Singh [12] realiza el análisis de la dinámica inversa de los manipuladores paralelos de 3-DOF, cada cadena cinemática tiene una junta prismática activa. Para el control del manipulador proponen, una estrategia de control adaptativo deslizante tipo PD (Proporcional - Derivativo) con un observador de perturbación. Este análisis es utilizado para la estabilidad del sistema de un modelo basado en Lyapunov.

En el campo de la optimización Boudreau [13] propone una metodología basada en optimización, para resolver la fuerza generalizada de un manipulador paralelo tipo planar de cinemática redundante, siguiendo una trayectoria determinada. Se utilizan dos trayectorias para mostrar la efectividad de la metodología propuesta. Se compara los resultados de un manipulador 3-PRP de cinemática redundante con los de un manipulador 3-RPR no redundante. Los autores consideran que el manipulador redundante mejora la capacidad de fuerza del mecanismo no redundante. Mejia [14] presenta un método para obtener la fuerza máxima de un manipulador plano de 3-DOF. El método utiliza un modelo matemático basado en optimización, el cual utiliza el método de Davies. Singh [15] utiliza las ventajas de los sistemas CAD para realizar el análisis geométrico y cinemático de manipuladores paralelos planos, dicho método está basado en el principio de la superposición. Chen [16] proponen un método para predecir la precisión de un manipulador paralelo plano considerando la incertidumbre de la entrada a la holgura de la junta. El método permite determinar la influencia de la fuente de error, el cual se basa en un método geométrico basado en la teoría envolvente. Con este método se determina el error exacto del elemento terminar para una configuración específica. Kuck [17] realiza la comparación de la destreza para siete

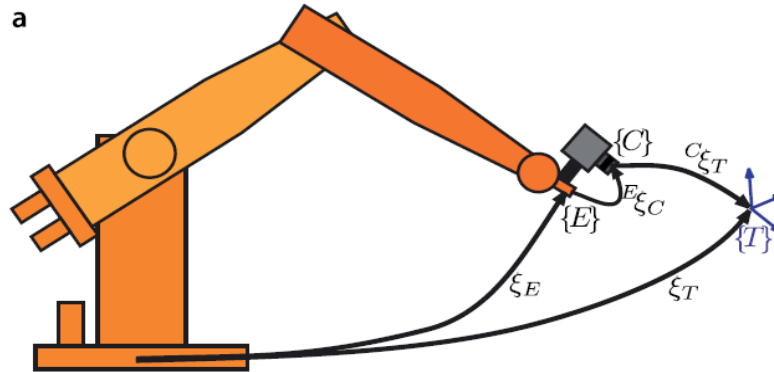
manipuladores paralelos de 3-DOF utilizando algoritmos genéticos. Se analiza los manipuladores con diferentes tipos de cadenas cinemáticas buscando incrementar el área de trabajo y reducir las posibilidades de interferencia entre las tres cadenas cinemáticas independientes. Wu [18] establece un análisis de cinemática inversa y la formulación matricial jacobiana para analizar tres configuraciones de manipuladores de las cuales son 4-RRR, 3-RRR y 2-RRR. Se presenta un análisis dinámico de las tres configuraciones y se realiza el cálculo del par motor. Rosenzweig [19] propone el cálculo de la posición del elemento final del manipulador paralelo utilizando sensores exteriores para minimizar el error. Por otro lado, utiliza un sensor visual que permite ejercer una mayor precisión utilizando modelos geométricos, el concepto denominado robot oculto permite realizar una visualización tangible entre el espacio observable y el cartesiano. Es decir, tiene la ventaja de poder ser implementado en diferentes montajes y configuraciones singulares del robot real. También, es una herramienta poderosa para simplificar el análisis de mapeo.

En el área de control, Jiang [20] permite un control de seguimiento preciso, donde no requiere de los parámetros del robot y las perturbaciones. Dicho desarrollo se basa en una técnica de transformación del error y una ganancia sintonizable para la retroalimentación del error transformado. Este es acoplado en el control de equilibrio del rendimiento y el esfuerzo de seguimiento del robot. Dietrich [21] presenta las mejoras con base en las estrategias de fuerza de torsión en los manipuladores paralelos. Se plantea una metodología de montaje para los robots paralelos, donde los efectos de fricción se reducen para obtener un mejor control de fuerza y posición mejorada. Fatemi [22], establece una nueva aproximación paralela de fuerza y control de posición para los manipuladores paralelos. Dicho proceso, permite controlar la fuerza o seguimiento de la trayectoria de posición que es determinado por un parámetro constante de ponderación en función de coste. Sato [23] [24] crea una metodología numérica que se emplea para dar forma detallada a los parámetros de movimiento. Esta metodología hace referencia a los movimientos humanos que se obtienen en los sistemas de medición de movimientos reales y virtuales. Los datos de enseñanza iniciales se generan por los datos de demostración y dichos comandos se convierte en parámetros de control. Haol [25] introduce un método de control basado en visión para la identificación de la cinemática inversa. Garrido [26] propone un sistema de control PID basado en imágenes para un robot paralelo de tipo planar usando la configuración de cámara fija. El objetivo de control es mover el elemento final del robot a la posición de referencia de la imagen deseada.

Dichos manipuladores paralelos han generado una tendencia positiva en el campo científico e industrial, se han acoplado al campo de la visión por computadora donde dicha técnica ya permite establecer una mejora positiva a la hora de realizar el análisis de posicionamiento espaciales de objetos en diferentes ubicaciones.

En el campo de la visión por computador, las cámaras que acompañan al manipulador pueden establecer dos configuraciones, la primera es mencionada Eye-in-Hand, ver Figura 3, dicha configuración permite establecer la ubicación de la cámara en el actuador final. Así, el robot puede moverse con la cámara y seguir el objeto, [27] [28].

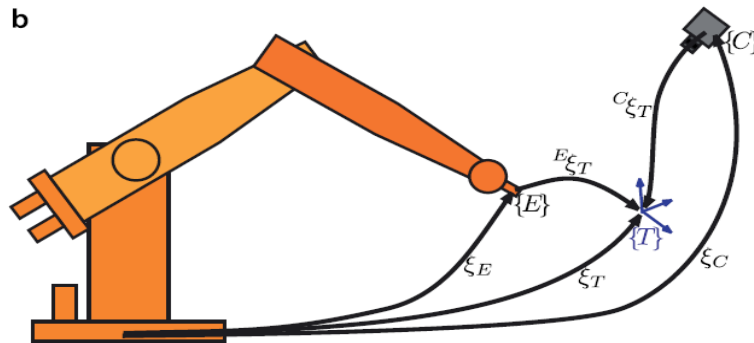
**Figura 3. Servo control visual - Configuración Eye-in-Hand**



**Fuente: [27]**

La segunda configuración es la Eye-to-Hand ver Figura 4, permite establecer una ubicación de la cámara en el campo de trabajo del robot. Así, el campo de visión es mucho más amplio donde se puede observar el actuador final del manipulador y el objeto.

**Figura 4. Servo control visual - Configuración Eye-to-Hand**



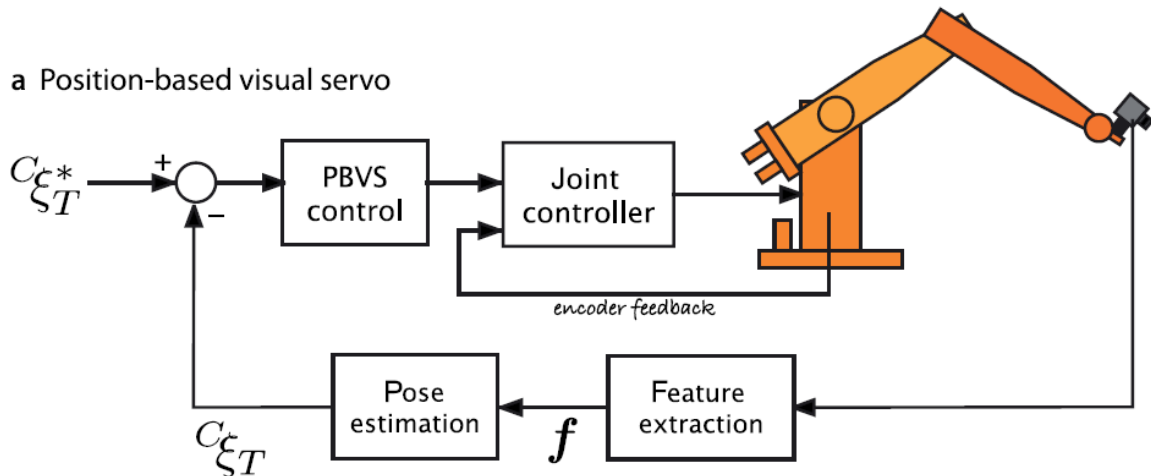
**Fuente: [27]**

En el campo de visión para poder establecer la interacción entre la cámara y el manipulador, se utiliza el concepto denominado servo control visual, ver

Figura 5. El sistema de servo control denominado servomecanismo. Servo control visual hace referencia a un sistema automático que usa retroalimentación de error entre el valor de posición actual y el deseado de un mecanismo para conducirlo a la posición deseada. La

palabra servo proveniente del latín *servus* que significa esclavo y que primeramente fue usada por Frenchman J.J.L Farcot en 1868 – “*Le Servomoteur*” – para describir la hidráulica y las máquinas de vapor usados en barcos de vapor [27].

**Figura 5. Posición basada en servo control visual**

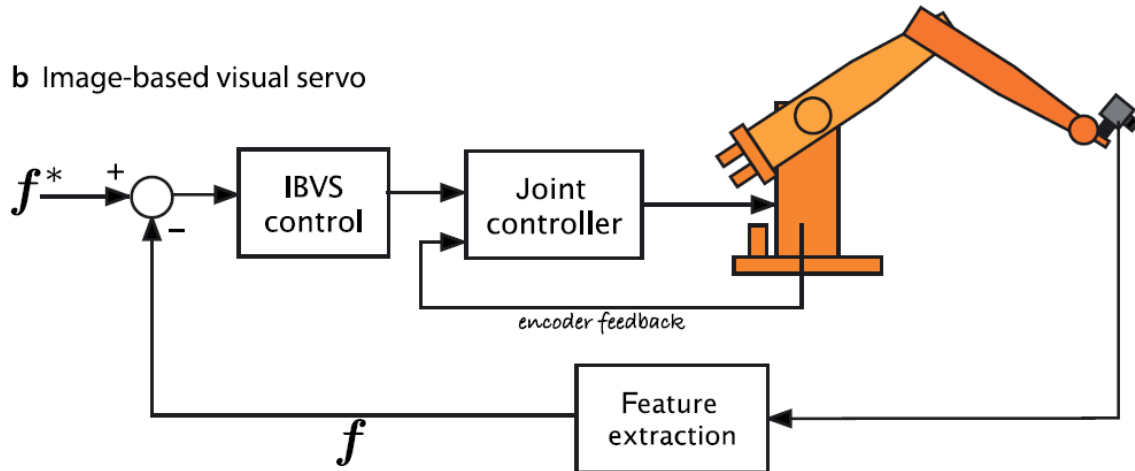


**Fuente:** [27]

En el área de servo control visual existen dos aproximaciones denominadas: i) Posición basado en servo control visual (PBVS), ii) [29] Imagen basado en servo control visual (IBVS), [30]. La aproximación PBVS [31], cuyo esquema es mostrado en la Figura 6, requiere de características visuales del elemento, esto es logrado a partir de algoritmos de visión por computador, una calibración de cámara y conocer la geometría del objeto para determinar la pose con respecto a la cámara. El robot se mueve respecto a la pose del objeto y el control es ejecutado en el área de trabajo, [27].

En IBVS no se estima la pose del objeto como se observa en la Figura 6. La pose relativa es incondicional en los valores de las características de la imagen. Es decir, se define como un método que incluye todas las metodologías basadas en el análisis de características o la pose relativa del objeto por medio de un sensor 3D en orden para guiar el manipulador. La simple forma del servocontrol visual envuelve al robot en un movimiento plano ortogonal para los ejes ópticos de la cámara y que esta puede ser usada para el seguimiento o movimiento planar. Sin embargo, las tareas de agarrar y de emparejamiento de piezas requiere de control relacionado a la distancia y orientación del objeto, [27].

**Figura 6. Imagen basada en servo control visual**



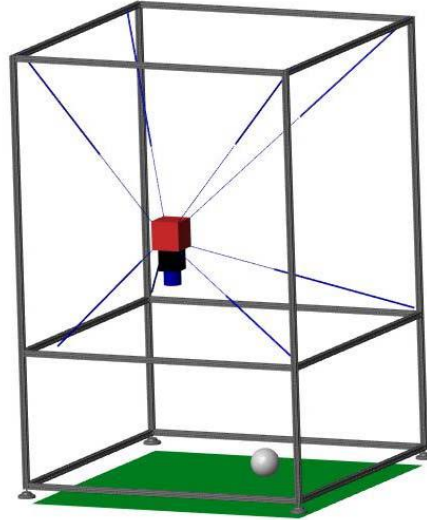
**Fuente:** [27]

El servo control visual se ha implementado en los manipuladores seriales, pero también ha empezado a acoplarse en los manipuladores paralelos. Rosenzweig [19] permite el cálculo de la ubicación del elemento final, esto implementado mediante a un proceso denominado robot oculto, el cual permite ver una visualización tangible de la correspondencia entre el espacio observado y el cartesiano. El método tiene la ventaja de utilizar diferentes montajes y configuraciones singulares del robot real y es una herramienta poderosa para simplificar el mapeo. El concepto de robot oculto es generalizado para cualquier tipo de manipulador paralelo controlado mediante un sistema de servo control visual para observar el direccionamiento de los brazos del manipulador. Hesar [32] aplica una arquitectura de imágenes basado en control para un robot paralelo esférico de dos grados de libertad. Este sistema está acompañado por una cámara digital instalada en el elemento final para seguir el objeto que, en este caso es una esfera en movimiento, el método aplicado es Eye-in-Hand. Luo [33] propone un desarrollo de seguimiento de objetos de transporte y de búsqueda mediante el sistema híbrido Eye-in-Hand y Eye-to-Hand para un manipulador paralelo. Mediante el sistema híbrido, el manipulador paralelo puede lograr el múltiple seguimiento de objetos y buscar elementos diseñados. Trujano [34] presenta un sistema de servo control visual basado en imágenes implementando en un manipulador paralelos de tipo planar sobreactuados con juntas de revolución. El objetivo es manipular la dirección de movimiento del elemento final hacia una imagen constante deseada. Un sistema de control proporcional-derivativo (PD) calcula los pares para el robot en las articulaciones activas. Briot [35] propone un método eficiente de robot oculto que permite definir las características necesarias para observar la capacidad de control del robot en toda su área de trabajo, es propuesto en los manipuladores paralelos Steward y Adept. Dallej [36] establece un trabajo de control basado en visión en robots paralelos operados por cable, se plantea un desarrollo 3D en control visual donde el elemento final es indirectamente medido y utilizado para la

regulación. Dicho método ilustra y valida en un prototipo de robot paralelo operado por cable. Bellakehal [37] presenta un trabajo donde se discute la posición cinemática de los manipuladores paralelos a partir de la fuerza y control. El enfoque del trabajo reside en el uso de un sistema de visión como una medida de posicionamiento externo para un robot paralelo para fines de control de fuerza. Traslosheros [38] establece una nueva estrategia en la aplicación de servo control visual que se utiliza para llevar a cabo tareas dinámicas para una plataforma de robo tenis. Esta plataforma es básicamente un manipulador paralelo que está equipado por un sistema de adquisición y procesamiento visual. En este trabajo se emplea el desarrollo de un controlador para el seguimiento de objetos y cambios de referencia. Luo [39] presenta un sistema de servo control visual basado en imágenes aplicado a un mecanismo biónico paralelo esférico para minimizar una función de seguimiento de error a la búsqueda analógica del ojo humano. Concretamente, desarrolla un algoritmo de seguimiento en tiempo real que utiliza algoritmos de percepción de imágenes basados en la transformación discreta de primos. Qi [40] analiza el problema de control de la configuración Eye-in-Hand para manipuladores paralelos basados en sistemas de puntos de precisión, el cual el sensor visual está ubicado sobre la plataforma del robot paralelo. El objetivo del sistema de control es mover la plataforma del manipulador tal que los puntos característicos de las imágenes puedan alcanzar los puntos deseados. Zhang [41] presenta un algoritmo para compensar el error de un manipulador paralelo de 6-DOF basado en visión estéreo.

Últimamente, se han establecido la implementación de sistemas de servo control visual en manipuladores paralelos guiados por cable como se muestra en la Figura 7. Se han propuesto aplicaciones como el Kinect de Microsoft como sensor visual. Nabipour [42] propone la utilización de un sensor de bajo costo Kinect para rastrear un objeto con un simulador de plataforma móvil (MP) de un robot paralelo guiado por cable. Se introducen dos metodologías. La primera se basa en una técnica de color base realizado en Matlab y el otro explora la información de color y profundidad usando OpenCV. Ramadour [43] presentan un trabajo cuyo objetivo es extender las funcionalidades de asistencia del robot paralelo de cable Marionet-Assit, creado principalmente para realizar operaciones de transferencia como elementos habituales (Cajas de medicina, teléfono, etc) por medio de servo control visual. Dicho robot tiene la configuración que proporciona tres movimientos traslacionales, y la cámara está ubicada en el elemento final. El propósito de este trabajo es calcular la velocidad de traslación enviada al controlador del robot, se utiliza el área y el centro de gravedad en la imagen del objeto a ser tomado.

*Figura 7. Robot paralelo guiado por cable*



*Fuente: [43]*

En el servo control visual también se generan singularidad que es un problema no trivial y que en la mayoría es enfocado en imágenes (IBVS). Actualmente, ya se han planteado métodos que ya son determinados.

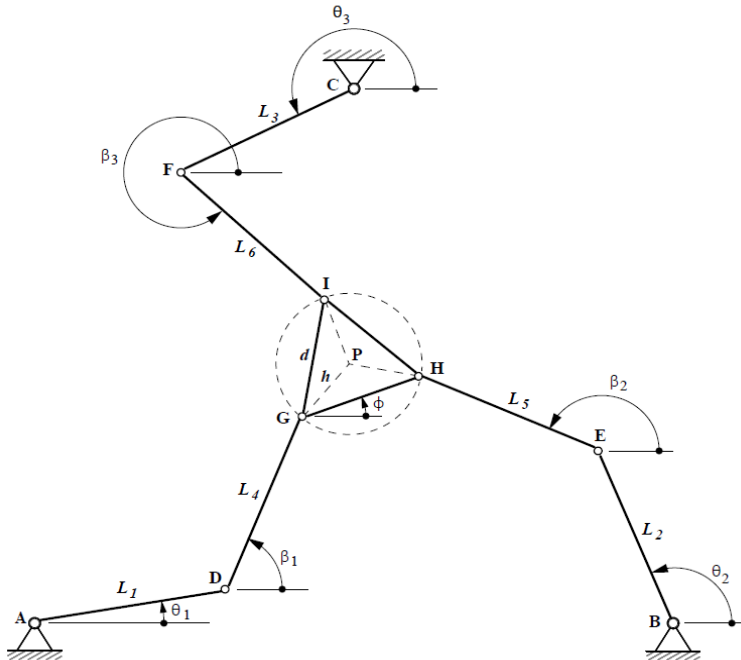


### 3. MODELAMIENTO CINEMÁTICO Y DINÁMICO DEL MANIPULADOR PARALELO DE 3 GRADOS DE LIBERTAD TIPO 3-RRR

En este capítulo se muestra el análisis cinemático del manipulador 3-RRR en el cual se determinarán las posiciones de los eslabones y del elemento final. Para ello se estableció, en primera instancia, un análisis de la cinemática directa y, para su validación, el análisis de la cinemática inversa. En particular, el modelo cinemático tiene por objetivo describir el movimiento de los eslabones en la estructura robótica, mediante el análisis cinemático adquiere relevancia al permitir el estudio integral de los movimientos individuales en cada articulación y su integración dentro del sistema, [44].

En la actualidad existen dos metodologías en el cual se calcula la cinemática de un manipulador, denominados cinemática directa e inversa. El concepto de la cinemática fue desarrollado como la operación que permite determinar la posición y orientación del elemento final de la cadena que forma el dispositivo. En cambio, en la cinemática inversa se emplean métodos para definir el valor de las coordenadas generalizadas solicitadas para que una cadena cinemática alcance una posición y orientación requerida, [45]. En este estudio se formulará los modelos matemáticos con los que se realizará el análisis cinemático directo e inverso del manipulador paralelo 3-RRR. En la Figura 8 se muestran las variables utilizadas en el manipulador 3-RRR para determinar las ecuaciones de enlace geométrico.

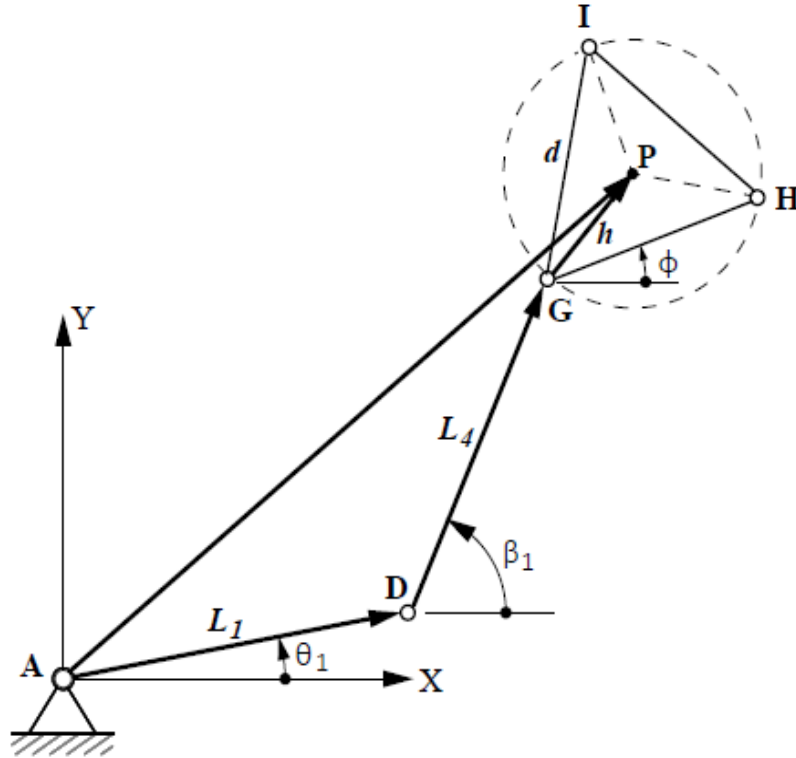
**Figura 8. Esquema geométrico del manipulador paralelo planar 3-RRR**



**Fuente: [46]**

Como se observa en la Figura 9, se inicia con la primera cadena que conforma el manipulador paralelo planar.

**Figura 9. Primera cadena cinemática**



**Fuente:** [46]

Para ello se emplea la metodología de la cinemática directa donde se determina la posición del elemento terminal (P) con respecto al primer grado de libertad (A) utilizando ecuaciones de enlace geométrico. También se puede observar que hay dos eslabones con dimensiones  $L_1$  y  $L_4$  e incluso dos articulaciones (D) y (G).

$$\overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GP} \quad \text{Ec. 1}$$

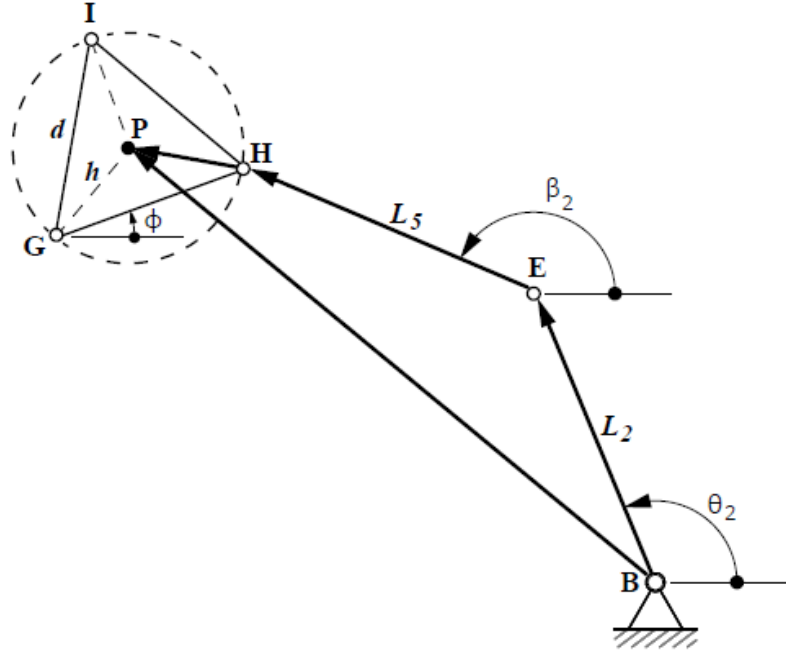
$$x_{PA} = x_A + L_1 \cos \theta_1 + L_4 \cos \beta_1 + h \cos \left( \phi + \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{Ec. 2}$$

$$y_{PA} = y_A + L_1 \sin \theta_1 + L_4 \sin \beta_1 + h \sin \left( \phi + \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{Ec. 3}$$

Al observar la Ec. 1 se puede notar el cálculo del vector  $\overline{AP}$  determinando la posición del punto P con respecto al punto (A). En las Ec. 2 y Ec. 3 se determina la posición del punto P con respecto al eje x y con respecto al eje y.

En la Figura 10 se muestra la segunda cadena cinemática analizada. En esta cadena, se analiza la posición del elemento terminal, punto (P), con respecto al apoyo (B).

**Figura 10. Segunda cadena cinemática**



**Fuente: [46]**

Para ello se emplea en cálculo de enlace geométrico para determinar la posición del punto (P).

$$\overline{BP} = \overline{BF} + \overline{EH} + \overline{HP} \quad \text{Ec. 4}$$

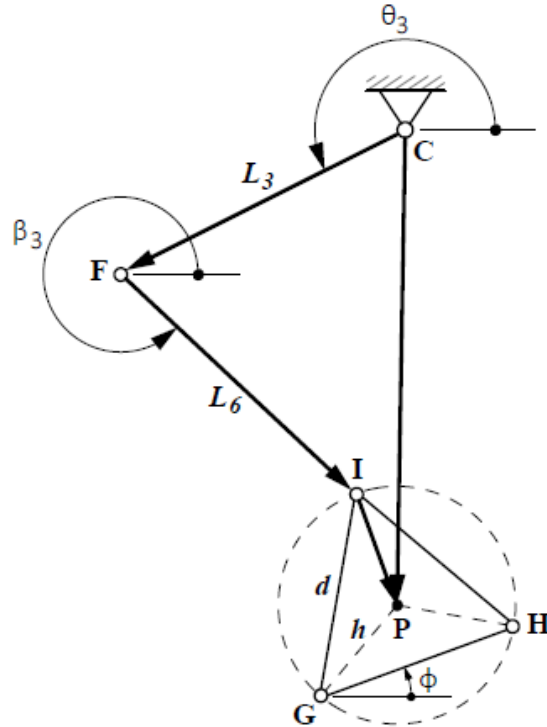
$$x_{PB} = x_B + L_2 \cos \theta_2 + L_5 \cos \beta_5 + h \cos \left( \phi + \frac{5\pi}{6} \right) \quad \text{Ec. 5}$$

$$y_{PB} = y_B + L_2 \sin \theta_2 + L_5 \sin \beta_5 + h \sin \left( \phi + \frac{5\pi}{6} \right) \quad \text{Ec. 6}$$

La Ec. 4 determina la posición del punto P con respecto al apoyo B. En las Ec. 5 y Ec. 6 se determina la posición del punto (P) con respecto al eje x y con respecto al eje y.

En la Figura 11 se muestra la tercera cadena cinemática que se emplea para el cálculo de la posición del punto (P), posición del elemento terminal.

**Figura 11. Tercera cadena cinemática**



**Fuente: [46]**

Este cálculo se obtiene utilizando la ecuación de enlace geométrico:

$$\overline{CP} = \overline{CF} + \overline{FI} + \overline{IP} \quad \text{Ec. 7}$$

$$x_{PC} = x_C + L_3 \cos \theta_3 + L_6 \cos \beta_3 + h \cos \left( \phi + \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{Ec. 8}$$

$$y_{PC} = y_C + L_3 \sin \theta_3 + L_6 \sin \beta_3 + h \sin \left( \phi + \frac{3\pi}{2} \right) \quad \text{Ec. 9}$$

Al observar la

Ec. 7 se puede notar el cálculo del vector  $\overline{CP}$  que determina la posición del punto (P) con respecto al punto (B). En las Ec. 8 y Ec. 9 se determina la posición del punto (P) con respecto al eje x y con respecto al eje y.

Al realizar el cálculo de las Ec. 1 a la Ec. 9 se determinan la posición del punto (P) con respecto a los tres grados de libertad que son denominados  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ . Estas ecuaciones se requieren para el análisis de velocidades y aceleraciones del manipulador, ver apartados 3.4.1 y 3.5.

### 3.1. CINEMATICA DIRECTA

En este apartado se realizará el análisis de la cinemática directa para el manipulador paralelo plano 3-RRR. Básicamente en un sistema robótico se puede describir a partir de un modelo cinemático de cada una de las articulaciones y eslabones que lo conforman. Este concepto es denominado como cinemática directa, el cual como objetivo es interpretar la geometría y la ubicación de cada uno de los eslabones que constituyen el sistema, buscando definir las características del último eslabón que ejecuta la tarea que se va a realizar. Frecuentemente este eslabón es denominado elemento final, [45].

Para iniciar con el análisis de la cinemática directa, generalmente se determinan las coordenadas  $x$  e  $y$  de las articulaciones (D), (E) y (F) del mecanismo, como se muestra en la Figura 8.

$$x_D = L_1 \cos \theta_1 + x_A \quad \text{Ec. 10}$$

$$y_D = L_1 \sin \theta_1 + y_A \quad \text{Ec. 11}$$

$$x_E = L_2 \cos \theta_2 + x_B \quad \text{Ec. 12}$$

$$y_E = L_2 \sin \theta_2 + y_B \quad \text{Ec. 13}$$

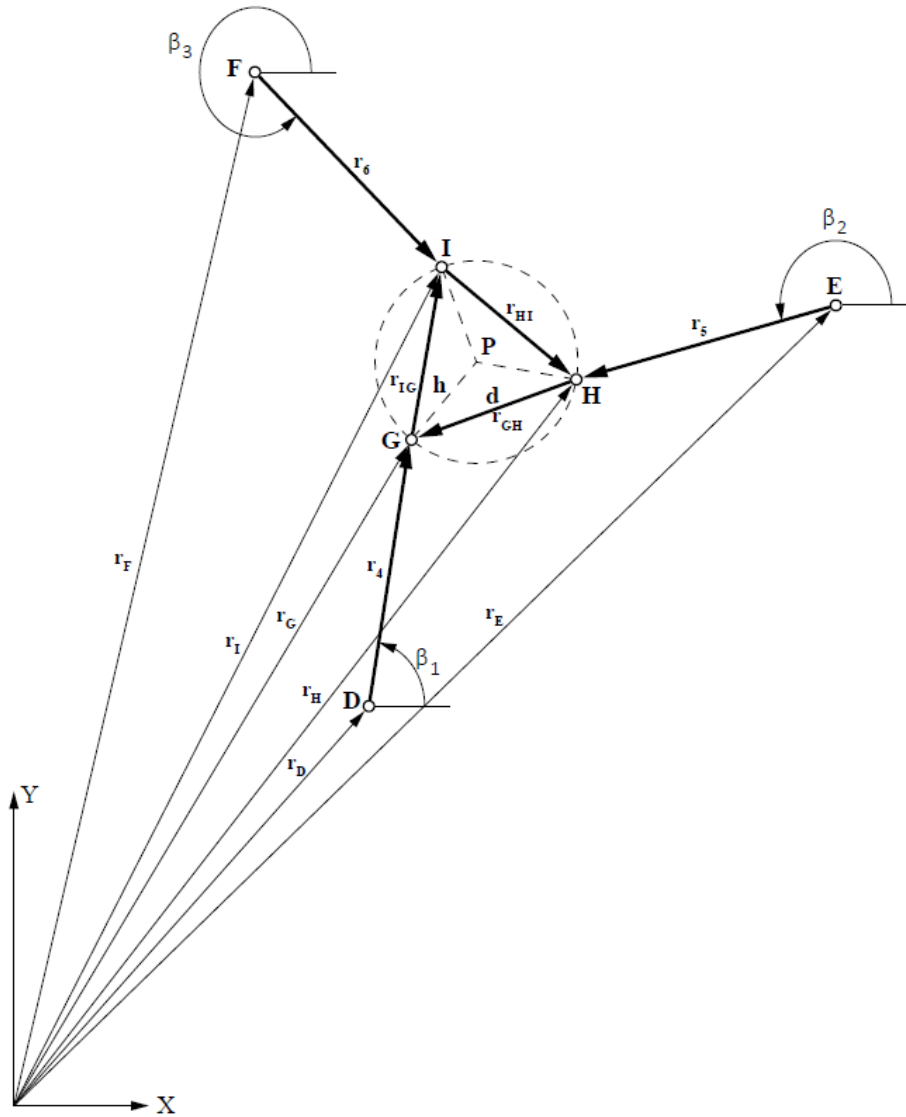
$$x_F = L_3 \cos \theta_3 + x_C \quad \text{Ec. 14}$$

$$y_F = L_3 \sin \theta_3 + y_C \quad \text{Ec. 15}$$

Las Ec. 10 y Ec. 11 definen las posiciones en  $x$  e  $y$  del punto (D) y la Ec. 12 a Ec. 15 definen las posiciones de los puntos (E) y (F).

A continuación, se procede a descomponer el grupo cinemático de tercera clase como se muestra en la Figura 12 en tres grupos de segunda clase, con el objetivo de establecer las relaciones que permiten encontrar las coordenadas de los puntos extremos de la plataforma móvil (G, H, I). En este análisis, básicamente se parte de una base u origen para determinar las coordenadas de actuador final.

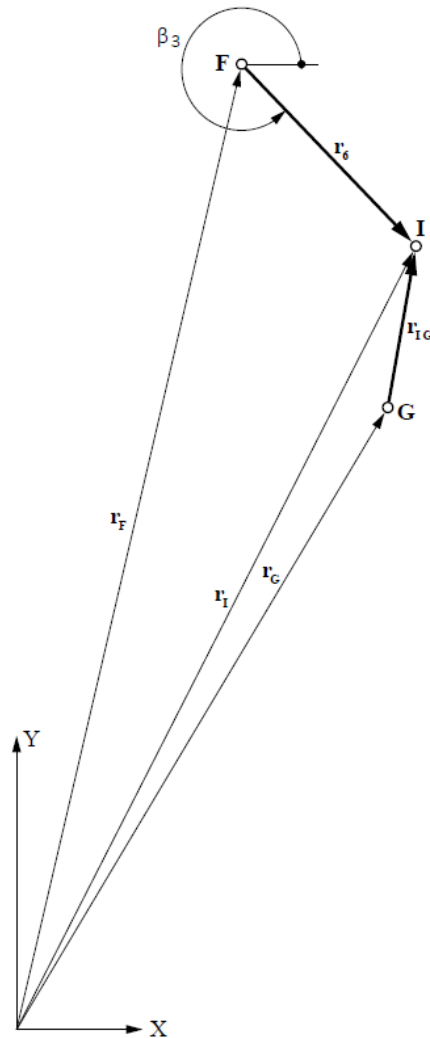
*Figura 12. Grupo de tercera clase y su disposición vectorial*



**Fuente:** [46]

En la Figura 13 se muestran la geometría de los acopladores y el elemento terminal; basado en esta geometría, se obtendrá el análisis vectorial. Cada grupo se orienta y parte de un origen. A continuación, se realizará la descomposición de las cadenas para realizar su respectivo análisis cinemático.

**Figura 13.** Primera cadena vectorial compuesta por los puntos  $G, I, F$



**Fuente:** [46]

Al descomponer el grupo de tercera clase se inicia con la primera descomposición de la primera cadena vectorial, cuyo proceso se inicia con el cálculo de las ecuaciones correspondiente para el cálculo de los puntos  $G, I, F$ .

Basado en la geometría mostrada en la Figura 13, se obtienen las siguientes ecuaciones de lazo:

$$r_G + r_{IG} = r_F + r_{FI} = r_I \quad \text{Ec. 16}$$

$$L_{FG}^2 = (x_G - x_f)^2 + (y_G - y_f)^2 \quad \text{Ec. 17}$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{y_G - y_f}{x_G - x_f} \quad \text{Ec. 18}$$

$$\alpha_3 = \text{atan} \frac{y_G - y_f}{x_G - x_f} \quad \text{Ec. 19}$$

$$L_{GI}^2 = L_{FI}^2 + L_{FG}^2 - 2L_{FI}L_{FG} \cos(\theta_3) \quad \text{Ec. 20}$$

$$L_{GI}^2 - L_{FI}^2 - L_{FG}^2 = -2L_{FI}L_{FG} \cos(\theta_3) \quad \text{Ec. 21}$$

$$\theta_3 = \text{acos} \frac{L_{FI}^2 + L_{FG}^2 - L_{GI}^2}{2L_{FI}L_{FG}} \quad \text{Ec. 22}$$

Determinando  $\beta_3 = \alpha_3 \pm \theta_3$  de las ecuaciones Ec. 21 y Ec. 22 se tiene:

$$\beta_3 = \text{atan} \frac{y_G - y_f}{x_G - x_f} \pm \text{acos} \frac{L_{FI}^2 + L_{FG}^2 - L_{GI}^2}{2L_{FI}L_{FG}} \quad \text{Ec. 23}$$

Para calcular la posición del vector (I) con respecto a las coordenadas x e y.

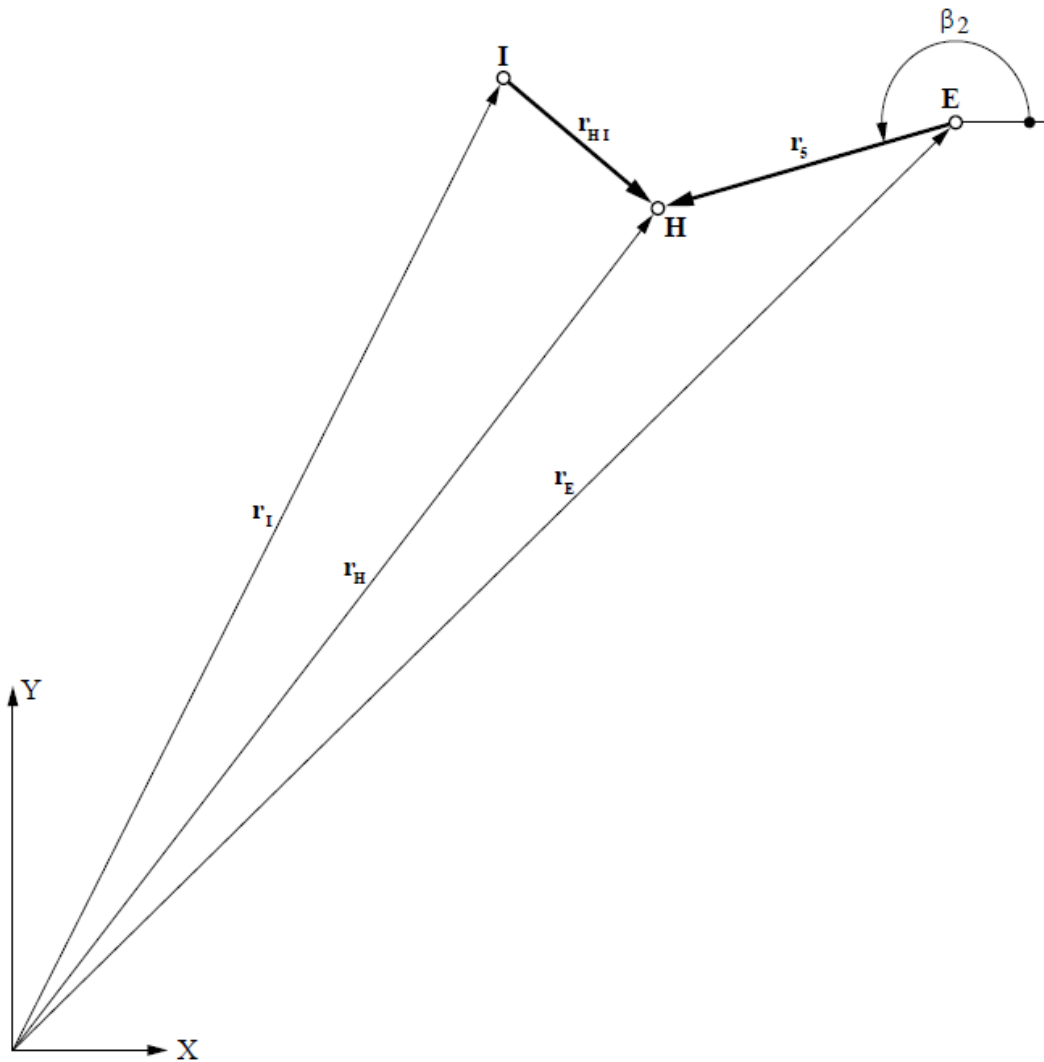
$$x_I = x_F + L_{FI} \cos \beta_3 \quad \text{Ec. 24}$$

$$y_I = y_F + L_{FI} \sin \beta_3 \quad \text{Ec. 25}$$



A continuación, en la Figura 14 se tiene la segunda cadena cinemática que representada por los puntos  $I$ ,  $H$ ,  $E$ .

*Figura 14. Segunda cadena vectorial compuesta por los puntos  $I$ ,  $H$ ,  $E$*



**Fuente:** [46]

Al descomponer el grupo de tercera clase se inicia con la segunda descomposición de la segunda cadena vectorial, cuyo proceso se inicia con el cálculo de las ecuaciones con las que se determinan las posiciones relativas entre los pares  $I$ ,  $H$ ,  $E$ .

Basado en la Figura 14. Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$r_E + r_{HE} = r_I + r_{IH} = r_H \quad \text{Ec. 26}$$

Ec. 27

$$L_{EI}^2 = (x_E - x_I)^2 + (y_E - y_I)^2$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{y_E - y_I}{x_E - x_I} \quad \text{Ec. 28}$$

$$\alpha_2 = \text{atan} \frac{y_E - y_I}{x_E - x_I} \quad \text{Ec. 29}$$

$$L_{IH}^2 = L_{EI}^2 + L_{EH}^2 - 2L_{EI}L_{EH} \cos(\theta_2) \quad \text{Ec. 30}$$

$$L_{IH}^2 - L_{EI}^2 - L_{EH}^2 = -2L_{EI}L_{EH} \cos(\theta_2) \quad \text{Ec. 31}$$

$$\theta_2 = \text{acos} \frac{L_{IH}^2 + L_{EI}^2 - L_{EH}^2}{2L_{EI}L_{EH}} \quad \text{Ec. 32}$$

Determinando  $\beta_2 = \alpha_2 \pm \theta_2$  el cual se toman las ecuaciones Ec. 29 y Ec. 32 se tiene:

$$\beta_2 = \text{atan} \frac{y_E - y_I}{x_E - x_I} \pm \text{acos} \frac{L_{IH}^2 + L_{EI}^2 - L_{EH}^2}{2L_{EI}L_{EH}} + \pi \quad \text{Ec. 33}$$

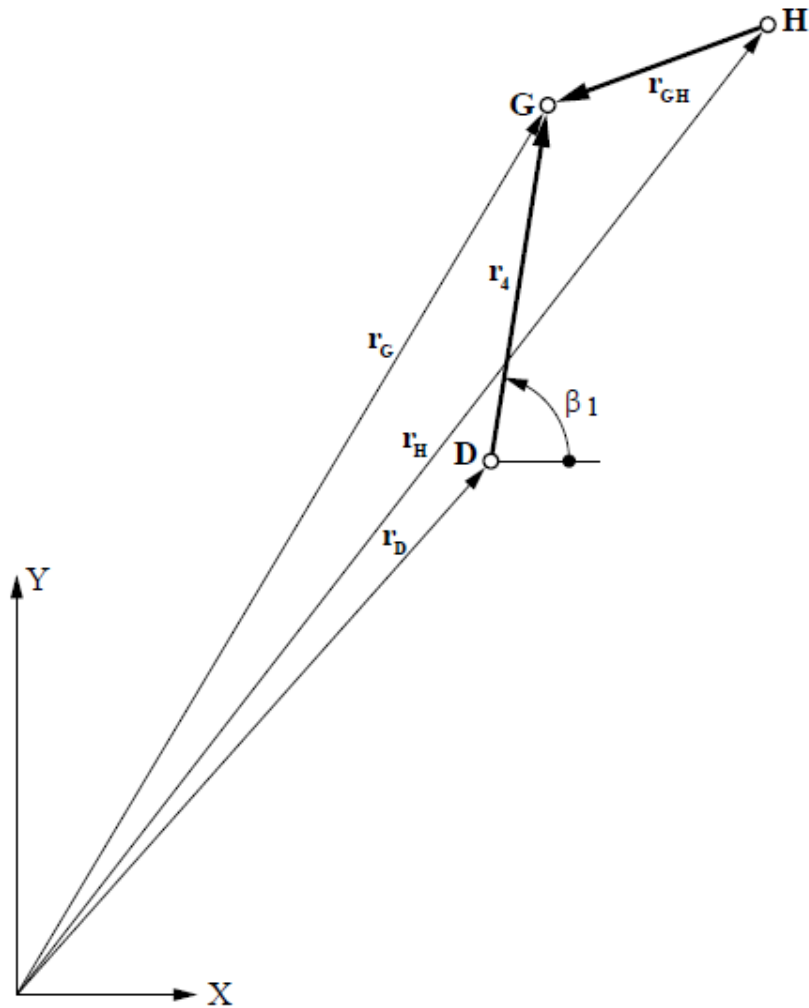
Para calcular la posición del vector (H) con respecto a las coordenadas x e y.

$$x_H = x_E + L_{EH} \cos \beta_3 \quad \text{Ec. 34}$$

$$y_H = y_E + L_{EH} \sin \beta_3 \quad \text{Ec. 35}$$

Finalmente, en la Figura 15 se tiene la segunda cadena cinemática que representada por los puntos  $I, H, E$ .

**Figura 15. Tercera cadena vectorial compuesta por los puntos  $H, G, D$**



**Fuente: [46]**

Al descomponer el grupo de tercera clase se inicia con la primera descomposición de la primera cadena vectorial, cuyo proceso se inicia con el cálculo de las ecuaciones correspondiente para el cálculo de los pares  $H, G, D$ .

Basado en la Figura 15. Se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$r_D + r_{DG} = r_H + r_{HG} = r_G \quad \text{Ec. 36}$$

$$L_{EI}^2 = (x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 \quad \text{Ec. 37}$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_H - y_D}{x_H - x_D} \quad \text{Ec. 38}$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \frac{y_H - y_D}{x_H - x_D} \quad \text{Ec. 39}$$

$$L_{GH}^2 = L_{DG}^2 + L_{HD}^2 - 2L_{DG}L_{HD} \cos(\theta_1) \quad \text{Ec. 40}$$

$$L_{GH}^2 - L_{DG}^2 - L_{HD}^2 = -2L_{DG}L_{HD} \cos(\theta_1) \quad \text{Ec. 41}$$

$$\theta_1 = \cos^{-1} \frac{L_{GH}^2 + L_{DG}^2 - L_{HD}^2}{2L_{DG}L_{HD}} \quad \text{Ec. 42}$$

Determinando  $\beta_1 = \alpha_1 \pm \theta_1$  el cual se toman las ecuaciones

Ec. 39 y

Ec. 42 se tiene:

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{y_H - y_D}{x_H - x_D} \pm \cos^{-1} \frac{L_{GH}^2 + L_{DG}^2 - L_{HD}^2}{2L_{DG}L_{HD}} \quad \text{Ec. 43}$$

El vector posición del punto (G) con respecto al apoyo A, se obtiene mediante las siguientes ecuaciones.

$$x_G = x_D + L_{DG} \cos \beta_1 \quad \text{Ec. 44}$$

$$y_G = y_D + L_{DG} \sin \beta_1 \quad \text{Ec. 45}$$

Terminando el análisis se toma un punto arbitrario de la plataforma móvil y se determinan sus coordenadas, con el propósito de comparar los resultados de dichas coordenadas en el punto seleccionado arbitrariamente.

En este caso se tomará el punto arbitrario de referencia ( $H$ ).

$$x_{H,tentativo} = x_E + L_{EH} \cos \beta_2 \quad \text{Ec. 46}$$

$$y_{H,tentativo} = y_E + L_{EH} \sin \beta_2 \quad \text{Ec. 47}$$

Luego se requieren comparar los resultados entre las coordenadas ficticias y las tentativas del punto ( $H$ ), se evalúa el ángulo  $\beta_2$  en un rango de 0 a  $2\pi$  y por medio de un proceso iterativo se calcula el valor de  $\beta_2$  sea aproximadamente igual a  $\beta_{2,Tentativo}$ , aceptando un error entre ellos menor a 0,01 el cual se calcula por medio de la siguiente expresión.

$$Error = |\beta_{2,asumido} - \beta_{2,nuevo}| \ll 0,01$$

Por lo tanto:

$$Si \text{ Error} \ll 0,01 \rightarrow (x, y) \text{ tentativos} \approx (x, y) \text{ Ficticios}$$

Al cumplirse la condición, ya se conocen las coordenadas del punto ( $H$ ) y las coordenadas del resto de las articulaciones. Así, se puede determinar las coordenadas del elemento terminal.

$$x_P = x_G + h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{Ec. 48}$$

$$y_P = y_G + h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{Ec. 49}$$

### 3.2. CINEMÁTICA INVERSA

La cinemática inversa reviste una importancia especial ya que según las tareas que se desean realizar, el robot puede definirse en términos de la posición y de la orientación en el espacio. Básicamente puede recurrirse a definir longitudes expresadas en metros y en valores angulares definidos en radianes, lo cual facilita el análisis y diseño de sistemas de control, [45]. Para determinar la pose del actuador final se requiere las coordenadas de las

articulaciones, [28]. En general esta técnica permite determinar el movimiento de una cadena de articulaciones para lograr que el actuador final se ubique en una posición concreta. Al especificar una posición de destino y una orientación en términos cartesianos, debe calcularse la cinemática inversa para poder despejar los ángulos de articulación requeridos. Los sistemas que permiten describir términos cartesianos que son capaces de mover el manipulador a puntos que nunca fueron capaces de mover en el espacio de trabajo a los cuales tal vez nunca haya ido antes, [47].

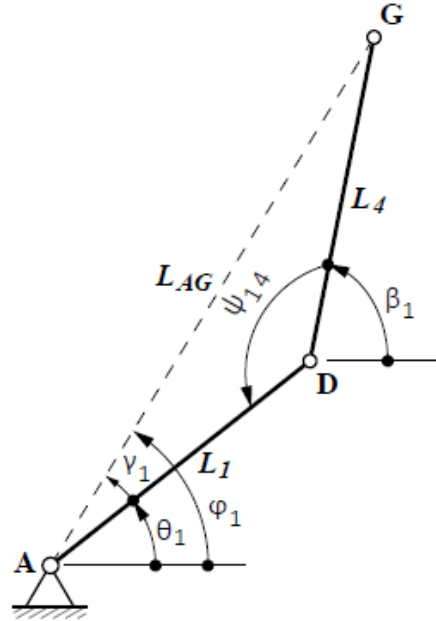
El movimiento de una cadena cinemática de un robot es modelado por ecuaciones cinemáticas propias de la misma cadena. Estas ecuaciones definen la configuración de la cadena en términos de sus parámetros, [47]. Así las formulas de la cinemática inversa permite el cálculo de los parámetros de las articulaciones del manipulador para seleccionar o tomar algún objeto. El análisis cinemático inverso se obtendrá mediante una solución geométrica.

### 3.2.1. Solución geométrica

El método geométrico permite encontrar la solución de un manipulador paralelo planar 3-RRR al descomponer sus tres cadenas cinemáticas en tres grupos, para resolver los problemas de geometría plana. En algunos manipuladores como ejemplo los seriales cuando las  $\alpha_i = 0$  o  $\pm 90$  su solución puede ser trivial. Pero para este tipo de manipulador paralelo sus cadenas pueden superar estos valores en grados. Para este caso las articulaciones pueden calcularse utilizando las herramientas de geometría plana, [47], [48].

Como se muestra en la Figura 16, la primera cadena está conformada por los puntos A, D y G. Inicialmente se muestra un triángulo formado por las dos articulaciones con dimensiones  $L_1$  y  $L_4$  y una línea que une el origen, que en este caso el punto A

***Figura 16. Primera cadena vectorial compuesta por los puntos A, D, G***



**Fuente:** [46]

La línea punteada  $L_{AG}$  representa otra configuración de triángulo, a partir de ello se inicia calculando el ángulo  $\theta_1$  y  $\beta_1$ .

Donde:

$$\theta_1 = \varphi_1 + \gamma_1 \quad \text{Ec. 50}$$

$$\beta_1 = \pi - \gamma_1 + \varphi_1 - \psi_{1,4} \quad \text{Ec. 51}$$

Ahora al ver las ecuaciones Ec. 50 y Ec. 51 se determinan los ángulos  $\theta_1$  y  $\beta_1$  se prosigue a calcular los ángulos  $\gamma_1$  y  $\psi_{1,4}$  utilizando ley de cosenos.

Calculando el ángulo  $\gamma_1$  se tiene:

$$L_{GD}^2 = L_{GA}^2 + L_{DA}^2 - 2L_{GA}L_{DA} \cos(\gamma_1) \quad \text{Ec. 52}$$

Despejando el ángulo  $\gamma_1$  de la ecuación Ec. 52 se tiene:

$$\gamma_1 = \text{acos} \left( \frac{L_{GA}^2 + L_{DA}^2 - L_{GD}^2}{2L_{GA}L_{DA}} \right) \quad \text{Ec. 53}$$

Como se observa en la ecuación Ec. 53 se determina el ángulo  $\gamma_1$  utilizando ley de cosenos.

Calculando el ángulo  $\psi_{1,4}$  se tiene:

$$L_{GA}^2 = L_{GD}^2 + L_{DA}^2 - 2L_{GD}L_{DA} \cos(\psi_{1,4}) \quad \text{Ec. 54}$$

Despejando el ángulo  $\psi_{1,4}$  de la ecuación Ec. 54 se tiene:

$$\psi_{1,4} = \arccos\left(\frac{L_{GD}^2 + L_{DA}^2 - L_{GA}^2}{2L_{GD}L_{DA}}\right) \quad \text{Ec. 55}$$

Luego de determinar el ángulo  $\psi_{1,4}$ , como se muestra en la ecuación Ec. 55, se procede a calcular el ángulo  $\varphi_1$ .

Básicamente se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

$$L_{AG}^2 = (x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 \quad \text{Ec. 56}$$

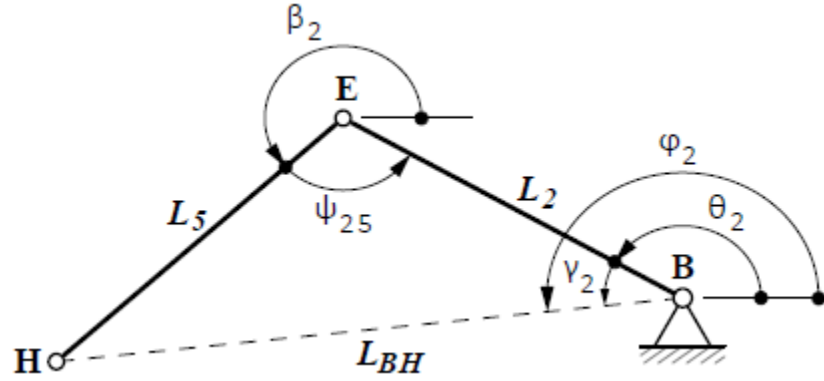
Así finalmente se puede determinar  $\varphi_1$  mediante la relación entre seno y coseno, cuyo resultado final es:

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{y_G - y_A}{x_G - x_A}\right) \quad \text{Ec. 57}$$

En la Figura 17 se muestra la segunda cadena conformada por los puntos B, E y H. Inicialmente se muestra un triángulo formado dos eslabones, con dimensión  $L_2$  y  $L_5$ , y una línea que une el origen que en este caso es denominado el punto B.

**Figura 17. Segunda cadena vectorial compuesta por los puntos B, E, H**





*Fuente: [46]*

La línea punteada  $L_{BH}$  representa otra configuración de triángulo, a partir de ello se inicia calculando el ángulo  $\theta_2$  y  $\beta_2$ .

Donde:

$$\theta_2 = \varphi_2 - \gamma_2 \quad \text{Ec. 58}$$

$$\beta_2 = \pi - \gamma_2 + \varphi_2 - \psi_{2,5} \quad \text{Ec. 59}$$

Ahora al ver las ecuaciones Ec. 58 y Ec. 59 se determinan los ángulos  $\theta_2$  y  $\beta_2$  se prosigue a calcular los ángulos  $\gamma_2$  y  $\psi_{2,5}$  utilizando ley de cosenos.

Calculando el ángulo  $\gamma_2$  se tiene:

$$L_{HE}^2 = L_{EB}^2 + L_{HB}^2 - 2L_{EB}L_{HB} \cos(\gamma_2) \quad \text{Ec. 60}$$

Despejando el ángulo  $\gamma_2$  de la ecuación Ec. 60 se tiene:

$$\gamma_2 = \arccos\left(\frac{L_{HB}^2 + L_{EB}^2 - L_{HE}^2}{2L_{EB}L_{HB}}\right) \quad \text{Ec. 61}$$

Como se observa en la ecuación Ec. 61 el ángulo  $\gamma_2$  se determina mediante la ley de coseno. De igual manera se determina el ángulo  $\psi_{2,5}$ .

Calculando el ángulo  $\psi_{2,5}$  se tiene:

$$L_{HB}^2 = L_{HE}^2 + L_{EB}^2 - 2L_{HE}L_{EB} \cos(\psi_{2,5}) \quad \text{Ec. 62}$$

Despejando el ángulo  $\psi_{2,5}$  de la ecuación Ec. 62 se tiene:

$$\psi_{2,5} = \arccos\left(\frac{L_{HE}^2 + L_{BE}^2 - L_{HB}^2}{2L_{HE}L_{EB}}\right) \quad \text{Ec. 63}$$

Luego de determinar el ángulo  $\psi_{2,5}$  como se muestra en la ecuación Ec. 63, se procede a calcular el ángulo  $\varphi_2$  el cual está formado por la línea punteada con dimensiones  $L_{HB}$ .

Básicamente se calcula utilizando el teorema de Pitágoras:

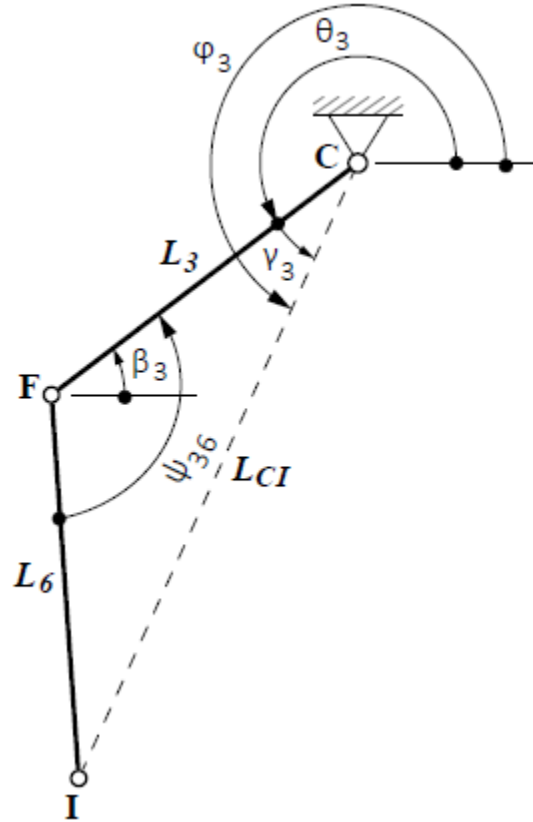
$$L_{HB}^2 = (x_H - x_B)^2 + (y_H - y_B)^2 \quad \text{Ec. 64}$$

Así finalmente se puede determinar  $\varphi_2$  utilizando la relación entre seno y coseno, cuyo resultado final es:

$$\varphi_2 = \text{atan}\left(\frac{y_H - y_B}{x_H - x_B}\right) + \pi \quad \text{Ec. 65}$$

En la Figura 18 se muestra la tercera cadena conformada por los puntos C, F y I. Inicialmente se muestra un triángulo formado dos eslabones, con dimensiones  $L_3$  y  $L_6$ , y una línea que une el origen que en este caso es denominado el punto C.

***Figura 18. Tercera cadena vectorial compuesta por los puntos C, F, I***



**Fuente:** [46]

La línea punteada con dimensiones  $L_{CI}$  representa otra configuración de triángulo, a partir de ello se inicia calculando el ángulo  $\theta_3$  y  $\beta_3$ .

Donde:

$$\theta_3 = \varphi_3 - \gamma_3 \quad \text{Ec. 66}$$

$$\beta_3 = \varphi_3 - \gamma_3 + \pi - \psi_{3,6} \quad \text{Ec. 67}$$

Se procede a calcular los ángulos  $\gamma_3$  y  $\psi_{3,6}$  utilizando la ley de cosenos.

$$L_{IF}^2 = L_{CF}^2 + L_{CI}^2 - 2L_{CF}L_{CI} \cos(\gamma_3) \quad \text{Ec. 68}$$

Despejando el ángulo  $\gamma_3$  de la ecuación Ec. 68 se tiene:

$$\gamma_3 = \text{acos}\left(\frac{L_{FC}^2 + L_{IC}^2 - L_{IF}^2}{2L_{FC}L_{IC}}\right) \quad \text{Ec. 69}$$

Basado en la geometría mostrada en la Figura 18, se obtiene:

$$L_{IC}^2 = L_{FC}^2 + L_{IF}^2 - 2L_{FC}L_{IF}\cos(\psi_{3,6}) \quad \text{Ec. 70}$$

Despejando el ángulo  $\psi_{3,6}$  de la ecuación Ec. 70 se tiene:

$$\psi_{3,6} = \text{acos}\left(\frac{L_{FC}^2 + L_{IF}^2 - L_{IC}^2}{2L_{FC}L_{IF}}\right) + 2\pi \quad \text{Ec. 71}$$

De la geometría mostrada en la Figura 18, se tiene:

$$L_{CI}^2 = (x_I - x_C)^2 + (y_I - y_C)^2 \quad \text{Ec. 72}$$

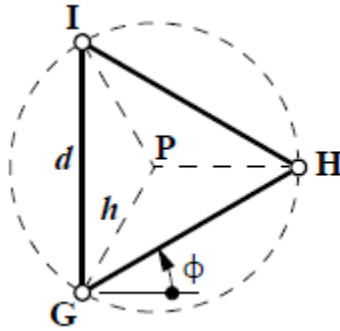
Así finalmente se puede determinar  $\varphi_3$  utilizando la relación entre seno y coseno, cuyo resultado final es:

$$\varphi_3 = \frac{3\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{y_I - y_C}{x_I - x_C}\right) \quad \text{Ec. 73}$$

Finalmente se determina los ángulos de la plataforma móvil que están compuestos por los puntos G, H, I.

Como se puede notar en la plataforma ver Figura 19, existen 3 variables que son  $d$ ,  $h$ , y  $\phi$ . La variable  $d$  representa la distancia entre los puntos G, I e H, la variable  $h$  representa la distancia desde el centro del triángulo hasta los vértices, el punto P representa el baricentro y la variable  $\phi$  es el ángulo de la horizontal que está en relación con la línea ( $L_{GH}$ ).

**Figura 19. Plataforma móvil compuesta por los puntos G, H, I**



**Fuente:** [46]

Como primera instancia se inicia el cálculo de la posición del punto G con respecto al punto P de la plataforma móvil, utilizando la metodología de enlace geométrico para determinar su posición con respecto a los ejes  $x$  e  $y$ .

$$x_G = x_P - h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{Ec. 74}$$

$$y_G = y_P - h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{Ec. 75}$$

El siguiente paso es determinar la ubicación del punto H con respecto al punto P.

$$x_H = x_P - h \cos\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) \quad \text{Ec. 76}$$

$$y_H = y_P - h \sin\left(\frac{\pi}{6} + \phi\right) \quad \text{Ec. 77}$$

Como se muestran las ecuaciones Ec. 76 y Ec. 77 se determinan las posiciones del punto H con respecto a P.

El siguiente paso es determinar la ubicación del punto I con respecto al punto P.

$$x_I = x_P - h \cos(\phi) \quad \text{Ec. 78}$$

$$y_I = y_P - h \sin(\phi) \quad \text{Ec. 79}$$

Como se muestran las ecuaciones Ec. 78 y Ec. 79 se determinan las posiciones del punto I con respecto a P.

Con esto se finaliza el cálculo de la cinemática directa e inversa de las articulaciones del manipulador y la plataforma móvil.

### 3.3. MATRIZ JACOBIANA

El jacobiano se define como una forma multidimensional de la derivada [47]. Esta matriz permite encontrar las relaciones entre las velocidades de las articulaciones, las velocidades lineales y de rotación del elemento final del manipulador. Esta matriz formada por las derivadas parciales permite el análisis del comportamiento del manipulador dentro de su área de trabajo en cuanto a singularidades, precisión y rigidez. Para obtener las ecuaciones de velocidad, se toman las ecuaciones de enlace, se derivan con respecto al tiempo, y se igualan a cero. De esta forma, se obtiene:

$$\frac{df_i}{dt} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial (\theta_i, \beta_i, \phi, x_p, y_p)} \right] \cdot [\dot{\theta}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\phi}, \mathbf{v}_{iP}] = \mathbf{J}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{Ec. 80}$$

La matriz jacobiana  $\mathbf{J}_q$ , está definida por las derivadas parciales de las ecuaciones de enlace con respecto a las coordenadas de los sistemas. En primera instancia se toman las ecuaciones de enlace de la primera cadena cinemática del manipulador. Derivando con respecto al tiempo las ecuaciones Ec. 1 y Ec. 2, se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = -L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 - L_4 \cos(\beta_1) \dot{\beta}_1 - h \sin\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \dot{\phi} - v_{px} = 0 \quad \text{Ec. 81}$$

$$\frac{df}{dt} = L_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + L_4 \cos(\beta_1) \dot{\beta}_1 + h \cos\left(\phi + \frac{\pi}{6}\right) \dot{\phi} - v_{py} = 0 \quad \text{Ec. 82}$$

Como se observan en las ecuaciones Ec. 81 y Ec. 82 se tienen las derivadas respectivas de la primera cadena cinemática de las ecuaciones Ec. 2 y Ec. 3. Repitiendo el proceso para la segunda cadena cinemática, derivando las Ec. 4 y Ec. 5, se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = -L_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 - L_4 \cos(\beta_2) \dot{\beta}_2 - h \sin\left(\phi + \frac{5\pi}{6}\right) \dot{\phi} - v_{px} = 0 \quad \text{Ec. 83}$$

$$\frac{df}{dt} = L_1 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2 + L_4 \cos(\beta_2) \dot{\beta}_2 + h \cos\left(\phi + \frac{5\pi}{6}\right) \dot{\phi} - v_{py} = 0 \quad \text{Ec. 84}$$

Finalmente, se realiza el mismo procedimiento para la tercera cadena cinemática Ec. 8 y Ec. 9, con lo que se obtiene:

$$\frac{df}{dt} = -L_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 - L_6 \cos(\beta_3) \dot{\beta}_3 - h \sin\left(\phi + \frac{3\pi}{6}\right) \dot{\phi} - v_{px} = 0 \quad \text{Ec. 85}$$

$$\frac{df}{dt} = L_3 \sin(\theta_3) \dot{\theta}_3 + L_6 \cos(\beta_3) \dot{\beta}_3 + h \cos\left(\phi + \frac{3\pi}{6}\right) \dot{\phi} - v_{py} = 0 \quad \text{Ec. 86}$$

Luego de obtener las derivadas de los enlaces geométricos calculados por las cadenas se prosigue a determinar las variables dependientes e independiente.

$$q_d = [\beta_1, \beta_2, \beta_3, x_p, y_p, \phi] \quad \text{Ec. 87}$$

$$q_i = [\theta_1, \theta_2, \theta_3] \quad \text{Ec. 88}$$

En la ecuación Ec. 87 se tiene las variables dependientes asociadas a la coordenada angular de los eslabones acopladores  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  y a las coordenadas angulares y lineales del elemento terminar  $(x_p, y_p, \phi)$ . En la ecuación Ec. 87 se tiene las variables independientes, que en este caso, serían los grados de libertad del manipulador. Al obtener las variables ya determinadas se procede a ubicar dichos parámetros en una matriz por medio de la siguiente ecuación:

$$[J_q] \cdot [\dot{q}] = 0 \quad \text{Ec. 89}$$

Donde  $J_q$  representa la matriz jacobiana del sistema y  $\dot{q}$  el vector de las variables dependientes e independientes. Representando en la forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & -L_4 \sin \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h \sin(\phi + \pi/6) & -1 & 0 \\ L_1 \cos \theta_1 & L_4 \cos \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & h \cos(\phi + \pi/6) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -L_2 \sin \theta_2 & -L_5 \sin \beta_2 & 0 & 0 & -h \sin(\phi + 5\pi/6) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \cos \theta_2 & L_5 \cos \beta_2 & 0 & 0 & h \cos(\phi + 5\pi/6) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 \sin \theta_3 & -L_6 \sin \beta_3 & -h \sin(\phi + 3\pi/2) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cos \theta_3 & L_6 \cos \beta_3 & h \cos(\phi + 3\pi/2) & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\phi} \\ v_{xp} \\ v_{yp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el análisis de la cinemática directa e inversa, la Ec. 89 se puede dividir considerando las coordenadas dependientes e independientes. De esta manera se obtiene:

$$J_q \cdot \dot{q} = J_{q_d} \cdot \dot{q}_d + J_{q_i} \cdot \dot{q}_i = 0 \quad \text{Ec. 90}$$

La ecuación Ec. 90 muestra dos variables. El parámetro  $J_{q_d}$  representa la matriz jacobiana de las variables dependientes y la variable  $J_{q_i}$  representa la matriz jacobiana de las variables independientes.

### 3.4. MATRIZ JACOBIANA DIRECTA

La matriz jacobiana directa permite calcular las velocidades y aceleraciones angulares de las articulaciones e incluso permite determinar la velocidad y aceleración lineal del actuador final a partir de los valores de velocidad en cada articulación.

#### 3.4.1. Velocidades angulares de los eslabones

Para calcular la matriz jacobiana directa, en primer lugar, se deben establecer las variables de los términos dependientes e independientes del sistema, que para este caso son representados  $\dot{q}_d$  y  $\dot{q}_i$ . Donde la variable  $\dot{q}_d$  representa las variables dependientes y la variable  $\dot{q}_i$  establece las variables independientes.

$$\dot{q}_d = [\dot{\beta}_1 \quad \dot{\beta}_2 \quad \dot{\beta}_3 \quad \dot{\phi} \quad v_{xP} \quad v_{yP}]^T \quad \text{Ec. 91}$$

$$\dot{q}_i = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T \quad \text{Ec. 92}$$

Al tomar la ecuación 90 se puede despejar la variable  $\dot{q}_d$  se tiene:

$$\dot{q}_d = -\text{inv}(J_{q_d}) \cdot J_{q_i} \cdot \dot{q}_i \quad \text{Ec. 93}$$



Al observar la ecuación 93 se tiene la variable  $J_{q_d}$  es la matriz jacobiana donde se extraen las variables dependientes de la matriz  $J_q$ , definiendo así la siguiente matriz:

$$J_{q_d} = \begin{bmatrix} -L_4 \sin \beta_1 & 0 & 0 & -h \sin(\phi + \pi/6) & -1 & 0 \\ L_4 \cos \beta_1 & 0 & 0 & h \cos(\phi + \pi/6) & 0 & -1 \\ 0 & -L_5 \sin \beta_2 & 0 & -h \sin(\phi + 5\pi/6) & -1 & 0 \\ 0 & L_5 \cos \beta_2 & 0 & h \cos(\phi + 5\pi/6) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -L_6 \sin \beta_3 & -h \sin(\phi + 3\pi/2) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & L_6 \cos \beta_3 & h \cos(\phi + 3\pi/2) & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

De la misma manera se produce para para obtener la matriz jacobiana de las variables independientes  $J_{q_i}$  de forma que:

$$J_{q_i} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ L_1 \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -L_2 \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & L_2 \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 \sin \theta_3 \\ 0 & 0 & L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación 93 se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\phi} \\ \mathbf{v}_{xP} \\ \mathbf{v}_{yP} \end{bmatrix} = -\text{inv}(J_{q_d}) \cdot J_{q_i} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 94}$$

La ecuación Ec. 94 las variables  $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2, \dot{\beta}_3, \dot{\phi}$  son las velocidades angulares de los eslabones y las variables  $\mathbf{v}_{xP}, \mathbf{v}_{yP}$  representan las velocidades lineales del actuador final, las cuales se desean conocer.

Como para el análisis de la dinámica inversa, se desea dejar las variables dependientes en función de las independientes, es necesario determinar la derivada implícita de las variables dependientes en función de las tres leyes de movimiento como se muestra a continuación:

$$\omega_j = \dot{\beta}_i = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_1} \omega_1 + \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_2} \omega_2 + \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_3} \omega_3 \quad , \quad \text{Donde: } j = 4, 5, 6 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{Ec. 95}$$

$$\omega_j = \dot{\phi}_j = \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_1} \omega_1 + \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_2} \omega_2 + \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta_3} \omega_3 \quad , \quad \text{Donde: } j = 7 \quad \text{Ec. 96}$$

$$v_{xP} = \frac{\partial x_P}{\partial \theta_1} \omega_1 + \frac{\partial x_P}{\partial \theta_2} \omega_2 + \frac{\partial x_P}{\partial \theta_3} \omega_3 \quad \text{Ec. 97}$$

$$v_{yP} = \frac{\partial y_P}{\partial \theta_1} \omega_1 + \frac{\partial y_P}{\partial \theta_2} \omega_2 + \frac{\partial y_P}{\partial \theta_3} \omega_3 \quad \text{Ec. 98}$$

Como se observa en la ecuación Ec. 95 esta representa las velocidades angulares  $\omega_j$  de las articulaciones  $\beta$  de las tres cadenas cinemáticas. Para la ecuación Ec. 96 la variable  $\omega_j$  representa la velocidad angular del ángulo  $\phi$  y las variables  $v_{xP}, v_{yP}$  de las ecuaciones Ec. 97 y Ec. 98 representan las velocidades lineales del punto P de la plataforma móvil.

Luego de obtener los resultados de las derivadas parciales, se puede definir una matriz  $A$  dada por:

$$A = -\text{inv} [J_{qd}] \cdot J_{qi} \quad \text{Ec. 99}$$

Como resultado la matriz  $A$  está dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \phi}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial y_P}{\partial \theta_1} & \frac{\partial y_P}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y_P}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}$$

Al reemplazar en la ecuación Ec. 94 se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\phi} \\ v_{xP} \\ v_{yP} \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 100}$$

En la ecuación Ec. 100 se tiene el resultado para el cálculo y determinación de las velocidades de los eslabones y la velocidad lineal de la plataforma móvil.

### 3.5. Aceleraciones angulares de los eslabones

Para establecer el cálculo de las aceleraciones angulares de las articulaciones y las aceleraciones del elemento terminal, se toman las variables y se derivan parcialmente obteniendo su aceleración  $(\ddot{\beta}_1, \ddot{\beta}_2, \ddot{\beta}_3, a_{xP}, a_{yP}, \ddot{\phi})$ . Como resultado se tiene la siguiente expresión:

$$j_q \cdot \ddot{q} + J_{q_d} \cdot \ddot{q}_d + J_{q_i} \cdot \ddot{q}_i = 0 \quad \text{Ec. 101}$$

Despejando las variables dependientes  $\ddot{q}_d$  de la ecuación Ec. 101 se obtiene:

$$\ddot{q}_d = -\text{inv}(J_{q_d}) \cdot (J_{q_i} \cdot \ddot{q}_i + j_q \cdot \ddot{q}) \quad \text{Ec. 102}$$

Mostrando de forma matricial la variable  $j_q$  donde se tiene las aceleraciones de las variables independientes e independiente de las tres cadenas cinemáticas.

$$j_q = \begin{bmatrix} -L_1 \cos \theta_1 & -L_4 \cos \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h \cos(\phi + \pi/6) & -1 & 0 \\ -L_1 \sin \theta_1 & -L_4 \sin \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h \sin(\phi + \pi/6) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -L_2 \cos \theta_2 & -L_5 \cos \beta_2 & 0 & 0 & -h \cos(\phi + 5\pi/6) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 \sin \theta_2 & -L_5 \sin \beta_2 & 0 & 0 & -h \sin(\phi + 5\pi/6) & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 \cos \theta_3 & -L_6 \cos \beta_3 & -h \cos(\phi + 3\pi/2) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 \sin \theta_3 & -L_6 \sin \beta_3 & -h \sin(\phi + 3\pi/2) & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\beta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\beta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\beta}_3^2 \\ \dot{\phi}^2 \\ a_{xP} \\ a_{yP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo la ecuación Ec. 102 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_3 \\ \ddot{\phi} \\ a_{xP} \\ a_{yP} \end{bmatrix} = -\text{inv}(J_{q_d}) \cdot \left( J_{q_i} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + j_q \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\phi} \\ v_{xP} \\ v_{yP} \end{bmatrix} \right) \quad \text{Ec. 103}$$

Como se observa en la ecuación Ec. 103 se pueden calcular y determinar las aceleraciones de las articulaciones y aceleraciones lineales de la plataforma móvil.

### 3.6. MATRICES JACOBIANAS INVERSAS

Esta matriz permite calcular y determinar las velocidades y aceleraciones angulares de cada articulación, conociendo así la velocidad del eslabón acoplador.

#### 3.6.1. Velocidades angulares de los eslabones

Para este caso se requieren calcular las velocidades angulares de cada articulación a partir de la velocidad lineal y angular del elemento terminal. El conjunto de coordenadas dependientes e independientes sería:

$$\mathbf{q}_d = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3] \quad \text{Ec. 104}$$

$$\mathbf{q}_i = [x_P, y_P, \phi, v_{xP}, v_{yP}] \quad \text{Ec. 105}$$

Como se observa en la ecuación Ec. 104 se tiene las variables dependientes de posición, velocidad y aceleración angular de cada uno de los eslabones. Mientras que en la ecuación Ec. 105 se tiene las variables independientes que representan las velocidad, aceleración y posición lineal del punto P del actuador final e incluso angular que en este caso sería la variable  $\phi$ .

Retomando la ecuación Ec. 90 se tiene:

$$J_{q_d} \cdot \dot{q}_d + J_{q_i} \cdot \dot{q}_i = 0 \quad \text{Ec. 106}$$

Al notar la ecuación Ec. 106 se puede mostrar de forma matricial las variables  $J_{q_d}$  y  $J_{q_i}$ :

$$J_{q_d} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & -L_4 \sin \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 \cos \theta_1 & L_4 \cos \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -L_2 \sin \theta_2 & -L_5 \sin \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 \cos \theta_2 & L_5 \cos \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -L_3 \sin \theta_3 & L_6 \sin \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 \cos \theta_3 & L_6 \cos \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$J_{q_i} = \begin{bmatrix} -h \sin(\phi + \pi/6) & -1 & 0 \\ h \cos(\phi + \pi/6) & 0 & -1 \\ -h \sin(\phi + 5\pi/6) & -1 & 0 \\ h \cos(\phi + 5\pi/6) & 0 & -1 \\ -h \sin(\phi + 3\pi/2) & -1 & 0 \\ h \cos(\phi + 3\pi/2) & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El vector  $\dot{q}_d$  que representa el vector de velocidades de las coordenadas dependientes, y el vector  $\dot{q}_i$  representa el vector de velocidades de las variables independientes:

$$\dot{q}_d = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\beta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\beta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\beta}_3]^T \quad \text{Ec. 107}$$

$$\dot{q}_i = [\dot{\phi} \quad v_{xP} \quad v_{yP}]^T \quad \text{Ec. 108}$$

Reescribiendo la Ec. 106 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} = -\text{inv}(J_{q_d}) \cdot J_{q_i} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ v_{xP} \\ v_{yP} \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 109}$$

### 3.6.2. Aceleraciones angulares de los eslabones

Para este caso resolver las aceleraciones angulares de cada articulación se retoma la ecuación Ec. 101 de la cinemática directa:

$$\mathbf{j}_q \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_{q_d} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{J}_{q_i} \cdot \ddot{\mathbf{q}}_i = 0 \quad \text{Ec. 110}$$

Donde:

$$\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\beta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\beta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\beta}_3 \quad \dot{\phi} \quad v_{xP} \quad v_{yP}]^T \quad \text{Ec. 111}$$

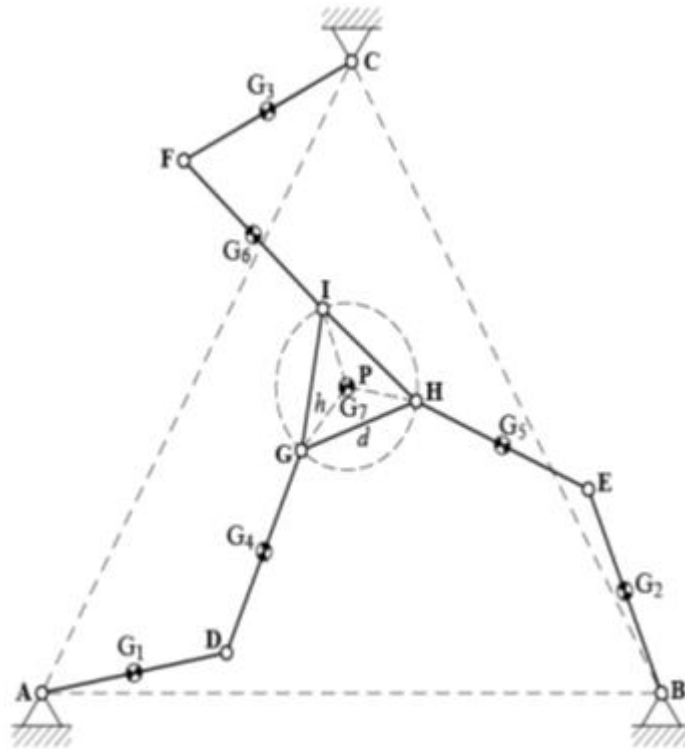
Retomando la ecuación Ec. 110 se despeja la variable  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  expresando la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\beta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\beta}_3 \end{bmatrix} = -\text{inv}(\mathbf{J}_{q_d}) \cdot \left( \mathbf{J}_{q_i} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ a_{xP} \\ a_{yP} \end{bmatrix} + \mathbf{j}_q \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\phi} \\ v_{xP} \\ v_{yP} \end{bmatrix} \right)$$

### 3.7. VELOCIDADES Y ACELERACIONES LINEALES

Para realizar el estudio de la dinámica del manipulador paralelo 3-RRR se requieren determinar las velocidades, aceleraciones lineales de los centros de masas y las juntas giratorias. Por ende, Las velocidades y aceleraciones son calculadas por medio de métodos analíticos. Como se observa en la Figura 20, se representa los valores utilizados para el cálculo de las velocidades y aceleraciones de los eslabones del manipulador 3-RRR.

**Figura 20. Representación de los centros de masa de los eslabones**



**Fuente:** [46]

### 3.7.1. Velocidades lineales de los eslabones

Las velocidades de los centros de masa de los eslabones, ver Figura 20, se obtienen mediante la ecuación de velocidades relativas:

$$\mathbf{v}_{G_i} = \mathbf{v}_{P_i} + \mathbf{v}_{G_i/P_i}^t \quad \text{Ec. 112}$$

La dirección de la velocidad relativa del centro de masa con respecto a la articulación se obtiene al girar  $90^\circ$ , el vector posición  $\mathbf{r}_{G_i/P_i}$  en el sentido de la velocidad angular  $\omega_i$ , esto se hace por medio de la matriz de rotación representada por la siguiente matriz.

$$M_{\text{rot}\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 113}$$

Para un ángulo de  $90^\circ$ , con base en la matriz de rotación, representado en la ecuación Ec. 113, se tiene como resultado:

$$M_{\text{rot}90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la ecuación Ec. 112 se puede representar de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_{G_i} = \mathbf{v}_{P_i} + [M_{\text{rot}90}] \cdot (\omega_1 \cdot [M_{\text{rot}\theta_i}] \cdot \mathbf{r}_{G_i/P_i}) \quad \text{Ec. 114}$$

Donde  $\mathbf{r}_{G_i/P_i}$  es el vector distancia que hay desde el centro de masa  $G_i$  hasta el punto  $P_i$ , medido en el sistema de coordenadas fijo.

$$\mathbf{r}_{G_i/P_i} = \begin{bmatrix} L_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 115}$$

- **Eslabón 1**

Velocidad del centro de  $G_1$ , donde  $\mathbf{v}_A = 0$

$$\mathbf{v}_{G_1} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{G_1/A}^t = [M_{\text{rot}90}] \cdot (\omega_1 \cdot [M_{\text{rot}\theta_1}] \cdot \mathbf{r}_{G_1/A}) \quad \text{Ec. 116}$$

$$\mathbf{v}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1/2 \sin \theta_1 \\ L_1/2 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \omega_1 \quad \text{Ec. 117}$$

Velocidad para el punto D, se tiene:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{D/A}^t = [M_{\text{rot}90}] \cdot (\omega_1 \cdot [M_{\text{rot}\theta_1}] \cdot \mathbf{r}_{D/A}) \quad \text{Ec. 118}$$

$$\mathbf{v}_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_1 \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \omega_1 \quad \text{Ec. 119}$$

- **Eslabón 4**

$$\mathbf{v}_{G_4} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{G_4/D}^t \quad \text{Ec. 120}$$

$$\mathbf{v}_{G_4} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -L_4/2 \sin \beta_1 \\ L_4/2 \cos \beta_1 \end{bmatrix} \omega_4 \quad \text{Ec. 121}$$



De acuerdo con la ecuación 95 para  $j = 4$  e  $i = 1$ , se tiene:

$$\omega_4 = \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} \omega_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} \omega_2 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} \omega_3 \quad \text{Ec. 122}$$

Reemplazando y simplificando se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{G4} = & \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & -\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} L_4/2 \sin \beta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 & \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} L_4/2 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} L_4/2 \sin \beta_1 \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} L_4/2 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_2 \\ & + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} L_4/2 \sin \beta_1 \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} L_4/2 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_3 \end{aligned} \quad \text{Ec. 123}$$

Velocidad del punto G

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_{G/D}^t \quad \text{Ec. 124}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{G4} = & \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 & -\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} L_4 \sin \beta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 & \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} L_4 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} L_4 \sin \beta_1 \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} L_4 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_2 \\ & + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} L_4 \sin \beta_1 \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} L_4 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_3 \end{aligned} \quad \text{Ec. 125}$$

- **Eslabón 2**

Velocidad del centro de masa  $G_2$

$$\mathbf{v}_{G2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2/2 \sin \theta_2 \\ L_2/2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \omega_2 \quad \text{Ec. 126}$$

Velocidad del punto E

$$\mathbf{v}_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_2 \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_2 \sin \theta_2 \\ L_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \omega_2 \quad \text{Ec. 127}$$

- **Eslabón 5**

Velocidad del centro de masa  $G_5$

$$\mathbf{v}_{G5} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} L_5/2 \sin \beta_2 \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} L_5/2 \sin \beta_2 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -L_2 \sin \theta_2 & -\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} L_5/2 \sin \beta_2 \\ L_2 \cos \theta_2 & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} L_5/2 \sin \beta_2 \end{bmatrix} \omega_2 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} L_5/2 \sin \beta_2 \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} L_5/2 \sin \beta_2 \end{bmatrix} \omega_3 \quad \text{Ec. 128}$$

Velocidad del punto H

$$\mathbf{v}_H = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} L_5 \sin \beta_1 \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} L_5 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -L_2 \sin \theta_2 & -\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} L_5 \sin \beta_2 \\ L_2 \cos \theta_2 & \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} L_5 \sin \beta_2 \end{bmatrix} \omega_2 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_3} L_5 \sin \beta_2 \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} L_5 \sin \beta_2 \end{bmatrix} \omega_3 \quad \text{Ec. 129}$$

- **Eslabón 3**

Velocidad del centro de masa  $G_3$

$$\mathbf{v}_{G3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_3 \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_3/2 \sin \theta_3 \\ L_3/2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \omega_3 \quad \text{Ec. 130}$$

Velocidad del punto F

$$\mathbf{v}_F = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \omega_3 \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_3 \sin \theta_3 \\ L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \omega_3 \quad \text{Ec. 131}$$

- **Eslabón 6**

Velocidad del centro de masa  $G_6$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{G_6} = & \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_1} L_6/2 \sin \beta_3 \\ \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_1} L_6/2 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_2} L_6/2 \sin \beta_3 \\ \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_2} L_6/2 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \omega_2 \\ & + \begin{bmatrix} -L_3 \sin \theta_3 & -\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_3} L_6/2 \sin \beta_3 \\ L_3 \cos \theta_3 & \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_3} L_6/2 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \omega_3 \end{aligned} \quad \text{Ec. 132}$$

Velocidad del punto I

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_1} L_6 \sin \beta_3 \\ \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_1} L_6 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} -\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_2} L_6 \sin \beta_3 \\ \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_2} L_6 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \omega_2 + \begin{bmatrix} -L_3 \sin \theta_3 & -\frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_3} L_6 \sin \beta_3 \\ L_3 \cos \theta_3 & \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_3} L_6 \sin \beta_3 \end{bmatrix} \omega_3 \quad \text{Ec. 133}$$

- **Eslabón 7**

La velocidad del eslabón  $v_{G_7}$ , que es igual a la del punto P, se obtiene directamente de la ecuación Ec. 100, siendo esto igual a:

$$\mathbf{v}_{G_7} = \mathbf{v}_P = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_1} \end{bmatrix} \omega_1 + \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \omega_2 + \begin{bmatrix} \frac{\partial X_P}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial Y_P}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \omega_3 \quad \text{Ec. 134}$$

### 3.7.2. Aceleraciones lineales de los eslabones

Básicamente, las aceleraciones lineales se calculan mediante la ecuación de aceleraciones relativas [49]. Teniendo en cuenta que para la aceleración se tiene una componente normal y una componente tangencial, dicha ecuación se puede expresar como:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{P_i} + \mathbf{a}_{G_i/P_i} \quad \text{Ec. 135}$$

$$\mathbf{a}_{G_i/P_i} = \mathbf{a}_{G_i/P_i}^n + \mathbf{a}_{G_i/P_i}^t \quad \text{Ec. 136}$$

Utilizando la matriz de rotación, se gira el vector de la aceleración normal  $\mathbf{a}_{G_i/P_i}^n$  y el vector de la aceleración tangencial  $\mathbf{a}_{G_i/P_i}^t$   $180^\circ$  y  $90^\circ$  respectivamente, en sentido de la velocidad angular de tal forma que:

$$\mathbf{a}_{G_1/A}^n = [M_{\text{rot}180^\circ}] \cdot (\omega_i^2 \cdot [M_{\text{rot}\theta_i} \cdot \mathbf{r}_{G_i/P_i}]) \quad \text{Ec. 137}$$

$$\mathbf{a}_{G_1/A}^t = [M_{\text{rot}90^\circ}] \cdot (\alpha_i \cdot [M_{\text{rot}\theta_i} \cdot \mathbf{r}_{G_i/P_i}]) \quad \text{Ec. 138}$$

Matriz de rotación para  $180^\circ$ :

$$M_{\text{rot}180^\circ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 139}$$

Reemplazando en la Ec. 135 se tiene:

$$\mathbf{a}_i = [M_{\text{rot}180^\circ}] \cdot (\omega_i^2 \cdot [M_{\text{rot}\theta_i} \cdot \mathbf{r}_{G_i/P_i}]) + [M_{\text{rot}90^\circ}] \cdot (\alpha_i \cdot [M_{\text{rot}\theta_i} \cdot \mathbf{r}_{G_i/P_i}]) \quad \text{Ec. 140}$$

- **Eslabón 1**

Aceleración del centro de masa G1, con  $a_A = 0$

$$a_{G_1} = a_A + a_{G_1/A}^n + a_{G_1/A}^t \quad \text{Ec. 141}$$

$$\mathbf{a}_{G1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \omega_1^2 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} L \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 142}$$

Resolviendo se tiene:

$$\mathbf{a}_{G1} = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 L_1/2 \cos \theta_1 & -\alpha_1 L_1/2 \sin \theta_1 \\ -\omega_1^2 L_1/2 \sin \theta_1 & \alpha_1 L_1/2 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 143}$$

Aceleración del punto D

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{D/A}^n + \mathbf{a}_{D/A}^t \quad \text{Ec. 144}$$

Ahora, resolviendo para  $r_{Gi/Pi} = L_1$  se tiene

$$\mathbf{a}_D = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 L_1 \cos \theta_1 & -\alpha_1 L_1 \sin \theta_1 \\ -\omega_1^2 L_1 \sin \theta_1 & \alpha_1 L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 145}$$

- **Eslabón 4**

Aceleración del centro de masa G4

$$\mathbf{a}_{G4} = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{G4/D}^n + \mathbf{a}_{G4/D}^t \quad \text{Ec. 146}$$

$$\mathbf{a}_{G4} = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 L_1 \cos \theta_1 & -\alpha_1 L_1 \sin \theta_1 & -\omega_4^2 L_4/2 \cos \beta_1 & -\alpha_4 L_4/2 \sin \beta_1 \\ -\omega_1^2 L_1 \sin \theta_1 & \alpha_1 L_1 \cos \theta_1 & -\omega_4^2 L_4/2 \sin \beta_1 & \alpha_4 L_4/2 \cos \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 147}$$

Aceleración del punto G

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_D + \mathbf{a}_{G/D}^n + \mathbf{a}_{G/D}^t \quad \text{Ec. 148}$$

$$\mathbf{a}_G = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 L_1 \cos \theta_1 & -\alpha_1 L_1 \sin \theta_1 & -\omega_4^2 L_4 \cos \beta_1 & -\alpha_4 L_4 \sin \beta_1 \\ -\omega_1^2 L_1 \sin \theta_1 & \alpha_1 L_1 \cos \theta_1 & -\omega_4^2 L_4 \sin \beta_1 & \alpha_4 L_4 \cos \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 149}$$

- **Eslabón 2**

Aceleración del centro de masa G2

$$\mathbf{a}_{G2} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{G2/B}^n + \mathbf{a}_{G2/B}^t \quad \text{Ec. 150}$$

$$\mathbf{a}_{G2} = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 L1/2 \cos \theta_2 & -\alpha_1 L1/2 \sin \theta_1 \\ -\omega_2^2 L1/2 \sin \theta_1 & \alpha_1 L1/2 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 151}$$

Aceleración en el punto E

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{E/B}^n + \mathbf{a}_{E/B}^t \quad \text{Ec. 152}$$

$$\mathbf{a}_D = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 L_2 \cos \theta_2 & -\alpha_2 L_2 \sin \theta_2 \\ -\omega_2^2 L_2 \sin \theta_2 & \alpha_2 L_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 153}$$

- **Eslabón 5**

Aceleración del centro de masa G5

$$\mathbf{a}_{G5} = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{G5/E}^n + \mathbf{a}_{G5/E}^t \quad \text{Ec. 154}$$

$$\mathbf{a}_{G5} = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 L_2 \cos \theta_2 & -\alpha_2 L_2 \sin \theta_2 & -\omega_5^2 L5/2 \cos \beta_1 & -\alpha_5 L5/2 \cos \beta_1 \\ -\omega_2^2 L_2 \sin \theta_2 & \alpha_2 L_2 \cos \theta_2 & -\omega_5^2 L5/2 \sin \beta_1 & \alpha_5 L5/2 \sin \beta_1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 155}$$

Aceleración en el punto H

$$\mathbf{a}_H = \mathbf{a}_E + \mathbf{a}_{H/E}^n + \mathbf{a}_{H/E}^t \quad \text{Ec. 156}$$

$$\mathbf{a}_H = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 L_2 \cos \theta_2 & -\alpha_2 L_2 \sin \theta_2 & -\omega_5^2 L_5 \cos \beta_2 & -\alpha_5 L_5 \sin \beta_2 \\ -\omega_2^2 L_2 \sin \theta_2 & \alpha_2 L_2 \cos \theta_2 & -\omega_5^2 L_5 \sin \beta_2 & \alpha_5 L_5 \cos \beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 157}$$

- **Eslabón 3**

$$\mathbf{a}_{G3} = \mathbf{a}_C + \mathbf{a}_{G3/C}^n + \mathbf{a}_{G3/C}^t \quad \text{Ec. 158}$$

$$\mathbf{a}_{G3} = \begin{bmatrix} -\omega_3^2 L_3/2 \cos \theta_2 & -\alpha_3 L_3/2 \sin \theta_3 \\ -\omega_3^2 L_3/2 \sin \theta_1 & \alpha_3 L_3/2 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 159}$$

Aceleración en el punto F

$$\mathbf{a}_F = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{F/C}^n + \mathbf{a}_{F/C}^t \quad \text{Ec. 160}$$

$$\mathbf{a}_F = \begin{bmatrix} -\omega_2^2 L_2 \cos \theta_2 & -\alpha_2 L_2 \sin \theta_2 \\ -\omega_2^2 L_2 \sin \theta_2 & \alpha_2 L_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 161}$$

- **Eslabón 6**

Aceleración del centro de masa G6

$$\mathbf{a}_{G6} = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{G6/F}^n + \mathbf{a}_{G6/F}^t \quad \text{Ec. 162}$$

$$\mathbf{a}_{G6} = \begin{bmatrix} -\omega_3^2 L_3 \cos \theta_3 & -\alpha_3 L_3 \sin \theta_3 & -\omega_6^2 L_6/2 \cos \beta_3 & -\alpha_6 L_6/2 \cos \beta_3 \\ -\omega_3^2 L_3 \sin \theta_3 & \alpha_3 L_3 \cos \theta_3 & -\omega_6^2 L_6/2 \cos \beta_3 & \alpha_6 L_6/2 \cos \beta_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 163}$$

Aceleración en el punto I

$$\mathbf{a}_I = \mathbf{a}_F + \mathbf{a}_{I/F}^n + \mathbf{a}_{I/F}^t \quad \text{Ec. 164}$$

$$\mathbf{a}_I = \begin{bmatrix} -\omega_3^2 L_3 \cos \theta_3 & -\alpha_3 L_3 \sin \theta_3 & -\omega_6^2 L_6 \cos \beta_3 & -\alpha_6 L_6 \sin \beta_3 \\ -\omega_3^2 L_3 \sin \theta_3 & \alpha_3 L_3 \cos \theta_3 & -\omega_6^2 L_6 \sin \beta_3 & \alpha_6 L_6 \cos \beta_3 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 165}$$

- **Eslabón 7**

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_{G7} = \begin{bmatrix} a_{XP} \\ a_{YP} \end{bmatrix}$$

### 3.8. DINÁMICA DEL MANIPULADOR

El propósito del análisis dinámico es determinar el par motor que requiere cada servomotor para establecer la trayectoria específica. Para este caso, se requiere conocer las velocidades y aceleraciones de los eslabones que incluyen al actuador final, parámetros dinámicos y los momentos de inercia.

De acuerdo con [46] se toman los datos donde fueron calculados los parámetros dinámicos del manipulador por medio del programa SolidWorks en el cual se tiene la masa, volumen, longitud, área y espesor de cada uno de los eslabones que lo conforman. También se tiene en cuenta los momentos de inercia calculados a partir del análisis de la dinámica inversa.

#### 3.8.1. Análisis Energético

Para determinar el par motor requerido en los actuadores, se utilizará el método energético:

$$\frac{d}{dt}E_c = \sum Potencias = \sum T_k \cdot \omega_k + \sum \mathbf{F}_j \cdot \mathbf{v}_j \quad \text{Ec. 166}$$

Al observar la ecuación Ec. 166,  $T_k$  es el par requerido por cada servomotor,  $\omega_k$  indica la velocidad angular del eslabón, el operador ( $\cdot$ ) indica el producto interno entre los dos vectores  $\mathbf{F}_j$  y  $\mathbf{v}_j$  que representan: la fuerza y velocidad en el elemento terminal.

#### 3.8.2. Energía cinética del manipulador

Para el análisis de la energía cinética del mecanismo, se requieren determinar en primer lugar los valores de velocidades y aceleraciones de los eslabones y elemento terminal, además es necesario determinar: las masas y momentos de inercia de las manivelas, acopladores y plataforma móvil.

La energía cinética se determina mediante:

$$E_c = k = k_p + \sum_{i=0}^3 (k_{mi} + k_{ai}) \quad \text{Ec. 167}$$

Según la ecuación Ec. 167 la variable  $k$  representa la energía cinética del mecanismo,  $k_p$  es la energía de la plataforma móvil y  $(k_{mi} + k_{ai})$  es la suma de la energía de las manivelas y los acopladores.



La energía cinética de la plataforma móvil:

$$k_p = \frac{1}{2}J_{G7}\omega_7^2 + \frac{1}{2}m_7v_{G7}^2 \quad \text{Ec. 168}$$

Energía cinética de las manivelas:

$$k_{m(1,2,3)} = \frac{1}{2}J_{1A}\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_{2B}\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_{3C}\omega_3^2 \quad \text{Ec. 169}$$

Energía cinética de los acopladores:

$$k_{a(4,5,6)} = \frac{1}{2}J_{G4}\omega_4^2 + \frac{1}{2}m_4v_{G4}^2 + \frac{1}{2}J_{G5}\omega_5^2 + \frac{1}{2}m_5v_{G5}^2 + \frac{1}{2}J_{G6}\omega_6^2 + \frac{1}{2}m_6v_{G6}^2 \quad \text{Ec. 170}$$

Luego se aplica la ecuación Ec. 167 donde se suman las energías cinéticas rotacionales y traslacionales de cada eslabón:

$$E_c = \frac{1}{2}J_{A1}\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_{B2}\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_{C3}\omega_3^2 + \frac{1}{2}J_{G4}\omega_4^2 + \frac{1}{2}m_4v_{G4}^2 + \frac{1}{2}J_{G5}\omega_5^2 + \frac{1}{2}m_5v_{G5}^2 + \frac{1}{2}J_{G6}\omega_6^2 + \frac{1}{2}m_6v_{G6}^2 + \frac{1}{2}J_{G7}\omega_7^2 + \frac{1}{2}m_7v_{G7}^2 \quad \text{Ec. 171}$$

Luego al observar la ecuación Ec. 171 se derivan con respecto al tiempo obteniendo el siguiente resultado:

$$\frac{d}{dt}E_c = J_{A1}\omega_1\alpha_1 + J_{B2}\omega_2\alpha_2 + J_{C3}\omega_3\alpha_3 + J_{G4}\omega_4\alpha_4 + m_4v_{G4} \cdot a_{G4} + J_{G5}\omega_5\alpha_5 + m_5v_{G5} \cdot a_{G5} + J_{G6}\omega_6\alpha_6 + m_6v_{G6} \cdot a_{G6} + J_{G7}\omega_7\alpha_7 + m_7v_{G7} \cdot a_{G7} \quad \text{Ec. 172}$$

Al aplicar la ecuación Ec. 166, la potencia del mecanismo es la suma del producto entre cada par de motor para la velocidad angular.

$$\sum Potencias = T_1\omega_1 + T_2\omega_2 + T_3\omega_3 \quad \text{Ec. 173}$$

Igualando la ecuación Ec. 172 y Ec. 173 para agrupar los términos independientes que multiplican las velocidades angulares, se tiene:

- **Para el par de torsión 1:**

$$T_1 = J_{A1}\alpha_1 + J_{G4}\alpha_4 \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_1} + m_4 v_{G4} \omega_1 \cdot a_{G4} + J_{G5}\alpha_5 \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_1} + m_5 v_{G5} \omega_1 \cdot a_{G5} \\ + J_{G6}\alpha_6 \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_1} + m_6 v_{G6} \omega_1 \cdot a_{G6} + J_{G7}\alpha_7 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_1} + m_7 v_{G7} \omega_1 \cdot a_{G7} \quad \text{Ec. 174}$$

- **Para el par de torsión 2:**

$$T_2 = J_{B2}\alpha_2 + J_{G4}\alpha_4 \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_2} + m_4 v_{G4} \omega_2 \cdot a_{G4} + J_{G5}\alpha_5 \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_2} + m_5 v_{G5} \omega_2 \cdot a_{G5} \\ + J_{G6}\alpha_6 \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_2} + m_6 v_{G6} \omega_1 \cdot a_{G6} + J_{G7}\alpha_7 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_2} + m_7 v_{G7} \omega_1 \cdot a_{G7} \quad \text{Ec. 175}$$

- **Para el par de torsión 3:**

$$T_3 = J_{C3}\alpha_3 + J_{G4}\alpha_4 \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta_3} + m_4 v_{G4} \omega_3 \cdot a_{G4} + J_{G5}\alpha_5 \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta_3} + m_5 v_{G5} \omega_1 \cdot a_{G5} \\ + J_{G6}\alpha_6 \frac{\partial \beta_3}{\partial \theta_3} + m_6 v_{G6} \omega_1 \cdot a_{G6} + J_{G7}\alpha_7 \frac{\partial \phi}{\partial \theta_3} + m_7 v_{G7} \omega_1 \cdot a_{G7} \quad \text{Ec. 176}$$

Como se muestra anteriormente el desarrollo de la dinámica se da como resultado a las ecuaciones que determinan el par motor requerido. Sin embargo, no se tubo encuentra las ecuaciones dinámicas debido a la complejidad de las ecuaciones. Por lo tanto, se dejan indicadas.

## 4. CALIBRACIÓN DE CÁMARAS

En este capítulo se realizará el procedimiento de calibración a la cámara web Logitech C920 mostrada en la Figura 21. La cámara denominada como sensor visual, es un dispositivo electrónico que permite realizar capturas de imágenes el cual consisten en un lente, cuyo objetivo es controlar la luz entrante y enfocar la imagen. Para ello es necesario conocer la formación de la imagen en el modelo de la cámara.

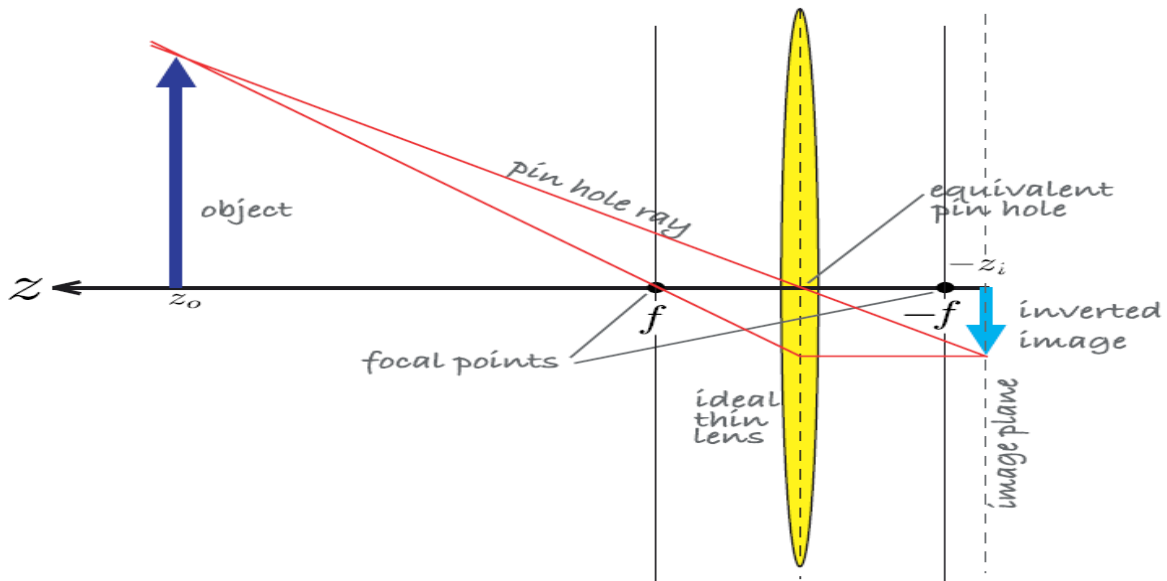
### 4.1. MODELO DE LA CÁMARA

En la formación de la imagen existe un modelo denominado pin-Hole, que es el modelo más simple que puede obtener en la cámara. Este método está basado en la proyección de un punto de la escena con un lente delgado. Donde se obtiene la intersección de una línea que pasa por este punto denominado centro de proyección o foco, el cual no requiere enfoque. El modelo se muestra en la Figura 22.

*Figura 21. Cámara Logitech C-920*



*Figura 22. Modelo pin-Hole*



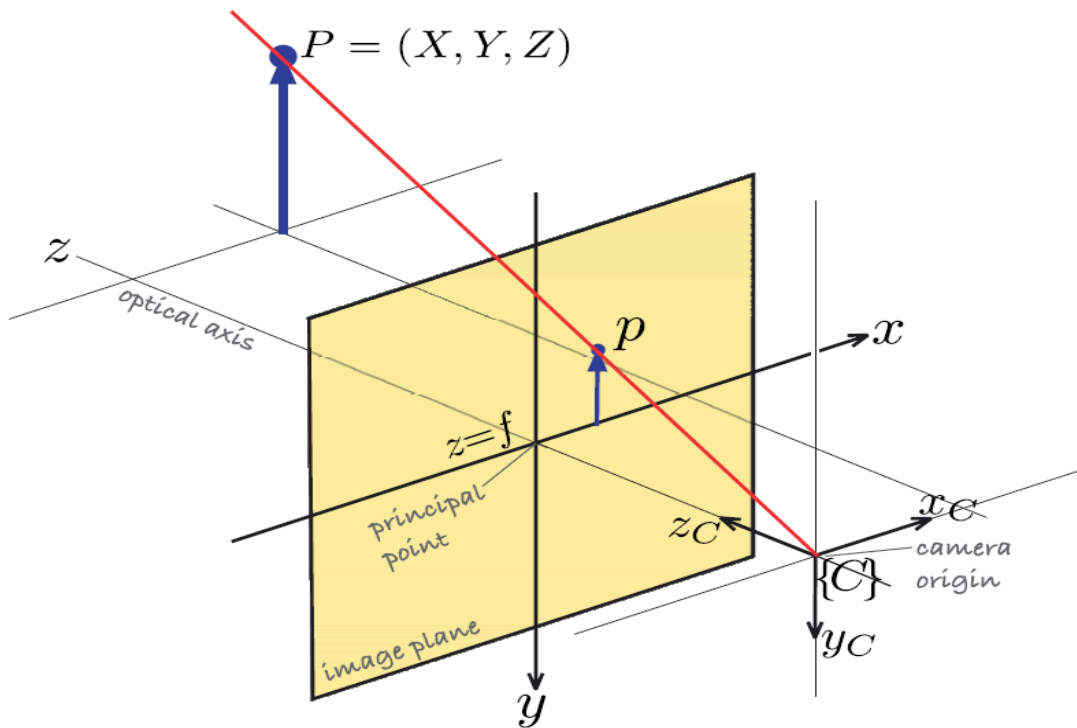
**Fuente:** [27]

En la Figura 22, se muestra la coordenada del eje Z del objeto y su proyección en la imagen, los cuales se relacionan con la ecuación de la lente, Ec. 177:

$$\frac{1}{z_o} + \frac{1}{z_i} = \frac{1}{f} \quad \text{Ec. 177}$$

Donde el parámetro  $z_o$  representa la distancia del objeto, el parámetro  $z_i$  determina la distancia de la imagen, y el parámetro  $f$  define la distancia focal del lente. Cuando  $z_o > f$  se invierte la imagen y esta es formada en el plano de la imagen, por lo que  $z < -f$ . En la cámara, el plano de la imagen es fijada a la superficie del sensor de la cámara, generando un enfoque y se puede mover a lo largo del eje óptico a una distancia  $z_i$ ; para un objeto infinito el parámetro  $z_i = f$ . En la Figura 23 cuando un rayo de luz atraviesa el lente y este incide en el origen de la cámara, la imagen no se invierte y esta es proyectada en el plano de la imagen dando como resultado  $z = f$ . Al aplicar la metodología de triángulos semejantes se puede visualizar el punto  $P = (X, Y, Z)$  es proyectado en el plano de la imagen  $p = (x, y)$ .

**Figura 23. Proyección de la imagen**



**Fuente:** [27]

Para realizar la proyección se utiliza la Ec. 178, la cual permite una transformación proyectiva del punto del objeto.

$$x = f \frac{X}{Z}, y = f \frac{Y}{Z} \quad \text{Ec. 178}$$

Una de las características importantes de la transformación proyectiva es la proyección de un mapeo espacial de una escena, proyectándolo al plano de la imagen, es decir  $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ .

En el plano de la imagen se puede tomar un punto homogéneo a partir de un punto en el espacio  $\tilde{p} = (x', y', z')$ , dicho proceso se define mediante la Ec. 179.

$$x' = \frac{fX}{z'} \quad y' = \frac{fY}{z'} \quad z' = Z \quad \text{Ec. 179}$$

También puede ser representada por una matriz compacta, representada por la Ec. 180

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{Ec. 180}$$

Por otra parte, se puede establecer las coordenadas espaciales en coordenadas homogéneas, teniendo la siguiente expresión  ${}^c\tilde{P} = (X \ Y \ Z \ 1)^T$ . Además, la proyección puede ser escrita de forma lineal como se muestra en la Ec. 181.

a) Forma matricial

b) Forma compacta

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {}^c\tilde{P} \quad \tilde{p} = \mathbf{C} {}^c\tilde{P} \quad \text{Ec. 181}$$

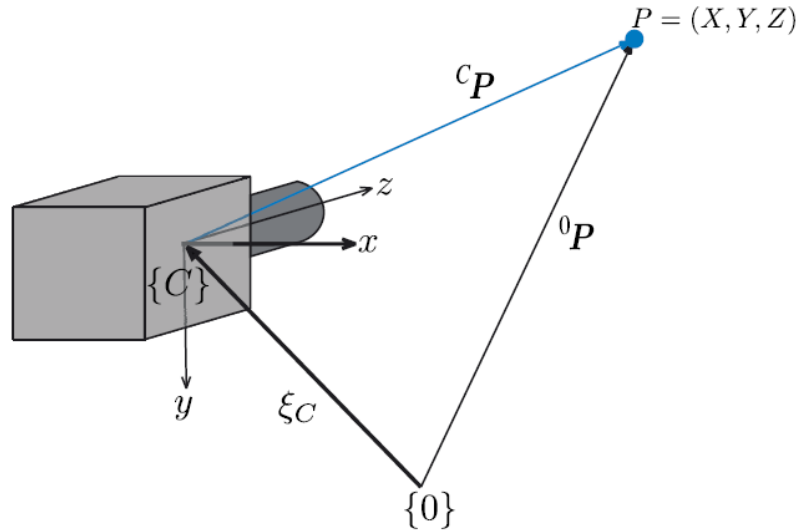
La Ec. 181 representa la transformación de forma homogénea, la matriz  $\mathbf{C}$  es de dimensión 3 x 4. El vector  ${}^c\tilde{P}$  representa la orientación de un punto respecto al marco de referencia de la cámara. La matriz de la cámara puede ser factorizada tal y como se muestra en la Ec. 182.

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {}^c\tilde{P} \quad \text{Ec. 182}$$

Donde la segunda matriz de tamaño 4x3 de la Ec. 182 es, la matriz de proyección.

En la Figura 24, la cámara tiene una orientación arbitraria  $\xi_c$  respecto al marco de referencia global  $\{0\}$ . Para este caso, el parámetro  $\xi$  es una matriz homogénea de tamaño 4x4 que define la orientación de la cámara con respecto al marco global.

**Figura 24. Marco de referencia de la cámara**



**Fuente:** [27]

La posición del punto  $P$  respecto a la cámara está dada por la Ec. 183:

$${}^cP = \text{inv}(\xi_c) \cdot {}^0P \quad \text{Ec. 183}$$

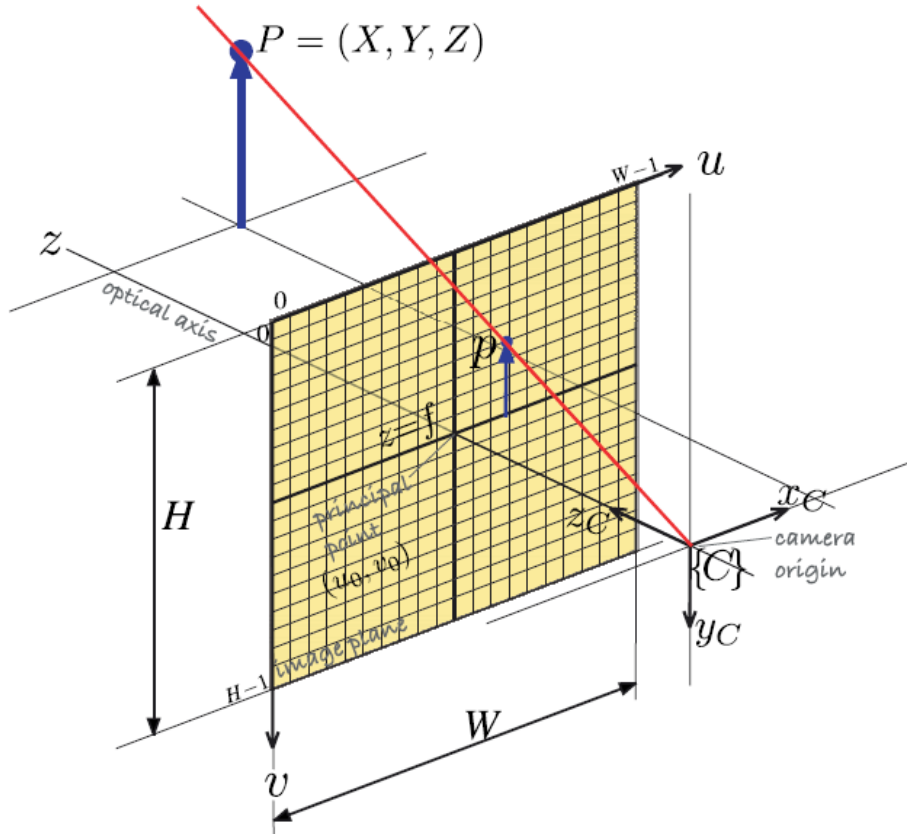
#### 4.2. FORMACIÓN DE LA IMAGEN Y ORIENTACIÓN DE UN PUNTO EN LA IMAGEN

En cámara digitales, el plano de la imagen es formado por una rejilla de dimensiones  $W \times H$ , constituida por fotosensores donde captan la incidencia de luz para formar la imagen, y es denominado pixel como se ve en la Figura 25. Las coordenadas para marco de referencia se definen como  $(u, v)$ , los cuales miden la ubicación del pixel respecto a la esquina superior izquierda del plano de la imagen. Los pixeles son de dimensionalidad uniforme y centrados en una rejilla, donde cada pixel está relacionado con el plano de la imagen mediante la Ec. 184.

$$u = \frac{x}{\rho_w} + u_0 \quad v = \frac{y}{\rho_h} + v_0 \quad \text{Ec. 184}$$

Donde los parámetros  $\rho_w$  y  $\rho_h$  son el ancho y el alto de cada pixel respectivamente, y  $(u_0, v_0)$  es la coordenada del pixel central de la imagen, donde esta se interseca con el eje óptico en el plano de la imagen.

**Figura 25. Proyección central del modelo mostrando el plano de la imagen y pixeles discretos**



**Fuente:** [27]

Tomando la ecuación Ec. 181, se puede escribir, para cada coordenada de pixel, una matriz de parámetros de la cámara denominada  $\mathbf{K}$ , como se muestra en la Ec. 185:

$$\tilde{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\rho_w & 0 & u_0 \\ 0 & 1/\rho_h & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_k \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {}^c\tilde{P} \quad \text{Ec. 185}$$

Donde  $\tilde{p} = (u', v', w')$  es la coordenada homogénea del punto  $\mathbf{P}$  en coordenadas de píxeles.

Tomando la Ec. 184 y la Ec. 185 se determina la proyección de la cámara de forma más general, como se muestra en la Ec. 186:

$$\tilde{p} = \underbrace{\begin{pmatrix} f/\rho_w & 0 & u_0 \\ 0 & f/\rho_h & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{intrínseca}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{extrínseca}} (T_c)^{-1} \tilde{P} \quad \text{Ec. 186}$$

Los parámetros intrínsecos son características internas de la cámara y el sensor donde se tiene los parámetros  $(f, \rho_w, \rho_h, u_0, v_0)$ . Los parámetros extrínsecos describen la pose de la cámara la cual tiene seis parámetros que describen la traslación y rotación en sistema euclidiano. La matriz de la cámara tiene 12 parámetros, solo un grado de libertad no está restringido que es el factor de escala global.

#### 4.3. CALCULO DE LOS PARÁMETROS INTRÍNSECOS Y EXTRÍNSECOS DE LA CÁMARA A PARTIR DE LA CALIBRACIÓN

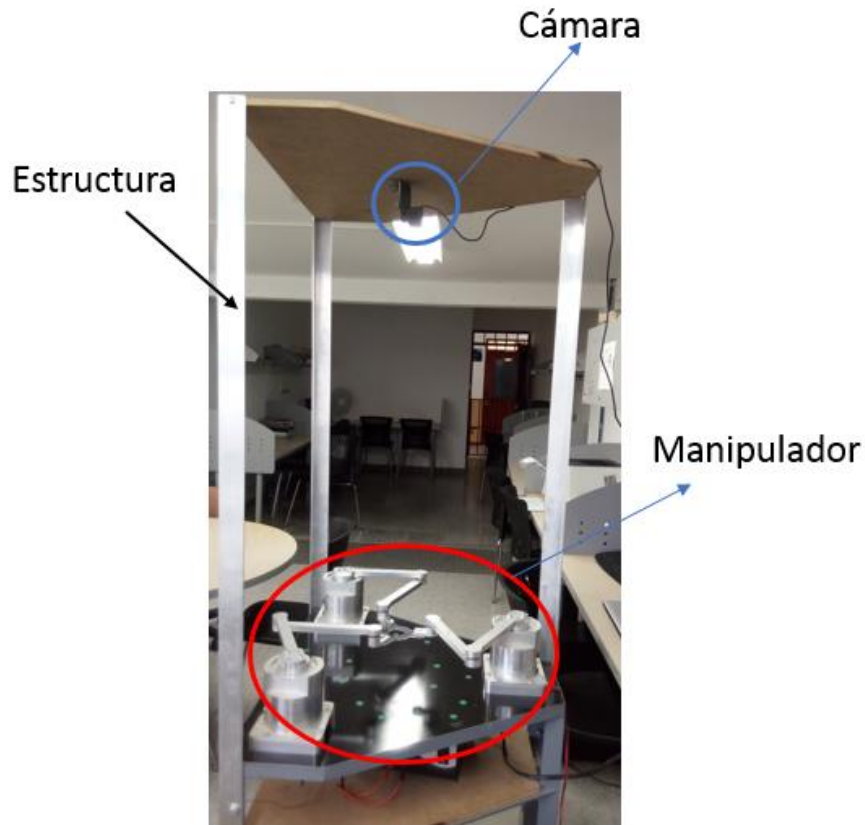
La calibración de cámaras es un proceso para determinar el modelo de la cámara con respecto a un sistema de coordenadas en el espacio. Las técnicas de calibración relacionan un conjunto de puntos, cuya relación es conocida y que corresponden al plano de la imagen que también son conocidos. En el estado del arte dichas técnicas son sujetas a la calibración de Bouget's [50] donde se requiere un número de imágenes a partir de un tablero de ajedrez. Para determinar los parámetros intrínsecos, pueden ser estimados relacionando la pose relativa del tablero en cada imagen. Esto se llevará a cabo estableciendo transformaciones homogéneas. En la actualidad existen métodos de calibración como el método de Tsai [51] [52] [53] y el método de Zhang [2] [54], para definir los parámetros de la cámara, la eliminación de la distorsión radial y tangencial, cuyos modelos son los más aplicados.

De las anteriores modelos para calibración de cámara se utilizará el método de Zhang, dado que es el más aplicado en el campo de visión. El método permite establecer una aproximación inicial mediante un método lineal en el que se realiza un refinamiento iterativo empleando un criterio de máxima probabilidad. La calibración se realiza sobre un plano de puntos, que en este caso se tendrá como referencia el patrón de ajedrez. Para que el método funcione correctamente, se necesitan al menos tres imágenes con el patrón en diferentes orientaciones. Puede ser inferior el número de capturas se fijan los valores de algunos parámetros intrínsecos. Un ejemplo, si no se calcula la ortogonalidad del plano de la imagen, serían necesarias dos capturas. Los parámetros se obtienen implícitamente, obteniendo una matriz cuyos elementos son función de los parámetros intrínsecos. La distorsión que se incluye es de tipo radial y se modela con dos coeficientes [2], [54], [55].

Lo mencionado anteriormente, es requerimiento principal para estimar el modelo de la cámara, el cual será implementado en el trabajo de grado. Con este fin, se acopló en la parte superior del manipulador un sensor visual que permita la determinación del objeto, donde se adecuó una estructura rígida donde será ubicada la cámara. Lo anterior se muestra en la Figura 26.



**Figura 26. Estructura de soporte para la cámara**



#### 4.4. ETAPA DE CALIBRACIÓN

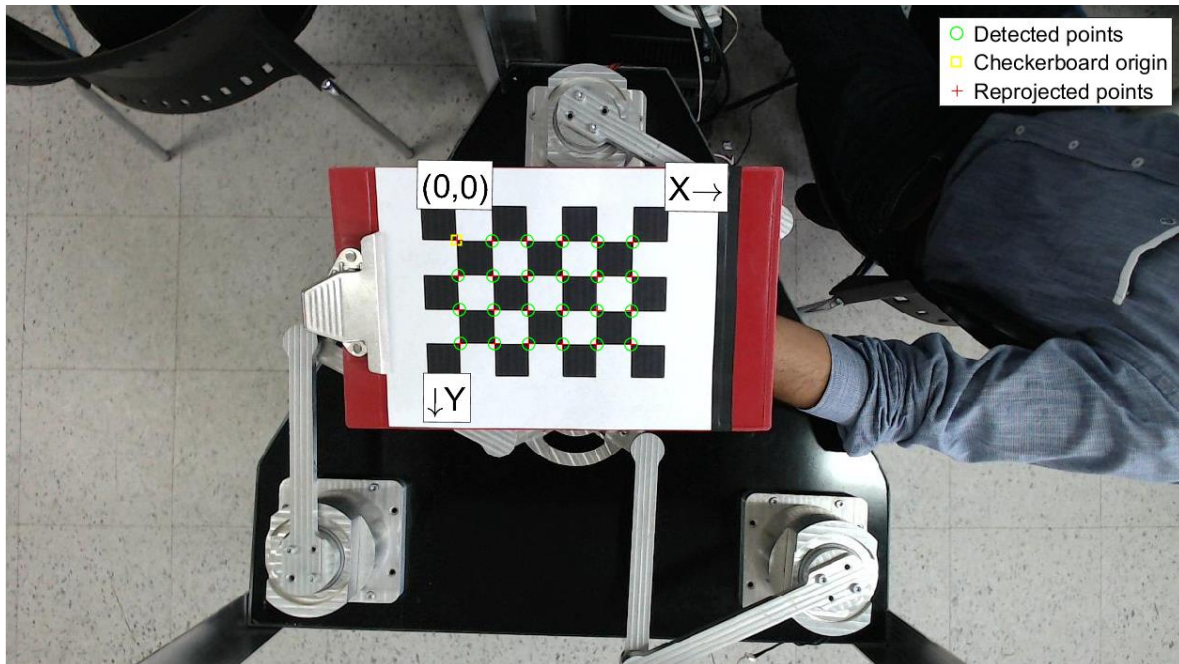
En la Figura 27 se muestra el tablero de ajedrez utilizado, cuyas dimensiones en cada cuadro son de 22 mm por 22 mm. El proceso de calibración se realizó a partir de una aplicación del software Mathworks MATLAB ® denominado *Camera Calibration*. La aplicación permite ingresar un número de imágenes la cual es recomendando un total entre 10 y 20 fotografías para obtener una mejor estimación.

Inicialmente, procesa la imagen del patrón y determina una referencia, que en este caso es el recuadro amarillo (Checkboard origin). Los círculos de color verde (Detected points, que en total son 24) son los puntos detectados en el patrón de calibración; estos puntos son necesarios para realizar una estimación por medio del modelo de Zhang.

Por último, se tienen los puntos de retroproyección de color rojo (Reprojected points), que indican la coincidencia del punto detectado con el retroproyectado. La calidad de la calibración está en función de esta coincidencia. La retroproyección depende de la eliminación de la distorsión proyectiva.

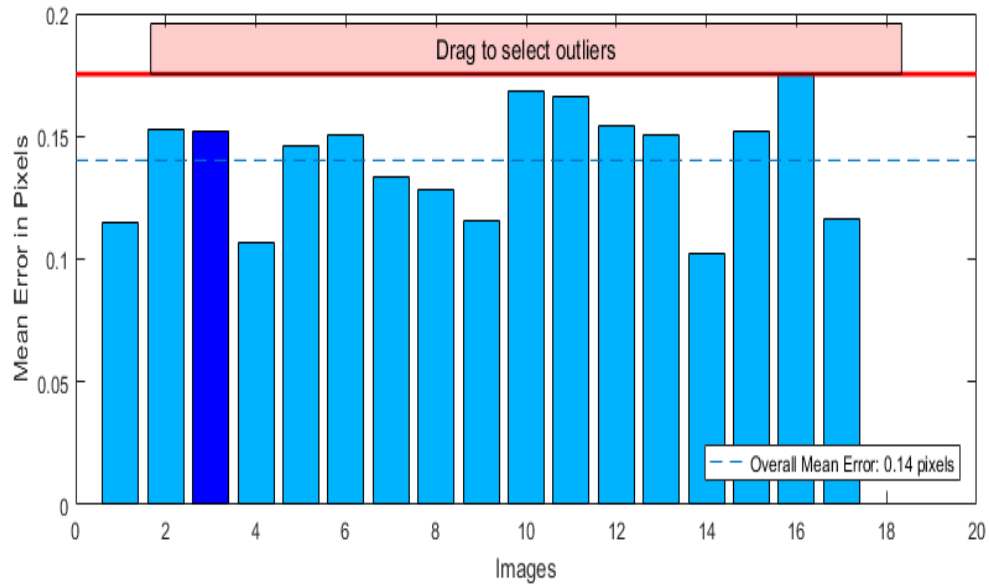
Para realizar una correcta estimación, se debe realizar una captura entre 10 y 20 fotos, teniendo en cuenta que el patrón no debe estar de manera paralela al plano de la cámara. Para la calibración de la cámara utilizada en este proyecto, se realizaron 20 capturas.

*Figura 27. Patrón de calibración*



En la Figura 28 se observa el error de retroproyección de cada captura representado en píxeles. Los errores de reproyección se definen como las distancias entre los puntos detectados (Detected points) y los reproyectados (Reprojected points). Los algoritmos que tiene el programa Matlab para determinar la calibración, calculan los errores de retroproyección proyectando los puntos desde las coordenadas del mundo, definidas por el tablero de ajedrez, en las coordenadas de la imagen. La aplicación de Matlab permite comparar los puntos reproyectados con los puntos detectados correspondientes.

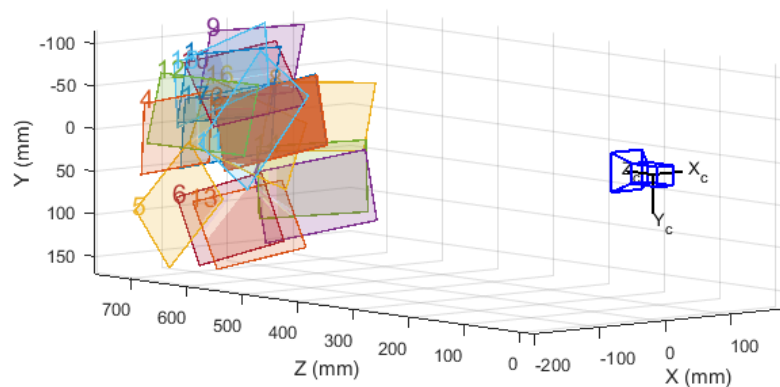
*Figura 28. Error de retroproyección*



Por otro lado, la aplicación de Matlab permite visualizar una gráfica donde muestra el error de reproyección promedio por imagen, junto con el error promedio general, que en este caso es de 0,14. Dentro de las capturas que se realizaron, solo 18 de las 20 pasaron la prueba de “mejor captura”<sup>1</sup>; las dos faltantes no se tomaron de manera adecuada. Así, el software determina cuales tienen mejor proyección para generar una mejor estimación de reproyección.

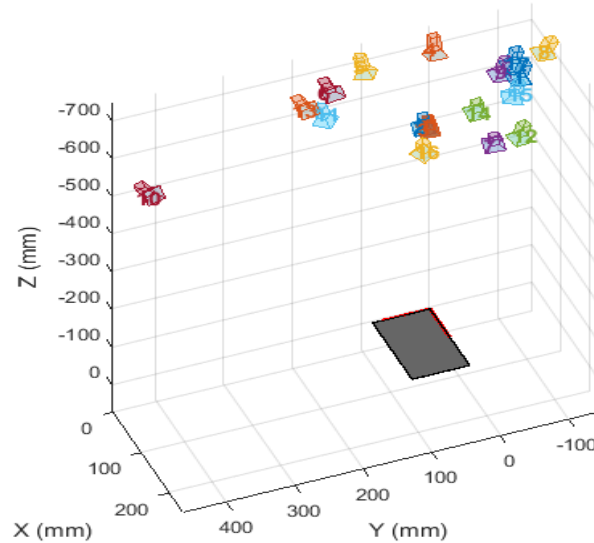
Como se observa en la Figura 29 se tiene la ubicación de la cámara (que en este caso es la referencia de color azul) y los planos del patrón en diferentes posiciones. En la Figura 30 proporciona una vista del patrón de la cámara centrada.

**Figura 29. Orientación del patrón de calibración frente a la cámara**



<sup>1</sup> Para estimar una mejor captura, el patrón de ajedrez debe tener una orientación no paralela al plano de la cámara.

**Figura 30. Grafica de parámetros extrínsecos 3D**



Luego de realizar la calibración de cámaras, se obtiene los resultados de sus parámetros intrínsecos que permite la eliminación de la distorsión proyectiva.

El modelo de la matriz intrínseca se encuentra representada en la Ec. 187.

$$K = \begin{bmatrix} f_x & 0 & 0 \\ s & f_y & 0 \\ c_x & c_y & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 187}$$

Donde los parámetros  $(f_x, f_y)$  representan el tamaño focal en pixeles,  $(c_x, c_y)$  representa el centro óptico de la cámara, y el parámetro  $s$  es definido como el coeficiente oblicuo, el cual no es nulo si las imágenes no son perpendiculares al plano de la cámara. A continuación, se muestran los datos determinados durante el proceso de calibración, ver Ec. 188:

$$K = \begin{bmatrix} 978.4673 & 0 & 0 \\ 1.5341 & 981.0661 & 0 \\ 624.5630 & 369.2283 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 188}$$

Al establecer la calibración, se obtiene una imagen sin distorsión proyectiva, lo anterior se puede evidenciar al comparar las imágenes mostradas en la Figura 31 y

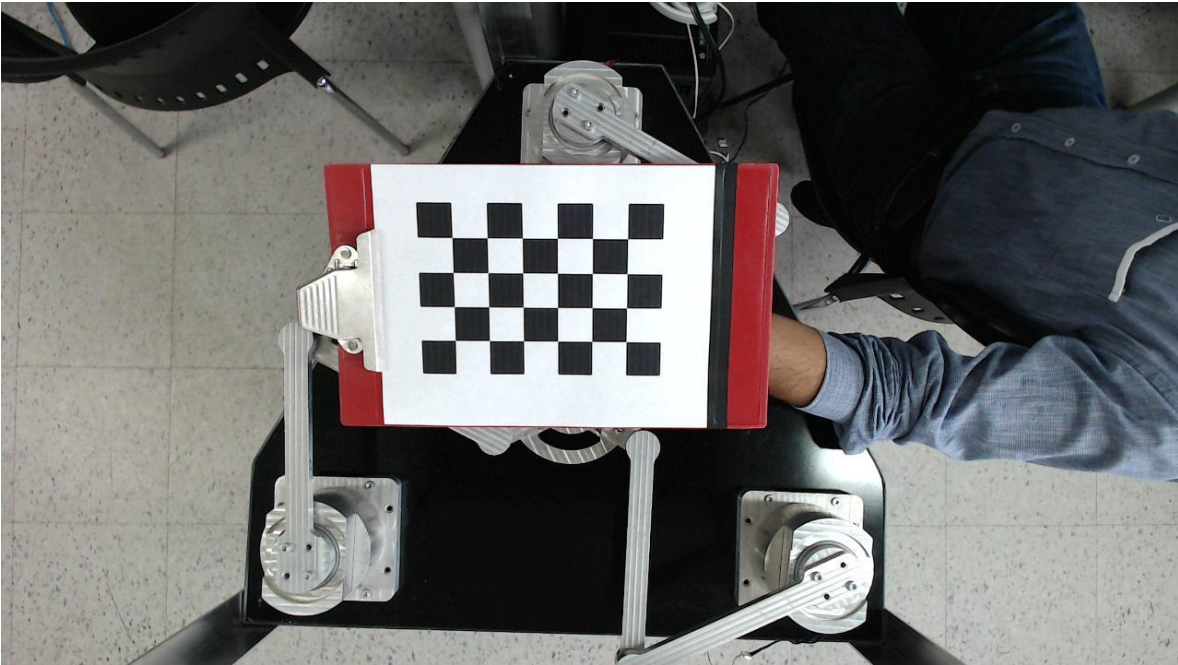
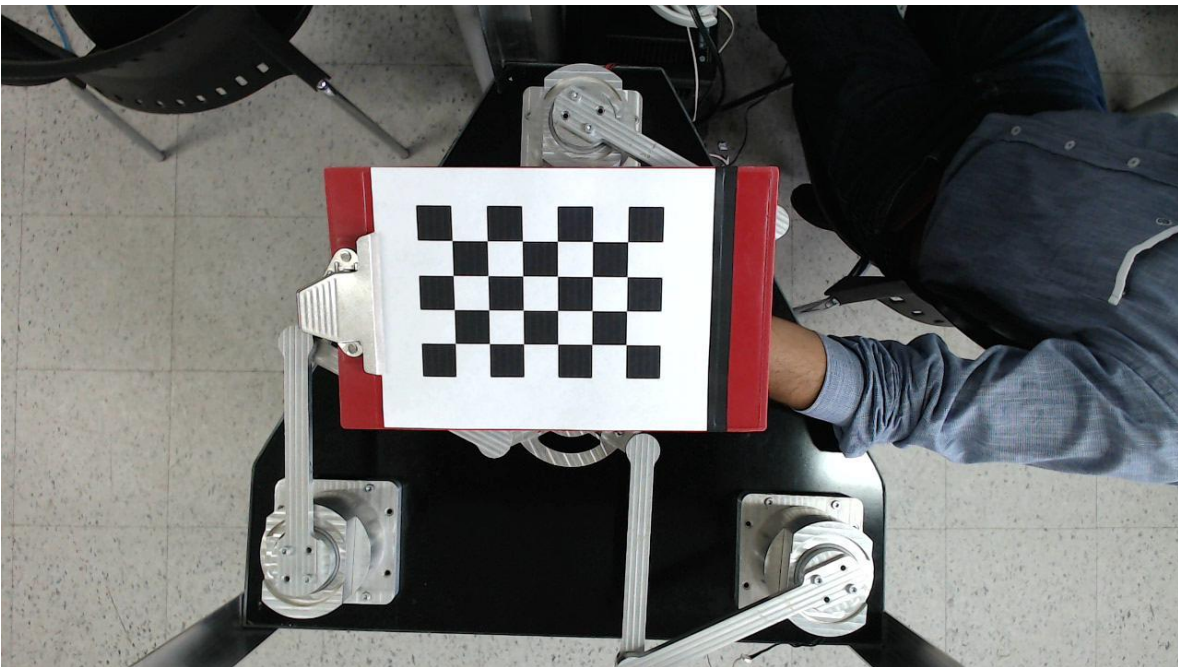
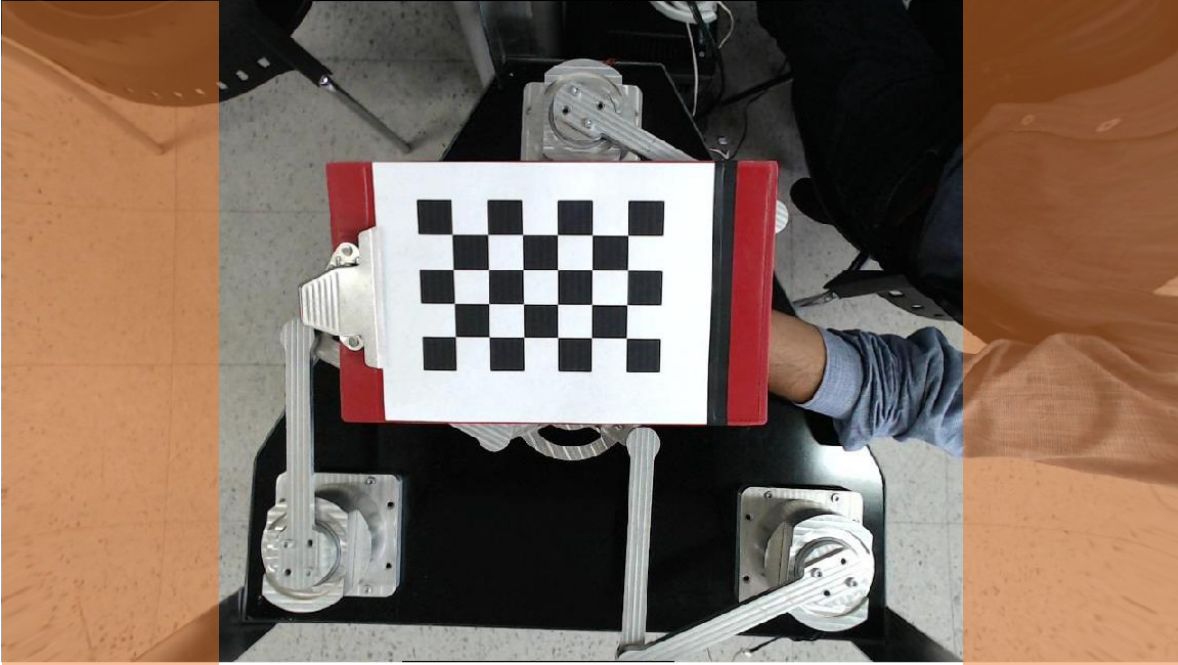


Figura 32.

*Figura 31. Imagen capturada*



*Figura 32. Imagen sin distorsión proyectiva*



En

la

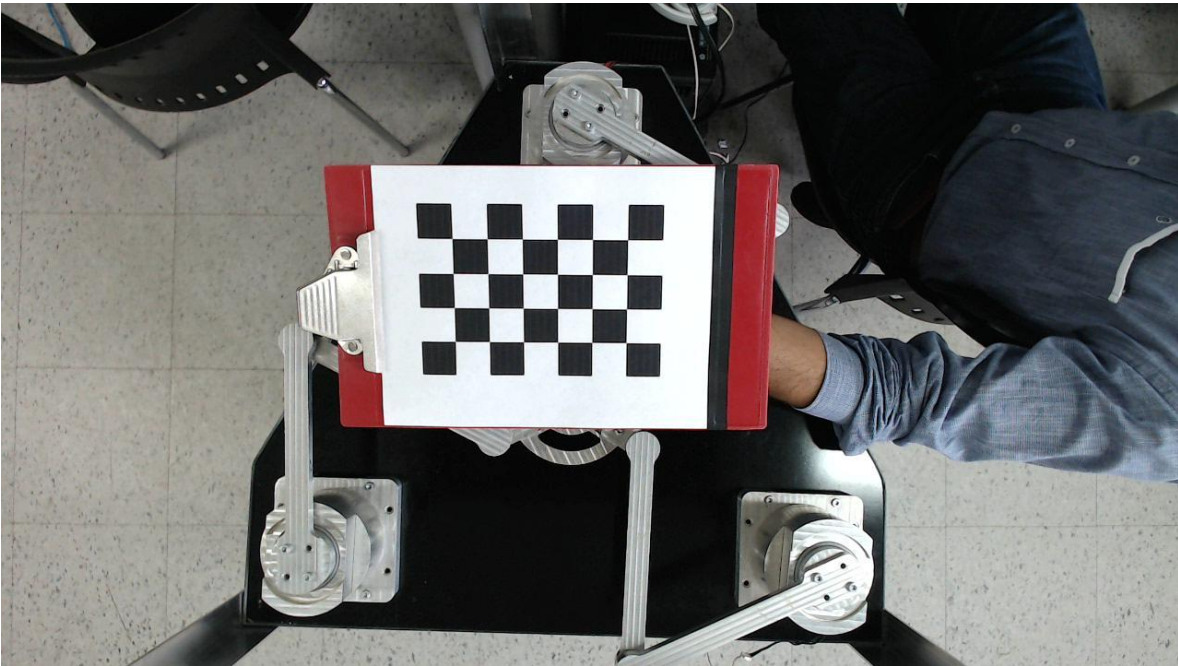


Figura 32, la zona de color naranja se observa como la imagen es corregida, estableciendo un reordenamiento de los píxeles cuando se aplica el proceso de calibración.

## **5. ALGORITMO DE VISIÓN POR COMPUTADOR PARA LA EXTRACCIÓN DE CARACTERÍSTICAS DEL OBJETO Y CÁLCULO DE LA POSE DEL OBJETO**

En este capítulo se presenta los algoritmos que permiten realizar la detección del objeto a partir del color, un descriptor para determinar correspondencias y un algoritmo no determinístico, que a partir de las correspondencias, determine las correspondencias putativas.

Una de las tareas importantes de los sistemas de visión por computador, es la búsqueda de correspondencia de puntos importantes. En un sistema de visión por computador, esta búsqueda es importante para la implementación de técnicas como: calibración de cámaras, la reconstrucción 3D, registro y reconocimiento de objetos. En este capítulo se presenta el procedimiento para determinar puntos de interés o correspondencias en una imagen y realizar un emparejamiento o matching entre dos o más vistas. En la literatura existe una variedad de detectores y descriptores que permiten el análisis para el cálculo de estas invariantes [56] [57] [58] [59].

### **5.1. ALGORITMO DE VISIÓN POR DETECCIÓN DE COLOR**

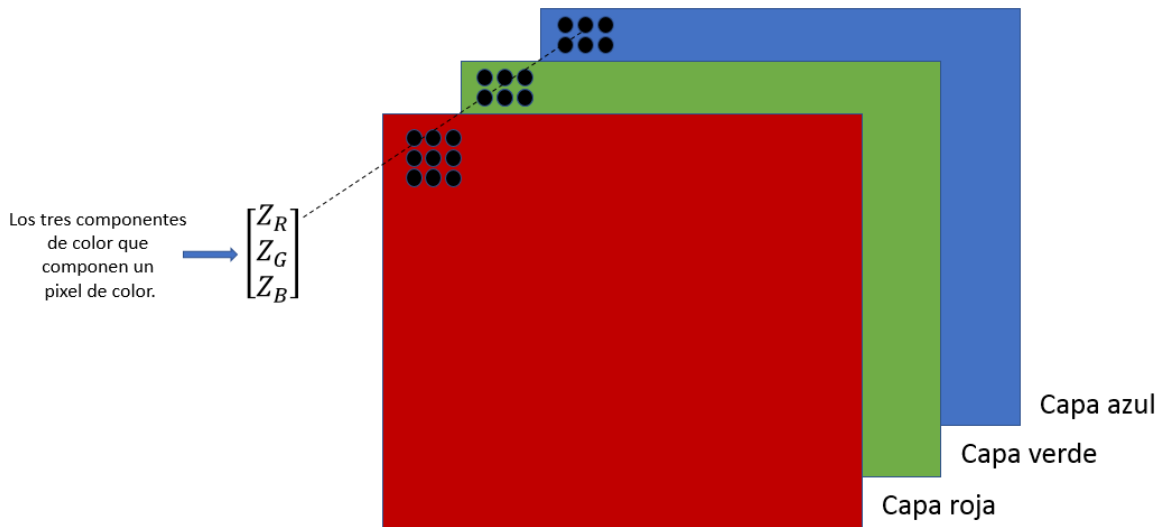
Uno de los algoritmos más utilizados para la detección del objeto es por medio de color. El principio por detección de color inicia con la descomposición de la imagen en formato RGB por capas, cada capa que compone la imagen está definida por una función bidimensional,  $f(x, y)$ , donde  $(x, y)$  son coordenadas de cada uno de los píxeles. La variable  $f$  define la amplitud de cada una de estas coordenadas como punto de intensidad o escala de grises. Básicamente, este análisis, es llevado a cabo por un histograma que define la distribución de píxeles respecto a una escala de intensidades cuyo rango va de 0 a 255.

En este trabajo de grado se realizará el análisis de imágenes en formato RGB. Una imagen RGB es una matriz de  $M \times N \times 3$  de píxeles de colores. Cada píxel de color es un triplete que corresponde a rojo, verde y azul, y que a su vez al ser concatenadas generan una imagen en formato RGB. Dicha imagen puede ser vista como la unificación de tres imágenes en escala de grises de un solo canal, es decir, que la capa R que corresponde la imagen roja, la capa B que representa la capa azul y la capa G que representa la capa verde, son imágenes monocromáticas compuestas en una escala de grises.

En la Figura 33 se muestra la descomposición por capas de la imagen a color. Los parámetros  $(Z_R, Z_G, Z_B)$  son los valores que componen el píxel de color de la imagen. En este capítulo

se tomarán imágenes a color y se realizará la detección del elemento por medio de las capas de colores.

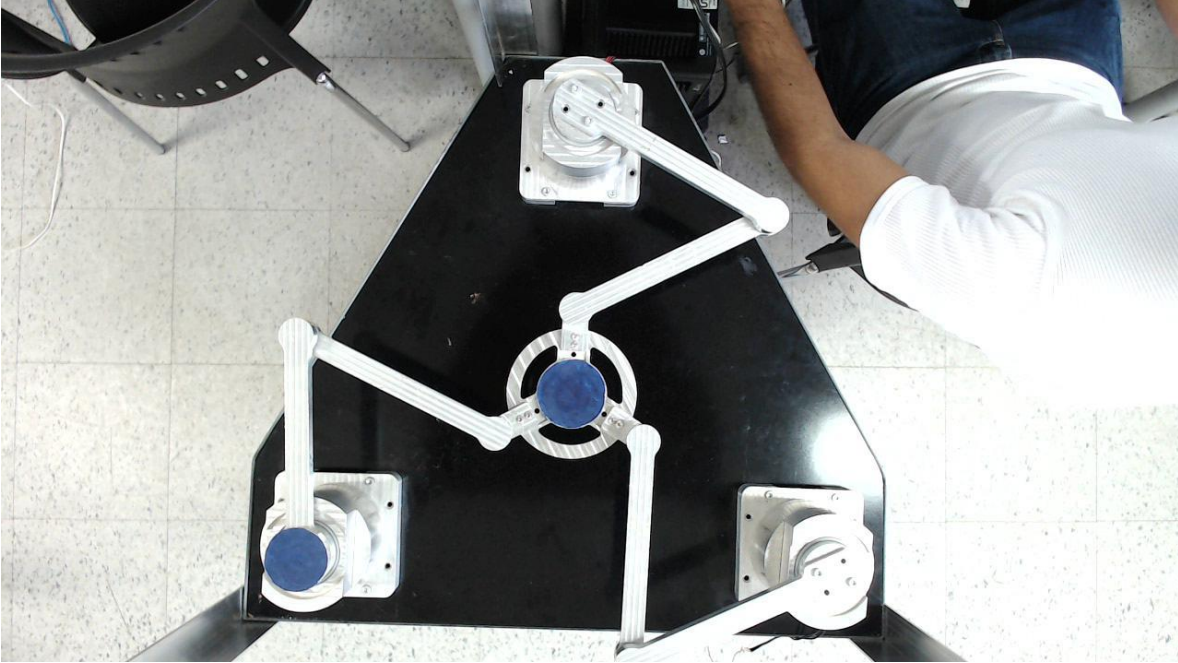
**Figura 33** Esquemático que muestra la descomposición por capas de una imagen RGB



Al observar la Figura 34 se tiene la captura del manipulador desde la parte superior, donde se tiene dos secciones de color azul. En primer lugar, se establece la detección del color azul de la imagen, pero, se debe aplicar un procesamiento digital de imagen para separar las capas de la imagen RGB y determinar solo la capa azul en la imagen.

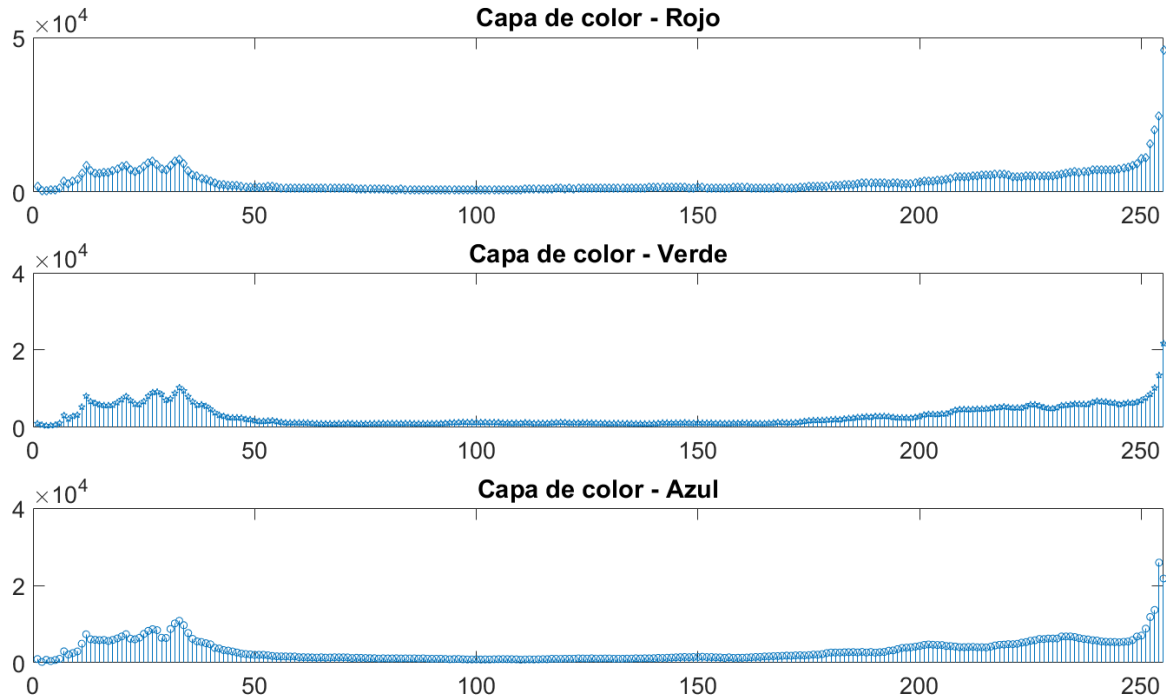
**Figura 34.** Captura de la imagen del manipulador paralelo





En la Figura 35 se visualiza de forma estadística el número de píxeles que tiene cada capa RGB. La abscisa representa la escala de grises, en el que cada píxel está evaluado entre 0 y 255; la ordenada representa en número de píxeles que está bajo el rango de intensidades. El identificar la cantidad de píxeles que hay dentro de la imagen. El siguiente proceso es extraer la capa azul y la capa roja para la determinación del objeto, el marco referencial de la imagen y el actuador final.

*Figura 35 . Histograma de la imagen RGB*



#### 5.1.1. Extracción de las capas de colores

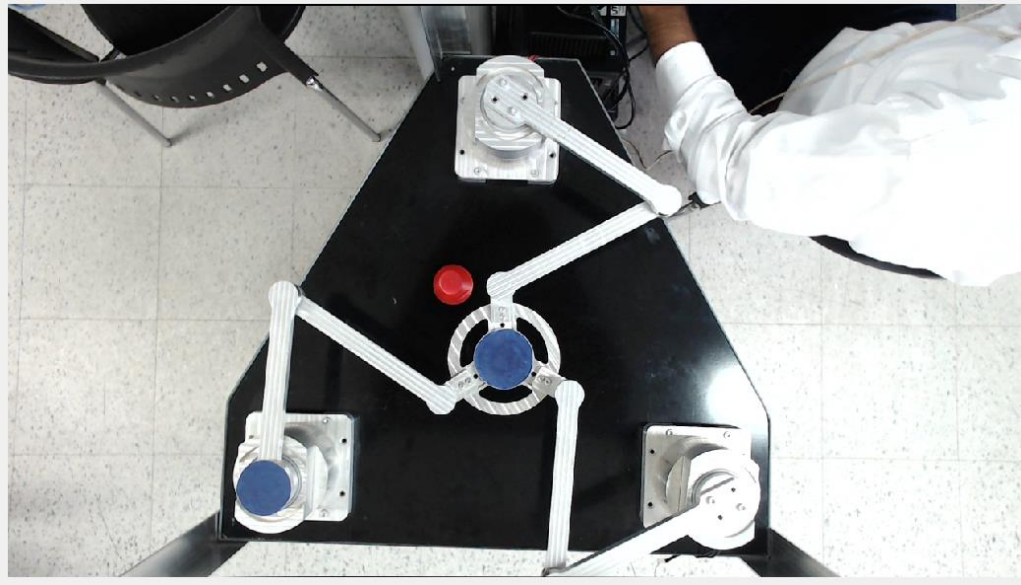
Para proceder a la extracción del color, se debe realizar una descomposición de la imagen en varias capas. Al realizar la captura de cada imagen se debe descomponer en sus capas RGB.

Mediante la Ec. 189 se extrae la capa roja de la imagen, la capa extraída tiene un tamaño de 640x480 píxeles. Para extraer la capa roja, en primer lugar, se debe separar la capa verde y azul, luego ambas capas se deben restar con la capa roja, dando como resultado la siguiente expresión.

$$R' = R - G - B \quad \text{Ec. 189}$$

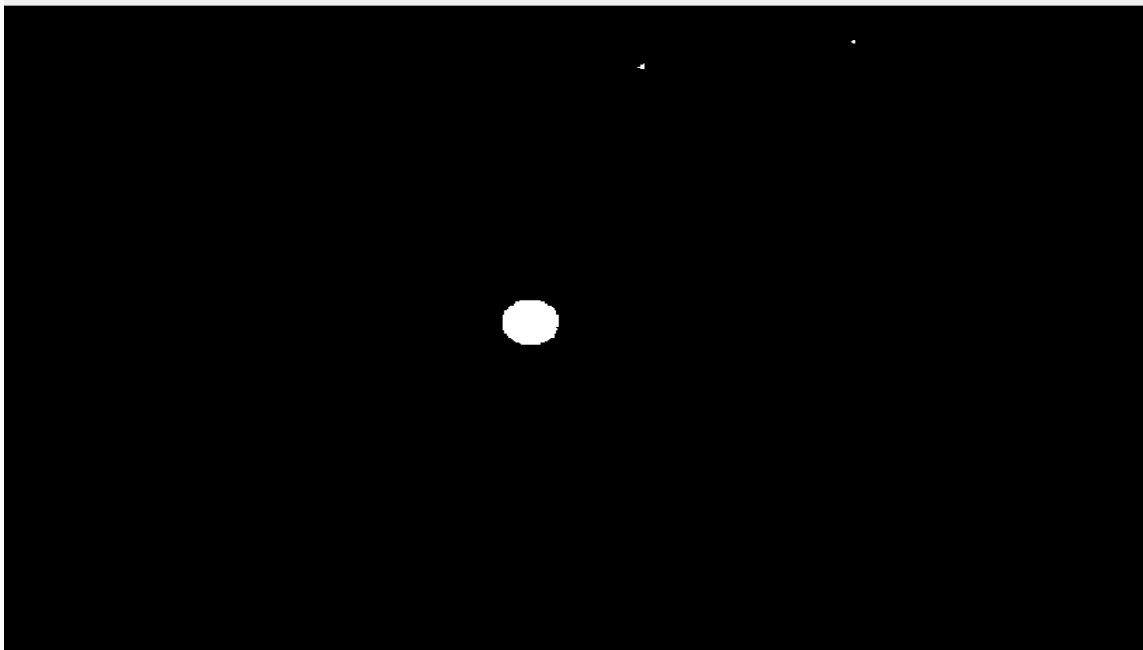
El objetivo del procesamiento de la Figura 36, es extraer el color rojo de la imagen, para ello se deben restar las demás capas y luego establecer una imagen en binario (1 y 0), donde cada pixel es evaluado bajo un umbral. Inicialmente, se estableció un umbral de 110. Este valor permite evaluar cada pixel de la capa roja uno a uno, cada pixel que apruebe el umbral se tomará como valor 1 (Blanco), lo demás que no cumplan serán 0 (Negro) y se llevará a una nueva imagen binaria.

**Figura 36. Captura para el análisis y extracción del objetivo rojo**



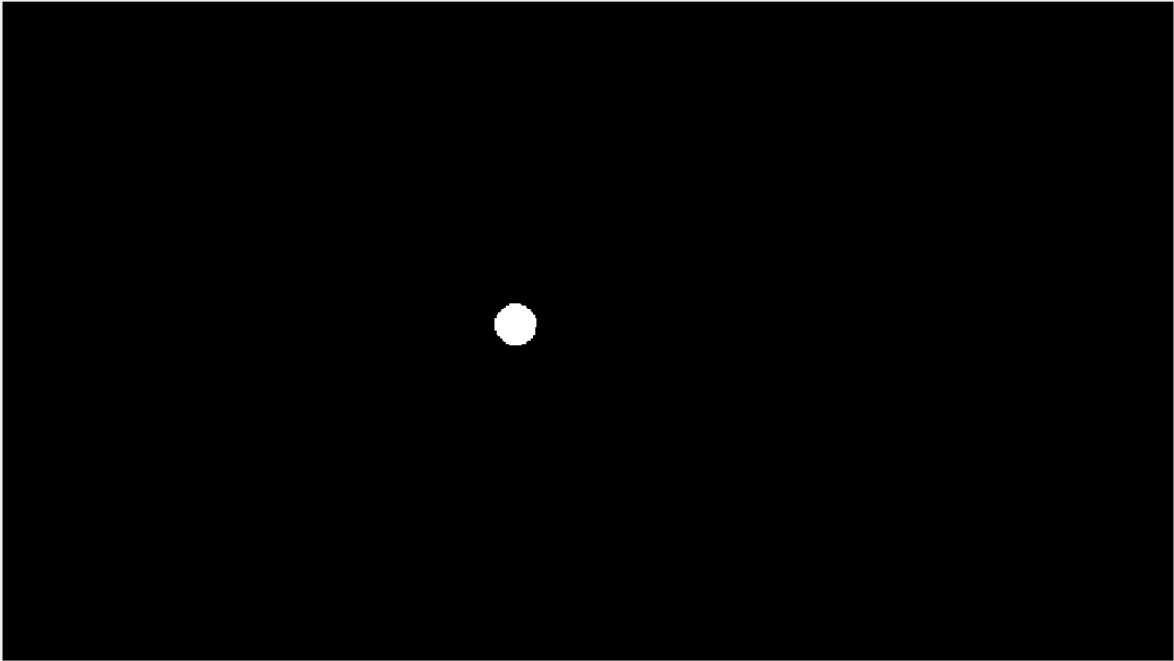
La Figura 37 muestra una imagen binaria de la capa roja. En esta imagen se tiene segmentos binarios en la parte superior que el algoritmo valida como rojo.

*Figura 37. Imagen binaria de la capa roja*



Para dar solución a la eliminación de las secciones binarias pequeñas, se realiza un proceso morfológico denominado erosión. Es este proceso se implementa un kernel que se define como una matriz que recorre la imagen y realiza una eliminación de las pequeñas porciones binarias resultantes. El proceso de erosión permite remover las pequeñas secciones binarias de la imagen, y además modifica la forma del contorno del objetivo, ver Figura 38.

*Figura 38. Imagen binaria de la capa roja aplicando la función erosión.*



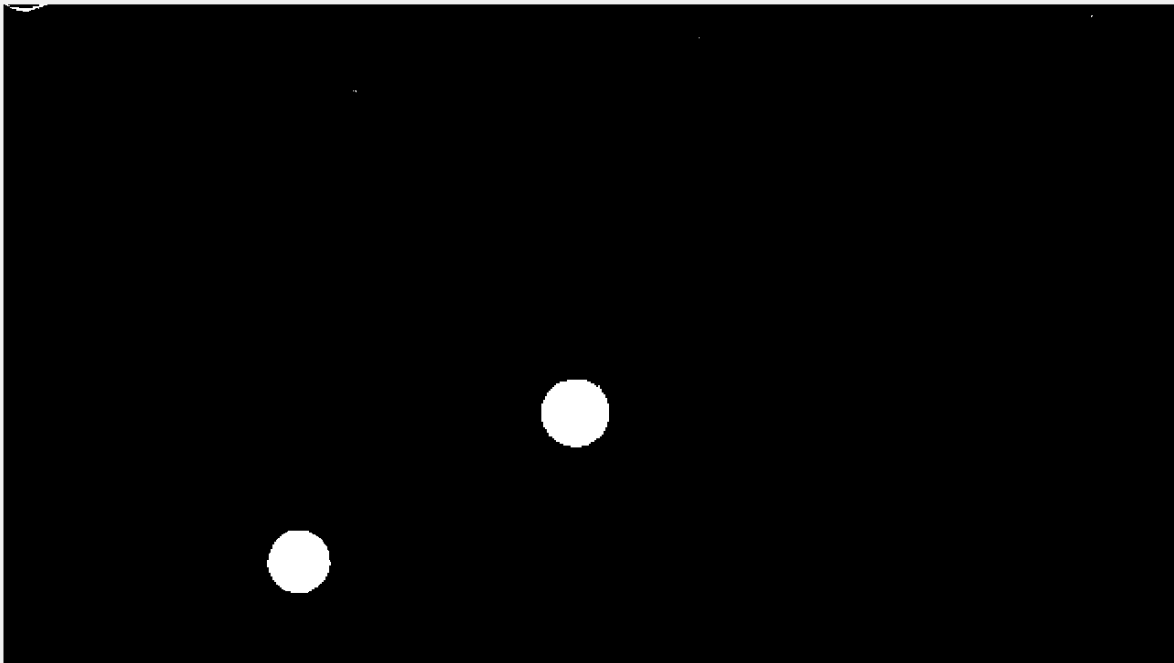
Para la extracción de la capa azul se utiliza la Ec. 190:

$$B' = B - R - G \quad \text{Ec. 190}$$

La extracción de la capa azul se establece restando la capa roja y verde. La capa azul ya extraída se evalúa bajo un umbral de 60, es decir, que cada pixel que supere este valor será tomado como 1 (blanco) y los que no sean aprobados bajo este umbral será tomado como 0, es decir, pixel blanco.

Al observar la Figura 39 se tienen pequeñas porciones de sección azul en la parte superior de la imagen, para ello, se realiza una erosión para eliminar las pequeñas secciones que se encuentran en la imagen.

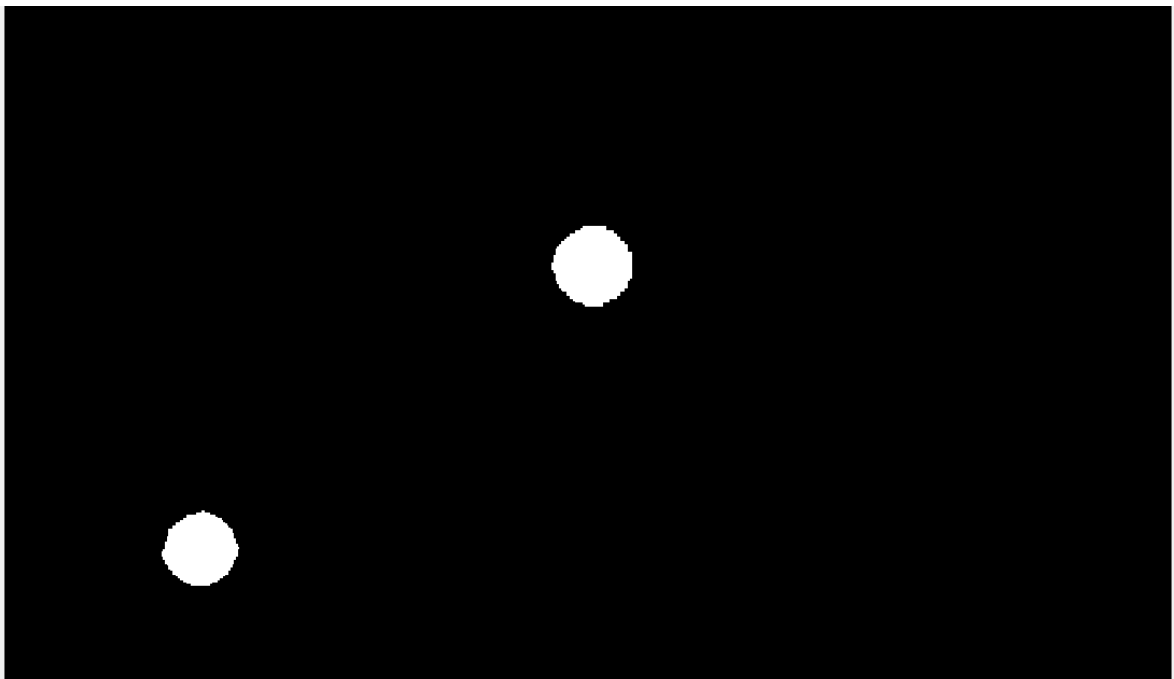
*Figura 39. Imagen binaria de la capa azul*



En la

Figura 40 se muestra una imagen después del proceso de erosión:

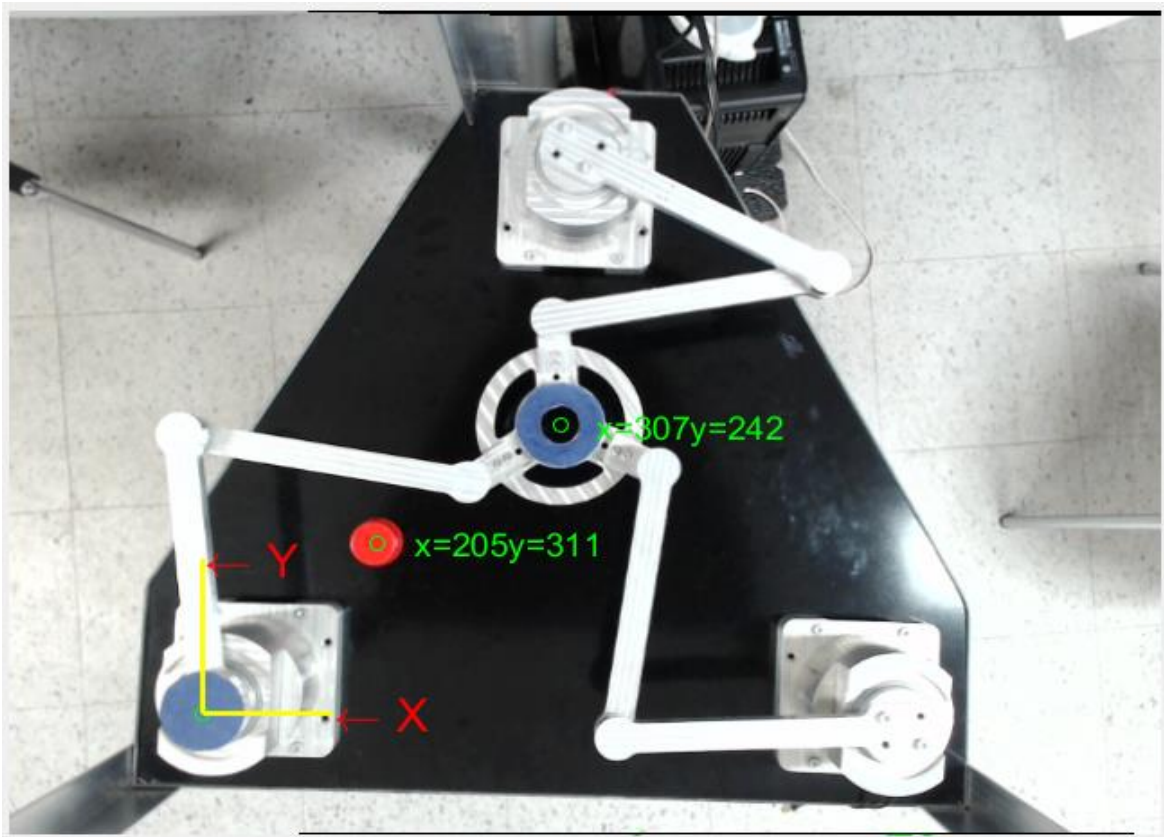
*Figura 40. Imagen binaria de la capa azul aplicando una erosión*



Luego de obtener la capa roja y azul segmentada se procede a determinar el centroide de las figuras seleccionadas. Las figuras binarias se tienen pixeles de valor 1 y 0; por lo tanto, se procede a determinar su ubicación de cada uno de ellos, esto con el fin de calcular el centroide de la figura.

En la Figura 41. Detección del objeto, actuador final y marco referencial del manipulador se observa la detección de los centroides de los objetos, en elemento de color rojo (objetivo), el marco referencial y el elemento terminal. Para lograr la determinación de los centroides se determinó la ubicación de cada uno de los pixeles segmentados.

**Figura 41. Detección del objeto, actuador final y marco referencial del manipulador**



Finalmente se tiene el cálculo de la coordenada del objetivo y la del actuador final en unidades de pixeles. Para realizar el movimiento del elemento terminal al objetivo, se tiene la coordenada de ambos y se calcula la pose entre los dos elementos. Por ende, al realizar el cálculo de la coordenada se envía esta información al algoritmo de la cinemática inversa del manipulador con la que se genera la trayectoria.

## 5.2. ALGORITMOS DE DETECCIÓN DE CARACTERÍSTICAS.

En la actualidad existen numerosos algoritmos que permiten clasificar e identificar patrones, características y puntos en imágenes. En el siguiente apartado se hará presente de descriptores y detectores de puntos que serán mencionados para la aplicación del trabajo de grado.

### 5.3. DETECTOR DE PUNTOS ESQUINA

En el campo de la visión por computador se requiere el análisis de detección de características para poder determinar semejanzas entre dos imágenes; para este caso se enfatizan en el análisis de puntos a partir de los cambios de nivel de intensidad en diferentes sectores de la imagen. Actualmente existen diferentes métodos de detector de puntos como el algoritmo de Plessey más bien conocido como el algoritmo de detección de esquinas Harris [60] [61] e incluso hay detectores robustos que son invariantes al escalado como el método de Harris-Laplace, y Hessian-Laplace [62].

### 5.4. DESCRIPTORES

Los descriptores representan la distribución de las características en vecindades a pequeña escala, permitiendo identificar puntos importantes en dos o más imágenes para luego establecer correspondencias. Dentro de los descriptores existen algoritmos como SIFT [58] [63], que es un detector que es invariante a la escala y a la rotación. Este descriptor es uno de los más usados actualmente, debido a que computariza histogramas de los gradientes locales alrededor de puntos de interés y los almacena en un vector de 128 dimensiones. También existe otros detectores como derivadores Gaussianos, momentos invariantes [64], descriptor de características complejas [65] [66], filtros orientados [67] y características locales basadas en fase [68].

### 5.5. DETECTOR-DESCRIPTOR

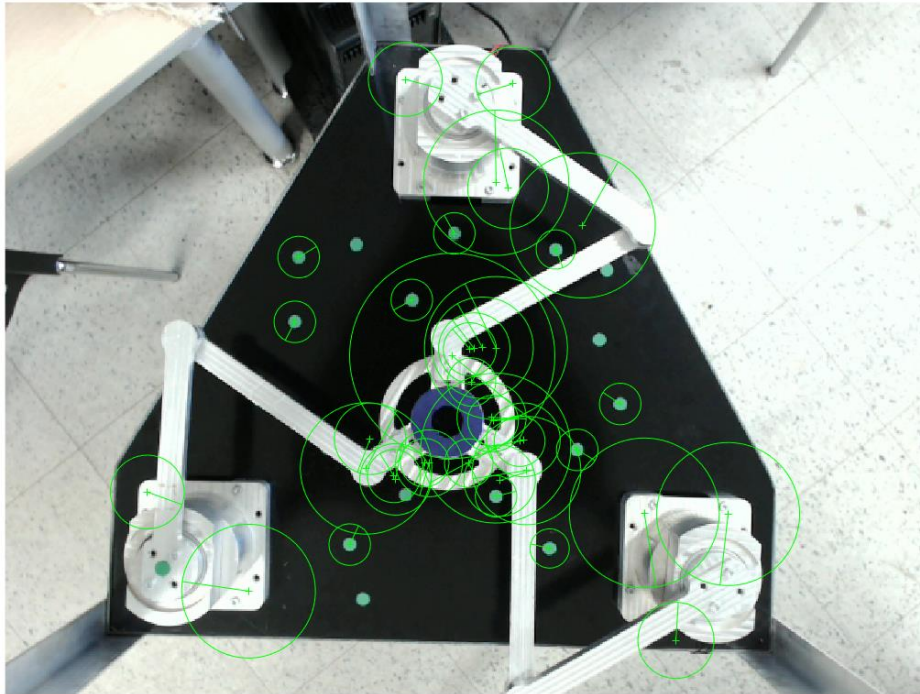
En la actualidad existe un método denominado SURF [69] [70]; este algoritmo permite el cálculo de puntos de interés y, además, permite establecer la correspondencia entre ellas permitiendo un emparejamiento de características.

El nombre SURF es por sus siglas en inglés Speeded-up Robust Features. Este algoritmo de alto rendimiento permite determinar puntos de interés en una imagen, el algoritmo transforma en imagen de coordenadas, utilizando una técnica de multi- resolución. Generalmente, este algoritmo realiza una réplica de la imagen original de forma piramidal gaussiana o piramidal Laplaciana en la que se obtiene un número de imágenes del mismo tamaño, pero con un ancho de banda reducido. Esto conlleva a un efecto sobre la imagen original lo cual es denominado filtro de espacio escalado [71] [72], asegurando que los puntos de interés son invariantes al escalado; el algoritmo SURF está basado en el predecesor SIFT [58] [63]. El algoritmo SURF, está basado en la matriz Hessiana, pero usa aproximaciones básicas como un detector gaussiano DoG. Este se basa en el análisis de imágenes integrales que permiten reducir el tiempo de análisis computacional y el cual es denominado como detector “Fast-Hessian”. El descriptor SURF, por otra parte, se basa en la distribución de Wavelets – Haar

que responde con los puntos de interés en las vecindades de los puntos. A continuación, se muestra la aplicación del algoritmo SURF en la que se tomarán 40 puntos característicos en dos imágenes como se muestran en la Figura 42 y en la Figura 43.

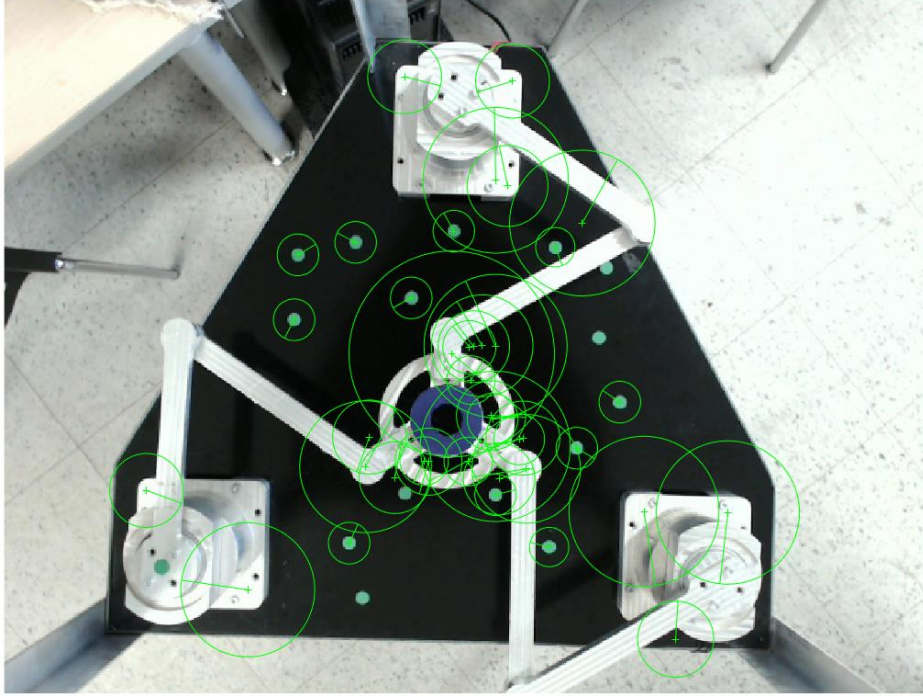
Si se observa de manera detallada existen unos marcadores de color verde, que son puntos necesarios para determinar establecer una transformación de medida en pixeles a valores de medida del mundo real. Los marcadores verdes son ubicados de manera arbitraria y cada uno de estos marcadores son relacionados con el marco de referencia del manipulador planar.

***Figura 42. Aplicación del algoritmo SURF - Imagen 1***



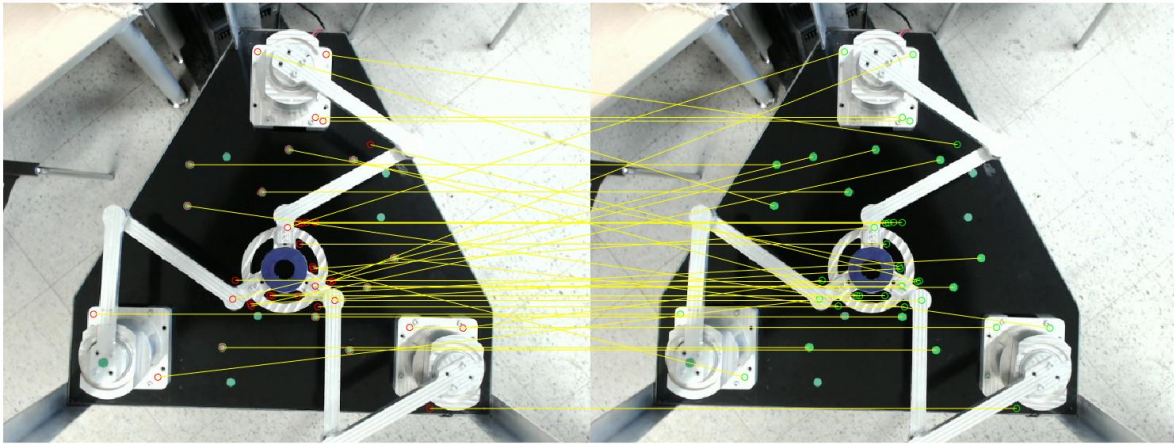
***Figura 43. Aplicación del algoritmo SURF - Imagen 2***





Luego de establecer los puntos característicos en ambas imágenes se procede a establecer las correspondencias putativas como se muestra en la Figura 44.

*Figura 44. Correspondencias putativas entre la imagen 1 y la imagen 2*



Al determinar las correspondencias se observa que algunas no son coincidentes; para corregir este factor es necesario establecer un método que permita calcular las correspondencias adecuadas en ambas imágenes. Este método es denominado RANSAC.

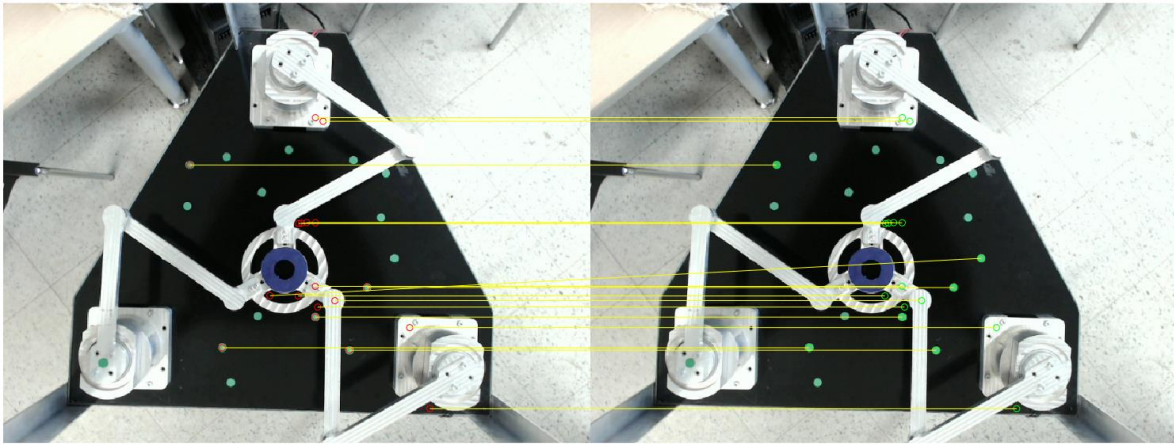
### 5.6. RANSAC

Es un método de iteraciones en el cual permite calcular los parámetros de un modelo matemático de un conjunto de datos observados que se tiene valores atípicos cuyos datos son distantes de los otros valores, estos son denominados outliers. Este algoritmo por lo general

no es determinístico, dado que permite establecer resultados muy robustos, esto dependiendo del número de iteraciones que se le asignen, [73].

Este algoritmo se utilizó para realizar una estimación de la homografía a partir de puntos correspondientes obtenidos por el descriptor SURF. Como objetivo, es determinar la menor cantidad de puntos posibles para estimar el modelo y determinar cuántos de estos datos se ajustan al modelo estimado. Dicho procedimiento fue realizado en el programa MATLAB, ver Figura 45.

*Figura 45. Correspondencias putativas*

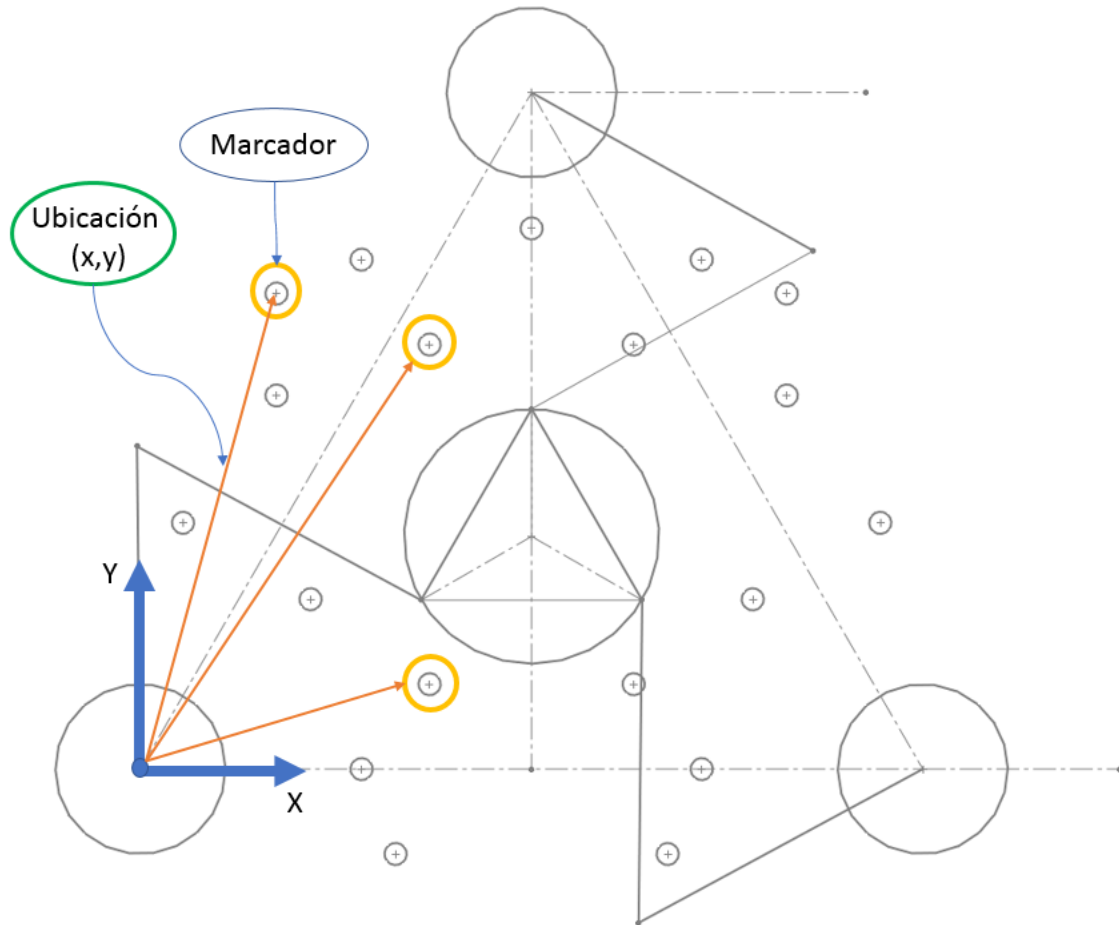


El método fue aplicado y desarrollado con 5000 iteraciones y un umbral de estimación de 0.0001 que define la distancia a encontrar los valores atípicos. En total se obtuvieron 18 correspondencias putativas de 40 datos característicos tomados en ambas imágenes por el descriptor SURF.

### 5.7. HOMOGRAFÍA

Para determinar la homografía, en primer lugar, se realizó una detección de los puntos en la sección de trabajo del manipulador que son los marcadores de color verde, mostrada en la Figura 42. Cada marcador está relacionado con el marco de referencia del manipulador, cada uno de estos marcadores son calculados respecto a un CAD como se ve en la Figura 46, estos marcadores fueron determinados en centímetros, se tuvo un total de 19 marcadores. El desarrollo se realizó en SOLIDWORKS.

*Figura 46. Ubicación de los marcadores en el área de trabajo*



Luego de obtener los marcadores respecto al marco de referencia, se procede a determinar los marcadores en el plano de la imagen como se ve en la Figura 47, para la determinación de cada uno de estos marcadores se evaluó con un umbral de 70.

*Figura 47. Detección de los marcadores para la determinación de sus centroides*



Al observar la Figura 47 se detectan algunos marcadores debido al umbral de evaluación, uno de los problemas que se tuvieron fue el control de iluminación debido a que el entorno no era controlado, para ello se aumentaron el número de marcadores para mejorar la detección y estimación.

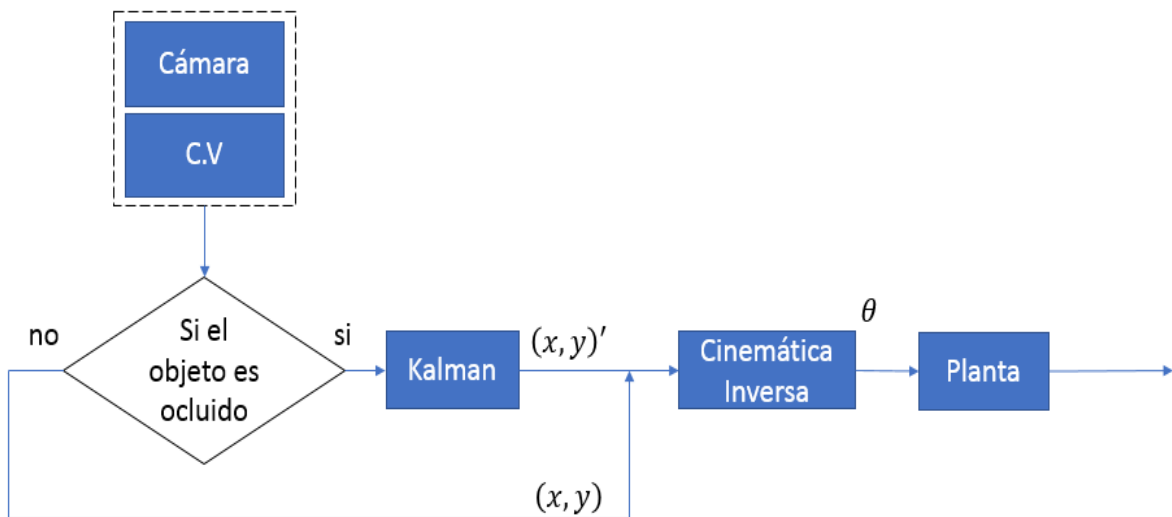
Finalmente, al obtener los puntos de los marcadores en coordenadas en milímetros y luego por medio del algoritmo determinar dichas coordenadas en pixeles, se realizar el proceso de conversión de los puntos determinados en pixeles a coordenadas del mundo real. Esto, es con el fin de determinar la ubicación del objeto.

## 6. SISTEMA DE CONTROL

En este capítulo se realiza la aplicación de un sistema de control cinemático para el manipulador paralelo 3-RRR. Los sistemas de control hoy en día permiten controlar múltiples variables a partir de estrategias de control como el PID que es uno de los sistemas clásicos y que son muy utilizados en el ámbito industrial, hasta uno de los actuales como el control adaptativo. Los sistemas en los que se implementan un control. Como objetivo se requiere desarrollar un sistema de control al manipulador paralelo de tipo planar 3RRR para controlar las variables de velocidad y aceleración. Para esto se requiere un análisis dinámico con la que se obtiene la ecuación requerida para controlar.

En este trabajo se plantea implementar un control cinemático en lazo abierto, como se muestra en la Figura 48, en el cual tiene como entrada una imagen capturada por la cámara. Esta imagen es enviada al algoritmo de visión por computador donde se extraen las características del objetivo a determinar. Estas coordenadas son enviadas a la cinemática inversa, si el objeto está, ocluido, el algoritmo de Kalman estima la posición siguiente tomando los datos anteriores del objeto y los envía a la cinemática inversa.

*Figura 48. Control cinemático en lazo abierto*

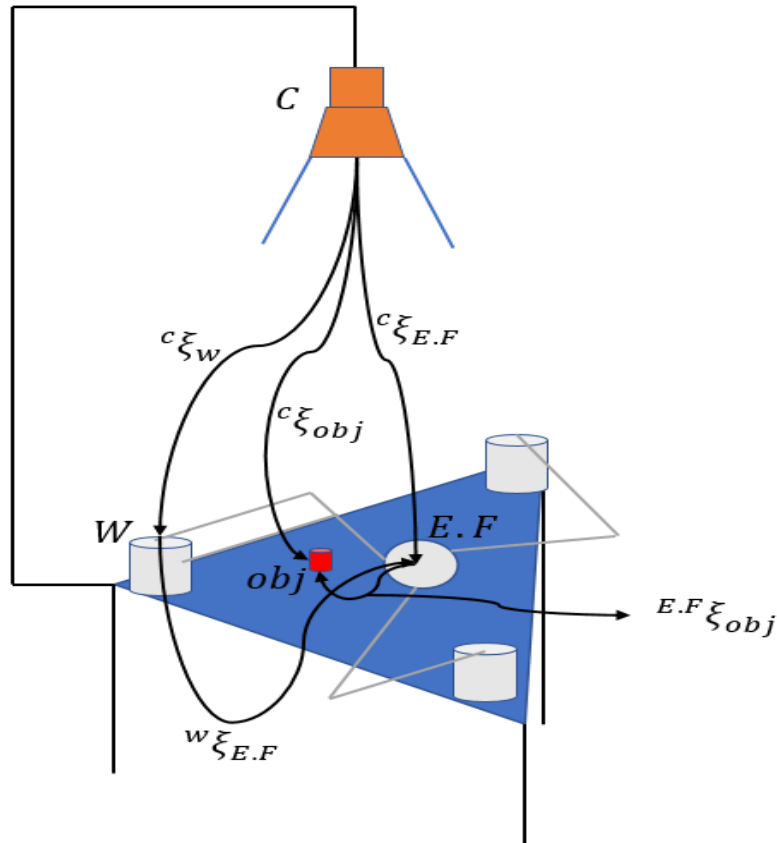


### 6.1. SERVO CONTROL VISUAL

Esta técnica también conocida como visión basada en control robótico, utiliza la información extraída como retroalimentación proporcionada por el sensor visual para el control de movimiento del manipulador paralelo 3-RRR. En la literatura del servo control visual se tiene dos configuraciones; la primera denominada Eye-in-hand, donde la cámara está unida al movimiento del actuador final; la segunda configuración Eye-to-hand, donde la cámara está fija en cualquier parte del área de trabajo, denominado mundo (*World*) observando el objetivo y el actuador final. Basado en las anteriores configuraciones se optó por seleccionar la segunda configuración debido a que se tiene una visualización del objetivo y del actuador

final. La primera configuración no se puede establecer debido a la morfología del manipulador, además también difiere mucho la ubicación de la cámara; esto hace complejo acoplarlo debido a que el área de trabajo es muy limitada. La Figura 49 representa la configuración Eye-to-hand implementado en un manipulador.

**Figura 49. Configuración Eye-to-hand aplicado al manipulador paralelo 3-RRR**



Al ver la Figura 49, se tiene un operador  $\xi$  que representa la matriz de transformación homogénea que se representa, a continuación, en la Ec. 190:

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Ec. 190}$$

La matriz de transformación homogénea está constituida por una matriz de rotación de 3x3, un vector de traslación de 3x1, un vector de escala 1x3 que está constituida por ceros y finalmente un valor 1 en la posición (4,4) que representa la perspectiva.

Teniendo en cuenta la Figura 49, cada parámetro  $\xi$  en la imagen permite determinar la ubicación, orientación del objeto, del actuador final y el origen. Para poder determinar la orientación y pose del objetivo y el actuador final utiliza la Ec. 191:

$${}^{E.F}\xi_{obj} = inv({}^c\xi_{E.F}) \oplus {}^c\xi_{obj} \quad \text{Ec. 191}$$

Esta ecuación matemática permite calcular la orientación entre el objetivo y la cámara, que determina la transformada homogénea, y así determinar la trayectoria requerida por el actuador final para alcanzar el objetivo.

## 6.2. FILTRO DE KALMAN

En este apartado se establece la aplicabilidad del filtro de Kalman como estimador, el cual se utilizará para el seguimiento del objetivo estimando la ubicación del objetivo. Esta es retroalimentada a la cinemática del manipulador paralelo, que permitirá el seguimiento del elemento con base en la posición del actuador final.

El filtro de Kalman fue desarrollado por Rudolf E. Kalman [74], el cual permite identificar el estado oculto de un sistema dinámico lineal. Es un algoritmo que se basa en el modelo de espacio de estados que permite estimar el estado futuro y la salida futura. Este método permite realizar un filtrado óptimo de la señal de salida, lo cual depende de las muestras que se le asignen o que ingresen, puede cumplir la función de estimador de parámetros. En estos casos puede eliminar el ruido el cual está basado en estimaciones probabilísticas. El filtro es también conocido como estimador cuadrático lineal (*LQE*), este algoritmo usa una serie de medidas observadas en un tiempo, que pueden contener ruido y otras imprecisiones. El algoritmo de Kalman produce estimaciones de variable desconocidas que tienden a ser más precisas que las basadas en una sola medición, utilizando la inferencia bayesiana y estimando una probabilidad conjunta de distribución sobre las variables para cada periodo de tiempo.

El filtro de Kalman produce estimaciones de las variables de los estados actuales, junto con sus incertidumbres. Una vez que observa el resultado de la siguiente medición, este se actualiza utilizando el promedio ponderado, dándole mayor otorgamiento a la variable estimada. El algoritmo es recursivo, es decir, puede ejecutarse en tiempo real, utilizando solo las mediciones de las entradas actuales y el estado previamente calculado y con la matriz de incertidumbre. Además, no requiere de información adicional previa dado que estima usando una forma de realimentación y control. El filtro estima el estado del proceso en un tiempo después, obtiene la realimentación en forma de mediciones que en este caso pueden ser ruido. Básicamente, el algoritmo de Kalman es un estimador recursivo, dado que estima el estado anterior y el estado presente de la medida, el cual son procesados para estimar el siguiente estado. En contraste a las técnicas de estimación, este no depende de las observaciones históricas, [74].

El estado del filtro está representado por dos fases: predictiva y correctiva. La fase predictiva usa el estado anterior para producir una estimación del estado actual. Este estado de predicción es conocido como el estado *a priori*, aunque es una estimación del estado del tiempo actual, no incluye información de observación a medida que pasa el tiempo. En la fase correctiva, la predicción actual *a priori* se combina con la información de observación actual para refinar la estimación del estado. Esta estimación mejorada se denomina estimación *a posteriori* del estado.

Básicamente, las dos fases se alternan, con la predicción avanzada del estado hasta la siguiente observación programada, y la actualización incorporando la observación. Aunque, esto no es necesario, si una observación no está disponible por alguna razón, la actualización puede omitirse y se puede realizar varios pasos de predicción.

Para establecer el filtro de Kalman es requerido estimar el estado interno de un proceso dado, en el que se tiene una secuencia de observaciones ruidosas; en este algoritmo es requerido modelar el proceso de acuerdo con el marco de filtro de Kalman. Esto significa que se requiere especificar las siguientes matrices:

- $\mathbf{F}_k$ : Estado transitorio del modelo.
- $\mathbf{H}_k$ : La matriz de observabilidad del modelo.
- $\mathbf{Q}_k$ : La matriz de covarianza de un proceso ruidoso.
- $\mathbf{R}_k$ : La matriz de covarianza de una observación ruidosa.
- $\mathbf{B}_k$ : El control de entrada de un modelo, para cada tiempo,  $k$ .

El filtro de Kalman asume el verdadero estado del modelo en tiempo  $k$  en el cual se desarrolla a partir del momento del estado  $k-1$ , el cual va en relación, con base en la Ec. 192, [74].

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad \text{Ec. 192}$$

Donde:

- $\mathbf{F}_k$ : Es el estado de transición del modelo el cual es utilizado en el estado anterior  $\mathbf{x}_{k-1}$ .
- $\mathbf{B}_k$ : Es la etapa de control del parámetro de entrada el cual es utilizado al vector de control  $\mathbf{u}_k$ .
- $\mathbf{w}_k$ : Es el proceso de ruido, el cual es asumido de una distribución normal multivariado de media cero,  $N$ , con covarianza  $\mathbf{Q}_k$ .

Cuando se tiene un tiempo  $k$  una observación  $\mathbf{z}_k$  de un estado verdadero  $\mathbf{x}_k$  es realizado acorde con la Ec. 193:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad \text{Ec. 193}$$

A continuación, se muestra la metodología matemática que define el cálculo de las estimaciones predictivas y correctivas.

En la Ec. 194 se presenta la formulación matemática que permite calcular la estimación predictiva y la Ec. 195 representa la estimación de covarianza predictiva.

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{F}}_k \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-1} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k \quad \text{Ec. 194}$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \hat{\mathbf{F}}_k \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad \text{Ec. 195}$$

Para la fase correctiva se tiene los siguientes modelos matemáticos. La Ec. 196 representa la innovación, la Ec. 197 representa la innovación de la covarianza, la Ec. 198 representa la ganancia óptima de Kalman, la Ec. 199 representa la estimación del estado correctivo, la



Ec. 200 estima la covarianza correctiva y finalmente la Ec. 201 representa la medición de ajuste residual.

$$\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{z}_k + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} \quad \text{Ec. 196}$$

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{R}_k + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \quad \text{Ec. 197}$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \quad \text{Ec. 198}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{k|k} = \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \quad \text{Ec. 199}$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \quad \text{Ec. 200}$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k|k} = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k} \quad \text{Ec. 201}$$

La Ec. 200 para la estimación de la covarianza actualizada, solo es válida para la ganancia óptima de Kalman.

Si dado el caso, el modelo es preciso, y los valores  $\hat{\mathbf{X}}_{0|0}$  y  $\mathbf{P}_{0|0}$  reflejan precisiones, la distribución de los valores de estado inicial preservan las siguientes invariantes:

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k}] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_k - \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}] = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 202}$$

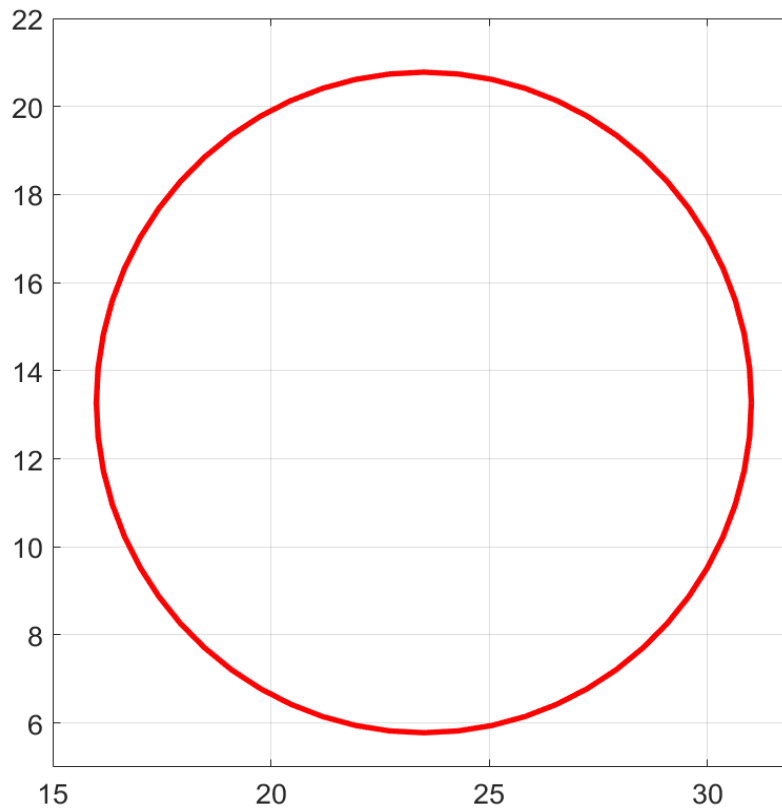
$$\mathbf{E}[\tilde{\mathbf{y}}_k] = \mathbf{0} \quad \text{Ec. 203}$$

Donde la variable  $\mathbf{E}$  de la Ec. 202 y Ec. 203 define que todas las estimaciones tiene un significado de error cero.

En primer lugar, se utilizó el filtro de Kalman para estimar la pose y la orientación del objetivo. Con esto se obtiene el cálculo de una coordenada donde esta será retroalimentada al algoritmo de cinemática inversa.

En primera instancia se tomarán los datos de una trayectoria que, en este caso, se basará en una circunferencia. La trayectoria se evaluará en el algoritmo de la cinemática inversa dando lugar a datos teóricos de las posiciones angulares; estos valores luego serán comparados con los datos reales de las posiciones angulares de los servomotores. En la Figura 50 se muestra la circunferencia utilizada como trayectoria.

*Figura 50. Trayectoria circular*

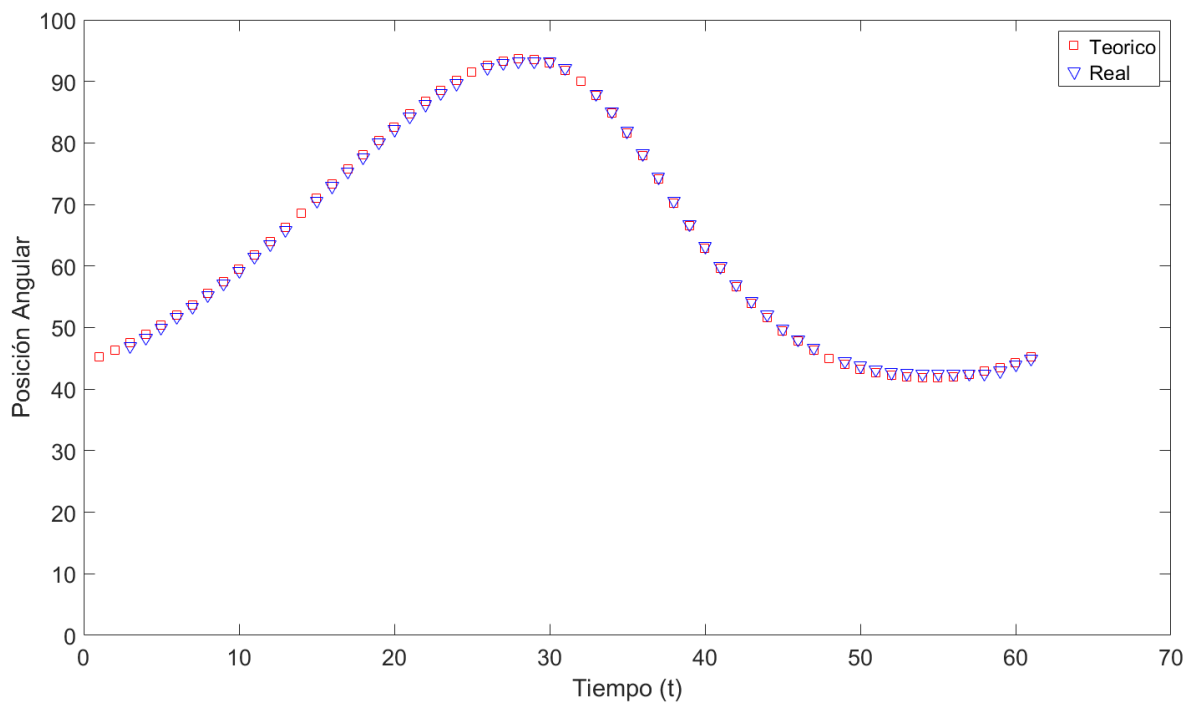


Las

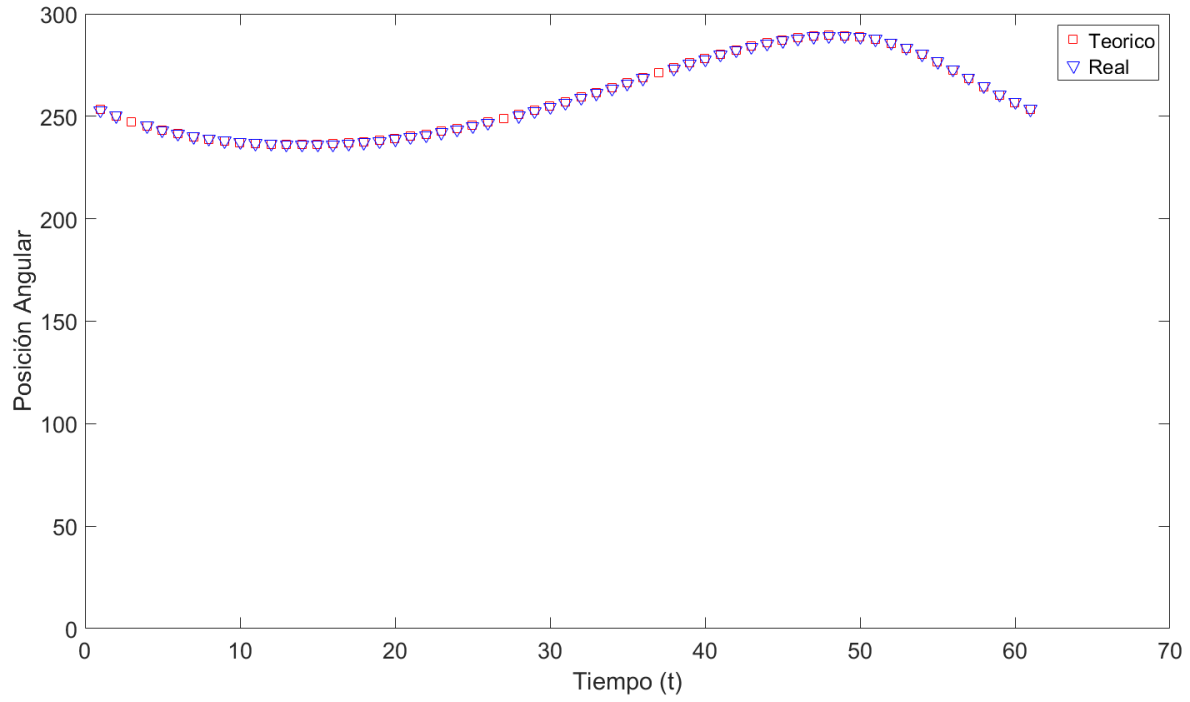
Figura 51, Figura 52 y

Figura 53 muestran los datos teóricos de las posiciones angulares entregadas por los servos respecto a los datos entregados por los servomotores.

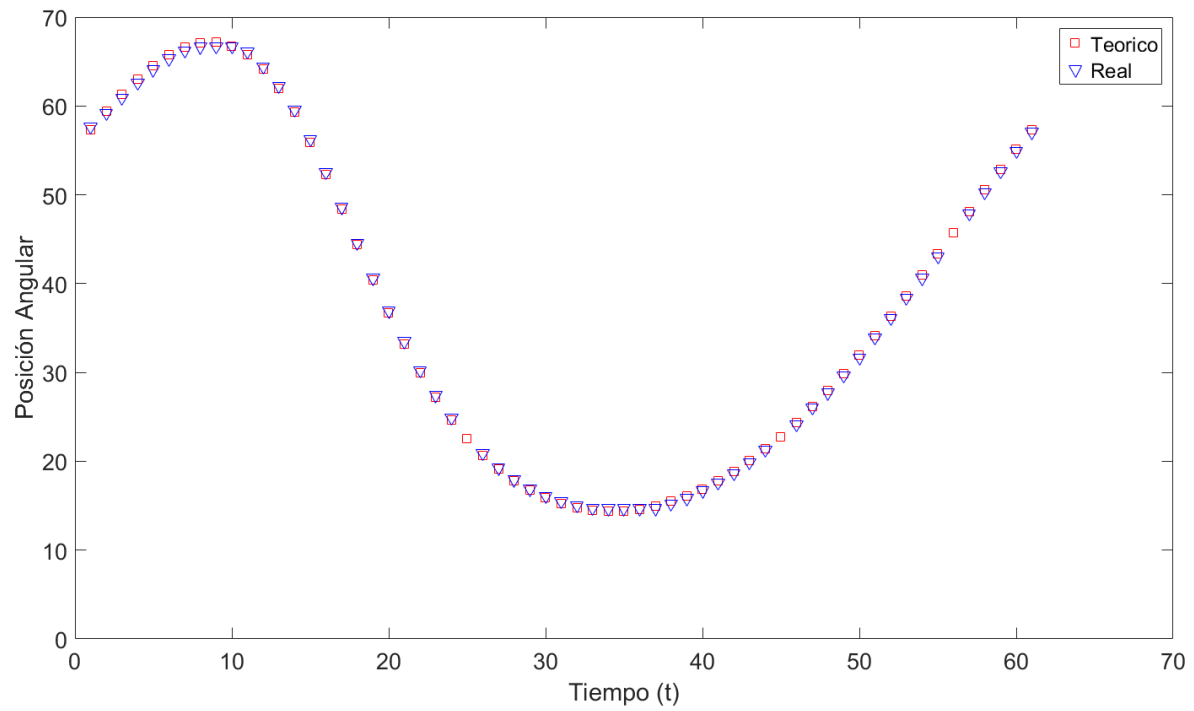
**Figura 51. Posición angular del servo 1 - Teórico vs Real**



**Figura 52. Posición angular del servo 2 - Teórico vs real**



**Figura 53 Posición angular del servo 3 - Teórico vs real**



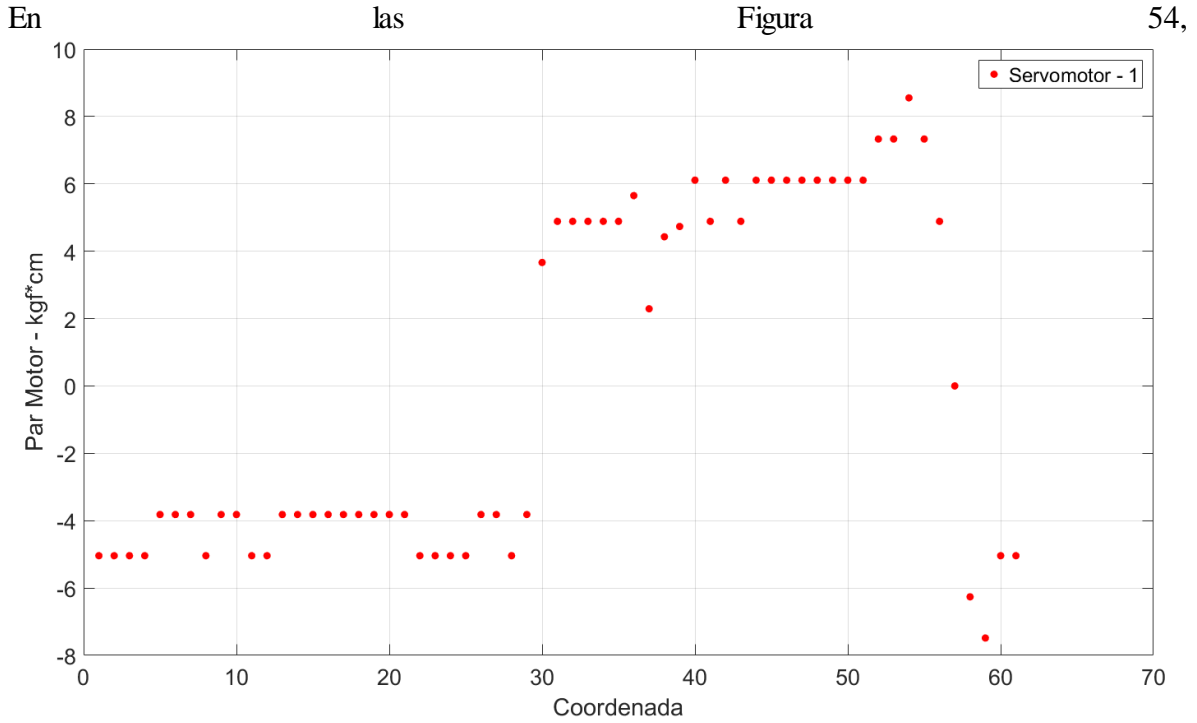


Figura 55 y

Figura 56 se muestran los datos reales de los pares motores entregados por los servomotores MX – 64T. Para establecer el cálculo del par motor, la referencia del servomotor MX – 64T [75], describe que para el cálculo se tiene en cuenta la dirección del servomotor, si esta gira en dirección contraria a las manecillas del reloj cada par es evaluado en bytes que van de rango [0 a 1023] y cuando está en sentido horario es par es evaluado en rango [1023 a 2047]. Cada servomotor tiene un valor nominal máximo de 7,0 Nm, este valor difiere en la cantidad de voltaje al que se conectan a los actuadores. Para este proyecto los actuadores son alimentados a 15V donde en la hoja de datos del servomotor establece, que puede entregar un máximo par motor 7,0 Nm, [75].

Para describir el par se estableció una conversión en bytes a par motor de cada uno de los servomotores. En cada motor se estableció una diferenciación del movimiento de cada uno, los valores que estén por encima del valor de cero definen, que van en sentido antihorario y los que están por debajo de cero están en sentido horario.

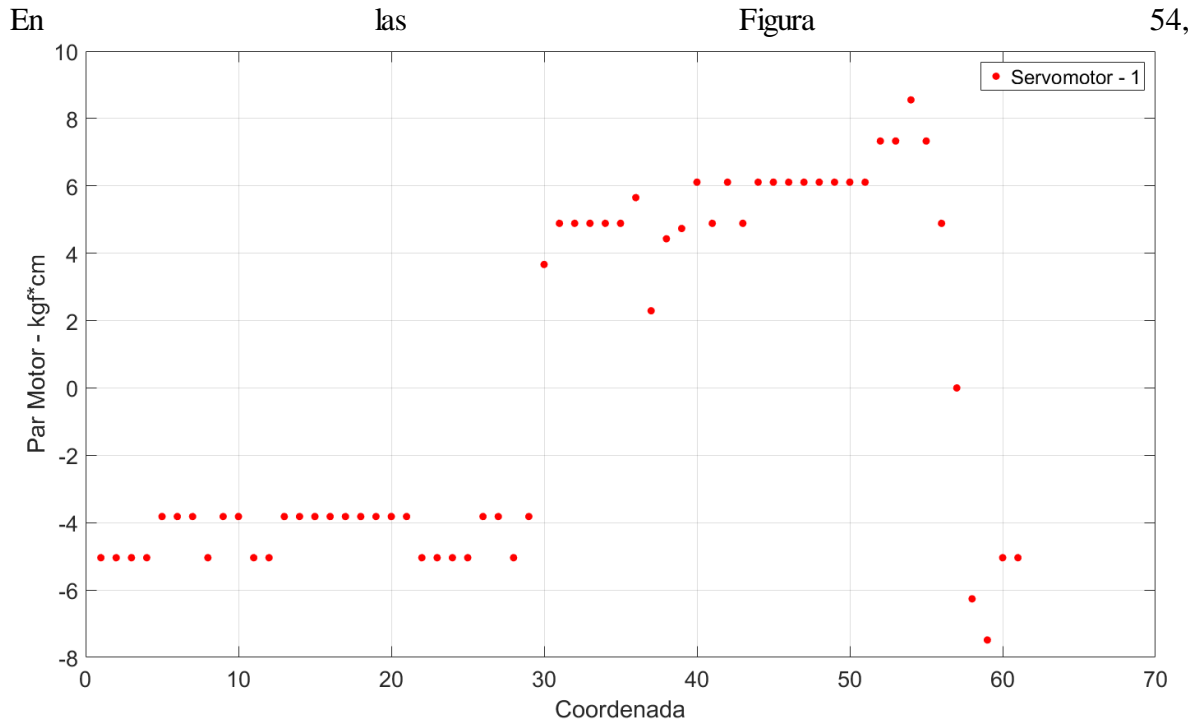
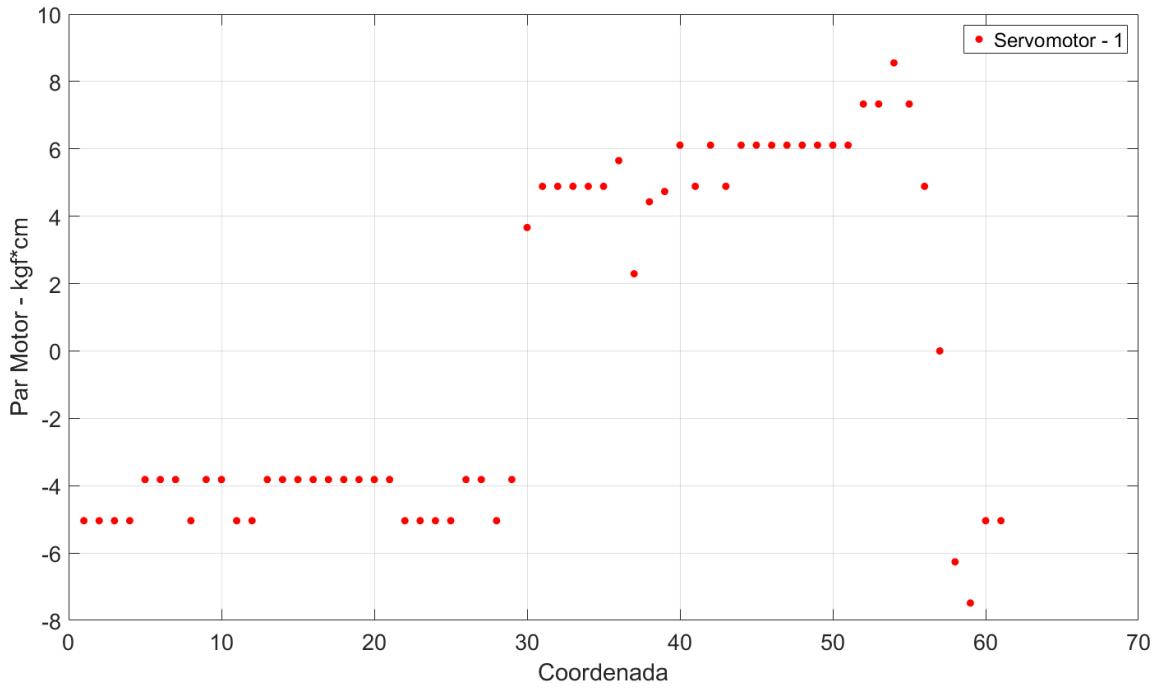


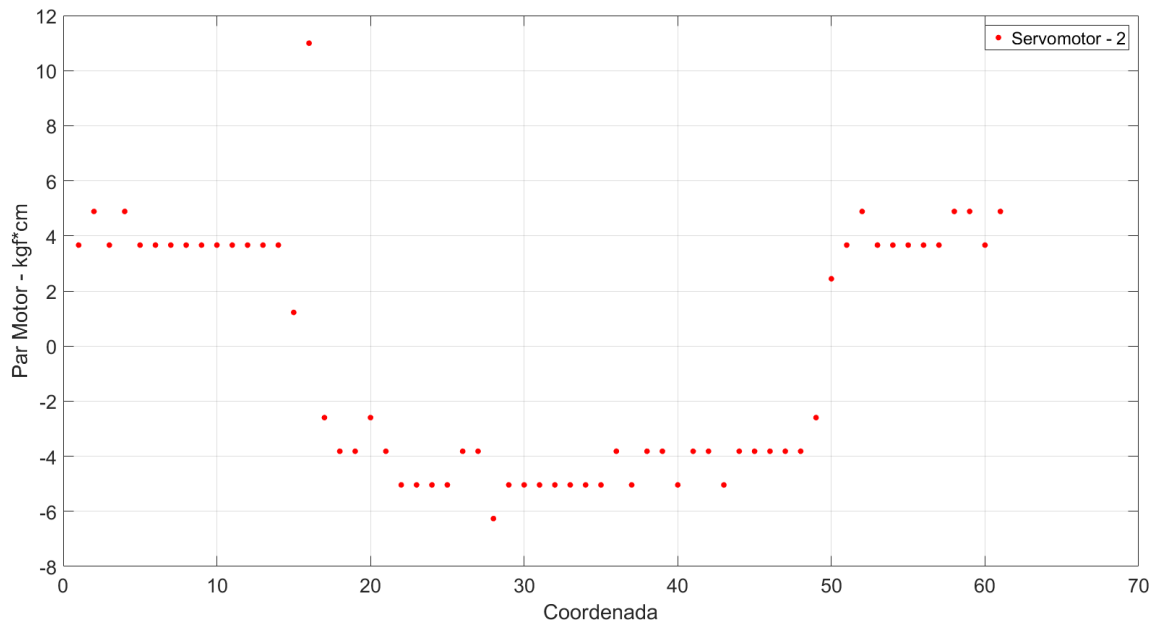
Figura 55 y

Figura 56, cada valor está graficado por puntos, es decir, cada toma es discreta. Además, solo son los valores obtenidos de los servomotores.

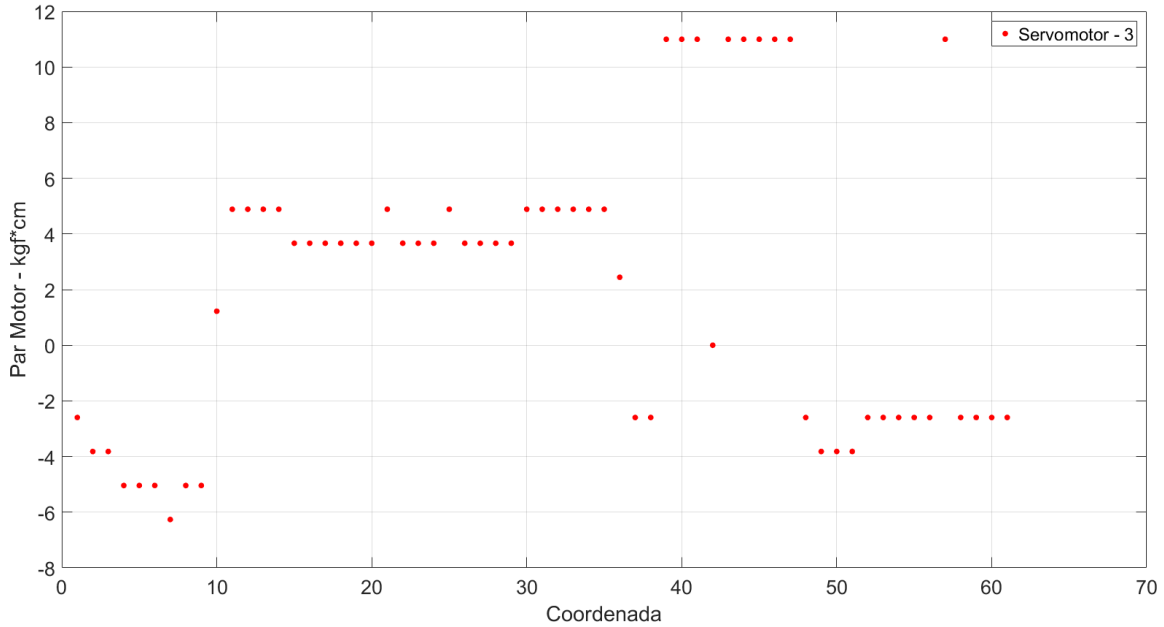
*Figura 54. Par motor - Servomotor 1*



**Figura 55. Par motor - Servomotor 2**



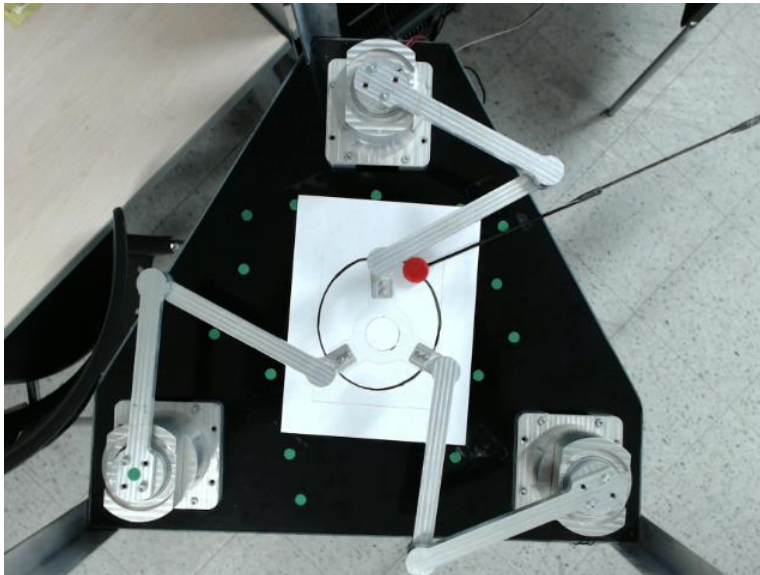
**Figura 56. Par motor - Servomotor 3**



### 6.3. ESTIMACIÓN DE UNA TRAYECTORIA A PARTIR DE FILTRO DE KALMAN

En esta sección se establece la aplicación del filtro de Kalman. En este caso, se analizará como el algoritmo de Kalman estima la posición del objetivo y que ocurre cuando esta se ocluye. Inicialmente, como se observa en la Figura 57, se marcó un patrón circular para generar una trayectoria, se obtendrán los pares motores de los tres servomotores y, con base en el filtro de Kalman, se obtendrán las posiciones angulares de los servomotores.

*Figura 57. Patrón circular como guía para la generación de una trayectoria*



En la Figura 58 se muestra los resultados de la estimación de la posición del objeto mediante el filtro de Kalman al desplazarse por la trayectoria circular deseada. El objetivo es

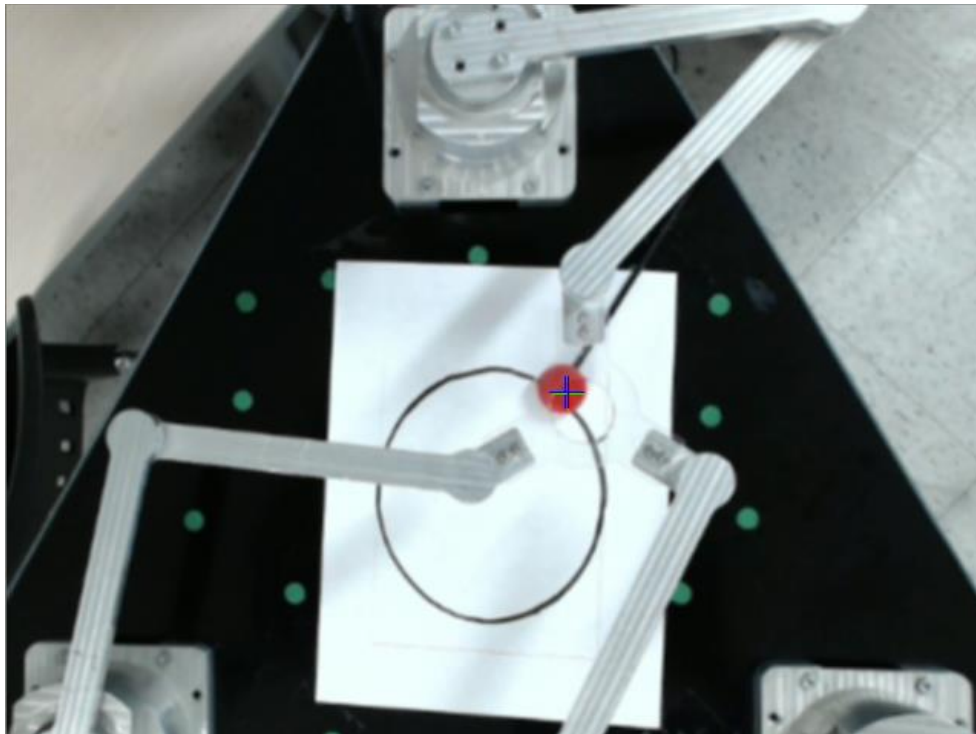


referenciado con la cruz de color verde, la estimación de la orientación del objetivo con la cruz de color azul. Al detectar la ubicación del objetivo, el algoritmo la envía al algoritmo de la cinemática inversa. Al ser determinado, la plataforma se dirige al objetivo cuando se desplaza.

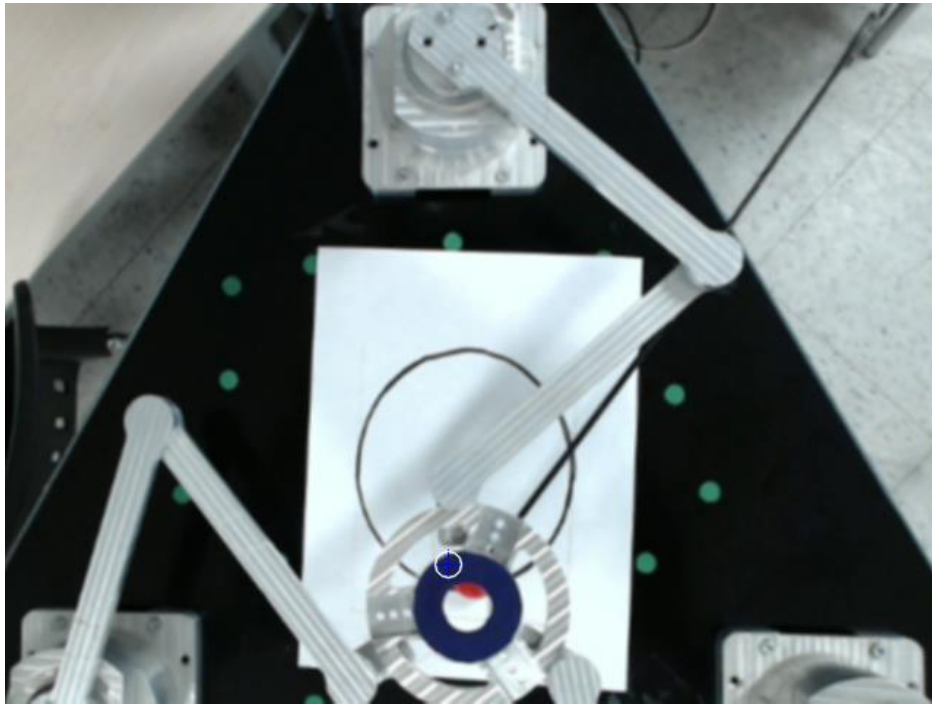
Cuando el objetivo es ocluido, problema que se tuvo a la hora de detectar el objetivo, el filtro de Kalman permite estimar la orientación del objetivo respecto a la ubicación y dirección en la que se esté posicionada. El filtro de Kalman calcula la incertidumbre de ubicación del objetivo, mostrado como el círculo blanco en la Figura 59. Si el objetivo continúa ocluido, este círculo aumenta en el tiempo. Esto se define como la varianza la cual aumenta el valor del ruido para determinar y estimar en la dirección que el objetivo. Uno de los inconvenientes que se tuvieron a la hora de determinar el objetivo, fue la plataforma que se tenía anteriormente, ver

Figura 59, ocluía la mayor parte del objeto, en solución a ello se mejoró la segmentación del objeto y la determinación del área del objetivo. Además, se realizó un cambio de plataforma a un material traslucido para detectar mejor el objetivo.

***Figura 58. Detección y estimación del objetivo.***

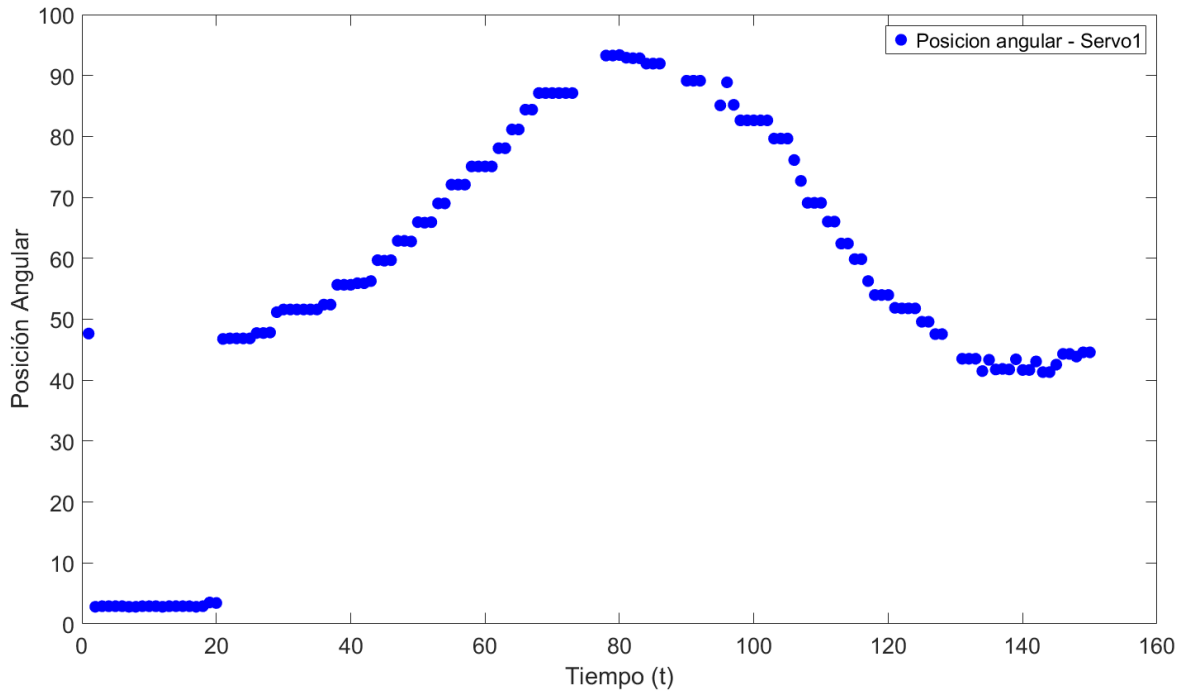


***Figura 59. Oclusión del objetivo***

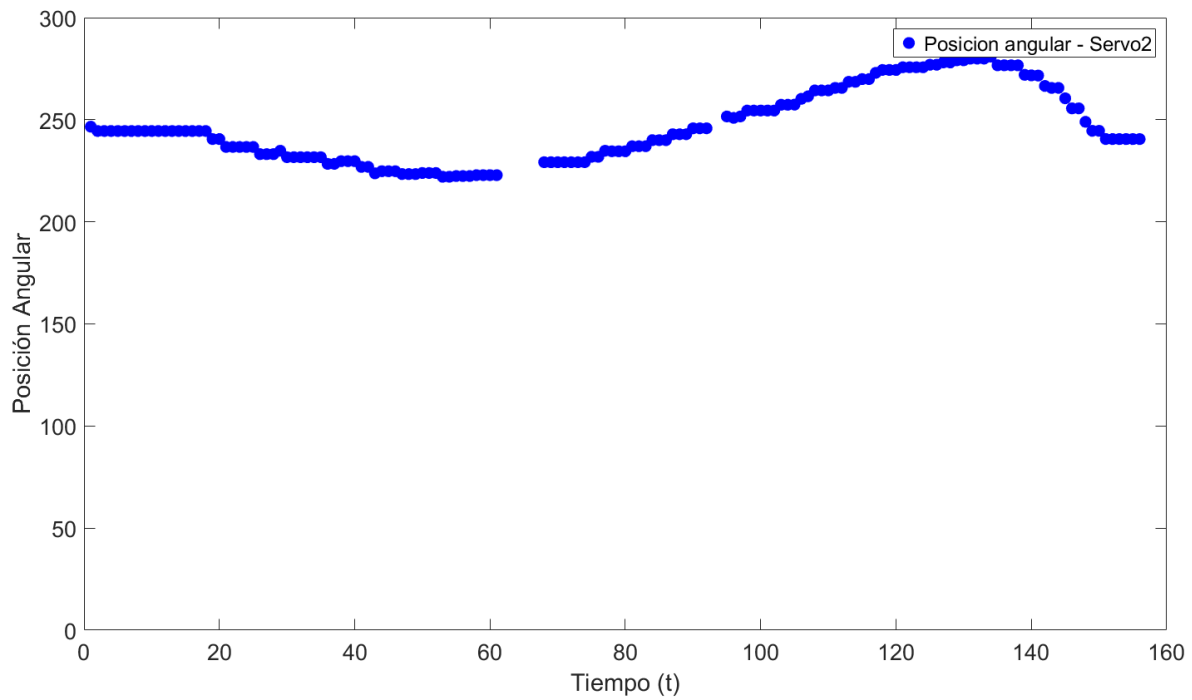


Luego de realizar la estimación y detección del objetivo, se procedió a generar la trayectoria circular y estimar las posiciones angulares observadas, ver Figura 60, Figura 61 y Figura 62. Para este caso, se obtuvieron 156 valores a una tasa de captura de 30 fps (*Frames per seconds*).

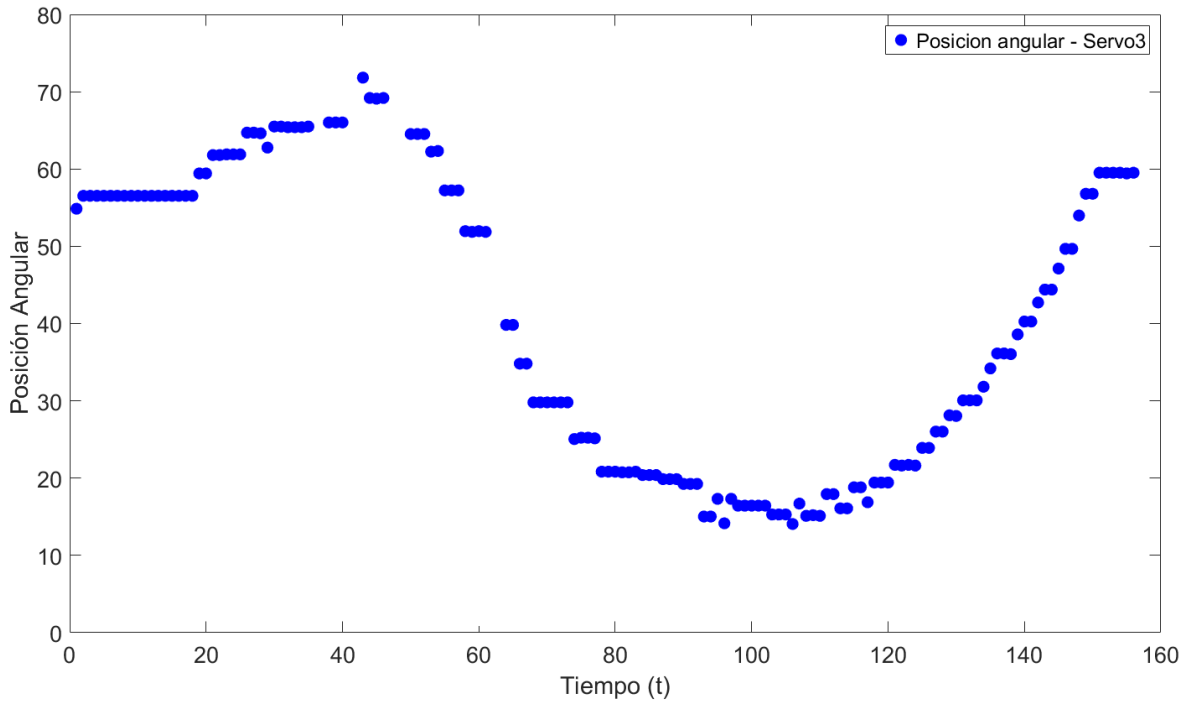
***Figura 60. Estimación de posición angular - Servomotor 1***



**Figura 61. Estimación de posición angular - Servomotor 2**



**Figura 62. Estimación de posición angular - Servomotor 3**

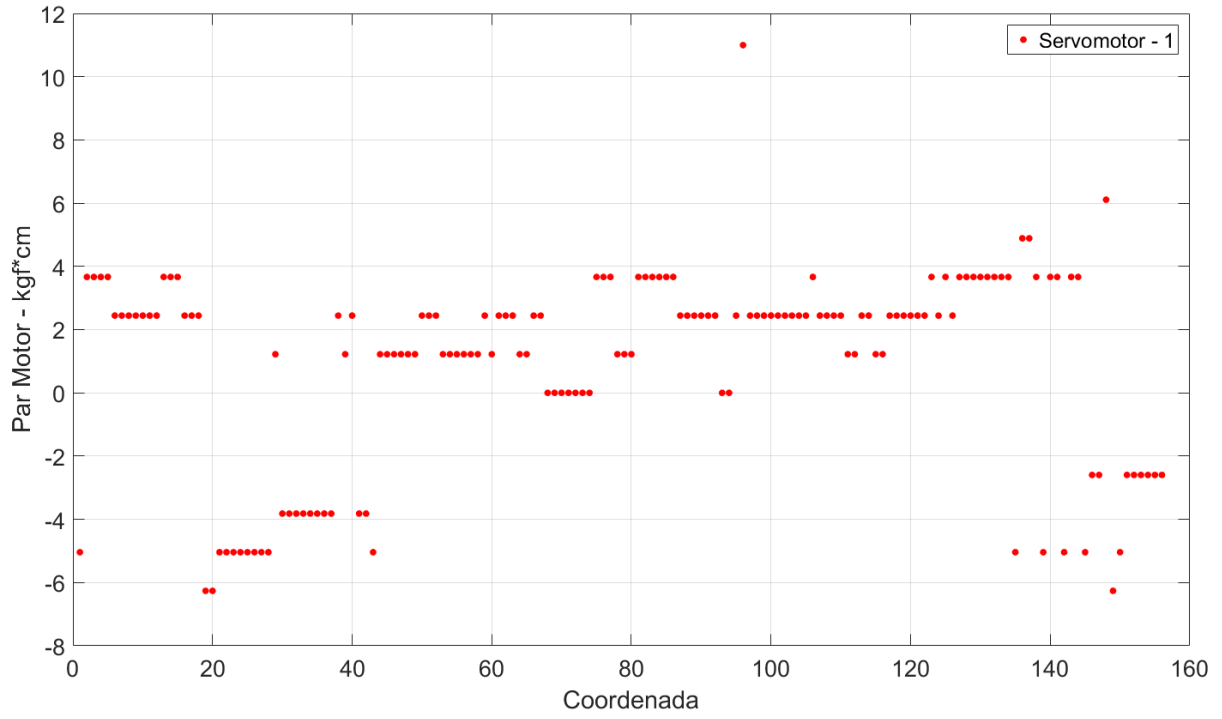


Finalmente, se establecen los pares entregados por los servomotores cuando se establece la detección y estimación de las coordenadas del objetivo como se muestran en la Figura 63,

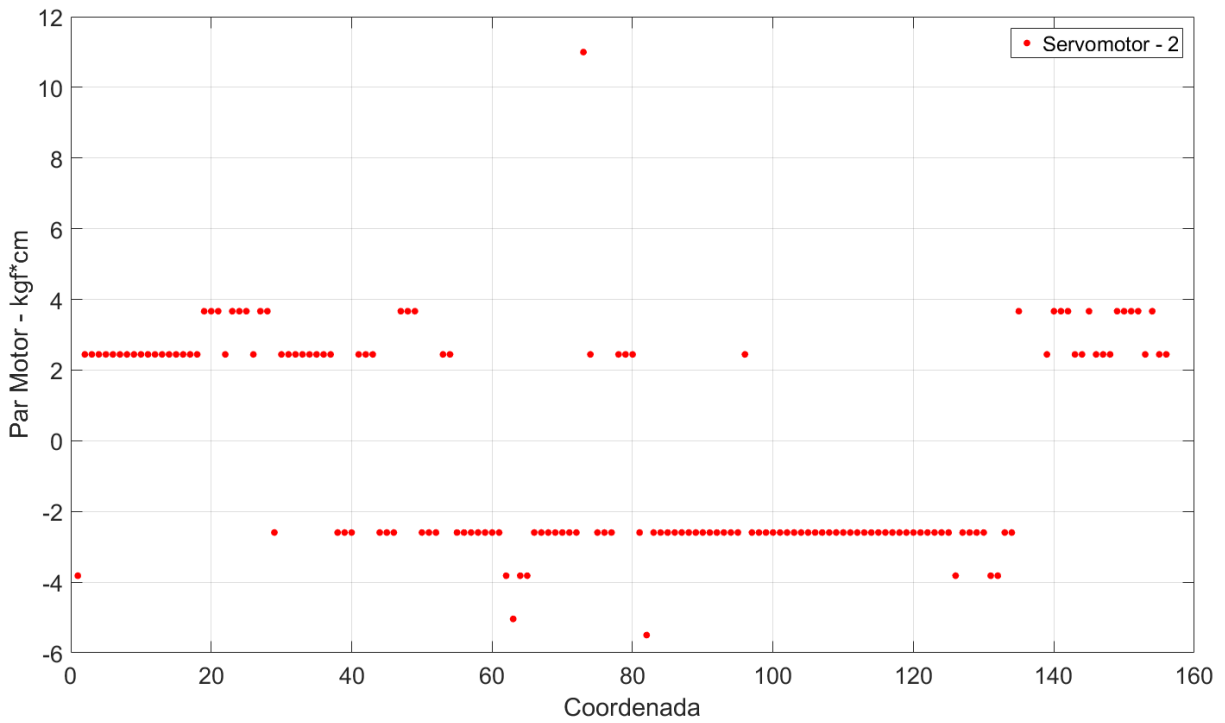
Figura 64 y

Figura 65.

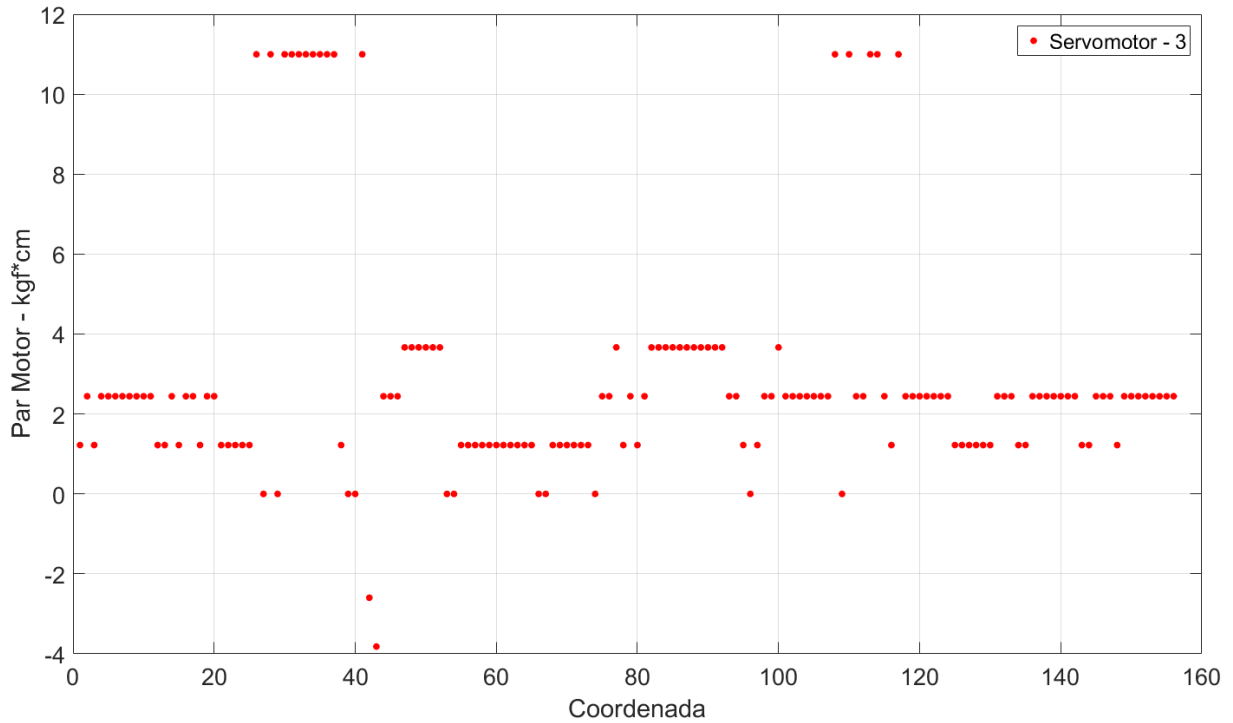
*Figura 63. Estimación del par motor - Servomotor 1*



**Figura 64. Estimación de par motor - Servomotor 2**



**Figura 65. Estimación de par motor - Servomotor 3**



En las Figura 63,

Figura 64 y

Figura 65 se muestra en par motor de cada servomotor; estos valores son leídos directamente del actuador dynamixel. No obstante, se observa que el máximo par es alrededor de 1 Nm. Debido a lo observado el sistema no ejerce mayor esfuerzo en cada punto en el que se esté actuando.

## 7. CONCLUSIONES

Se logro la implementación del sistema de control cinemático asistido por servo control visual en lazo abierto para el manipulador. Los resultados obtenidos en la generación de trayectorias fueron adecuados y ajustados a los valores de referencias establecidos. Se pudo apreciar que en los datos teóricos entregados por la cinemática inversa comparados con los reales entregados por los servomotores, tienden a tener un comportamiento similar.

La aplicación de calibración de cámaras realizada mediante el software de Matlab, facilito el proceso de calibración de la cámara Logitech C-920 utilizada en el proyecto. En este proyecto se aplicó la metodología de Zhang, la cual permitió la eliminación de la distorsión radial y tangencial de la imagen para un mejor procesamiento.

El algoritmo de RANSAC pudo superar el problema generado por la no coincidencia de características que se obtuvieron con el descriptor SURF por cada imagen capturada. RANSAC por otra parte logro estimar las correspondencias putativas con un umbral estimado y un numero de iteraciones logrando una convergencia adecuada.

La configuración de servo control visual Eye-to-hand fue útil dado función es determinar las posiciones del actuador final, el marco de referencia y el objetivo. Esta configuración permite que la cámara sea orientada en un lugar específico del entorno de trabajo del manipulador cuyo campo de visión es mucho más amplio. En comparación a la configuración Eye-in-hand se tiene que la cámara debe ser ubicada en el actuador final, esta metodología no fue necesario aplicarla debido a que el manipulador en primer lugar no es espacial y, por consiguiente, no se podría determinar el marco cuya ubicación está en el mismo plano del marco de referencia.

La obtención de la homografía fue útil debido a que se calcularon la ubicación de los objetivos de color verde en pixeles respecto al marco de referencia del manipulador con base en un CAD y otra en términos de pixeles por medio de una captura, con ambos datos de se estimó la homografía que permite convertir los datos de la ubicación del objetivo en pixeles a referencias reales del mundo real. Generalmente, se obtuvo un factor de error debido a que, a la hora de ubicar la plataforma móvil al objetivo, se observaba un delta de error en las coordenadas  $x$  e  $y$ . Para aminorar el error, es necesario aplicar un sistema de control en lazo cerrado que permita corregir este factor.

El filtro de Kalman es un estimador robusto debido a que se obtuvieron buenos resultados en la ubicación estimada del objetivo, uno de los inconvenientes fue la oclusión debido a que la base del manipulador ocultaba la mayor parte del objetivo. Así, el filtro de Kalman estima la posición con base a la anterior posición que se tenía. Una mejora que se realizó en el manipulador fue el cambio de la base, por una de material traslucido, con esto se evitó la

oclusión y así poder establecer con mayor precisión la ubicación de la plataforma móvil con el objetivo.

### 7.1. RECOMENDACIONES

Una de las recomendaciones importantes es el uso de una cámara adecuada para el proceso de sistema de visión. Debido a que la cámara Logitech C920 tiene un sistema de auto enfoque, este parámetro generaba intervenciones a la hora de captura de la imagen cuyo resultado se tenía una imagen sin enfoque y borrosa. Para dar solución a ello se creó un programa en Matlab que permite desactivar esta función. Por consiguiente, es necesario obtener una cámara con un lente de enfoque mecánico que proporcione estabilidad.

Una recomendación importante a la hora de realizar el análisis de procesamiento digital de imágenes es el control de iluminación. Factor de mayor importancia dado que cuando se realiza el proceso de captura por cada intervalo de tiempo, al analizar cada frame las condiciones cambian por cada captura, implicando aumentar más la robustez del sistema de visión y aumentando el costo computacional. Es necesario establecer una sección donde el sistema de iluminación no sea alterado.

Uno de los inconvenientes que obtuvieron al realizar el proceso de transferencia de información, que en este caso es el envío de las posiciones angulares. El programa que se utilizó en primera instancia fue Matlab, pero se determinó que la tasa de retardo era de 0,5 segundos por cada dato enviado. Esto produce un retardo de 0,5 s en el movimiento del manipulador tenía un delta de retardo de moverse de un punto a otro dado. Una alternativa es realizar todo dicho procedimiento y establecerlo en otro tipo de lenguaje de programación que evite este retardo de transferencia, como pueden ser Python o C++.

No obstante, es necesario desarrollar un sistema de control en lazo cerrado debido a que, hay un factor de error de posicionamiento. Estos pueden ser, un sistema de variables de estado o un control de PID para aminorar el error. Así, poder aplicar la dinámica del modelo y estimar los pares motores para los servomotores y determinar el comportamiento dinámico del manipulador paralelo de cada uno de los eslabones. Dado estos parámetros pueden ser enviados al algoritmo de Kalman para mejorar la estimación y predicción del objeto a seguir.

Otra recomendación es la aplicación de un sistema de visión estereoscópica, donde se utilicen más de dos sensores visuales y poder evitar la oclusión del objetivo alrededor del área de trabajo. Así se establecerá una mejor detección del objetivo y ubicación de la posición.

Establecer un algoritmo de aprendizaje de máquina que permita, que la detección del objeto no sea por extracción de color debido al inconvenientes que el área de trabajo sea intervenida o contaminada. Como propuesta es utilizar un lenguaje de programación donde se puedan almacenar todas estas características. Pueden ser como máquinas de vectores de soporte, redes neuronales o algoritmos genéticos que permitan la estimación.



## 7.2. APORTES

En la estructura del manipulador se realizó la aplicación de actuadores inteligentes Dynamixel MT-64, cuyo desplazamiento angular es de  $0.08^\circ$ . Además, son motores que poseen la capacidad de establecer múltiples funciones desde la limitación de pares, posiciones angulares, velocidad de operación, tasa de transferencia de datos, y sistema de control PID incorporado.

Se desarrollo una estructura alrededor del área de trabajo, en la cual se posicionó la cámara de manera paralela para la detección del objetivo.

Se desarrollo un código en el programa de Matlab a partir de funciones que permiten llamar los parámetros de configuración del manipulador paralelo, cuyo propósito es aminorar tiempo de ejecución.

Se aplico un algoritmo de visión en la cual realiza una detección de color para determinar la ubicación de objetivo, plataforma móvil y referencia global del manipulador.

Se aplico un método de calibración de cámaras para la distorsión proyectiva por el método de Zhang.

Se implemento un algoritmo para determinar las características de la imagen respecto a la de referencia por medio del algoritmo SURF, para la estabilización de imágenes. No obstante, se implementó un método no determinístico RANSAC para la estimación de datos inliers.

Se realizo el estudio cinemático del manipulador paralelo, el cual genero expresiones matemáticas que relacionan las condiciones cinemáticas de la plataforma móvil, relacionando valores como, velocidad, posición y aceleración respecto a los centros de masa; también se determinaron las velocidades y aceleraciones angulares en las cadenas cinemáticas del manipulador, requeridos en el estudio de la dinámica.

Finalmente, uno de los aportes más relevantes en el proyecto fue la aplicación del estimador y predictor denominado filtro de Kalman para la estimación y orientación del objetivo debido a que este predice de manera óptima donde será el siguiente movimiento del objetivo, la precisión de este algoritmo fue relevante debido a que no se aplicó un sistema de control en lazo cerrado.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] O. Picón, Tesis Doctoral - Síntesis, Análisis y Diseño de Manipuladores Paralelos de Baja Movilidad., Bilbao, 2008.
- [2] Z. Zhang, «A flexible new technique for camera calibration.,» *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, nº 11, pp. 1330-1334, 2000.
- [3] K. L. Kappel, «Motion Simulator». USA Patente 3,295,224, 03 Enero 1967.
- [4] B. Siciliano, «The Tricept Robot: Inversa kinematics, Manipulability analysis and Closed-Loop Direct Kinematics algorithm,» *Robotica*, nº 17, pp. 437-445, 1999.
- [5] C. M. Gosellin, E. S. Pierre y M. Gagne, «On the Development of the Agile Eye,» *IEEE Robotics & Automation Magazine*., pp. 29-37, 1996.
- [6] Pkmtricept, «PKMtricept,» [En línea]. Available: <http://www.pkmtricept.com/productos/index.php?id=en&Nproduct=1240238156>. [Último acceso: 01 11 2017].
- [7] F. Firmanni y R. Podhorodeski, «Singularity analysis of planar parallel manipulators based on forward kinematic solution,» *Mech and Mach Theory*, pp. 1386-1399, 2009.
- [8] N. Binaud, S. Caro y P. Wenger, «Sensitivity comparison of planar parallel manipulators,» *Mech and Mach Theory*, pp. 1477-1490, 2010.
- [9] M. Tabbiysm, S. Caro y A. Goldsztejn, «Sensitivity analysis of parallel manipulators using an interval linearization method,» *Mech and Mach Theory*, pp. 93-114, 2014.
- [10] F. DallaLibera y H. Ishiguro, «Non-singular transitions between assembly modes of 2-DOF planar parallel manipulators with a passive leg,» *Mech and Mach Theory*, pp. 182-197, 2014.
- [11] L. Weihmann, D. Martins y L. Coelho Santos, «Modified differential evolution approach for optimization of planar parallel manipulators force capabilities,» *Expert Systems with Applications*, pp. 182-197, 2012.
- [12] Y. Singh, V. Vinoth, Y. Ravi, J. K. Mohanta y S. Mohan, «Inverse dynamics and control of a 3-DOF planar parallel (U-shaped 3-PRP) manipulator,» *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, pp. 164-179, 2015.

- [13] R. Boudreau y S. Nokleby, «Force optimization of kinematically-redundant planar parallel manipulators following a desired trajectory,» *Mech and Mach Theory*, pp. 138-155, 2012.
- [14] I. Mejia, H. Simas y D. Martins, «Force capability in General 3-DoF Planar Mechanisms,» *Mech and Mach Theory*, pp. 120-134, 2015.
- [15] Y. Singh, V. Vinoth, Y. Kiran, J. Kumar y S. Mohan, «CAD-based unified graphical methodology for solving the main problems related to geometric and kinematic analysis of planar parallel robotic manipulators,» *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, pp. 302-321, 2016.
- [16] G. Chen, H. Wang y Z. Lin, «A unified approach to the accuracy analysis of planar parallel manipulators both with input uncertainties and joint clearance,» *Mech and Mach Theory*, pp. 1-17, 2013.
- [17] S. Kuck, «A dexterity comparison for 3-DOF planar parallel manipulators with two kinematic chains using genetic algorithms,» *Mechatronics*, pp. 868-877, 2009.
- [18] J. Wu, J. Wang y Z. You, «A comparison study on the dynamics of planar 3-DOF 4-RRR, 3-RRR and 2-RRR parallel manipulators,» *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, pp. 150-156, 2011.
- [19] V. Rosenzveing, S. Briot, P. Martinet, E. Ozgur y N. Bouton, «A Method for Simplifying the Analysis of Leg-Based Visual Servoing of parallel Robots,» *Robotics & Automation (IEEE)*, pp. 5720-5727, 2014.
- [20] C. Jiang, K. Teo, L. Caccetta y G. Duan, «Adaptative Jacobian Force/Position tracking for space free-flying robots with prescribed transient performance,» *Robotics and Autonomous System (Elsevier)*, pp. 235-247, 2015.
- [21] F. Dietrich, F. Wobbe, D. Buchholz, F. Sowinski, A. Raatz, W. Shumacher y F. Wahl, «Enhancement of force - torque map based assembly applied to parallel robots,» *IEEE*, pp. 507-512, 2010.
- [22] S. Fatemi, V. Madj, M. Reza y M. Ebraimpour, «Parallel Force and Position Control with the aid of Variable Impedance Model In robot Manipulator,» *Conference on Electrical Engineering (IEEE)*, pp. 952-956, 2012.
- [23] D. Sato, R. Kobayashi, A. Kobayashi y M. Ushiyama, «Task Teaching System for a Force-Controlled Parallel Robot Using Multiple Teaching Modes With Human Demonstration Data,» *International Conference on robotics and Automation*, pp. 3960-3965, 2006.

- [24] D. Sato, T. Shitashimizu y M. Uchiyama, «Task Teaching to a Force - Controller High Speed Parallel Robot,» *International Conference on Robotics and Automation (IEEE)*, pp. 4110-4115, 2003.
- [25] K. Haol y Y. Ning, «Kinematics Identification and Control of R-Cube Parallel Robots Only with Revolute Joints,» *Computational Engineering in Systems Applications*, pp. 2115-2121, 2006.
- [26] R. Garrido, A. Soria y M. Trujano, «Visual PID Control of a redundant Parallel Robot,» *International conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control*, pp. 92-96, 2008.
- [27] P. Corke, «Robotics, vision and control,» Brisbane, Springer, 2013, pp. 450 - 480.
- [28] P. Corke, «Visual control of manipulators - A Review,» pp. 1-31, 1996.
- [29] F. Chaumette y S. Hutchinson, «Visual Servo Control Part I: Basic Approaches,» *IEEE Robotics & Automation Magazine*, pp. 82 - 90, 2006.
- [30] P. Corke y S. Hutchinson, «A New Hybrid Image-Based Visual Servo Control Scheme,» *Conference on Decision and Control*, pp. 2521 - 2526 , 2000.
- [31] F. Chaumette y S. Hutchinson, «Visual Servo control Part II: Advanced Approaches,» *IEEE Robotics & Automation Magazine*, pp. 109 - 118, 2007.
- [32] M. Hesar, M. Masouleh, A. Kalhor, M. Menjad y N. Kashi, «Ball Tracking with a 2-DOF Spherical Parallel Robot Based on Visual Servoing Controllers,» *Robotics & Mechatronic (IEEE)*, pp. 292-297, 2014.
- [33] R. Luo, S. Chou, X. Yang y N. Peng, «Hybrid Eye-to-hand and Eye-in-hand visual Servo System for Parallel Robot Conveyor Object tracking and Fetching,» *Industrial Electronics Society (IEEE)*, pp. 2558-2563, 2014.
- [34] M. Trujano, R. Garrido y A. Soria, «Stable Visual Servoing of an Overactuated Planar Parallel Robot,» *Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (IEEE)*, pp. 182-187, 2010.
- [35] S. Briot, P. Martinet y V. Rosenzweig, «The Hidden Robot: An Efficient Concept Contributing to the Analysis of the Controllability of Parallel Robots in Advanced Visual Servoing Techniques,» *Robotics and Automation Society (IEEE)*, pp. 1337-1352, 2015.
- [36] T. Dallej, M. Goutefarde, N. Andreff, M. Michelin y P. Martinet, «Towards vision-based control of cable-driven parallel robots,» *Intelligent robot and System (IEEE)*, pp. 2855-2860, 2011.

- [37] S. Bellakehal, N. Andreff, Y. Mezouar y M. Tadjine, «Vision/force control of parallel robots,» *Mechanism and Machine Theory (Elsevier)*, pp. 1376-1395, 2011.
- [38] A. Traslosheros, J. Sebastian, L. Angel, F. Roberti y R. Careli, «Visual Servoing for the Robotenis System: a Strategy for a 3 DOF Parallel Robot to Hit a Ping-Pong Ball,» *Decision and Control and European Control Conference (IEEE)*, pp. 5695-5701, 2011.
- [39] J. Luo, H. Liu, S. Yu, S. Xie y H. Li, «Development of an Image-based Visual Servoing for Moving Target Tracking Based on Bionic Spherical Parallel Mechanism,» *International Conference on Robotics and Biomimetics*, pp. 1633-1638, 2014.
- [40] J. McInroy y Z. Qi, «Nonlinear Image Based Visual Servoing Using Parallel Robots,» *International Conference on Robotics and Automation (IEEE)*, pp. 1715 - 1720, 2007.
- [41] S. Zhang, Y. Ding y K. Hao, «A Stereo-Vision Based Compensation Method for Pose Error of a 6-DOF Parallel Manipulator with 3-2-1 Orthogonal Chains,» *Audio, Language and Image Processing, 2008. ICALIP 2008. International Conference on*, pp. 1540-1544, 2008.
- [42] M. Nabipour, N. Arteghzadeh, A. Moosavian y A. Nasr, «Visual Servoing in Cable Robot Using Microsoft Kinect v2 Sensor,» *International Conference on Robotics and Mechatronics*, pp. 560-565, 2016.
- [43] R. Ramadour, F. Chaumette y J.-P. Merlet, «Grasping Objects with a cable-driven parallel robot desing for transfer operation by visual servoing,» *International Conference on Robotics & Automation (ICRA)*, pp. 4463-4468, 2014.
- [44] F. Reyes Cortés, *Robótica: Control de manipuladores paralelos*, Colonia del valle: Alfaomega, 2013, pp. 14-22.
- [45] M. Cisneros, E. Jimenez y D. Navarro, *Fundamentos de robotica y mecatronica con MATLAB y Simulink.*, Madrid: Alfaomega, 2014.
- [46] L. Burbano y R. DAZA, «DISEÑO, CONSTRUCCION Y PRUEBAS DE UN MECANISMO PARALELO PLANO DE TRES GRADOS DE LIBERTAD, TIPO RRR.,» de *Trabajo de grado*, Pereira, 2016, pp. 11-37.
- [47] J. Craig, *Robotica*, Atlacomulco: PRENTICE-HALL INC, 2006.
- [48] R. Taylor, P. Summers y J. Meyer, «AML: A Manufacturing Language,» *International Journal of Robotics Research*, vol. 1, nº 3, 1982.
- [49] A. Galvis y C. Marsigla, «Diseño y construccion de un manipulador paralelo plano de 3 grados de libertad tipo RRR, para un proceso de soldaduras con diversas geometrias.,» de *Trabajo de Grado*, Pereira, Universidad Tecnologica De Pereira, 2011.

- [50] J.-Y. Bouguet, «Camera Calibration Toolbox for Matlab,» 2010. [En línea]. Available: [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc).
- [51] R. Tsai, «A versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the Shelf TV Cameras and Lences,» *IEEE JOURNAL OF ROBOTICS AND AUTOMATION*, vol. 3, nº 4, pp. 323-344, 1987.
- [52] T. Gee, P. Delmas, N. Stone-Havas, C. Sinclair, W. Van Der Mark, W. Li, H. Friedrich y G. Gimel'farb, «Tsai Camera Calibration Enchanced,» *International Conference on Machine Vision Applications*, pp. 435-438, 2015.
- [53] C. Shan-shan, Z. Wu-heng y Z. Li-jun, «Camera Calibration via Stereo Vision Using Tsai's Method,» *First International Workshop on Education Technology and Computer Science*, pp. 273-277, 2009.
- [54] Z. Zhang, «Camera Calibration With One-Dimensional Objects,» *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, nº 7, pp. 892-899, 2004.
- [55] J. Gonzales , Estudio experimental de metodos de calibracion y autocalibracion de camaras (Tesis de Grado), Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas de Gran Canaria, 2003, pp. 20-40.
- [56] T. Tuytelaars, O. Chum, M., U. y T. Pajdla, «Robust wide baseline stereo from maximally stable extremal region.,» *BMVC*, pp. 384-393, 2002.
- [57] K. Mikolajczyk y C. Schmid, «An affine invariant interest point detector.,» *ECCV*, pp. 128-142, 2002.
- [58] D. Lowe, «Object Recognition from Local Scale-Invariant Features.,» *The Proceeding of the Seventh IEEE International Conference Computer Vision* , 1999.
- [59] D. Lowe, «Distinctive image features from scale-invariant keypoints, cascada filtering approach,» *IJCV*, pp. 91-100, 2004.
- [60] C. Harris y M. Stephens, «A combined corner and edge detector,» *Plessey Research Roke Manor*, pp. 147-152, 1988.
- [61] E. Cuevas, D. Zaldivar y M. Perez, «Procesamiento Digital de Imagenes Usando Matlab y Simulink,» Mexico, Alfaomega, 2014, pp. 251-260.
- [62] K. Mikolajczyk y C. Schmid, «Indexing based on scale invariant interest point.,» *ICCV*, vol. 1, pp. 525-531, 2001.
- [63] Y. Sakai, T. Oda, M. Ikeda y L. Barolli, «An Object Tracking System Based on SIFT and SURF Features Extraction Methods.,» *International Conference on Network-Based Information System*, pp. 561-565, 2015.

- [64] F. Mindru, T. Tuytelaars, L. Van Gool y T. Moons, «Moments invariants for recognition under changing viewpoint and illumination.,» *CVIU*, pp. 3-27, 2004.
- [65] A. Baumberg, «Reliable feature matching across widely separated views.,» *Computer Vision and Pattern Recognition - CVPR*, pp. 774-781, 2000.
- [66] F. Schaffalitzky y A. Zisserman, «Multi-view matching for unordered image sets or ¿How do I organize my holiday snaps?,» *ECCV*, vol. 1, pp. 414-431, 2002.
- [67] W. Freeman y E. Adelson, «The desing and use of steerable filters.,» *PAMI*, pp. 891-906, 1991.
- [68] G. Carneiro y A. Jepson, «Multi-scale phase-based local features.,» *CVPR*, pp. 736-743, 2003.
- [69] B. Zhang, Y. Jiao, Z. Ma, Y. Li y J. Zhu, «An Efficient Image Matching Method Using Speed Up Robust Features.,» *International Conference on Mechatronics and Automation*, pp. 553-558, 2014.
- [70] Y. Luo y Y. Chen, «Robust Matching Algorithm Based on Surf.,» *International Computer Conference on Wavelet Active Media Technology and Information Processing*, pp. 7-10, 2015.
- [71] A. Witkin, «Scale-Space Filtering.,» *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICCASSP'84*, 1984.
- [72] J. Bhattacharya, S. Majumder y G. Sanyal, «The Gaussian Maxima Filter (GMF): A New Approach for Scale-Space Smoothing of an Image.,» *India Conference (INDICON), IEEE*, 2010.
- [73] M. Fischler y R. Bolles, «Randon Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with applications to Image Analysis and Automated Cartography.,» *SRI International*, vol. 24, nº 6, pp. 381-395, 1981.
- [74] R. E. KALMAN, «A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.,» *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, pp. 35-45, 1960.
- [75] Dinamixel, «Robotis.,» [En línea]. Available : [http://support.robotis.com/en/product/actuator/dynamixel/mx\\_series/mx-64\(2.0\).htm](http://support.robotis.com/en/product/actuator/dynamixel/mx_series/mx-64(2.0).htm). [Último acceso: 15 Enero 2018].