РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА РАСЧЕТНЫХ СЕТКАХ С ЗАРАНЕЕ НЕИЗВЕСТНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

К.В. Костюшин, В.А. Котоногов, А. М. Кагенов
Научный руководитель: к.т.н. И.В. Еремин
Национальный исследовательский Томский государственный университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 36, 634050
E-mail: kotonogov@niipmm.tsu.ru

NUMERICAL SOLUTION OF GAS DYNAMICS EQUATIONS ON THE COMPUTATIONAL MESHES WITH ARBITRARY NUMBER OF CELL FACES USING HIGH ORDER SPATIAL ACCURACY SCHEMES

K.V. Kostyushin, V.A. Kotonogov, A.M. Kagenov
Scientific Supervisor: PhD I.V. Eremin
Tomsk State University, Russia, Tomsk, Lenin str., 36, 634050
E-mail: kotonogov@niipmm.tsu.ru

Abstract. *In the present study methodology and algorithm of numerical solution of gas dynamics equations on the computational meshes with arbitrary number of cell faces using high order spatial accuracy schemes is presented. For realization of calculation algorithm, the system of data storage is offered, the system does not depend on mesh topology, and it allows to use the computational meshes with arbitrary number of cell faces.*

Введение. Для проведения расчетов течений невязкого газа в областях сложной формы, характерных для современных газо-динамических устройств, широкое применение находят различные типы расчетных сеток, включая структурированные и блочно-структурированные сетки, тетраэдральные сетки, гибридные сетки, неструктурированные сетки, состоящие из тетраэдров, призм, пирамид и гексаэдров, а также полиэдральные сетки, состоящие из многогранных ячеек с произвольным числом граней. В работе подробно рассматривается система хранения данных, и реализация алгоритма численного решения уравнений газовой динамики на расчетных сетках с произвольным числом граней расчетной ячейки.

Обобщенная разностная схема. В общем случае большинство схем типа Годунова могут быть записаны в следующем виде [1]:

$$G_i \frac{\rho_i^{k+1} - \rho_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} R_j \left(V_j \cdot S_j \right) = 0 \tag{1}$$

$$G_i \frac{(\rho \mathbf{v})_i^{k+1} - (\rho \mathbf{v})_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} \left(R_j \mathbf{V}_j \right)\left(\mathbf{V}_j \cdot \mathbf{S}_j \right) + \sum_{j=1}^{m(i)} P_j \mathbf{S}_j = 0 \tag{2}$$

$$G_i \frac{e_i^{k+1} - e_i^k}{\Delta t} + \sum_{j=1}^{m(i)} \left(E_j + P_j \right)\left(\mathbf{V}_j \cdot \mathbf{S}_j \right) = 0 \tag{3}$$

где ρ – плотность, t – время, p – давление, $\mathbf{v} = [u, v, w]^{\mathrm{T}}$ – скорость движения газа, $e = \rho\varepsilon + \rho\left(u^2 + v^2 + w^2\right)/2$ – полная энергия единицы объема, ε – удельная внутренняя энергия, G_i – объем i ячейки, $\mathbf{S}_j = \mathbf{n}_j S_j$ – ориентированная площадь грани j ячейки, $\mathbf{n}_j$ – вектор внешней нормали j ячейки, $m(i)$ – количество граней i ячейки, k – номер шага по времени, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ – скалярное произведение двух векторов. Большие буквы R, $\mathbf{V}$, P, E обозначают соответственно плотность, скорость, давление и полную энергию на гранях дискретной сеточной ячейки. Эти величины определяются из решения соответствующей задачи Римана [2] в направлении внешней нормали. Также для расчета потоков могут быть использованы другие методы, основанные на приближенных решениях задачи Риммана: Рое, Ошера, HLL, HLLC, HLLE, WAF [3].

Система хранения данных. Самым простым подходом для организации алгоритма решателя является подход, основанный на хранении данных в изолированных массивах и их дальнейшего сопоставления путем использования индексов соответствующих элементов. Очевидно, что такой подход позволяет достаточно быстро разрабатывать решатели для сеток с заранее известной топологией, однако даже при малейшем изменении шаблона расчетной сетки (изменение количества граней в ячейках, использование блочной структуры и т.д.) необходимо вносить существенные изменения как и в структуру хранимых данных, так и в сам алгоритм решения. В связи с этим, для реализации алгоритма универсального решателя, адаптированного к произвольному количеству граней в ячейках, удобно использовать следующую структуру данных:

1. Класс «Ячейка» («Cell»). Экземпляры класса «Ячейка» хранят информацию о геометрии ячейки (центр масс, площадь и т.д.) и параметрах газа в ячейки.
2. Класс «Грань» («Edge»). Экземпляры класса «Грань» хранят информацию о геометрии грани ячейки (площадь либо длинна, вектор нормали) и параметрах газа на границе (большие величины).
3. Модель данных расчетной ячейки представляется в виде коллекций экземпляров класса «Ячейка» и «Грань».

Взаимосвязь «Ячейка» – «Грань» реализуется путем хранения коллекции ссылок на экземпляры класса «Грань» в классе «Ячейка», а связь «Грань» – «Ячейка», путем хранения в классе «Грань» ссылок на экземпляры класса «Ячейка» (Рисунок 3).

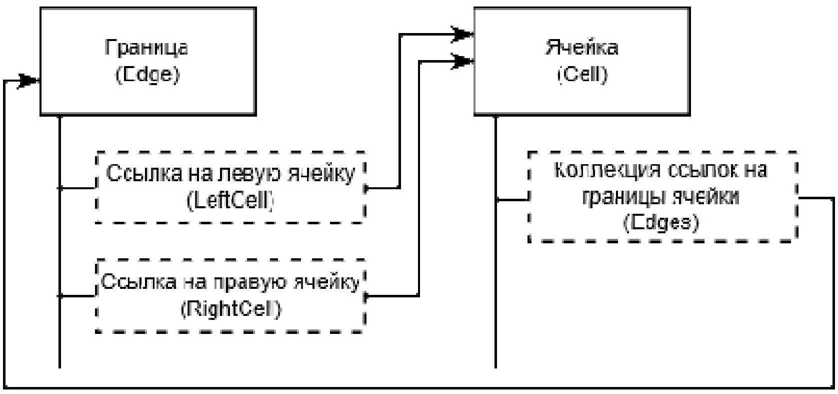

Рисунок 1 – Взаимосвязь между классами «Ячейка» и «Грань»

Такая система хранения данных не имеет зависимости от топологии расчетной сетки, и позволяет проводить расчеты на сетках произвольной конфигурации. При использовании современных объектно-ориентированных языков программирования, решатель схемы (1) – (3) может быть записан в достаточно простом и компактом виде (Листинг 1).

```
foreach (var cell in cells)
{
   double stream_1 = 0;
   Vector<double> stream_2 = new Vector(0,0,0);
   double stream_3 =0;

   foreach (var edge in cell.edges)
   {
      stream_1 += edge.Gas.Ro * (edge.Gas.V * edge.N * edge.S);
      stream_2 += (edge.Gas.Ro * edge.Gas.V) * (edge.Gas.V * edge.N * edge.S) + edge.Gas.P * edge.N * edge.S;
      stream_3 += (edge.Gas.E + edge.Gas.P) * (edge.Gas.V * edge.N * edge.S);
   }

   cell.Gas_Next.Ro = cell.Gas.Ro - dt / cell.G * stream_1;
   cell.Gas_Next.V = cell.Gas.Ro * cell.Gas.V - dt / cell.G * stream_2;
   cell.Gas_Next.E = cell.Gas.E - dt / cell.G * stream_3;
}
```

Листинг 1 – Пример реализации шага по времени. Язык C#

Здесь V, N, stream_2 – экземпляры класса Vector (пользовательский тип данных «Вектор» для которого определены стандартные векторные операции).

Заключение. Алгоритм апробирован на структурированных, блочно-структурированных и неструктурированных расчетных сетках при определении параметров невязкого сжимаемого газа в газодинамическом тракте ракетного двигателя, включающего в себя камеру сгорания, сопло и истекающую струю [4,5], с использованием схем первого и второго порядка точности. Полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики.– М.: Наука, 1976. – 400с.
2. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 607.
3. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Козелков А. С., Карпенко А. Г., Тетерина И. В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. М.: Физматлит, 2014.
4. Костюшин К.В., Кагенов А.М., Богдевич Ю.Р. Разработка программного комплекса для расчета локальных и интегральных характеристик течений продуктов сгорания в газодинамических трактах ракетных двигателей //«Орбита молодежи» и перспективы развития российской космонавтики». Сборник материалов Всероссийской молодежной научно-практической конференции (8-9 сентября 2016г.). Самара: Самарский университет, 2016. С. 190-191.
5. Костюшин К.В., Богдевич Ю.Р., Еремин И.В., Кагенов А.М. Разработка и реализация архитектуры программного комплекса "FlashFlow", предназначенного для численного решения двумерных задач газовой динамики //Материалы XI международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), 25-31 мая 2016 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2016. С. 435-436.