

**КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРНО-КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ
НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГРОССА-ПИТАЕВСКОГО С РАДИАЛЬНОЙ
СИММЕТРИЕЙ**

А.Е. Кулагин

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов

Национальный исследовательский Томский политехнический университет,

Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050

E-mail: ack8@tpu.ru

**SEMICLASSICAL TRAJECTORY-COHERENT STATES OF THE NONLOCAL GROSS-
PITAESVKII EQUATION WITH RADIAL SYMMETRY**

A.E. Kulagin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov

Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050

E-mail: ack8@tpu.ru

Abstract. *In this paper the semiclassical formalism is applied to the nonlocal Gross-Pitaevskii equation with radial symmetry. Some aspects of constructing of semiclassically concentrated solutions in polar coordinates are shown. The semiclassical trajectory-coherent states, concentrated on the ring, are obtained. The example of specific physically motivated equation is considered and some properties of its semiclassical trajectory-coherent states are noted.*

Рассмотрим нелокальное уравнение Гросса-Питаевского вида

$$\left\{ -i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\hat{p}_\varphi, r, t) + \kappa \int_0^\infty \int_0^{2\pi} W(r, \rho, t) |\Psi(\rho, \phi, t)|^2 \rho d\rho d\phi \right\} \Psi(r, \varphi, t) = 0, \quad (1)$$

где $\hat{p}_\varphi = -i\hbar\partial_\varphi$, $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, κ – параметр нелинейности. Применительно к описанию Бозе-

Эйнштейновского конденсата (БЭК) квадрат модуля волновой функции $|\Psi(r, \varphi, t)|^2$ имеет смысл плотности конденсата, оператор $V(\hat{p}_\varphi, r, t)$ описывает потенциальную энергию ловушки, в которой находятся БЭК, в заданной системе координат, а функция $W(r, \rho, t)$ отвечает потенциалу взаимодействия атомов БЭК. Из физической интерпретации функции $W(r, \rho, t)$ вытекает условие $W(r, \rho, t) = F(|r - \rho|, \rho, t)$, поэтому в дальнейшем ограничимся только такими функциями.

После отделения циклической переменной φ система Гамильтона-Эренфеста первого порядка, отвечающая классической траектории уравнения (1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = \frac{1}{m}P_r(t), \\ \dot{P}_r(t) = -V_r(P_\varphi, R(t), t), \quad P_\varphi = \text{const.} \end{cases}$$

Квазиклассически приближенное с точностью $O(\hbar^{3/2})$ решение уравнения (1) имеет вид

$$\Psi(r, \varphi, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} P_\varphi \varphi + \int_0^t \frac{1}{2m} \frac{P_r(\tau)}{R(\tau)} d\tau\right] \cdot \Phi(r, t), \quad \text{где } \Phi(r, t) \text{ принадлежит классу траекторно-}$$

сосредоточенных в точке $(p_r, r) = (P_r(t), R(t))$ фазового пространства функций [1] и является решением следующего линейного уравнения

$$\left\{ -i\hbar \partial_t + \frac{1}{2m} \left[P_r^2(t) + 2P_r(t) \cdot \Delta \hat{p}_r + (\Delta \hat{p}_r)^2 \right] + \frac{P_\varphi^2}{2m} \left[\frac{1}{R^2(t)} - \frac{2}{R^3(t)} \cdot \Delta r + \frac{6}{R^4(t)} \cdot (\Delta r)^2 \right] + \right. \\ \left. + V(P_\varphi, R(t), t) + V_r(P_\varphi, R(t), t) \cdot \Delta r + \frac{1}{2} V_{rr}(P_\varphi, R(t), t) \cdot (\Delta r)^2 + \right. \\ \left. + \tilde{\kappa} \left[W(R(t), R(t), t) + \frac{1}{2} W_{pp}(R(t), R(t), t) \cdot \alpha^{0,2}(t) + \frac{1}{2} W_{rr}(R(t), R(t), t) \cdot (\Delta r)^2 \right] \right\} \Phi(r, t, \varsigma) = 0, \quad (2)$$

$$\Delta r = r - R(t), \quad \Delta \hat{p}_r = -i\hbar \partial_r - P_r(t), \quad \tilde{\kappa} = \kappa \cdot \|\Psi\|^2, \quad \varsigma = \varsigma[\Psi] = (\alpha^{0,2}(0)).$$

Здесь $\|\Psi\|^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi(r, \varphi, t) r dr d\varphi = \text{const}$, а $\alpha^{0,2}(t)$ – дисперсия величины r , которая в квазиклассическом приближении определяется решением системы Гамильтона-Эренфеста второго порядка [2].

Уравнение (2) является линейным уравнением Шредингера, квадратичным по импульсу и координате. Его вакуумное состояние может быть найдено в виде

$$\Phi_0(r, t, \varsigma) = \frac{N_0}{\sqrt{\det C(t)}} \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left[S(t, \varsigma) + P_r(t) \cdot \Delta r + \frac{1}{2} Q(t) \cdot (\Delta r)^2 \right] \right\}, \quad \text{где } \text{Im}(S(t, \varsigma)) = 0, \quad \text{Im}(Q(t)) > 0,$$

а возбужденные состояния определяются формулой $\Phi_n(r, t, \varsigma) = N_n \cdot (W(t))^{n/2} \cdot H_n\left(\Delta r \sqrt{\frac{\text{Im} Q}{\hbar}}\right) \cdot \Phi_0(r, t, \varsigma)$,

где $H_n(x)$ – полиномы Эрмита, а $W(t)$ – импульсная часть решения системы в вариациях. Тогда для

$$\text{счетного набора функций } \Psi_n(r, \varphi, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} P_\varphi \varphi + \int_0^t \frac{1}{2m} \frac{P_r(\tau)}{R(\tau)} d\tau\right] \cdot \Phi_n(r, t, \varsigma_n), \quad \text{где } \varsigma_n = \varsigma[\Psi_n],$$

выполняется соотношение

$$\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \Psi_n(r, \varphi, t) \Psi_k(r, \varphi, t) r dr d\varphi = \begin{cases} \|\Psi_n\|^2, & n = k, \\ O(\sqrt{\hbar}), & n \neq k. \end{cases}$$

Функции $\Psi_n(r, \varphi, t)$ называются квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями уравнения (1).

В качестве примера приведем результаты расчета функции $\Psi_2(r, \varphi, t)$, отвечающей уравнению Гросса-Питаевского вида

$$\left\{ -i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + k_1 r^2 + k_2 r^4 + \omega \hat{p}_\varphi + \kappa \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\gamma \sqrt{\pi} \rho} \exp\left[-\frac{(r-\rho)^2}{\gamma^2}\right] \cdot |\Psi(\rho, \phi, t)|^2 \rho d\rho d\phi \right\} \Psi(r, \varphi, t) = 0,$$

которое является нелокальным обобщением уравнения, которое использовалось в работе [3] для описания БЭК в ловушке во вращающейся с частотой ω системе отсчета.

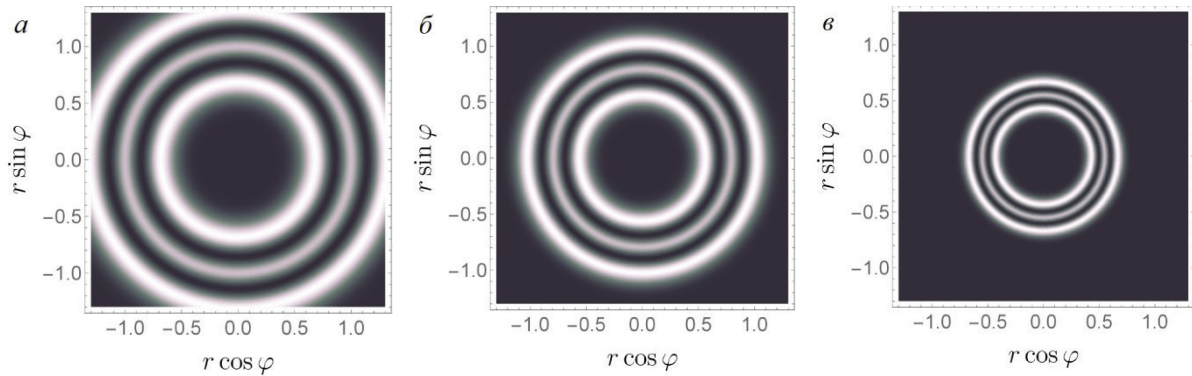


Рис. 1. Зависимость $|\Psi_2(r, \varphi, t)|^2$ от r, φ для $t=0$ (а); $t=0,8$ (б); $t=1,2$ (в)

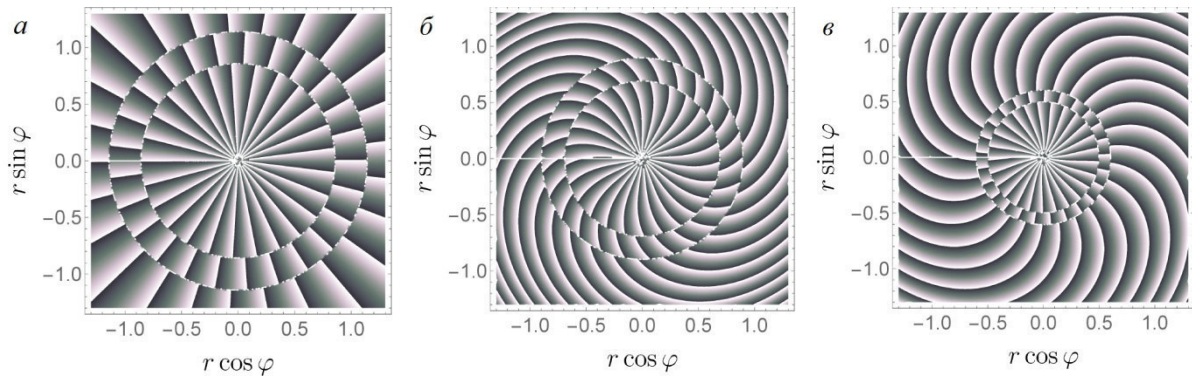


Рис. 2. Зависимость $\arg(\Psi_2(r, \varphi, t))$ от r, φ для $t=0$ (а); $t=0,8$ (б); $t=1,2$ (в)

Для n -ого квазиклассического траекторно-когерентного состояния характерно наличие $(n+1)$ колец в $O(\sqrt{\hbar})$ -окрестности окружности $r=R(t)$, на которых функция $|\Psi_n(r, \varphi, t)|^2$ достигает максимальных значений (см. рис. 1). Также в фазе волновых функций $\arg(\Psi_n(r, \varphi, t))$ присутствуют n колец, на которых происходит скачок фазы на π (см. рис. 2).

Построенный счетный набор асимптотических решений $\Psi_n(r, \varphi, t)$ непрерывно зависит от параметра нелинейности κ . Поэтому при $\kappa=0$ мы получаем набор асимптотических решений линейного уравнения. Однако в рамках рассмотренного формализма нельзя перейти к пределу $\gamma \rightarrow 0$, который соответствует локальному уравнению Гросса-Питаевского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулагин А.Е., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. Квазичастицы, описываемые уравнением Гросса-Питаевского в квазиклассическом приближении. // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58 – № 5. – С. 20–29.
2. Lisok A.L., Trifonov A.Yu., Shapovalov A.V. the evolution operator of the Hartree-type equation with a quadratic potential. // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2004. – Т. 37. – № 16. – С. 4535–4556.
3. Kasamatsu K., Tsubota M., Ueda M. Giant hole and circular superflow in a fast rotating Bose-Einstein condensate. // Physical Review A. – 2002. – Т. 66. – № 5.