

CLAUDIO DARÍO ROSALES

CONTROLE DE SISTEMAS MULTI-ROBÔS AÉREOS

Control de Sistemas Multi-Robot Aéreos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Doctorado en Ingeniería de Sistemas de Control, do Instituto de Automática da Facultad de Ingeniería da Universidad Nacional de San Juan, Argentina, e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doctor en Ingeniería de Sistemas de Control, pela UNSJ, e de Doutor em Engenharia Elétrica - Automação, pela UFES, em regime de cotitulação.

Orientador na UFES: Prof. Dr. Mário Sarcinelli Filho

Orientador na UNSJ: Prof. Dr. Ricardo Carelli

Coorientador na UNSJ: Prof. Dr. Gustavo Juan Eduardo Scaglia

San Juan - Argentina

10 de dezembro de 2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial Tecnológica,
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)
Sandra Mara Borges Campos – CRB-6 ES-000593/O

R788c Rosales, Claudio Darío, 1984-
Controle de sistemas multi-robôs aéreos / Claudio Darío
Rosales. – 2014.
220 f. : il.

Orientadores: Mário Sarcinelli Filho, Ricardo Carelli.
Coorientador: Gustavo Juan Eduardo Scaglia.
Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Robótica. 2. Aeronave não tripulada. 3. Sistemas de
controle inteligente. 4. Navegação de robôs móveis. 5. Veículo
aéreo não tripulado (VANT). 6. Controle cooperativo. I. Sarcinelli
Filho, Mário. II. Carelli, Ricardo. III. Scaglia, Gustavo Juan
Eduardo. IV. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro
Tecnológico. V. Título.

CDU: 621.3

CLAUDIO DARÍO ROSALES

CONTROLE DE SISTEMAS MULTI-ROBÔS AÉREOS

Control de Sistemas Multi-Robot Aéreos

Tese submetida ao Programa de Posgrado en Ingeniería de Sistemas de Control, do Instituto de Automática da Universidad Nacional de San Juan, Argentina, e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, Brasil, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doctor en Ingeniería de Sistemas de Control, pela UNSJ, e de Doutor em Engenharia Elétrica - Automação, pela UFES, em regime de cotitulação.

Aprovada em 10 de dezembro de 2014.

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof. Dr. Mário Sarcinelli Filho
Universidade Federal do Espírito Santo - Brasil
Orientador

Prof. Dr. Ricardo Carelli
Universidad Nacional de San Juan - Argentina
Orientador

Prof. Dr. Gustavo Juan Eduardo Scaglia
Universidad Nacional de San Juan - Argentina
Coorientador

Prof. Dr. Luis Rafael Canali
Universidad Tecnológica Nacional, Regional Córdoba - Argentina

Prof. Dr. Daniel Patiño
Universidad Nacional de San Juan - Argentina

Dr. Carlos Miguel Soria
Universidad Nacional de San Juan - Argentina

Prof. Dr. Aníbal Leodegario Altamira
Universidad Nacional de San Juan - Argentina

A mis padres Daniel y Angelita por su amor infinito e incondicional.

Agradecimientos

Resulta difícil sintetizar los agradecimientos hacia todas las personas que colaboraron durante esta etapa de mi vida. Primero quiero agradecer a mi familia por ser los responsables directos de mi felicidad, personas de un corazón inmenso que son el mayor regalo que Dios y la vida me dio. Este humilde logro es para y por ustedes.

Quiero agradecer profundamente a mis directores por su paciencia y su inmensa ayuda. Al Dr. Gustavo Scaglia quien me incentivo a seguir en este camino y por brindarme su ayuda desinteresada durante estos años. Al Dr. Ricardo Carelli por permitirme realizar el Doctorado en el Instituto de Automática y por aceptar el desafío de la dirección de mi tesis. Realmente sin su ayuda, no hubiera sido posible la conclusión de mi Doctorado. Para mi director en Brasil el Dr. Mário Sarcinelli-Filho, siempre presente en mis estadías en Brasil para hacerme sentir como en casa y estar disponible para mis consultas.

Agradecer al Dr. Luis Canali y al Dr. Daniel Patiño por haber asumido el importante trabajo de ser los jurados de la presente tesis, cuyas correcciones sirvieron enormemente.

Quiero agradecer a los profesores y compañeros del Instituto de Automática por su compañía y amistad, brindándome consejos y sugerencias que fueron de gran utilidad para mi. Al personal del Laboratório de Automação Inteligente de la Universidade Federal do Espirito Santo por su cálida amistad y ayuda durante mis estadías en Brasil, que me permitieron avanzar en el desarrollo de mi tesis y dejando recuerdos y amistades que durarán por siempre.

El desarrollo de este trabajo dejo tesoros invaluables como la amistad de personas ejemplares, donde cada uno de ellos tiene un lugar especial en mi corazón. Es inmensa la lista de personas especiales que me ayudaron para conseguir mi Doctorado, a cada uno de ustedes muchas gracias por su apoyo y amistad.

Finalmente agradecer a Dios por guiarme siempre en mi vida.

A TODOS VOCÊS, MUITO OBRIGADO!

Claudio Darío Rosales

Resumo

Esta Tese de Doutorado propõe, em sua primeira parte, um controlador baseado em álgebra linear e métodos numéricos para um veículo aéreo não tripulado (VANT) do tipo quadrimotor, com o objetivo de gerar um controlador viável para instalação a bordo do VANT, em que o principal requisito é a baixa carga computacional. Na sequência, este mesmo controlador é utilizado para controlar três VANTs navegando em formação triangular. A tarefa é especificada no chamado espaço de formação, e o controlador utilizado para guiar a formação é baseado em espaço nulo. A ideia é que a tarefa de navegação seja dividida em partes, sendo as partes, num primeiro momento, mover a formação (movendo-se um VANT virtual cujo centro de massa coincide com o centróide da formação) e manter a forma da formação. Cada uma dessas sub-tarefas é associada a um controlador cinemático, e as saídas de tais controladores são combinadas de forma hierárquica, através da projeção da tarefa de menor prioridade no espaço nulo da matriz Jacobiana correspondente à tarefa de maior prioridade. Considerando as duas sub-tarefas como sendo mover a formação e manter sua forma, pode-se gerar uma formação rígida, quando a tarefa de maior prioridade é manter a forma da formação, ou uma formação flexível, se a tarefa de maior prioridade for mover a formação. Prosseguindo, é introduzida uma nova sub-tarefa, que corresponde a evitar obstáculos. Criou-se uma função potencial associada a cada obstáculo, em função de sua posição e sua distância a um dado VANT da formação, incluindo os demais VANTs da formação como obstáculos dinâmicos que também devem ser evitados, de forma que o potencial total associado a cada VANT da formação é a soma dos potenciais gerados por cada obstáculo. Com isso, ainda usando a teoria de espaço nulo, gerou-se um controlador para navegação de uma formação de três VANTs que também é capaz de evitar obstáculos (esta sendo a sub-tarefa de maior prioridade). Ainda nesse caso se pode caracterizar a formação como rígida ou flexível, dependendo de como se distribuem as prioridades das sub-tarefas. Por fim, também se consideraram formações heterogêneas, compostas por VANTs e veículos terrestres, caracterizando-se as restrições impostas nos casos de dois VANTs e um veículo terrestre e um VANT e dois veículos terrestres. Além de todas as análises teóricas correspondentes, inclusive a demonstração de estabilidade, os controladores propostos foram validados através de resultados de simulação e de experimentos com VANTs reais.

Abstract

This Ph.D. Thesis proposes, in its first part, a controller based on linear algebra and numerical methods for a four motors unmanned aerial vehicle (UAV), aiming at generating a controller suitable for implementation onboard the UAV, whose first requisite should be low computational burden. In the sequel, the same controller is used to control three UAVs navigating as a triangular formation. The navigational task is specified in the so called formation space (cluster space), and the controller used to guide the formation is based on the null-space technique. The navigation is split in smaller tasks, which are, in a first moment, to move the formation (moving a virtual UAV whose centroid coincides with the centroid of the formation) and to keep the formation shape. Each one of such subtasks is associated to a kinematic controller, and the outputs of such controllers are combined in an hierarchical way, through the projection of the task of lower priority in the null space of the Jacobian matrix correspondent to the subtask of higher priority. Considering that the two subtasks are to move the formation and to keep its shape, one can thus generate a rigid formation, for which the subtask of higher priority is to keep the shape of the formation, or a flexible formation, if the subtask of higher priority is to move the cluster. Going a step further, a new subtask is introduced, which is to avoid obstacles in the way of the formation. A potential function is then created, for each obstacle surrounding an UAV of the cluster, as a function of its position and the distance from the obstacle to a given UAV in the formation, including the other UAVs in the formation as dynamic obstacles also to be avoided. Thus, the total potential associated to each UAV in the cluster is the sum of the potential function associated to each obstacle close to the UAV. Now considering three subtasks, and still using the null-space theory, a controller is designed to guide the formation of three UAVs in trajectory tracking and positioning tasks avoiding static and dynamic obstacles in its way (this last one being the subtask of higher priority). Even in this case it is possible to characterize the formation as a rigid or flexible one, depending on how the priorities of each subtask are defined. As an additional contribution of this work, heterogeneous formations were also considered, composed by two UAVs and a nonholonomic ground vehicle or a UAV and two nonholonomic ground vehicles, characterizing the constraints to be imposed to the controllers in such cases. Finally, after all the theoretical analyses associated to the controllers here proposed, including each stability proof, the proposed controllers were also validated, through simulation and real experiments reported in the text.

Resumen

Este tesis doctoral propone, en su primera parte, un controlador basado en álgebra lineal y métodos numéricos para un vehículo aéreo no tripulado (UAV) de cuatro motores, con el objetivo de generar un controlador adecuado para la implementación a bordo del UAV, cuyo primer requisito debería ser una baja carga computacional. En la continuación, el mismo controlador se usa para controlar tres UAV que navegan como una formación triangular. La tarea de navegación se especifica en el denominado espacio de formación (espacio de grupo), y el controlador utilizado para guiar la formación se basa en la técnica del espacio nulo. La navegación se divide en tareas más pequeñas, que son, en un primer momento, mover la formación (moviendo un UAV virtual cuyo centroide coincide con el centroide de la formación) y mantener la forma de la formación. Cada una de estas subtareas está asociada a un controlador cinemático, y las salidas de dichos controladores se combinan de forma jerárquica, mediante la proyección de la tarea de menor prioridad en el espacio nulo de la matriz Jacobiana correspondiente a la subtask de mayor prioridad. Teniendo en cuenta que las dos subtareas deben mover la formación y mantener su forma, se puede generar una formación rígida, para la cual la subtask de mayor prioridad es mantener la forma de la formación, o una formación flexible, si la subtask de mayor prioridad es mover el clúster (formación). Yendo un paso más allá, se introduce una subtask nueva, que es para evitar obstáculos en el camino de la formación. Entonces se crea una función potencial para cada obstáculo que rodea a un UAV del clúster, como una función de su posición y la distancia desde el obstáculo a un UAV dado en la formación, incluyendo los otros UAV en la formación como obstáculos dinámicos también para ser evitado. Por lo tanto, el potencial total asociado a cada UAV en el grupo es la suma de la función potencial asociada a cada obstáculo cerca del UAV. Ahora, considerando tres subtareas, y aún utilizando la teoría del espacio nulo, un controlador está diseñado para guiar la formación de tres vehículos aéreos no tripulados en el seguimiento de trayectorias y tareas de posicionamiento evitando obstáculos estáticos y dinámicos en su camino (esta última es la subtask de mayor prioridad). Incluso en este caso, es posible caracterizar la formación como rígida o flexible según cómo se definan las prioridades de cada subtask. Como contribución adicional de este trabajo, también se consideraron formaciones heterogéneas, compuestas por dos UAV y un vehículo terrestre no holonómico o un UAV y dos vehículos terrestres no holonómicos, que caracterizan las restricciones que se impondrán a los controladores en tales casos. Finalmente, después de todos los análisis teóricos asociados a los controladores aquí propuestos, incluyendo cada prueba de estabilidad, los controladores propuestos también fueron validados, a través de simulación y experimentos reales reportados en el texto.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Resumo estendido	27
2	Introducción	55
2.2	Contribuciones de la Tesis	58
2.3	Publicaciones	58
2.4	Organización de la Tesis	60
3	Estado del Arte	63
3.1	Introducción	63
3.2	Distribución del Control	63
3.2.1	Control Centralizado	63
3.2.2	Control Descentralizado	64
3.3	Métodos de Control de Formación	64
3.3.1	Multiples Entradas, Multiples Salidas (Multiple Input - Multiple Output, MIMO)	65
3.3.2	Líder-Seguidor (Leader-Follower)	65
3.3.3	Estructura Virtual	67
3.3.4	Control de Formación basado en Comportamientos (Behaviour-Based Approach)	68
3.3.5	Campos Potenciales	69

3.3.6	Otras Estrategias de Control de Formación	69
3.4	Evasión de Obstáculos en Sistemas Multi-Robots	70
4	Modelo Dinámico de un Vehículo Aéreo	71
4.1	Principio de Funcionamiento	71
4.2	Modelado de Bajo Nivel	73
4.2.1	Modelo del Actuador	74
4.2.2	Modelado	76
4.2.3	Identificación	79
4.3	Modelo de alto Nivel: Modelo Dinámico	79
5	Seguimiento de Trayectoria de un helicóptero de 4 rotores	85
5.1	Introducción	85
5.2	Diseño del Controlador	87
5.2.1	Planteo del Problema	87
5.2.2	Seguimiento de Trayectoria y Posicionamiento	88
5.3	Análisis de Estabilidad: Convergencia a cero de los errores de control	94
5.4	Resultados de la Simulación	102
5.5	Resultados Experimentales	110
5.5.1	Control de Trayectoria	112
5.6	Conclusiones	114
6	Representación de un Sistema Multi-Robot	115
6.1	Introducción	115
6.2	Planteo del Problema	115
6.3	Variables de la Formación	115
6.3.1	Introducción	115
6.3.2	Definición de las Variables de la Formación	116

6.3.3	Selección de las Variables del Cluster	117
6.3.4	Formación de 3 Robots	119
6.3.4.1	Selección de las Variables del Cluster de 3 Robots en el Plano (R^2)	119
6.3.4.2	Variables del Cluster de 3 Robots en el Espacio (R^3)	121
6.4	Restricciones en las variables de Referencia	126
7	Control de Formación Basado en el Espacio Nulo	127
7.1	Introducción	127
7.2	Control Basado en el Espacio Nulo	128
7.3	Análisis de Estabilidad	131
7.4	Control de una Formación de 3 Robots en \mathfrak{R}^3	133
7.4.1	Control de Forma y Orientación	135
7.4.2	Control de Posición del Baricentro	136
7.4.3	Control de Formación	137
7.4.4	Análisis de Estabilidad	138
7.4.5	Resultados de la Simulación	139
7.4.5.1	Formación de 3 Vehículos Aéreos	139
7.4.6	Resultados Experimentales	149
7.4.6.1	Control de Posicionamiento	150
7.4.6.2	Seguimiento de Trayectoria	155
7.5	Control de una Formación de $n > 3$ Robots	159
7.5.1	Introducción	159
7.5.2	Planteo del Problema	160
7.5.2.1	Control del baricentro	161
7.5.2.2	Control variables de forma	166
7.6	Formación vehículos UAV-UGV (Terrestres y Aéreos)	169

7.6.1	Introducción	169
7.6.2	Formación con 1 robot <i>UGV</i>	170
7.6.2.1	Resultados de las Simulaciones	171
7.6.3	Formación con 2 robot <i>UGV</i>	173
7.6.3.1	Resultados de las Simulaciones	174
7.7	Conclusiones del Capitulo	174
8	Evasión de Obstáculos de Sistemas Multi-Robot	177
8.1	Introducción	177
8.2	Planteo del Problema	177
8.3	Generalización para n obstáculos	181
8.4	Evasión de obstáculos de una formación	182
8.4.1	Evasión de Colisión entre Robots de la Formación	187
8.4.2	Formación Rígida y Formación Flexible	192
8.4.3	Formación Rígida	193
8.4.3.1	Primer esquema de Formación Rígida	194
8.4.3.2	Segundo esquema de Formación Rígida	198
8.4.4	Formación Flexible	201
8.4.4.1	Primer esquema de Formación Flexible	202
8.4.4.2	Segundo esquema de Formación Flexible	205
8.4.4.3	Tercer esquema de Formación Flexible	208
8.4.5	Conclusiones del Capitulo	212
	Referencias	213

Lista de Figuras

1	Exemplos de aplicações onde o uso de veículos aéreos representa uma melhoria.	28
2	Notação do controlador separação-orientação.	36
3	Notação do controlador separação-orientação-orientação.	36
4	Esquema do modelo de um quadrimotor.	41
5	Sistemas de referencia inercial e do veículo adotados para um quadrimotor.	44
6	Esboço da tarefa de rastrear a trajetória proposta em tempo discreto, onde o foco pode ser visto em tempo discreto.	45
7	Variáveis de formação. (a) Vista normal da formação. (b) Vista superior da formação.	46
8	Esquema geral com a estrutura de controle por camadas, onde se observa o controle de formação e os controladores individuais para cada veículo aéreo.	48
9	Exemplo de divisão de uma formação de 4 (n) veículos aéreos em 2 triângulos ($n - 2$).	49
10	Exemplo de um ambiente dinâmico de navegação com múltiplos obstáculos. Neste caso, a energia potencial para o robô aéreo é a soma dos potenciais individuais para cada um dos m obstáculos.	51
11	Demanda de robots industriales durante los últimos 10 años.	55
12	Notación controlador Separación-Orientación.	66
13	Notación controlador Separación-Orientación.	66
14	Configuraciones + y \times de un cuadricóptero.	71
15	Esquema del modelo de un cuadricóptero.	72

16	Modelo del quadrotor y los sistemas de referencias considerados, e_i , s_i and b_i representan los sistemas de referencia inercial, espacial y del cuerpo rígido, respectivamente.	80
17	Evolución de la posición del quadrotor.	103
18	Evolución de las variables de posición.	104
19	Evolución de las variables de orientación.	104
20	Evolución de los errores de postura.	104
21	Evolución temporal de las acciones de control.	105
22	Evolución de la posición del helicóptero frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.	106
23	Evolución de las variables de posición frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.	106
24	Evolución de las variables de orientación frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.	107
25	Evolución de los errores de control frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.	108
26	Acciones de control frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.	108
27	Evolución de la posición del helicóptero para una trayectoria cuadrada. . .	108
28	Evolución de las variables de posición para una trayectoria cuadrada. . . .	109
29	Evolución de los errores de orientación para una trayectoria cuadrada.. . .	109
30	Errores de postura para una trayectoria cuadrada..	109
31	Evolución de las acciones de control para una trayectoria cuadrada.. . . .	110
32	Ar.Drone en su versión 2.0 y sus correspondientes sistemas de referencia móvil asociado al helicóptero $\{b\}$, y el sistema de referencia inercial $\{w\}$. .	110
33	Representación 3D de la tarea de seguimiento de una trayectoria circular por parte del Ar.Drone.	112
34	Evolución temporal de las variables de postura del <i>quadrotor</i> y de las referencias utilizadas durante la experimentación.	113

35	Acciones de control enviadas al Ar.Drone.	114
36	Descripción de los sistemas de referencia del cluster y de los robots con respecto al sistema de referencia inercial.	116
37	Variables para una Formación de 3 Robots.	120
38	Variables de la Formación en R^3 . (a) Vista normal de la Formación. (b) Vista superior de la Formación.	122
39	Esquema del Control de una Formación de 3 Robots en \mathfrak{R}^3 . En el esquema se identifica el bloque de control de Formación y el Control Dinámico para cada uno de los robots.	134
40	Función Tangente Hiperbólica.	136
41	Evolución de la formación en el espacio $3D$ en la tarea de control de posicionamiento. El objetivo primario es el control de forma y pose, y el objetivo secundario es el control de posición del baricentro (Caso 1).	141
42	Evolución temporal de los robots en la tarea de posicionamiento, para el Caso 1	142
43	Evolución de la formación en el espacio $3D$ en la tarea de control de posicionamiento. El objetivo primario es el control posición del baricentro, y objetivo secundario es el control de forma y pose (Caso 2).	143
44	Evolución temporal de los robots en la tarea de posicionamiento, para el Caso 2.	144
45	Evolución de la formación en el espacio con objetivo primario control de forma y pose, y objetivo secundario posición del baricentro.	146
46	Errores de Control para el Caso 2.	146
47	Evolución temporal de los robots para el Caso 2.	147
48	Evolución de la formación en el espacio con objetivo primario control posición del baricentro, y objetivo secundario control de forma y pose.	147
49	Evolución temporal de los robots para el Caso 1.	148
50	Errores de Control.	149
51	Esquema general de la estructura de control utilizada para realizar la experimentación con 3 vehículos Ar.Drone 2.0 de la empresa Parrot ©.	150

52	Capturas de la experimentación realizada. En la imagen superior se presenta la posición de los 3 Ar.Drone al comienzo de la tarea, y en la imagen inferior una captura en $t = 30$ segundos. Es posible notar cómo la formación se adelanta hacia el valor de referencia para el baricentro, y cómo la altura del R_1 es mayor que el resto, consecuencia de la referencia $\theta_F = -\pi/18$. . .	151
53	Variables de formación, para la tarea de posicionamiento de la formación. .	153
54	Evolución temporal de los robots, para el experimento de posicionamiento.	154
55	Capturas de la experimentación realizada. En la imagen superior se presenta la posición de los 3 Ar.Drone al comienzo de la tarea ($t = 0$ segundos). La segunda imagen muestra una captura para $t = 14$ segundos, y finalmente se muestra una captura del experimento para $t = 28$ segundos.	156
56	Variables de formación, para la tarea de seguimiento de trayectoria.	157
57	Evolución temporal de los robots, para el experimento de seguimiento de trayectoria.	158
58	Triangulación de un polígono de n lados en $n - 2$ triángulos.	159
59	Descomposición de una formación de 4 robots en dos formaciones de 3. . .	160
60	Errores de control para la Formación del Triángulo 1.	165
61	Errores de control del baricentro, para la Formación del Triángulo 2 y el Triángulo 3.	165
62	Evolución temporal de la formación de 5 robots en el espacio.	166
63	Evolución temporal de la formación de 5 robots en el espacio.	168
64	Errores de control para la Formación.	169
65	Variables para una Formación de 2 vehículos aéreos y 1 terrestre.	170
66	Variables para una Formación de 2 vehículos aéreos y 1 terrestre.	170
67	Evolución temporal de la formación de 3 robots, compuesta por un robots tipo <i>UGV</i> y dos tipo <i>UAV</i>	172
68	Errores de control para una formación de 3 robots, compuesta por un robots tipo <i>UGV</i> y dos tipo <i>UAV</i>	173

69	Evolución temporal de la formación de 3 robots, compuesta por dos robots tipo <i>UGV</i> y uno tipo <i>UAV</i>	175
70	Errores de control para una formación de 3 robots, compuesta por dos robots tipo <i>UGV</i> y uno tipo <i>UAV</i>	176
71	Función campo potencial utilizada.	179
72	Energía potencial para un robot frente a la presencia de múltiples obstáculos.	181
73	Tarea de posicionamiento con evasión de colisión.	185
74	Evolución en el tiempo de la función potencial ficticia definida para cada uno de los robots, y la suma de todas.	186
75	Tarea de posicionamiento con evasión de colisión.	187
76	Evolución en el tiempo de la función potencial ficticia definida para cada uno de los robots, y la suma de todos.	188
77	Tarea de posicionamiento con evasión de colisión.	189
78	Evolución en el tiempo de la función potencial ficticia definida para cada uno de los robots, y la suma de todas.	190
79	Evolución 3D de la formación, bajo referencias de posible colisión entre robots de la formación.	190
80	Evolución temporal de los robots para referencias de posible colisión entre agentes de la formación.	191
81	Evolución de la energía potencial ficticia de la formación.	192
82	Estructura del controlador de formación rígida y evasión de obstáculos.	194
83	Evolución en el espacio 3D de las posiciones de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo manteniendo la formación rígida del primer esquema.	196
84	Evolución temporal de los errores de control para una formación rígida con evasión de colisión, utilizando el primer esquema.	197
85	Evolución de la energía potencial ficticia de la formación rígida, utilizando el primer esquema.	198
86	Estructura del controlador de formación rígida y evasión de obstáculos.	198

87	Evolución en el espacio $3D$ de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto en el segundo esquema para evasión de obstáculo manteniendo la formación rígida.	199
88	Evolución temporal de los robots para una formación rígida con evasión de colisión, utilizando el segundo esquema.	200
89	Evolución de la energía potencial ficticia de la formación rígida, utilizando el primer esquema.	201
90	Estructura del controlador de formación flexible y evasión de obstáculos, utilizando el primer esquema.	202
91	Evolución en el espacio $3D$ de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo para el primer caso de Formación Flexible.	203
92	Evolución temporal de los errores de control para una formación flexible con evasión de colisión, utilizando el primer esquema.	204
93	Evolución de la energía potencial ficticia de la formación para el primer esquema de formación flexible.	205
94	Estructura del controlador de formación flexible y evasión de obstáculos, utilizando el segundo esquema.	205
95	Evolución en el espacio $3D$ de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo para el segundo caso de Formación Flexible.	206
96	Evolución temporal de los errores de control para una formación flexible con evasión de colisión, utilizando el segundo esquema.	207
97	Evolución de la energía potencial ficticia de la formación para el primer esquema de formación flexible.	208
98	Estructura del controlador de evasión de obstáculos como objetivo principal, y de formación flexible.	209
99	Evolución en el espacio $3D$ de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo como objetivo primario.	210

100	Evolución temporal de los errores de control para una formación flexible con evasión de colisión, utilizando el tercer esquema.	211
101	Evolución de la energía potencial ficticia de la formación para el tercer esquema de formación flexible propuesto.	212

Lista de Tabelas

1	Ganancias del controlador utilizadas en la simulación 1.	103
2	Parámetros del modelo dinámico.	105
3	Parámetros del modelo dinámico utilizado en la simulación.	111
4	Referencias utilizadas en el control de trayectoria.	112
5	Referencias para las Variables de Formación para la tarea de control de posicionamiento.	141
6	Referencias de las Variables de Formación.	145
7	Referencias de las Variables de Formación, durante la experimentación de posicionamiento.	151
8	Referencias de las Variables de Formación, durante la experimentación de seguimiento de trayectoria.	155
9	Referencias de las Variables de Formación.	164
10	Referencias de las Variables de Formación para la segunda propuesta de $n > 3$ robots.	168
11	Referencias de las Variables de Formación.	172
12	Referencias de las Variables de Formación.	174
13	Referencias de las Variables de Formación, que provocan una posible colisión entre los robots de la formación.	189
14	Referencias de las variables utilizadas para la formación de evasión de obstáculo.	195

1 *Resumo estendido*

1.1 **Resumo estendido**

A robótica representa um campo de aplicação muito importante para os sistemas de controle, já que gerou um grande crescimento nas indústrias de manufatura, assim como, mais recentemente, na agroindústria e no setor de serviços. Ela propõe o desenvolvimento de autômatos com um nível elevado de destreza e autonomia de movimentação e manipulação, o que torna possível criar sistemas de produção com alto grau de automação, realizar tarefas e serviços em lugares de difícil acesso, assim como em ambientes contaminados e/ou perigosos.

Segundo a *International Federation of Robotics* (www.ifr.org), nos últimos anos o aumento da utilização de robôs na indústria foi histórico. Apenas durante a crise de 2009 houve uma diminuição na demanda, mas ela foi superada nos anos seguintes. Isto é um indicativo de que a robótica é uma ferramenta com muitas aplicações (industriais, civis, militares, etc.), deixando de ser exclusiva de alguns setores industriais e tendo um maior impacto na vida cotidiana das pessoas.

Em muitas dessas tarefas em que se utilizam robôs, a utilização de vários robôs em vez de só um é mais adequada, porque leva a redução de custos, permite uma maior robustez frente a falhas dos robôs e uma maior eficiência [1]. De fato, um robô único com capacidade para realizar uma tarefa específica normalmente é mais caro e difícil de controlar, em comparação com a realização da mesma tarefa por um conjunto de robôs mais simples e de menor capacidade de cálculo [2].

A utilização de mais de um robô trabalhando de forma coordenada possibilita realizar tarefas que individualmente tais robôs não poderiam realizar. Portanto, a robótica cooperativa procura projetar de sistemas compostos por muitos robôs que podem resolver problemas atuando em conjunto.

Geralmente, os robôs que são parte de um sistema multirrobo (SMR) são simples

em termos de projeto e de controle, e portanto mais baratos que os sistemas de um só robot especializado. Portanto, muitas vezes é vantajoso utilizar mais de um autômato em determinadas situações de trabalho.

Os sistemas multi-robôs são projetados para resolver problemas nos quais a utilização de um só robot não é suficiente ou é demasiado onerosa. Alguns exemplos são o transporte de objetos volumosos [3], o manuseio de materiais perigosos, e a exploração e cobertura de grandes áreas [4], por exemplo em casos de catástrofes. Na literatura existem muitos casos específicos onde a utilização de sistemas multi-robôs é mais benéfica. Um deles é o caso de grupos de satélites de uma menor capacidade que trabalham cooperativamente. O resultado corresponde a um menor consumo de combustível para a propulsão, além de permitir uma maior capacidade de medição do sistema [5]. Outro exemplo são os sistemas automáticos de rodovias (AHS, do inglês *Automated Highway Systems*), onde é possível aumentar o rendimento se os veículos podem formar-se como um conjunto de automóveis que se movimenta em uma velocidade desejada e preservando uma distância de segurança entre eles [6].

Se se adicionar um veículo aéreo não tripulado (VANT) ao SMR, é possível ter uma perspectiva global do ambiente de trabalho, o que de outra forma seria impossível. Na figura 1 pode-se ver algumas aplicações onde a utilização de VANTs é uma realidade nos dias de hoje. Em [7] é apresentado um esquema que permite a coordenação de múltiplas VANTs para poder utilizar em aplicações civis, tais como vigilância e confirmação e extinção de incêndios, por exemplo. Estes são exemplos de como arquiteturas de controle podem ajudar a melhorar a qualidade de vida das pessoas.



(a) O uso de VANTs na agricultura gera maior produtividade e melhor utilização dos recursos. (b) Os manipuladores permitem o transporte de cargas em situações que seriam difíceis ou impossíveis de executar de outra forma.

Figura 1: Exemplos de aplicações onde o uso de veículos aéreos representa uma melhoria.

Atualmente a utilização de veículos aéreos aumentou consideravelmente, sendo a principal causa para isso a aparição de modelos comerciais de baixo custo e bom desempenho. Note-se que sua principal vantagem é sua movimentação tridimensional, o que permite fazer muitas tarefas impossíveis de serem realizadas por um veículo terrestre.

Até pouco tempo atrás desenvolver um veículo aéreo em escala miniatura e poder controlá-lo autonomamente era o sonho de muitos pesquisadores, os quais estavam limitados pelas restrições do hardware existente. De fato, o que possibilitou a construção de robôs aéreos autônomos foram os recentes avanços tecnológicos em termos de atuadores e sensores de escala reduzida (MEMS - *Micro Electromechanical Systems*), assim como em termos de armazenamento de energia e de processamento de dados.

Além disso, o desenvolvimento de sistemas de controle para estes veículos não é trivial, principalmente pela dinâmica complexa dos sistemas aerodinâmicos, os quais são multivariáveis, sub-atuados (sistemas onde o número de saídas é maior que o número de entradas) e apresentam características não lineares. Isto implica que as leis de controle clássicas para sistemas lineares e mono-variáveis têm uso muito limitado. Por outro lado, as técnicas desenvolvidas para robôs completamente atuados não podem ser aplicadas diretamente ao caso de sistemas mecânicos não lineares e sub-atuados [8].

Dentro da família de veículos aéreos, essa tese tem como foco os veículos aéreos de asas rotativas do tipo VTOL (em inglês *Vertical Take-Off and Landing*), que são aqueles com capacidade de decolagem e de aterrissagem verticais. Além disso, possuem a capacidade de poder realizar manobras em qualquer direção, possibilidade de voo estático e um grande desempenho em voos de baixa velocidade. Isto é uma grande vantagem em muitas tarefas, como aquelas em que é necessário fazer supervisão do ar para o chão. Esta vantagem também faz com que tais veículos sejam muito úteis em ambientes acadêmicos, onde os espaços para realizar validação experimental geralmente são de dimensões reduzidas.

Um tipo de aeronave que atualmente é muito utilizada pelos pesquisadores é o helicóptero de quatro propulsores, denominado *quadrimotor*. Segundo [9], esses helicópteros conseguem um voo estacionário estável e preciso, através do equilíbrio das forças da propulsão exercidas pelas quatro hélices acionadas pelos respectivos motores elétricos. Sua principal vantagem é que as manobras da aeronave são conseguidas através da modificação coordenada das velocidades dos quatro propulsores, mantendo fixo o passo das hélices. Portanto, não tem *bailarina* (do inglês *swashplate*, como o helicóptero convencional, o que reduz consideravelmente sua complexidade mecânica).

A maior parte das soluções propostas para o controle e navegação dos VANTs de asas

rotativas possui uma grande complexidade para calcular-se e implementar-se. Embora atualmente os avanços na tecnologia permitam uma maior capacidade de cômputo, as tarefas atuais requerem uma grande capacidade de cálculo. Portanto, é preciso conseguir estratégias que necessitam um mínimo volume de cálculos para o cumprimento da tarefa, e que seja de fácil adaptação para diferentes tipos de aeronaves.

1.2 Objetivos

O objetivo geral da pesquisa é o estudo, análise e projeto de esquemas de controle para sistemas multi-robôs aéreos e terrestres, de tal forma que um sistema de dois ou mais robôs autônomos aéreos e terrestres opere de forma cooperativa e coordenada, considerando os distúrbios do meio ambiente e os obstáculos à navegação, lidando com o modelo dinâmico dos robôs usando técnicas baseadas em métodos numéricos e álgebra linear.

Os objetivos específicos que derivam de tal objetivo geral são:

- (a) Estudar os modelos cinemáticos e dinâmicos dos VANTs VTOL que existem na literatura (especificamente mini-helicópteros e quadrimotores) para determinar as habilidades para seu uso no projeto de algoritmos de controle e projeto de plataformas de simulação.
- (b) Propor algoritmos de controle para veículos VTOL multirrotor que permitam a navegação de forma coordenada, tanto para controle de rastreamento de trajetória quanto para controle de posição.
- (c) Desenvolver estratégias de controle originais que permitam a um sistema multi-robôs 3D (grupamento de veículos aéreos e terrestres) desenvolver tarefas de navegação complexas, ou melhorar o desempenho de controladores conhecidos.
- (d) Projetar as estratégias de controle necessárias para resolver o problema da navegação de sistemas multi-robôs com baixa carga computacional, usando Álgebra Linear e Métodos Numéricos, de forma a poder modificar as características do sistema (formação flexível, formação fixa, etc.) sem modificar a lei de controle.
- (e) Projetar algoritmos de controle para sistemas multi-robôs para evitar obstáculos em ambientes reais (não-estruturados, com obstáculos estáticos e dinâmicos) para ambas as estruturas de formação, rígidas e flexíveis.
- (f) Garantir de forma analítica a estabilidade dos sistemas de controle projetados.

- (g) Realizar avaliações experimentais do desempenho dos algoritmos de controle propostos, utilizando os veículos aéreos autônomos e os veículos terrestres autônomos disponíveis no Instituto de Automática, CONICET-UNSJ, Argentina e no Laboratório de Automação Inteligente, UFES, Brasil.

1.3 Contribuições da tese

- Uma técnica original foi proposta para o controle de um veículo aéreo do tipo helicóptero de quatro rotores, com base em métodos numéricos e álgebra linear, com baixa carga computacional e bom desempenho contra perturbações e erros paramétricos no modelo.
- Tais estratégias de controle foram desenvolvidas para o controle de sistemas multi-robôs baseados em espaço nulo, permitindo cumprir a tarefa de mover de forma coordenada um conjunto de 3 robôs, o que constitui o principal conjunto desta pesquisa.
- A proposta de controle de uma formação de 3 veículos aéreos foi extrapolada para um conjunto composto por $n > 3$ robôs. Assim, uma ação de controle é calculada para cada agente que se acrescenta à formação, sem qualquer redundância.
- A possível presença de veículos terrestres foi incluída no esquema. Desta forma, um grupo heterogêneo, composto por veículos aéreos e terrestres, é controlado.
- Foi apresentada uma estratégia original de prevenção de obstáculos para a formação de robôs com base em campos potenciais, o que melhora o desempenho e não possui os problemas típicos desta abordagem (mínimos locais). Esta proposta permite a obtenção de comportamentos de formação rígida ou flexível, modificando a ordem dos objetivos de controle na estrutura baseada em espaço nulo, sem necessidade de modificar a estrutura do controlador.

Durante o desenvolvimento desta tese produziram-se as seguintes publicações:

Revistas internacionais indexadas

- Claudio D. Rosales, Daniel Gandolfo, Gustavo Scaglia, Mario Jordan, Ricardo Carelli, “*Trajectory tracking of a mini four-rotor helicopter in dynamic environments*”

- *a linear algebra approach*”, ROBOTICA, CAMBRIDGE UNIV PRESS, 2014, DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0263574714000952>.

- Daniel Gandolfo, Claudio D. Rosales, Daniel Patiño, Gustavo Scaglia, Mario Jordan “*Trajectory tracking control of PVTOL aircraft based on linear algebra theory*” Asian Journal of Control, John Wiley & Sons, Ltd., 2014, DOI: 10.1002/asjc.819.
- Claudio D. Rosales, Paulo Leica, Gustavo Scaglia, Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, *3D formation control of autonomous vehicles based on null-space. Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 84(1-4), 453-467.

Congressos internacionais

- Claudio D. Rosales, Mario Sarcinelli-Filho, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli, “*Formation control of unmanned aerial vehicles based on the null-space*”, IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014, Orlando, Florida - EEUU.
- Alexandre S. Brandão, Mário Sarcinelli-Filho, Claudio D. Rosales, Ricardo Carelli, “*3-D positioning tasks for RUAS using switched PVTOL controllers*”, IEEE International Conference on Mechatronics (ICM), 2013, Vicenza, Italia.

Congressos nacionais

- Claudio D. Rosales, Gustavo Scaglia, Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, *Control de una formación aérea basado en múltiples objetivos de control y espacio nulo*, XXIV Congreso Argentino de Control Automático, 2014, C.A.B.A, Buenos Aires, Argentina.
- Claudio D. Rosales, Paulo Leica, Mário Sarcinelli-Filho, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli, *Formación de vehículos aéreos: Resultados experimentales*, VIII Jornadas Argentinas de Robótica, 2014, C.A.B.A, Buenos Aires, Argentina.
- Paulo Leica, Claudio D. Rosales, Juan M. Toibero, Flavio Roberti, Ricardo Carelli “*Estrategia basada en múltiples objetivos y espacios nulos para el control de robots móviles*”, XV Reunión de Procesamiento de la Información y Control, 2013, San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.

- Claudio Rosales, Gustavo Scaglia, Alexandre S. Brandão, Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, “*Trajectory tracking for a four rotor mini-quadrotor*”, XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 2013, Fortaleza, Ceará - Brasil.
- Claudio Rosales, Gustavo Scaglia, Alexandre S. Brandão, Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli,, “*Control de trayectoria de un helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos*”, VII Jornadas Argentinas de Robótica, 2012, C.A.B.A., Buenos Aires, Argentina.
- Claudio D. Rosales, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli, Mario Jordan, “*Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos*”, XIV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, RPIC, 2011, Entre Ríos - Argentina.

1.4 Estado da Arte

1.4.1 Introdução

Um sistema multi-robôs é definido como um conjunto de robôs autônomos coordenados por um sistema de comunicação para conseguir realizar tarefas cooperativas [10]. O estudo dos sistemas MRS estende os clássicos problemas de um só robô, trazendo novos desafios, como movimentação coordenada, divisão e alocação das tarefas, redes de comunicação, etc. Assim é que são envolvidos diversos campos da ciência, como sistemas distribuídos, inteligência artificial, teoria de jogos, etc. Áreas de pesquisa como a comunicação entre robôs [11] ou fusão de dados sensoriais [12], e muitas outras, estão crescendo. Nesse contexto, o objetivo da tese é o controle de sistemas multi-robôs aéreos, abordando os algoritmos utilizados para especificar a posição absoluta e relativa dos robôs que trabalham cooperativamente e as técnicas utilizadas para controlar as posições durante a execução da tarefa.

Em [13] o autor realiza uma classificação dos sistemas multi-robôs de acordo com duas características principais: a distribuição do controle e o método de controle.

1.4.2 Distribuição de Controle

Pode-se classificar em controle centralizado e descentralizado, em função da forma que os cálculos das ações de controle são realizados e da forma em que é feita a comunicação.

1.4.2.1 Controle Centralizado

Neste tipo de controle, todos os robôs dependem de uma única unidade central [14,15]. Os robôs adquirem dados através de seus sensores, e todas as informações são enviadas para a unidade central, que é responsável pela tomada de decisões e por enviar os comandos calculados para cada um dos robôs [16, 17]. A principal vantagem deste sistema é a eficiência na obtenção de soluções, devido à quantidade de informação armazenada pela unidade central [18].

Sua principal desvantagem é que uma vez que a unidade central está continuamente recebendo dados de todos os robôs, pode causar congestionamento, e, assim, reduzir a velocidade da tomada de decisão. Além disso, se a unidade central falhar, todo o sistema deixará de operar, e os robôs perdem a capacidade de decidir. Outrossim, apresenta problemas de escalabilidade, porque o aumento do número de agentes gera uma quantidade maior de dados e de informação a ser processada pela unidade central. Nessa abordagem o número máximo de robôs é determinado pelas restrições do sistema de comunicação e de cálculo.

1.4.2.2 Controle Descentralizado

Esta abordagem é inspirada no fenômeno da agregação social em peixes e aves [19,20], onde cada veículo pode se comunicar e compartilhar informações com seus vizinhos. Neste caso, cada robô decide o que fazer por si próprio, sem ordem de qualquer outra entidade [21, 22]. Com este tipo de controle, o sistema é muito mais rápido e dinâmico, pois não é necessário o envio ou armazenamento de informações a partir de uma unidade central. Além disso, se um robô para de funcionar, todos os outros podem continuar a operar de forma independente [23].

Entretanto, o projeto dos algoritmos de programação não é uma tarefa simples, devido à complexidade de protocolos de comunicação. Além disso, cada agente sabe uma parte da tarefa e a otimização do grupo não é garantida, uma vez que não há um agente central que otimiza a distribuição de tarefas para os outros.

1.4.3 Métodos de Controle

As técnicas de controle utilizadas para realizar a tarefa são classificados como:

1.4.3.1 Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas (*Multiple Input - Multiple Output, MIMO*)

Nesta abordagem, os controladores de formação são concebidos utilizando o modelo dinâmico de toda a formação. A formação é tratada como uma planta de entradas e saídas múltiplas.

Dentro desta arquitetura de controle, todos os métodos modernos podem ser aplicadas para controlar a formação. Duas vantagens deste método são a otimização (todos os estados da formação estão disponíveis para a síntese do controlador) e a estabilidade (derivada a partir de técnicas de controle MIMO). No entanto, os algoritmos MIMO têm um elevado grau de informação, já que normalmente cada agente deve conhecer todos os estados da formação.

Adicionalmente, estes métodos não são robustos a falhas locais. Por exemplo, considerando a formação de veículos aéreos não tripulados, se uma hélice da aeronave falhar, o controlador torna-se instável, e a formação se perde completamente. Em [24] por exemplo, se formula uma representação mínima de estados para erros relacionados com formação e para projetar um controlador LQR.

1.4.3.2 Líder-Seguidor (*Leader-Follower*)

É uma das arquiteturas mais estudados na literatura de sistemas de controle multi-robôs. Ela usa uma organização hierárquica de controladores individuais para cada robô que deduz os problemas de controle de formação a partir do monitoramento individual. Um dos robôs é designado como líder, e os restante são designados como robôs seguidores. Este método é caracterizado pela sua simplicidade e confiabilidade. Também não há nenhuma realimentação explícita dos seguidores para o líder, o que representa uma desvantagem significativa deste método.

Em [25] e [26] são propostos dois esquemas para manter a forma do sistema multi-robôs, que são separação-orientação e separação-separação. O objetivo de controle, no primeiro esquema, é manter um comprimento desejado entre o líder e os seguidores, e a orientação relativa desejada, como mostrado na figura 12. Já em [27] os autores propõem uma variação ao que é proposto em [25], denominada separação-orientação-orientação e separação-separação-orientação. A principal diferença entre estes trabalhos é que em [27] se controla explicitamente a orientação, enquanto em [25] a orientação é implicitamente controlada por linearização via realimentação.

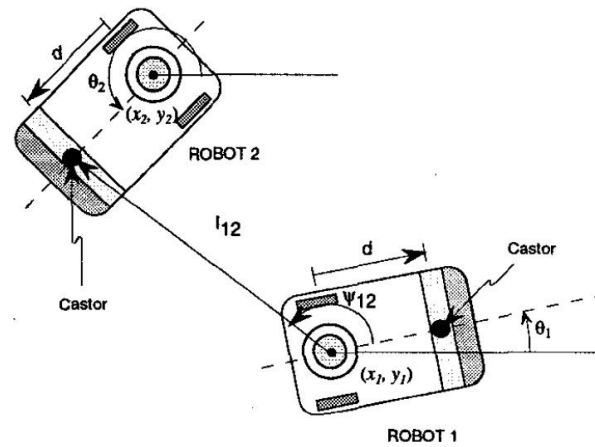


Figura 2: Notação do controlador separação-orientação.

Na abordagem de separação-separação apenas considera a posição relativa entre os três robôs que compõem o sistema. Nesta arquitetura de controle existem dois robôs principais e um seguidor, e o objetivo de controle é manter uma distância desejada entre o seguidor e os dois líderes, conforme mostrado na figura 13.

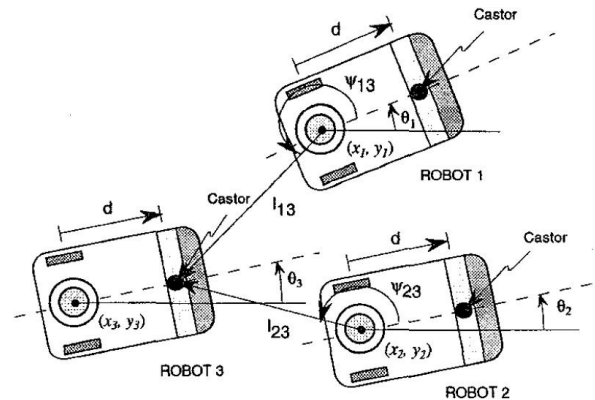


Figura 3: Notação do controlador separação-orientação-orientação.

Em [28] se apresenta um esquema de controle descentralizado que permite guiar um robô móvel tipo uniciclo em uma formação líder-seguidor, no caso o seguidor, de tal forma que a formação se mova através de obstáculos estáticos, exigindo um controlador para cada um dos dois robôs. Dois esquemas de desvio de obstáculos, formação rígida e formação semi-rígida são apresentados. Já em [29] é apresentado um esboço de controle centralizado líder-seguidor para uma formação composta por um robô terrestre (líder) e um veículo aéreo (seguidor). O modelo cinemático de formação é apresentado e a estabilidade assintótica do sistema de malha fechada é demonstrada.

Teoria dos grafos é também utilizada para o controle de sistemas multi-robôs. Os grafos são estruturas matemáticas utilizadas para modelar as relações de pares entre

os objetos de um determinado conjunto, sendo geralmente direcionais, o que permite decompor o problema em vários sub-problemas líder-seguidor. Um grafo se refere a um conjunto de vértices, ou nós, e um conjunto de arestas, ou arcos, que ligam um par de vértices. Em [30] a teoria dos grafos é utilizada para definir o sistema e analisar suas propriedades, tais como conectividade e estabilidade [1]. Em [31] se apresenta a definição de rigidez e persistência para uma formação plana (2D), enquanto que em [32] se estende o conceito para R^n , com $n > 2$. Finalmente, em [33] se aplicam tais conceitos para controlar uma formação descentralizada de veículos aéreos.

1.4.3.3 Estrutura Virtual

O conceito de estrutura virtual foi introduzido em [34]. Esta abordagem foi desenvolvida para forçar um grupo de robôs a comportar-se como um corpo rígido [35]. Na estrutura virtual o controlador é derivado a partir de três passos [36]:

- Em primeiro lugar, a dinâmica da estrutura desejada é definida. Isto é, como se quer que seja a estrutura física do sistema e sua distribuição.
- Em segundo lugar, a partir do movimento desejado da estrutura virtual os movimentos desejados para cada agente são obtidos.
- Finalmente, controladores locais para cada agente recebem referências de rastreamento.

A coordenação do comportamento de um grupo de robôs móveis é fácil, nesse caso, o que é uma vantagem. A principal desvantagem é a centralização da execução, uma vez que uma falha poderia deixar todo o sistema inoperante.

Uma abordagem relacionada a tal abordagem é apresentada em [37], onde cada robô segue um robô virtual. O movimento do elemento virtual é regido por uma *função de formação* que especifica a geometria da formação desejada.

Em [38] é apresentado um esquema de estrutura virtual, denominado *cluster space control*, de em que a estrutura de base é definida como um triângulo. Controle de posição ou de rastreamento caminho é feito sobre o centróide dessa formação. A vantagem deste sistema é a facilidade de distinguir entre as variáveis que definem a posição da formação e as que definem a sua forma. Este trabalho foi estendido para formações de ar [39], onde se controla uma formação composta por dois dirigíveis.

Em [40] as mesmas variáveis usadas em [38] são utilizadas para representar a formação. Ali se apresenta um esquema multi-camadas, onde a cada camada é atribuído um objetivo específico, dentro do controle da formação. Posteriormente é feito o controle cinemático de cada robô móvel, incluindo-se um módulo de compensação dinâmica no controlador individual de cada robô da formação. Já em [41] os autores utilizam a mesma representação, mas acrescentam uma generalização para casos onde o número de robôs é maior que 3 ($n > 3$): o teorema de triangularização de um polígono é usado para transformar um polígono de n lados em $n - 2$ triângulos. A principal desvantagem é a existência de redundância no cálculo das ações de controle. Cada novo robô acrescentado à estrutura define uma nova estrutura para controlar (um novo triângulo). Logo, é feito o cálculo das ações de controle para cada robô do novo triângulo, mesmo para os dois dos robôs de um triângulo que já faziam parte de outro triângulo. A solução adotada pelos autores é não considerar estas ações de controle, usando somente aquela correspondente ao novo robô.

1.4.3.4 Abordagem Baseada em Comportamentos (*Behaviour-Based Approach*)

Esta abordagem combina a saída de vários controladores projetados para atender diferentes comportamentos ou ações, que podem competir entre si. O resultado de controle final considera a ponderação e a importância relativa de cada comportamento naquele momento. Cada comportamento é definido como um objetivo, como evadir obstáculos, atingir a posição desejada, seguir um caminho predefinido, manter a formação, etc. Cada agente deve fazer sua parte para garantir que o grupo atinja o comportamento desejado. Embora esta abordagem possa ser robusta em aspectos como escalabilidade e tolerância a falhas, o projeto de comportamentos nem sempre é tão simples, dependendo do problema de controle.

Um controlador baseado em comportamentos reativos é apresentado em [42], onde é implementado um esquema integrado por comportamentos de navegação que permitem a um grupo de robôs atingir objetivos de navegação, como evitar perigos e simultaneamente permanecer em formação. Já em [43], um controlador de formação baseado em comportamentos é modelado como um sistema dinâmico não-linear para geração de caminhos e prevenção de obstáculos.

Em [44] 3 estruturas de controle comportamental são analisadas: sistema de controle em camadas [45], controle de esquema de mecanismo [46] e controle baseado em espaço nulo com base no controle comportamental. Neste artigo os autores se referem às ca-

racterísticas do controle com base no espaço nulo e suas vantagens em comparação com os outros dois esquemas apresentados. Essa abordagem é derivada dos manipuladores redundantes [47], os quais têm soluções infinitas para realizar uma tarefa. Já em [48] os autores analisam as singularidades nos algoritmos de manipuladores redundantes e propõem um algoritmo onde essas singularidades são evitadas. Em [49] e [50] o conceito é estendido a robôs móveis. Uma das características do sistema de controle baseado em espaço nulo é a sua adaptação para resolver diferentes problemas e modificar a resposta obtida sem ter que modificar a estrutura do controlador. Sua característica principal é que a tarefa de maior prioridade é sempre executada, porque a solução é obtida por mínimos quadrados e a matriz pseudo-inversa do Jacobiano associada ao problema em questão, enquanto as tarefas de hierarquia inferior são projetadas no espaço nulo do Jacobiano, para evitar que existam conflitos entre as duas tarefas. Note-se, assim, que as tarefas consideradas secundárias serão cumpridas desde que não afetem os interesses da hierarquia superior.

1.4.3.5 Campos Potenciais

O conceito de campos potenciais foi apresentado pela primeira vez em [51]. Este conceito assume o robô como uma partícula sobre a qual são exercidas forças que causam seu movimento dentro do ambiente de trabalho. Os objetivos de controle envolvem forças atrativas, associadas ao ponto objetivo, e forças repulsivas, associadas a obstáculos.

Este conceito foi estendido ao controle de formação em [52] e em [53]. O equilíbrio das forças de atração (objetivos de controle) e repulsão (obstáculos) que agem nos robôs força o sistema a manter uma formação enquanto o mínimo global gera as trajetórias em direção ao objetivo. Em [54] os padrões de formação e a trajetória desejada para um grupo de robôs são representados por campos potenciais. Cada robô é atraído e se move através do caminho onde o campo potencial é mínimo. A prevenção de obstáculos é implementada considerando forças repulsivas geradas por obstáculos. Nos casos em que a formação deve ser totalmente especificada, são apresentados líderes virtuais, que criam forças adicionais [55].

As limitações e os problemas desta proposta são discutidos em [56]. Dentro destes, menciona-se a existência de mínimos locais. Estes representam pontos no plano ou espaço onde o controlador acredita que ele encontrou o mínimo total da tarefa e permite que a tarefa seja executada, mas não é. Na literatura, existem muitas propostas para resolver este problema, embora ainda não haja solução fechada.

1.4.3.6 Outras Estratégias de Controle de Formação

Na literatura existem outras estratégias de controle que não podem ser classificados dentro das listadas acima. Algumas usam estratégias especiais de controle (controle preditivo, algoritmos genéticos, etc.), ou abordagens diferentes daquelas mencionadas acima. Entretanto, dado que a contribuição desta tese é baseada nas classificações anteriores, a análise de outras estratégias não será aprofundada.

1.4.4 Evasão de obstáculos em sistemas multi-robôs

Para qualquer estratégia de controle de um sistema multi-robôs, a prevenção de colisão com obstáculos e com outros membros da formação é crítica. Para o caso em que o meio ambiente é bem conhecido e previsível, um planejamento de caminho a priori pode ser usado. Para ambientes mais dinâmicos ou não estruturados, as estratégias típicas incluem abordagens discretas e contínuas. As abordagens discretas geralmente codificam o comportamento de prevenção de obstáculos nas regras de tipo *IF-THEN* (se-então), implementadas em uma ampla variedade de arquiteturas, como por exemplo em [57] e em [58]. Uma vez detectada uma situação de colisão deve-se proceder a alguma estratégia para evitar que isso aconteça. Uma das primeiras estratégias contínuas, usadas tanto para robôs móveis como para manipuladores, é o uso de campos potenciais para estabelecer forças fictícias repelindo o robô de obstáculos [46, 51]. Muitas melhorias para esta técnica foram propostas para abordar as desvantagens desta estratégia como em [59] e em [60]. Embora este método assegure movimentos livres de colisão, isso geralmente leva a distúrbios transitórios no controle da forma da formação. O principal problema dessa abordagem é o problema chamado de *mínimos locais*, e muitas propostas na literatura desenvolveram possíveis funções de navegação para eliminar tal problema, como é o caso em [61] e em [62]. A desvantagem de muitas dessas propostas é que elas devem necessariamente ser centralizadas, porque requerem conhecimento de todo o sistema.

Quando a manutenção da forma é crítica, a função de evasão pode ser aplicada ao corpo virtual, como em [63], onde um perímetro é estabelecido em torno da formação como um todo, e sobre o qual as forças de prevenção de obstáculos podem agir.

Outras estratégias de controle na literatura para prevenção de colisões, que têm com base o controle preditivo, o controle difuso e redes neurais, são apresentadas em [36].

1.5 Organização da tese

Esta tese é constituída por seis capítulos e um apêndice, que apresentam o seguinte conteúdo:

1.5.1 Estado da arte

Este capítulo apresenta o estado da arte dos diferentes tópicos tratados durante o desenvolvimento desta tese de doutorado. Este capítulo pretende apresentar os desenvolvimentos relacionados ao tema que existem na literatura científica e, por sua vez, justificam as linhas de pesquisa realizadas.

1.5.2 Modelado dinâmico de un veiculo de palas rotativas

O princípio de funcionamento de um mini helicóptero de quatro rotores, o quadrimotor (em espanhol *cuatrirrotor* e em inglês *quadrotor*) é bastante simples de entender. Este veículo aéreo consiste em um corpo transversal rígido equipado com quatro motores, nos quais hélices de passo fixo são fixadas. Duas hélices rodam no sentido horário e as outras duas no sentido anti-horário, intercaladamente, cancelando assim o torque de rotação ao redor do eixo vertical produzido pelos rotores no centro da massa. Este tipo de aeronave tem a vantagem sobre os helicópteros de configuração com rotor de cauda de não possuir uma placa cíclica, e todas as manobras que executa são alcançadas variando a velocidade angular de cada uma das hélices, de forma coordenada, conforme o tipo de manobra.

Alguns autores, como é o caso em [9], analisam o funcionamento deste tipo de aeronave a partir da geração de forças e torques gerados pelas quatro hélices. Deste modo, analisamos a relação entre eles e como eles fazem o helicóptero realizar todas as manobras possíveis que definem a posição do centro de massa $\xi = (x, y, z)$ e sua postura $\eta = (\phi, \theta, \psi)$, mas não é analisado na sequência que gera essas forças e torques resultantes, desde o momento em que os comandos são enviados até a hélice girar.

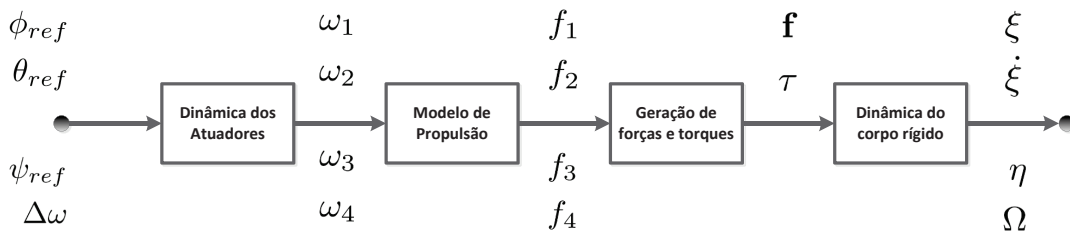


Figura 4: Esquema do modelo de um quadrimotor.

Na Figura 4 pode-se ver um esquema que representa o modelo completo de um quadrimotor. Os três primeiros blocos compõem o chamado modelo de baixo nível, que se relaciona com as referências enviadas à aeronave para geração das forças e torques gerados pela rotação das hélices. O resto é o chamado modelo de alto nível, que geralmente é modelado como um corpo rígido no espaço sujeito a forças e torques, que causam seu movimento translacional e rotacional.

Os comandos de entrada para esses veículos são quatro e dependem do modelo comercial usado, no caso do modelo AscTec © *X3D-BL*, bem como de todas as plataformas baseadas no piloto automático comercial Arducopter, as referências são os ângulos de arfagem (do inglês *pitch*) ϕ_{ref} , e rolagem (do inglês *roll*) θ_{ref} , a taxa de guinada (do inglês *yaw*) ψ_{ref} , e um aumento proporcional na velocidade angular nos quatro motores (do inglês *throttle*) $\Delta\omega$. No caso do modelo Ar.Drone 2.0, da empresa Parrot ©, as referências são os ângulos de arfagem e rolagem e a velocidade de guinada (semelhante ao X3D-BL). A diferença está na última referência, que representa a velocidade no eixo Z em relação ao sistema de referência inercial, de modo que se $\dot{z} = 0$ o helicóptero permanecerá sempre em altura constante, independentemente das variações nas demais referências.

O modelo de baixo nível inclui todos os sistemas que permitem obter as forças e torques que atuam no modelo de alto nível (modelo de corpo rígido), e que geram os movimentos do veículo. O modelo de baixo nível é formado pelos primeiros três blocos da Figura 4. O primeiro bloco consiste nos laços de controle interno, que normalmente são do tipo PID ou alguma variante, que geram os valores de tensão para cada um dos motores como uma função do erro de controle. O modelo de um motor do tipo *brush-less* [64] é então considerado. Apesar das diferenças entre esses motores e motores DC, para uma análise de tipo mecânica os motores *brush-less* podem ser modelados como motores DC. Posteriormente, assume-se que uma hélice é acoplada a cada eixo do motor, que cumpre a função do transdutor do movimento de rotação do motor elétrico e gera um impulso ao longo do eixo de rotação e um torque ao seu redor. Dependendo das suas características de construção, serão os valores de impulso e torque. Por fim, o bloco de geração de força e torque refere-se basicamente à distribuição das hélices em relação ao centro de massa do veículo. Uma vez que os momentos que são gerados no centro da massa são função da força de cada hélice e da distância desta para o centro de massa, esse bloco depende das características construtivas dos quatro motores.

O modelo de alto nível inclui toda a dinâmica de um corpo rígido. No que diz respeito à modelagem matemática de aeronaves de pequena escala, existem duas abordagens

definidas na literatura: uma baseada nas equações físicas do sistema e outra baseada em técnicas de identificação de sistemas [65, 66]. Tais abordagens não são exclusivas: muitas vezes é necessário usar um para a simplificação da outra. Em geral, a primeira abordagem utiliza as equações mecânicas de movimento para a representação de um sistema físico, enquanto a segunda estima o modelo dinâmico do sistema físico com base nos dados de excitação e resposta. Técnicas de modelagem paramétrica (caixa branca, caixa preta e caixa cinzenta) e técnicas não paramétricas (métodos baseados em resposta ao impulso e em frequência) são utilizadas em vários trabalhos para identificar o sistema. Em [67], por exemplo, uma plataforma experimental é usada para gerar os dados de voo de um helicóptero, que é usado para identificar o comportamento qualitativo da aeronave. Ao adicionar conhecimento da teoria aerodinâmica, esses dados geram a proposta de um modelo neural dinâmico capaz de representar o veículo aéreo. Por sua vez, em [68] um modelo dinâmico identificado através de técnicas de modelagem ARX, ARMAX e *Output-Error* é usado para propor um controlador robusto H_∞ para guiar um helicóptero não tripulado em tarefas de posicionamento.

Um VANT pode ser representado matematicamente como um corpo definido tridimensional submetido à ação de forças externas. Na literatura, duas abordagens clássicas são usadas para modelagem matemática de robôs: formulação de Newton-Euler [65, 69] e formulação de Euler-Lagrange [9, 70, 71]. Ambos os processos de modelagem levam à representação do modelo dinâmico de um corpo rígido, com algumas diferenças na forma de notação. No entanto, manipulando matematicamente é possível deixar uma representação e alcançar a outra.

Nos controladores desenvolvidos nesta tese de doutorado, os sistemas de referência e as forças que atuam nos quatro motores são apresentados na Figura 5.

1.5.3 Rastreamento de trajetória de um quadrimotor

Este capítulo apresenta uma técnica de controle capaz de seguir trajetórias contínuas por partes, com derivadas contínuas por partes. Esta nova abordagem de controle tem como originalidade o fato de ser baseada na aplicação de métodos numéricos e álgebra linear para rastrear trajetórias usando um quadrimotor. Sua filosofia é a seguinte: sabendo o valor da estado desejado, é possível encontrar o valor das ações controle para que o sistema evolua do estado atual para o estado desejado seguinte.

A principal contribuição deste trabalho é que se baseia em conceitos de fácil compreensão, que requerem apenas conceitos básicos de álgebra linear e métodos numéricos.

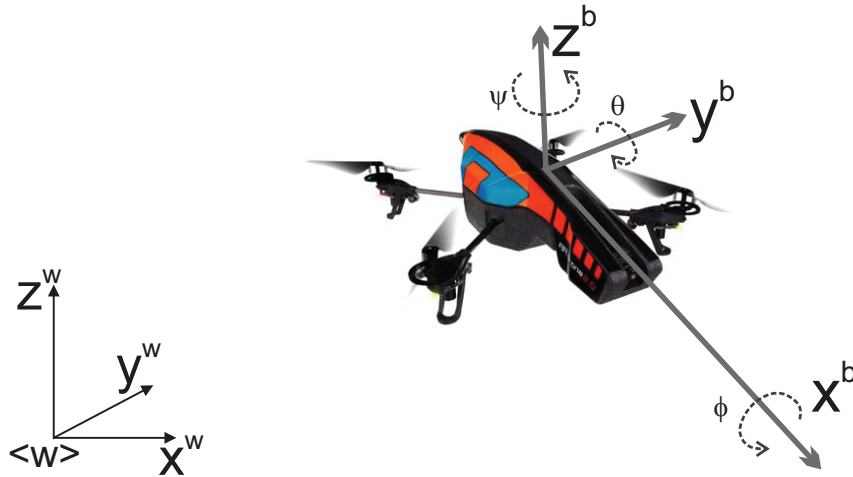


Figura 5: Sistemas de referência inercial e do veículo adotados para um quadrimotor.

Portanto, a lei de controle será facilmente compreendida pela maioria da comunidade científica, em comparação com outras propostas que exigem ferramentas matemáticas mais complexas [70,72]. Também em comparação com outras propostas, como aquelas em [73] e em [74], o controlador precisa executar apenas operações algébricas e resolver um sistema de equações lineares em cada período de amostragem, evitando cálculos complexos. Isso dá vantagem à nossa proposta de aplicativos a bordo, onde a capacidade computacional é reduzida. A principal vantagem é que o projeto utiliza equações em tempo discreto, o que torna muito simples de implementar em sistemas informáticos.

Esta metodologia é baseada na definição de trajetórias de referência em termos de um subconjunto de variáveis de estado e na determinação dos valores de referência para as demais variáveis. Essas variáveis de estado são encontradas analisando as condições para que o sistema sempre tenha uma solução exata. Portanto, as ações de controle são obtidas através da solução de um sistema de equações lineares.

Considerando a equação diferencial que representa a dinâmica de um sistema robótico, a saber

$$\dot{y} = f_{(y,t)} \quad , \quad y(0) = y_0, \quad (1.1)$$

com o objetivo de determinar o valor de $y(t)$ em instantes discretos de tempo $t = nT_o$ (onde T_o é o período de amostragem e $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$), a variável $y(t)$ para $t = nT_o$ é simbolizada como $y_{(n)}$. Portanto, se for necessário calcular $y_{(n+1)}$ a partir do valor conhecido de $y_{(n)}$, a equação (1.1) deve ser integrada no intervalo $nT_o \leq t \leq (n+1)T_o$, ou seja,

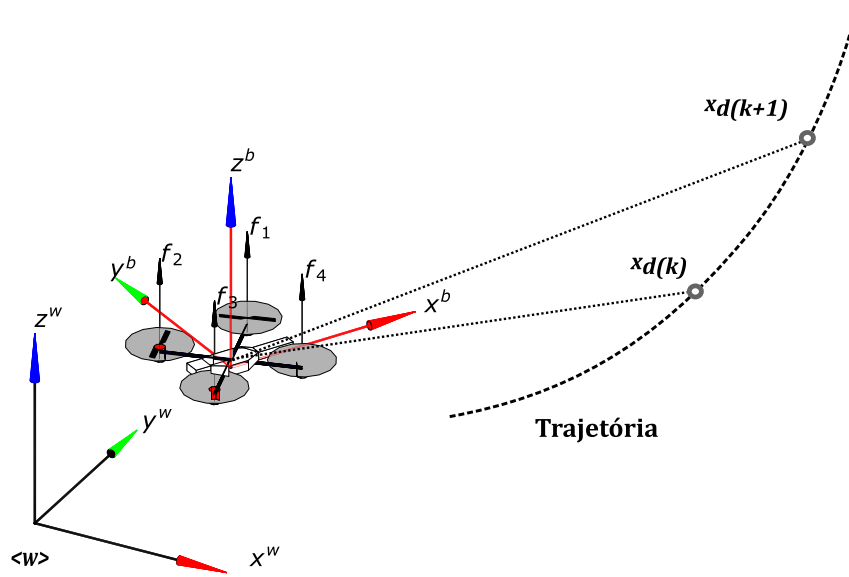


Figura 6: Esboço da tarefa de rastrear a trajetória proposta em tempo discreto, onde o foco pode ser visto em tempo discreto.

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + \int_{nT_o}^{(n+1)T_o} f_{(y,t)} dt. \quad (1.2)$$

Um valor aproximado de $y_{(n+1)}$ pode ser obtido usando métodos numéricos para aproximar a integral (1.2). assim é que se calcula

$$y_{(n+1)} \cong y_{(n)} + T_o f_{(y_{(n)}, t_{(n)})}. \quad (1.3)$$

Usando a aproximação de Euler para discretizar o modelo dinâmico de um quadrimotor usado nesta tese, obtemos um sistema de equações algébricas que podem ser expressas como

$$A\mathbf{w} = b. \quad (1.4)$$

Tal equação representa um sistema de equações lineares que permite calcular as ações de controle (\mathbf{w}) em cada período de amostragem, de modo a permitir que o quadrimotor atinja o caminho desejado. É necessário que este sistema de equações lineares tenha sempre uma solução exata em cada período de amostragem. Assim, em cada período de amostragem o sistema de equações lineares permite calcular as ações de controle necessárias para que o quadrimotor convirja para a trajetória de referência.

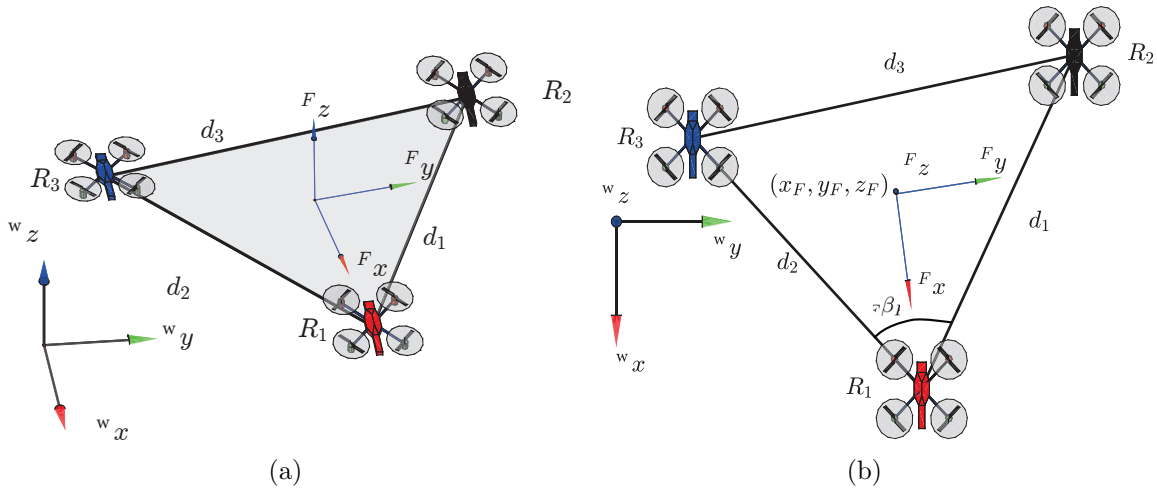


Figura 7: Variáveis de formação. (a) Vista normal da formação. (b) Vista superior da formação.

1.5.4 Representação de um sistema multi-robôs

Neste capítulo é apresentado um conjunto de variáveis que permite representar uma formação composta por múltiplos robôs aéreos. A principal vantagem desta proposta em relação a outros encontrados na literatura é que as variáveis que definem a distância entre cada um dos robôs, a posição do centróide do conjunto de robôs e sua orientação em relação ao sistema de referência inercial são separadas. Uma vantagem disso é a possibilidade de controlar individualmente cada uma dessas variáveis, permitindo assim implementar diferentes comportamentos da formação (formação rígida, formação flexível, etc.) sem grandes complicações.

Para esta abordagem, o trabalho de [38] baseia-se em um esquema centralizado para controlar uma formação composta por 3 robôs terrestres não-holonômicos. Vários autores usam essas variáveis de formação definidas para representar uma formação triangular, tais como ocorre em [41] e em [40]. Em [41] este esquema foi utilizado e uma solução foi apresentada para o caso em que o número de robôs a serem controlados é $n \geq 3$. Além disso, há evasão de obstáculos de toda a formação, de modo que a formação pode modificar sua forma de forma momentânea, apresentando um comportamento elástico.

As relações entre as variáveis da tarefa, que são as variáveis definidas para representar o estado da formação e as posições no espaço dos 3 robôs, podem ser expressas como

$$\dot{q} = f(\dot{x}), \quad (1.5)$$

sendo que a relação diferencial da equação anterior é expressa como

$$\dot{q} = J_{(x)}\dot{x}. \quad (1.6)$$

Essa estrutura permite analisar a correspondência entre as velocidades dos robôs e as variações nas variáveis da tarefa e, desse modo, permite calcular estratégias de controle no espaço das velocidades.

1.5.5 Controle de formação com base no espaço nulo

Neste capítulo é apresentado um esquema de controle baseado em espaço nulo para uma formação de veículos aéreos. Esta técnica de controle é classificada dentro do grupo chamado *Behaviour Control* ou controle baseado em comportamento. Esses esquemas são baseados em dividir o problema geral em várias sub-tarefas, eventualmente desenvolvendo algoritmos para controlar cada uma individualmente, sem levar em consideração as sub-tarefas restantes. Finalmente, cada uma das saídas dos controladores deve ser combinada, de modo a cumprir o objetivo de controle global proposto.

A maneira como se combinam as saídas de controle para cada tarefa é crítica, e define o desempenho do controlador. Em [44] três esquemas de controle baseados no comportamento são analisados. Em [45] o primeiro é chamado *sistema de controle em camadas*, o segundo é chamado *controle do esquema do mecanismo* [46], e o terceiro é chamado *Null-Space - Controle comportamental desenvolvido* [48]. Essa abordagem é derivada da solução cinemática inversa para manipuladores robotizados industriais redundantes. A redundância cinemática ocorre quando o sistema possui mais graus de liberdade do que aquelas necessárias para realizar a tarefa. Do ponto de vista estrito, a redundância no sistema não precisa necessariamente existir, mas sim que a tarefa a realizar torna o sistema redundante. Em um sistema redundante, o problema cinemático inverso admite um número infinito de soluções, e, portanto, um critério é necessário para poder escolher a solução. A solução mais utilizada é através da pseudoinversa da matriz jacobiana e, desta forma, obtemos a solução dos mínimos quadrados com norma mínima. A redundância do sistema pode ser explorada para obter restrições adicionais na solução do problema de cinemática inversa. Uma possibilidade é adicionar termos a esta solução, onde as soluções para outros tipos de problemas são contempladas, garantindo que não existam conflitos entre eles, o que tornaria o sistema ineficiente. Este problema é resolvido por meio da estratégia de prioridade das tarefas, atribuindo-se uma ordem apropriada de

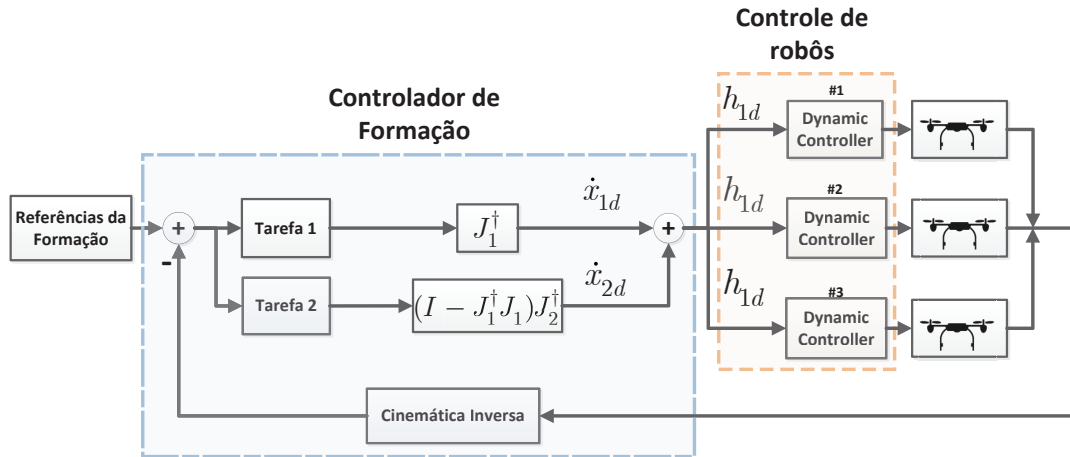


Figura 8: Esquema geral com a estrutura de controle por camadas, onde se observa o controle de formação e os controladores individuais para cada veículo aéreo.

prioridade às tarefas determinadas e depois satisfazendo as de hierarquia inferior no espaço nulo daquela de hierarquia mais alta [75].

Da relação de cinemática diferencial entre as variáveis da tarefa q e as posições dos robôs x , propõe-se a estrutura de controle baseada em espaço nulo combinando a solução dos diferentes controladores de forma hierárquica. A relação

$$\dot{x}_d = \dot{x}_{1d} + (I - J_1^\dagger J_1)[\dot{x}_{2d} + (I - J_2^\dagger J_2)\dot{x}_{3d}] \quad (1.7)$$

exemplifica um caso em que se tem 3 sub-tarefas que se agrupam utilizando a técnica de espaço nulo. Nela cada \dot{x}_{id} é a solução cinemática para a i -ésima tarefa. Por sua vez, o termo $(I - J_i^\dagger J_i)$ é a matriz de projeção no espaço nulo da i -ésima tarefa. Desta forma, qualquer componente da solução obtida pelo controlador cinemático da tarefa de hierarquia inferior ($i + 1$) que afeta a solução de tarefas de hierarquia superior é removido por essa matriz de projeção.

A solução apresentada nesta tese para o controle da formação baseada no espaço nulo usa a estrutura apresentada na equação (1.7) e na figura 8, sendo que esta última se refere ao caso de duas sub-tarefas que se agrupam utilizando a técnica de espaço nulo.

A estrutura de controle usada nesta tese é baseada em camadas [76], através das quais se pode dividir o controle de um sistema multi-robôs em diferentes partes. Primeiramente tal estrutura se caracteriza por uma camada onde o planejamento da tarefa de navegação é desenvolvido *offline*. Posteriormente, essas referências são levadas em consideração pelo controlador de formação, que gera as referências de posição e velocidade para cada um

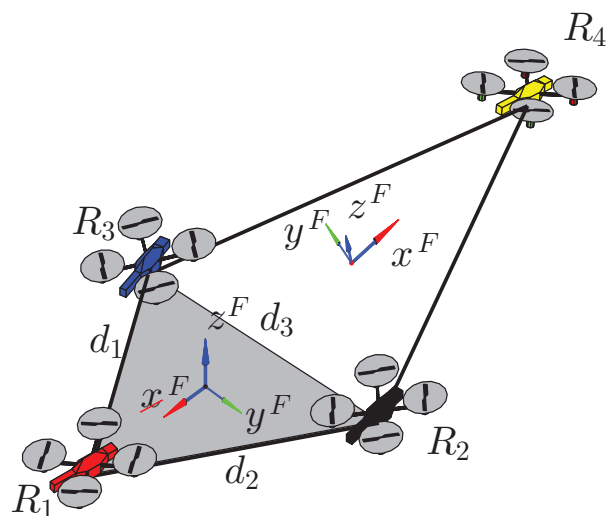


Figura 9: Exemplo de divisão de uma formação de 4 (n) veículos aéreos em 2 triângulos ($n - 2$).

dos robôs da formação, e, finalmente, cada veículo possui seu próprio controlador, que permite que essas referências sejam alcançadas.

O algoritmo proposto foi validado por resultados experimentais usando três veículos aéreos comerciais Ar.Drone 2 da Parrot Inc. O esquema de controle foi utilizado para tarefas de rastreamento de posicionamento e trajetória, e em ambos os casos os resultados foram satisfatórios.

Outra contribuição importante feita neste capítulo é a expansão da estrutura de controle para sistemas compostos de $n > 3$ robôs aéreos usando a mesma topologia triangular. A abordagem baseia-se em abordagens semelhantes àquela proposta em [41, 77], onde a formação composta por $n > 3$ robôs é dividida em $n - 2$ triângulos. No entanto, a contribuição é a forma como o controlador de formação é definido, o qual gera comandos de velocidade para cada novo robô que é adicionado à formação sem gerar redundância nos comandos dos demais robôs da formação.

Finalmente, com base na análise anterior, propõe-se o esquema de controle para sistemas multi-robôs heterogêneos formados por veículos aéreos e terrestres. Tal proposta decorre do fato que em muitas aplicações é essencial ter informações que só podem ser obtidas através de robôs terrestres, e que ao combinar o potencial de ambos os tipos de veículos, aéreos e terrestres, os horizontes são praticamente infinitos. O esquema de controle analisa as restrições geradas nas variáveis da tarefa pelo fato de que o valor de altura para cada veículo terrestre deve ser zero.

1.5.6 Evitação de obstáculos de sistemas multi-robôs

A segurança na navegação dos robôs é fundamental quando se realizam tarefas em ambientes onde tais robôs interagem com outros autômatos ou com obstáculos. Já existem na literatura diversas propostas para assegurar a navegação segura do sistema robótico, algumas baseadas em estratégias *off-line* [78, 79]. Além disso, existem propostas do tipo reativo, que diferem ao não considerar o conhecimento prévio do meio ambiente e, antes da aparição de um agente desconhecido que interfere com a tarefa, gera uma política que evita qualquer situação que possa afetar a integridade do sistema [80]. Entre as técnicas mais usadas na literatura para esta missão estão aquelas baseadas em campos potenciais [51, 81]. Tal abordagem possui algumas limitações que são analisadas em [59], sendo suas maiores desvantagens as limitações para executar tarefas de navegação em espaços estreitos e a existência de mínimos locais.

Nesta tese apresenta-se uma nova estratégia de evasão de obstáculos para ambientes não estruturados e dinâmicos. A abordagem é baseada em campos potenciais reativos, mas limita as desvantagens dos campos potenciais e melhora o problema dos mínimos locais. Uma função de potencial fictícia positiva é usada para caracterizar todas as áreas do espaço de navegação onde existem obstáculos. A função selecionada é a função de Gauss

$$V_{(t,x,y,z)} = e^{-\left(\frac{x(t) - x_{obs(t)}}{a}\right)^n - \left(\frac{y(t) - y_{obs(t)}}{b}\right)^n - \left(\frac{z(t) - z_{obs(t)}}{c}\right)^n} \quad (1.8)$$

que tem a vantagem de poder modificar suas dimensões e ajustá-la à parte do espaço que os obstáculos ocupam. Em tal função $n \in \mathbb{N}_p$, onde \mathbb{N}_p são os pares naturais maiores que zero, e o valor das constantes a, b, c é usado para as dimensões da função nos eixos de coordenadas. As coordenadas dos obstáculos fazem com que a função definida seja transferida da origem das coordenadas do sistema inercial até o ponto $\mathbf{x}_o = (x_{obs(t)}, y_{obs(t)}, z_{obs(t)})$, que caracteriza a posição do obstáculo.

Portanto, o objetivo de controle para nosso sistema é a navegação em regiões do espaço onde o valor do potencial fictício é próximo de zero. Caso contrário, se o potencial for bem maior que zero, existe algum objeto que pode interferir fisicamente com o sistema e, portanto, afetar sua segurança.

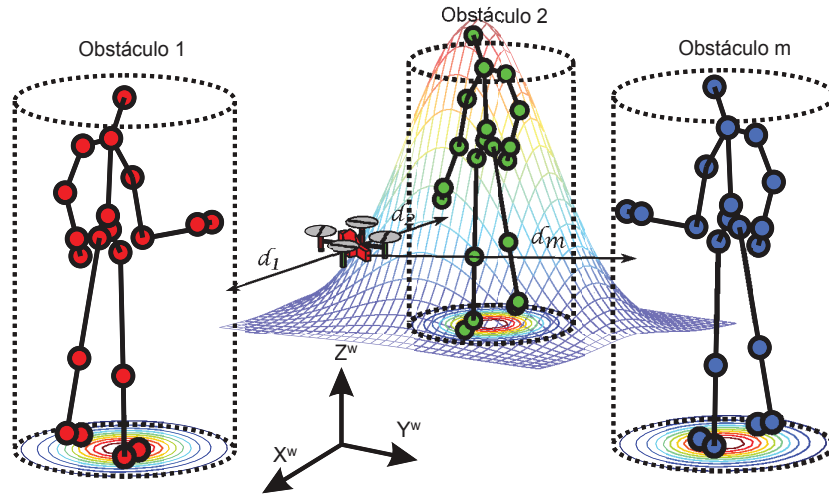


Figura 10: Exemplo de um ambiente dinâmico de navegação com múltiplos obstáculos. Neste caso, a energia potencial para o robô aéreo é a soma dos potenciais individuais para cada um dos m obstáculos.

A relação diferencial

$$\frac{\partial V_{(t,x,y,z)}}{\partial t} = J_o \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_o}, \quad (1.9)$$

é obtida de (1.8), sendo que o primeiro termo se refere a variações causadas por mudanças na posição do robô e o segundo por mudanças na posição dos obstáculos. A matriz J_o representa o Jacobiano que relaciona as variações da posição relativa entre o obstáculo e o robô, com as variações do valor do campo potencial. O segundo termo da equação anterior permite uma estimativa das velocidades relativas dos obstáculos em relação ao sistema robótico. Isso representa uma grande vantagem porque permite obter uma informação muito importante sem ter que calcular e também garante a evasão de obstáculos mesmo quando o ambiente de navegação é dinâmico. Uma vez que uma aproximação do termo $\frac{\partial V_{(t,x,y,z)}}{\partial t}$ pode ser feita por algum método numérico, o termo que relaciona as variações de potencial causadas por mudanças na posição dos obstáculos pode ser descartado da equação 1.9.

No caso da Figura 10, onde m obstáculos são observados na proximidade de um VANT, o potencial é definido como a soma dos potenciais individuais calculados para cada obstáculo, ou seja,

$$V_i = V_{(d_1)} + V_{(d_2)} + \dots + V_{(d_n)} = \sum_{j=1}^n V_{(d_j)} \quad , \text{ com } i = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (1.10)$$

e, desse modo, obtém-se um potencial único para o VANT. Em tal equação d_j , com $j = \{1, 2, \dots, n\}$, representa a distância entre o robô i e o obstáculo j . Cada um dos robôs do sistema possui um potencial associado a ele, que é uma função do número de obstáculos que estão na proximidade do sistema e da distância relativa a cada um deles.

O objetivo do controle é garantir a navegação de cada um dos robôs por zonas sem obstáculos ou qualquer tipo de elemento que possa afetar sua segurança e integridade. Para conseguir isso, é proposto o controlador definido como

$$\dot{x}_d = J_o^\dagger \left(\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_o} \right), \quad (1.11)$$

que é baseado no modelo cinemático 1.9 e é uma lei de controle típica da cinemática inversa. O valor de potencial desejado é $V_d = 0$, de modo que as velocidades de cada robô são calculadas para evitar que o sistema navegue através de pontos com potenciais $V > 0$. Os ganhos de controle k_{obs} e k_{pre} são matrizes definidas positivas que servem para ajustar a resposta do controlador contra a presença de um valor de $V_i > 0$. Já o termo $-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_o}$ serve como um tipo de preditor das variações temporais do campo potencial causadas por variações nas posições dos obstáculos. Isto representa uma melhoria de desempenho significativa quando o ambiente de navegação é dinâmico, em comparação com outras propostas existentes na literatura relacionada a este tema.

Esta estratégia também contempla um problema muito frequente, que é a colisão entre agentes [10], devido ao fato de que a definição de obstáculo é generalizada para qualquer tipo de objeto que possa gerar uma colisão. Portanto, cada robô considera os outros robôs da formação como obstáculos, e se aplica a mesma ideia do campo potencial.

1.5.7 Formação rígida e formação flexível

Nas tarefas de navegação de sistemas multi-robôs em ambientes povoados, tal navegação pode ser realizada mantendo-se a formação rígida ou admitindo-se que a mesma tenha alguma flexibilidade. No primeiro caso o grupamento é considerado análogo a um corpo rígido. Um corpo rígido é definido como um sistema de n partículas onde a

distância entre as partículas permanece sempre constante, ou seja, $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{i,j}$, com $\dot{d}_{i,j} = 0 \forall t > 0$. Portanto, é simples entender que, na presença de um obstáculo que possa prejudicar a navegação segura, para uma formação rígida só se permite modificar suas próprias variáveis de posição, não sendo possível modificar as demais variáveis pela restrição acima mencionada.

No caso de formações flexíveis, não há restrição quanto à forma física do referido sistema. Neste caso, existe a liberdade de poder modificar as variáveis de forma para realizar a evasão de obstáculos. Portanto, o tipo de estrutura de controle utilizada vai depender da tarefa a ser realizada. Por exemplo, supondo-se que vários robôs transportam uma placa de vidro, eles não podem desfazer a formação, pois nesse caso a placa de vidro poderia cair e quebrar-se. Ou seja, este é um exemplo em que a formação tem que ser rígida.

De acordo com as variáveis de tarefas definidas, elas podem ser divididas em dois grupos. Um deles é composto pelas variáveis de posição do centróide do triângulo P_F , enquanto o outro contém as variáveis de forma S_F e orientação O_F do triângulo. Assim, o segundo grupo determina a forma e o *layout* do conjunto, enquanto o primeiro grupo de variáveis determina a posição no espaço do sistema multi-robôs.

A vantagem de combinar a estrutura espacial em conjunto com a estratégia de evasão de obstáculos, ambas previamente definidas, permite a obtenção de características de navegação rígidas ou flexíveis, dependendo da ordem hierárquica dessas tarefas dentro do esquema de controle de espaço nulo.

Nu caso de formação rígida o primeiro objetivo de controle é o controle das variáveis de forma, e as tarefas de evasão de obstáculos e rastreamento de trajetória são projetadas no espaço nulo da matriz pseudo inversa da sua matriz Jacobiana. Desta forma é garantido que a formação mantém sua forma e, se houver um obstáculo, o algoritmo de evasão só pode modificar a posição do sistema multi-robôs sem modificar sua forma. Já no caso de formação flexível, não é obrigatório que o sistema multi-robôs mantenha sua forma, e, portanto, a evasão de obstáculos é definida como uma tarefa de maior prioridade, e as tarefas de forma e posição são projetadas no espaço nulo da matriz pseudo inversa de sua matriz Jacobiana. Desta forma, em caso de evasão de obstáculos, a forma e a posição da formação podem ser modificadas para evitar colisão. Somente quando não há obstáculo as tarefas de forma e posição podem ser cumpridas.

Em conclusão, a grande vantagem da combinação de tarefas definidas, evasão de obstáculos e controle das variáveis de forma e posição, permite obter um comportamento

de formação rígida ou flexível, simplesmente modificando a ordem dos objetivos de controle dentro de uma estrutura de controle de espaço nulo.

2 *Introducción*

2.1 Motivación

La robótica representa un campo de aplicación importante para los Sistemas de Control, ya que ha generado un creciente impacto en la industria manufacturera y, más recientemente, en la agroindustria y el sector de servicios. Esta plantea el desarrollo de autómatas con altos niveles de destreza y autonomía de movimiento y/o manipulación, lo cual permite su aplicación en sistemas de producción altamente automatizada, tareas y servicios o auxilios en lugares de difícil acceso y ambientes contaminados o peligrosos.

Estas aplicaciones han generado un impacto económico y social positivo en los países que las desarrollan. Según la International Federation of Robotics (www.ifr.org), en el año 2013 se alcanzó un récord histórico de demanda de robots industriales; se vendieron alrededor de 168,000 unidades, esto es un 5% más que en el 2012. En la Fig. 11 se puede apreciar que después de la crisis económica de 2009 la tendencia de demanda de robots es alcista. Esto es un indicador que la robótica es una herramienta que abarca un mayor número de aplicaciones (industriales, civiles, militares, etc.); dejando de ser exclusivo de algunos sectores industriales, teniendo cada vez un mayor impacto en la vida cotidiana.

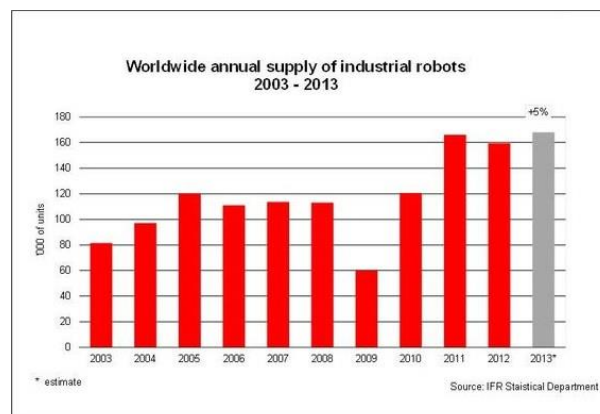


Figura 11: Demanda de robots industriales durante los últimos 10 años.

Muchas veces la utilización de varios robots en lugar de uno solo tiene como efecto varias ventajas, como es la reducción de costos, mayor robustez frente a fallas de los robots y eficiencia [1].

El diseño y construcción de un robot para una tarea específica, normalmente resulta más caro y difícil, que realizar la misma tarea por un conjunto de robots más simples y de menor capacidad [2].

Combinar varios robots que trabajen de forma cooperativa y coordinada, permite que el conjunto lleve a cabo tareas que individualmente no podrían. Debido a esto, la robótica colectiva busca diseñar sistemas compuestos de varios robots capaces de resolver problemas conjuntamente.

Normalmente los robots que forman parte de un sistema multi-robot son simples en términos de diseño y control, y menos costosos que los sistemas de un sólo robot especializado. Esto representa una gran ventaja a la hora de utilizar más de un autómatas para llevar a cabo alguna tarea específica.

Los sistemas multi-robot están orientados a resolver problemas en los cuales la participación de un solo robot no es suficiente o resulta muy costosa en términos de diseño y tiempo, un ejemplo es el transporte de objetos voluminosos [3], el manejo de material peligroso, la exploración y cobertura de terreno [4], entre otras cosas. Un caso concreto, son los grupos de satélites de menor capacidad que trabajan de manera cooperativa. Como resultado se reduce el consumo de combustible para la propulsión y permite expandir las capacidades de sensado y medición del sistema [5]. En los sistemas automáticos de carreteras (AHS, automated highway systems), es posible aumentar el rendimiento si los vehículos pueden formarse como un pelotón de automóviles que se mueven a una velocidad deseada y manteniendo una distancia de seguridad entre ellos [6].

Al agregar a un sistema multi-robot un vehículo aéreo, permite tener una perspectiva global del escenario terrestre que de otra manera no sería posible. En [7], se presenta un esquema que permite la coordinación de múltiples UAV (Unmanned Aerial Vehicles, vehículos aéreos no tripulados en español) a fin de poder utilizar dicho sistema en aplicaciones civiles; como son la vigilancia, confirmación de incendios y extinción de los mismos. Esto es un ejemplo de como arquitecturas de control, permiten mejorar la calidad de vida de las personas.

En la actualidad el uso de vehículos aéreos aumentó de manera considerable, principalmente por la aparición de modelos comerciales de un costo económico relativamente

bajo y de buenas prestaciones. Estos poseen la ventaja de la movilidad tridimensional, frente a los vehículos terrestres, que es esencial en muchas tareas.

Hasta hace poco tiempo, desarrollar un vehículo aéreo en escala miniatura y controlado de manera autónoma, era un sueño de muchos investigadores; los cuales estaban limitados por las restricciones impuestas por el hardware hasta entonces existente. Lo que hizo posible la construcción de robots aéreos autónomos fue los recientes avances tecnológicos en actuadores y sensores en escala reducida (MENS - Micro Electromechanical Systems), así como en el almacenamiento de energía y en el procesamiento de datos.

Además, el desarrollo de sistemas de control para este tipo de vehículos no es trivial, debido a la dinámica tan compleja inherente en los sistemas aerodinámicos, los cuales son multivariables, sub-actuados (sistemas donde el número de salidas es mayor al número de entradas) y que presentan diversas características no lineales. Esto significa que las leyes clásicas de control lineales y mono-variables pueden tener muy limitada su cuenca de atracción, provocando inestabilidades cuando se opera en condiciones no muy lejanas a las de equilibrio. Por otra parte, las técnicas desarrolladas para robots totalmente actuados tampoco se aplican directamente al caso de sistemas mecánicos no lineales sub-actuados [8].

Dentro de la familia de vehículos aéreos, esta tesis se enfocará en los de alas rotativas del tipo VTOL (del inglés Vertical Take-Off and Landing), que son aquello con la capacidad de despegue y aterrizaje vertical. Además poseen la capacidad de poder realizar maniobras en cualquier dirección, la capacidad de realizar vuelo estático y de gran desempeño en vuelos de baja velocidad, lo que es una gran ventaja en muchas aplicaciones, donde se requiere la característica de poder supervisar desde el aire. Esta característica es muy útil, en ambientes académicos, donde los espacios para realizar experimentaciones son de dimensiones reducidas.

Un tipo de aeronave que actualmente está siendo muy utilizado en el ámbito de control es el helicóptero en la configuración *quadrotor*. Según [9], este tipo de helicóptero consigue un vuelo estacionario estable y preciso a través del balance de las fuerzas de propulsión ejercidas por las cuatro hélices accionadas por sus respectivos motores eléctricos. La ventaja de esta aeronave es que las maniobras del mismo se logran modificando la velocidad de los cuatro propulsores de manera coordinada, y el paso de las hélices es fijo. Por lo tanto, no tiene plato cíclico (*swashplate*) lo que reduce considerablemente su complejidad mecánica.

Muchas de las soluciones que se plantean al problema del control de los vehículos

aéreos de alas rotativas para su navegación, poseen un alto grado de complejidad de implementación y cálculo. Aunque el avance tecnológico permite una mayor capacidad de cálculo computacional, también aumenta la necesidad de cálculo en función de las aplicaciones. Por lo tanto es necesario conseguir estrategias que requieran el mínimo número de cálculo para cumplir la tarea de controlar la aeronave, y que posibiliten su aplicación a cualquier plataforma (aeronave), y que la capacidad de cómputo no sea un impedimento.

2.2 Contribuciones de la Tesis

- Se ha propuesto una técnica original para el control de un vehículo aéreo tipo helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos y álgebra lineal, de baja carga computacional y de buen desempeño frente a perturbaciones y errores paramétricos en el modelo.
- Se han desarrollado estrategias de control basado para el control de sistemas multi-robot basados en Espacio Nulo, permitiendo cumplir la tarea de mover coordinadamente un conjunto de 3 robots que componen el conjunto primario de investigación.
- Se ha extrapolado la propuesta de control de una formación de 3 vehículos aéreos a un conjunto compuesto por n robots. De forma que se calcula una acción de control para cada agente que se suma a la formación, sin redundancia alguna.
- Se ha incluido dentro del esquema la posible presencia de vehículos terrestres. De esta manera se controla una formación compuesta por vehículos aéreos y terrestres.
- Se ha presentado una estrategia de evasión de obstáculos original para formación de robots basados en campos potenciales, la cual mejora, y no tiene los problemas típicos de este enfoque (mínimos locales). Esta propuesta permite obtener comportamientos de formación rígida o flexible, modificando el orden de los objetivos de control sin necesidad de modificar la estructura del controlador.

2.3 Publicaciones

Durante el desarrollo de esta tesis se han producido las siguientes publicaciones:

Revista internacionales indexadas

- Claudio D. Rosales, Daniel Gandolfo, Gustavo Scaglia, Mario Jordan, Ricardo Carelli, “*Trajectory tracking of a mini four-rotor helicopter in dynamic environments - a linear algebra approach*”, ROBOTICA, CAMBRIDGE UNIV PRESS, 2014, DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S0263574714000952>.
- Daniel Gandolfo, Claudio D. Rosales, Daniel Patiño, Gustavo Scaglia, Mario Jordan “*Trajectory tracking control of PVTOL aircraft based on linear algebra theory*” Asian Journal of Control, John Wiley & Sons, Ltd., 2014, DOI: 10.1002/asjc.819.
- Claudio D. Rosales, Paulo Leica, Gustavo Scaglia, Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, *Aerial formation control based on the null-space: Experimental results*, enviado para revisión Journal of Intelligent & Robotic Systems - Springer, 2014.

Congresos internacionales

- Claudio D. Rosales, Mario Sarcinelli-Filho, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli, “*Formation control of unmanned aerial vehicles based on the null-space*”, IEEE International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014, Orlando, Florida - EEUU.
- Alexandre S. Brandao, Mario Sarcinelli-Filho, Claudio D. Rosales, Ricardo Carelli, “*3-D positioning tasks for RUAS using switched PVTOL controllers*”, IEEE International Conference on Mechatronics (ICM), 2013, Vicenza, Italia.

Congresos nacionales

- Claudio D. Rosales, Gustavo Scaglia, Mário Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, *Control de una formación aérea basado en múltiples objetivos de control y espacio nulo*, XXIV Congreso Argentino de Control Automático, 2014, C.A.B.A, Buenos Aires, Argentina.
- Claudio D. Rosales, Paulo Leica, Mário Sarcinelli-Filho, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli, *Formación de vehículos aéreos: Resultados experimentales*, VIII Jornadas Argentinas de Robótica, 2014, C.A.B.A, Buenos Aires, Argentina.
- Paulo Leica, Claudio D. Rosales, Juan M. Toibero, Flavio Roberti, Ricardo Carelli “*Estrategia basada en múltiples objetivos y espacios nulos para el control de robots*

móviles”, XV Reunión de Procesamiento de la Información y Control, 2013, San Carlos de Bariloche, Rio Negro, Argentina.

- Claudio Rosales, Gustavo Scaglia, Alexandre S. Brandao, Mario Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, “*Trajectory tracking for a four rotor mini-quadrotor*”, XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI), 2013, Fortaleza, Ceará - Brasil.
- Claudio Rosales, Gustavo Scaglia, Alexandre S. Brandao, Mario Sarcinelli-Filho, Ricardo Carelli, “*Control de trayectoria de un helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos*”, VII Jornadas Argentinas de Robótica, 2012, CABA - Argentina.
- Claudio D. Rosales, Gustavo Scaglia, Ricardo Carelli, Mario Jordan, “*Seguimiento de trayectoria de un mini-helicóptero de cuatro rotores basado en métodos numéricos*”, XIV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, RPIC, 2011, Entre Ríos - Argentina.

2.4 Organización de la Tesis

Esta tesis está constituida por seis capítulos y un apéndice, los cuales presentan el siguiente contenido:

- En el capítulo 3 se describe el estado del arte.
- En el capítulo 4 se presenta el modelo dinámico de un helicóptero de cuatro rotores.
- En el capítulo 5 se presentan un controlador dinámico para tareas de seguimiento de trayectorias y posicionamiento de un *quadrotor*. Se analiza la estabilidad de los controladores diseñados y se realizan múltiples simulaciones para evaluar su desempeño.
- En el capítulo 6 se estudia la representación de sistemas multi-robots y analiza el caso utilizado en esta tesis.
- El capítulo 7 se presenta un esquema de control para el control de una formación de múltiples robots, basados en múltiples objetivos de control y espacio nulo. En primer caso se analiza una formación compuesta por 3 robots, para luego generalizar la propuesta a n robots. También se presentan los casos posibles que existen cuando se agrega un vehículo terrestre a la formación, y se adecua el esquema para el control de dicho sistema.

-
- El capítulo 8 presenta una estrategia para evasión de obstáculos basado en campos potenciales y múltiples objetivos de control.
 - El capítulo ?? presenta las conclusiones de la tesis.

3 Estado del Arte

3.1 Introducción

Los sistemas multi-robot (MRS) se pueden definir como un conjunto de robots autónomos coordinados a través de un sistema de comunicación para conseguir tareas cooperativas [10]. El estudio de los MRS extiende los clásicos problemas de un solo robot con nuevos inconvenientes como el movimiento coordinado, descomposición de tareas y asignación de tareas, redes de comunicación, etc. Por lo tanto, esto involucra varios campos de la ciencia, sistemas distribuidos, inteligencia artificial, teoría de juegos, etc. Áreas de investigación como la comunicación entre-robots [11] o fusión de sensores [12], y muchas otras, están en auge. El objetivo de esta tesis se centra en el control de los sistemas multi-robot. Esto se refiere a los algoritmos utilizados para especificar la posición absoluta y relativa de múltiples robots que trabajan cooperativamente y las técnicas utilizadas para el control de esas posiciones durante la ejecución de la tarea.

En [13] el autor se realiza una clasificación de los sistemas multi-robots. En ella el autor realiza la clasificación de acuerdo a dos características principales, la distribución del control y el método del control.

3.2 Distribución del Control

Los sistemas de multi-robots se clasifican en función a la forma en que se realizan los cálculos de las acciones de control y de la forma en que se comunican. Estos se clasifican en control centralizado o descentralizado.

3.2.1 Control Centralizado

En este tipo de control, se tiene varios robots que dependen de una unidad central [14] [15]. Los robots adquieren datos a través de sus sensores (por ejemplo reconocen un

terreno, persiguen una pelota), y toda la información se la envían a la unidad central. Esta es la encargada de tomar las decisiones y de enviar a todos los robots comandos calculados [16] [17].

La principal ventaja de este sistema es la eficiencia a la hora de obtener soluciones, debido a la cantidad de información que almacena la unidad central [18].

La principal desventaja que presenta, dado que la unidad central estará recibiendo continuamente datos de todos los robots, pueden provocar una congestión al recibir una gran cantidad de información, y reducirse la velocidad de toma de decisiones. Además, si la unidad central falla, o deja de funcionar, dejará de operar todo el sistema por completo. Pues todos los robots pierden la capacidad de decidir. También presenta problemas de escalabilidad, debido a que el aumento del número de agentes, genera un mayor tráfico de datos y de información a procesar por la unidad central. En estos enfoques el máximo número de robots queda impuesta por las restricciones operativas del sistema de comunicación y de cómputo existente.

3.2.2 Control Descentralizado

Este enfoque, está inspirado por el fenómeno de agregación social en peces y aves [19], [20], donde cada vehículo puede comunicarse y compartir información con sus vecinos.

En éste caso, cada robot decide qué hacer por su cuenta, sin recibir órdenes de ninguna otra entidad [21], [22]. Con este tipo de control, el sistema es mucho más dinámico y veloz, pues no es necesario ni el envío ni el almacenamiento de información por parte de una unidad central. Además, si deja de funcionar un robot, todos los demás pueden seguir funcionando independientemente [23].

El diseño de los algoritmos de programación no constituye una tarea sencilla, debido a la complejidad en los protocolos de comunicación. Además, cada agente conoce una parte de la tarea y no se garantiza la optimalidad del conjunto, a raíz que no existe un agente central que optimice distribución de tareas y demás.

3.3 Métodos de Control de Formación

De acuerdo al tipo de técnica de control utilizada para cumplir con la tarea, se clasifican de la siguiente manera:

3.3.1 Múltiples Entradas, Múltiples Salidas (Multiple Input - Multiple Output, MIMO)

En este enfoque, los controladores de la formación se diseñan utilizando el modelo dinámico de toda la formación. La formación es tratada como una planta múltiples entradas y múltiples salidas. Dentro de esta arquitectura de control, todos los métodos de control moderno pueden ser aplicados al control de formación. La primera ventaja de este método es la optimalidad (el total de los estados de la formación están a disposición del controlador para su síntesis) y la estabilidad (derivadas de las técnicas de control de MIMO). Sin embargo, los algoritmos MIMO tienen un alto grado de información. Típicamente, cada agente debe conocer el total de los estados de la formación. También, estos no son robustos a fallas locales. Por ejemplo considerando una formación de vehículos aéreos, si un propulsor de una de las aeronaves falla, el controlador de la formación se vuelve inestable por completo. En [24] formula una representación mínima de los estados para los errores de la formación relativos y diseña un controlador LQR.

3.3.2 Líder-Seguidor (Leader-Follower)

Es una de las arquitecturas más estudiada en la literatura del control de sistemas multi-robots. Este utiliza un arreglo jerarquizado de controladores individuales para cada robot que reduce el control de formación en problemas de seguimientos individuales. Uno de los robots se designa como líder, con el resto de los robots designados como seguidores. Este método se caracteriza por su simplicidad y fiabilidad. Aunque no existe una realimentación explícita de los seguidores al líder, lo cual representa una desventaja significativa de este método.

En [25] y [26] se plantean dos esquemas para mantener la forma del sistema multi-robot, estos son, separación-orientación y separación-separación. El objetivo de control en el primer esquema es mantener una longitud deseada entre el líder y el seguidor, y una orientación relativa deseada como se observa en la figura 12. Los autores de [27] se plantean una variación a lo propuesto en [25], denominados separación-orientación-orientación y separación-separación-orientación. La principal diferencia entre estos trabajos radica en que en [27] se controla explícitamente la orientación, mientras que en [25] se controla implícitamente mediante linealización por retroalimentación.

En el enfoque separación-separación solo se considera la posición relativa entre los tres robots que componen el sistema. En esta arquitectura de control, se cuenta con dos robots

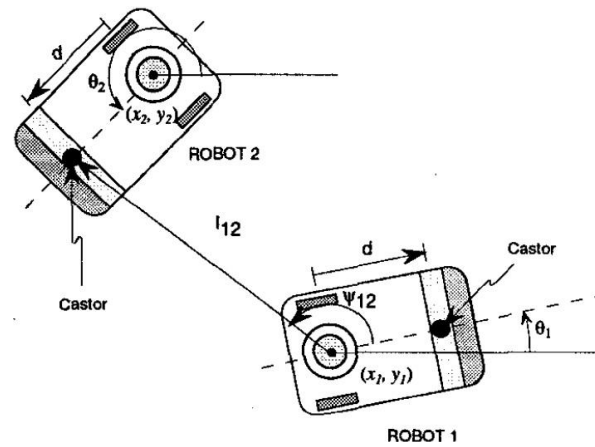


Figura 12: Notación controlador Separación-Orientación.

líderes y un seguidor; el objetivo de control es mantener una distancia deseada entre el seguidor y los dos líderes como se ve en la figura 13.

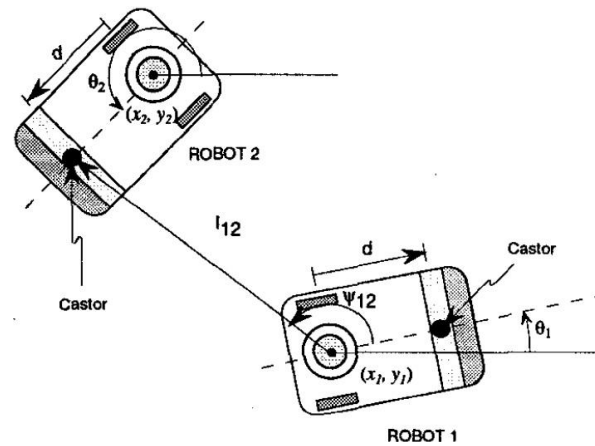


Figura 13: Notación controlador Separación-Orientación.

En [28] se presenta un esquema de control descentralizado que permite guiar una formación líder-seguidor de robots móviles uniclo para pasar a través de obstáculos estáticos, demandando un controlador por robot. Se presentan dos esquemas de evasión de obstáculos, de formación rígida y formación semi-rígida. En [29] se presenta un esquema de control centralizado líder-seguidor para una formación compuesta por un robot terrestre (líder) y un vehículo aéreo (seguidor). Se presenta el modelo cinemático de la formación y se demuestra la estabilidad asintótica del sistema de lazo cerrado.

Se ha utilizado la teoría de grafos en el control de sistemas multi-robots. Los grafos son estructuras matemáticas utilizados para modelar relaciones por parejas entre objetos de un cierto conjunto, normalmente son direccionados, que permite descomponer el problema en varios sub-problemas líder-seguidor. Un grafo se refiere a un conjunto de vértices o nodos, y un conjunto de aristas o arcos que conecta un par de vértices. En [30] se utiliza teoría

de grafos para definir el sistema y analizar sus propiedades, como son la conectividad y la estabilidad [1]. En [31] se presenta la definición de rigidez y persistencia en una formación planar (2D), en [32] se extiende el concepto para R^n con $n > 2$. Finalmente [33] aplica estos conceptos al control de una formación de vehículos aéreos descentralizada.

3.3.3 Estructura Virtual

El concepto de estructura virtual fue introducido en [34]. Este enfoque fue desarrollado para forzar a un grupo de robots a comportarse como un cuerpo rígido [35]. En estructura virtual, el controlador se deriva de tres pasos [36].

- Primero, se define la dinámica de la estructura deseada. Es decir, como deseamos que sea la estructura física del sistema y su distribución.
- Segundo, a partir del movimiento deseado de la estructura virtual, se obtienen los movimientos deseados para cada agente.
- Finalmente, controladores locales para cada agente permiten el seguimiento de las referencias.

La coordinación del comportamiento para un grupo de robots móviles es fácil y representa una ventaja de este método. La principal desventaja es la centralización de la implementación, dado que una falla pueda dejar inoperable a todo el sistema. Un enfoque relacionado es presentado en [37], donde cada robot sigue un robot virtual. El movimiento del elemento virtual es gobernado por una *función de formación* que especifica la geometría de la formación deseada. En [38] se presenta un esquema de estructura virtual, denominado *cluster space control*. En el cual se define como estructura básica un triángulo. El control de posición o seguimiento de trayectoria se hace sobre el centroide de dicha formación. La ventaja que presenta este esquema, es la facilidad de distinguir entre las variables que definen la posición de la formación y aquellas que definen la forma de la misma. Este trabajo se expandió a formaciones aéreas en [39], donde se controla a una formación compuesta por dos dirigibles. En [40] se utiliza las mismas variables para representar la formación que en [38]. En este trabajo se presenta un esquema multi-capas, donde en cada capa se le asigna un objetivo específico dentro del control de la formación; se realiza el control cinemático de cada robot móvil con compensación dinámica. En [41] se utiliza la misma representación y se la generaliza para formaciones de robots donde el número de agentes es mayor que 3 ($n > 3$), se utiliza el teorema de triangulación de

polígonos de n lados en $n - 2$ triángulos. Aunque la forma en que se realiza no es la óptima, debido a que existe redundancia en las acciones de control. Cada agente nuevo define una nueva estructura a controlar (triángulo). Se realiza el cómputo de las acciones de control para cada robot del nuevo triángulo, pero dos de los robots pertenecen a la estructura anterior y la solución que planteó el autor es no tener en cuenta estas acciones de control y solo se utilizan las correspondientes al nuevo agente.

3.3.4 Control de Formación basado en Comportamientos (Behaviour-Based Approach)

Este enfoque combina la salida de múltiples controladores diseñados para cumplir diferentes comportamientos o acciones, que pueden competir entre cada uno de ellos. La salida de control final se deriva la ponderación y la relativa importancia de cada comportamiento en ese momento. Cada comportamiento se lo define como un objetivo, como son la evasión de obstáculos, llegar a una posición deseada, seguir un camino predefinido, mantener la formación, etc. Cada agente debe cumplir su parte, para lograr que la formación logre el comportamiento deseado. Mientras este enfoque puede ser robusto en aspectos como la escalabilidad y tolerancia a fallas, el diseño de los comportamientos y demás no siempre resulta tan simple dependiendo del problema de control.

En [42] se presenta un controlador basado en comportamientos reactivos, donde se implementa una formación integrada por comportamientos de navegación que permite a un grupo de robots alcanzar objetivos de navegación, evitar peligros, y simultáneamente mantenerse en formación. En [43], el controlador de la formación basado en comportamiento se modela como un sistema dinámico no lineal, para la generación de trayectoria y evitado de obstáculos. En [44] se analizan 3 estructuras de control basado en comportamientos: sistema de control por capas (layered control system) [45], motor schema control [46] y control basado en espacio nulo (null-spaced-based behavioral control). En este trabajo se hace referencia a las características del control basado en espacio nulo y sus ventajas comparadas con los otros dos esquemas presentados. Este enfoque se deriva de los manipuladores redundantes [47], en donde se tienen infinitas soluciones para cumplir una tarea. Los autores en [48] analizan las singularidades en los algoritmos de manipuladores redundantes y propone un algoritmo donde se evitan estas singularidades. En [49] y [50] se extiende el concepto a robots móviles. Una de las características del esquema de control basado en espacio nulo es su adaptación para solucionar diferentes problemas y modificar la respuesta obtenida sin necesidad de modificar la estructura del controlador. Su principal

característica es que siempre se cumple la tarea de mayor prioridad, debido a que la solución se obtiene por mínimos cuadrados y la matriz pseudo-inversa del Jacobiano asociado al problema en cuestión, y las tareas de menor jerarquía se proyectan en el espacio nulo de dicho Jacobiano para evitar que existan conflictos entre ambas tareas. Las tareas secundarias se cumplirán siempre que no afecten a los intereses de las de mayor jerarquía.

3.3.5 Campos Potenciales

El concepto de campos potenciales se presentó en [51]. Este concepto supone al robot como una partícula sobre la cual se ejercen fuerzas que provocan su desplazamiento dentro del ambiente de trabajo. Los objetivos de control suponen fuerzas atractivas y los obstáculos fuerzas de repulsión.

Este concepto se extendió al control de formación [52], [53]. El equilibrio de las fuerzas que actúan sobre los robots tanto de atracción (objetivos de control) como de repulsión (obstáculos), fuerzan al sistema a mantener una formación mientras el mínimo global genera las trayectorias hacia el objetivo. En [54], los patrones de la formación y la trayectoria deseada para un grupo de robots, se representa mediante campos potenciales. Cada robot es atraído y se mueve a través de la trayectoria donde es mínimo el campo potencial. Se implementa la evasión de obstáculos considerando fuerzas repulsivas generadas por los obstáculos. En los casos donde la formación debe especificarse completamente se introduce líderes virtuales que crean fuerzas adicionales [55].

En [56] se analizan las limitaciones y problemas de esta propuesta. Dentro de estos, se hace mención a la existencia de los mínimos locales. Estos representan puntos del plano o espacio, donde el controlador cree haber encontrado el mínimo global de la tarea y que permite realizar la tarea, pero no lo es. En la literatura existen muchas propuestas para solucionar este inconveniente, aunque todavía no existe una solución cerrada.

3.3.6 Otras Estrategias de Control de Formación

En la literatura existen otras estrategias de control que no pueden clasificarse dentro de las realizadas anteriormente. Algunas utilizan estrategias de control específicas (control predictivo, algoritmos genéticos, etc), o enfoques diferentes a los vistos. Pero el aporte a realizar dentro de esta tesis recae sobre las clasificaciones antes mencionadas, por lo que no consideramos necesario ahondar en otras estrategias a las ya vistas.

3.4 Evasión de Obstáculos en Sistemas Multi-Robots

Para cualquier estrategia de control de formación de un sistema multi-robot, la evasión de colisión con obstáculos y con los otros miembros de la formación es crítico. Para el caso, donde el ambiente es bien conocido y predecible, una planificación de camino a priori puede utilizarse. Para ambientes más dinámicos o no estructurados, las estrategias típicas incluyen enfoques discretos y continuos. Los enfoques discretos típicamente codifican el comportamiento de evasión de obstáculos en reglas del tipo IF-THEN (si-entonces), implementado en una amplia variedad de arquitecturas [57], [58], donde una vez que se obtiene una situación de colisión, entonces se procede a alguna estrategia para evitar que suceda. Una de las primeras estrategias continuas, utilizada tanto para robots móviles como para manipuladores, es la utilización de campos potenciales para establecer fuerzas ficticias que repelen al robot del obstáculo [51], [46]; muchas mejoras para esta técnica se han propuesto para hacer frente a los inconvenientes o desventajas de esta estrategia [59], [60]. Mientras que este método asegura movimientos libres de colisión, a menudo conduce a transitorios con perturbaciones en el control de la forma de la formación. El problema principal de este enfoque son los denominados *mínimos locales*. Muchas propuestas en la literatura han desarrollado funciones potenciales de navegación para eliminar la existencia de estos [61], [62]. El inconveniente de muchas de estas propuestas es que las mismas necesariamente deben ser centralizadas por requieren el conocimiento de todo el sistema.

Cuando el mantenimiento de la forma es crítico, la función de evasión puede aplicarse al cuerpo virtual, como en [63], donde se establece un perímetro alrededor de la formación y sobre el cual pueden actuar las fuerzas de evasión de obstáculos.

En [36] se presentan otras estrategias de control existentes en la literatura para evitado de colisión, basado en control predictivo, control fuzzy y redes neuronales.

4 Modelo Dinámico de un Vehículo Aéreo

4.1 Principio de Funcionamiento

El principio de funcionamiento de un helicóptero de cuatro rotores, cuadricóptero o *quadrotor*, por su término en inglés, es bastante simple de entender. Este vehículo aéreo consiste en un cuerpo rígido tipo cruz equipado con cuatro propulsores, cuyas hélices son de paso fijo. De acuerdo a la disposición de los propulsores con respecto al sistema de referencia móvil asociado al helicóptero, se encuentran dos tipos de configuraciones: + y \times , como se aprecia en 14. Dos de los pares de propulsores giran en sentido horario y los restantes dos en sentido anti horario, de esta manera se cancela el torque que producen los rotores sobre el centro de masa.

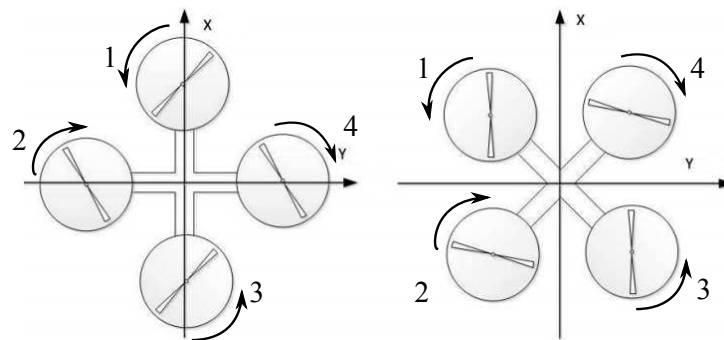


Figura 14: Configuraciones + y \times de un cuadricóptero.

Este tipo de aeronave tiene la ventaja con respecto a los helicópteros de configuración tipo rotor de cola, que no poseen plato cíclico, y todas las maniobras que éste realiza se logran variando la velocidad angular de cada uno de los propulsores. El caso más simple para entender las maniobras es utilizando la configuración +, debido a que en las maniobras de pitch y roll solo intervienen dos de los cuatro propulsores, a diferencia de la configuración \times donde en todas las maniobras necesitan las variaciones de los cuatro propulsores. Ambas configuraciones son equivalentes, el caso \times puede considerarse como

una rotación de $\pi/4$ de la configuración + sobre el eje z asociado al helicóptero.

Si se aumenta/disminuye la velocidad de los cuatro propulsores de manera conjunta se genera un movimiento vertical ascendente/descendente. Modificando la velocidad de los propulsores 2 y 4, producen variaciones en el ángulo de roll (alabeo) y consecuentemente movimientos laterales. Rotaciones del ángulo de pitch (cabeceo) y movimientos longitudinales se producen si existen variaciones en los propulsores 1 y 3. Por último, la rotación en el ángulo de yaw (guiñada) se produce como resultado de la diferencia de contra torque entre los pares de propulsores 1 – 3 y 2 – 4 [9].

Al momento de analizar el funcionamiento de este tipo de aeronave, se enfoca en la generación de las fuerzas y torques que provocan los cuatro propulsores. A partir de esto, se analiza la relación entre ellos y como hacen que el helicóptero realice todas las maniobras posibles que definen la posición del centro de masa $\xi = (x, y, z)$ y su postura $\eta = (\phi, \theta, \psi)$, pero no se analiza en la secuencia que genera estas fuerzas y torques resultantes, desde el momento que los comandos son enviados hasta el giro de las hélices.

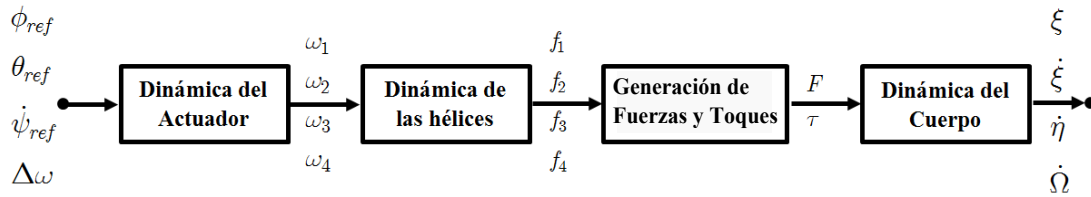


Figura 15: Esquema del modelo de un cuadricóptero.

En la fig. 15 se puede apreciar un esquema que representa al modelo completo de un helicóptero de cuatro rotores.

Las referencias depende del modelo comercial que se utilice, en el caso del *X3D-BL* de la empresa AscTec ©, las referencias son los ángulos de cabeceo (ϕ_{ref} , pitch) y alabeo (θ_{ref} , roll), la velocidad de guiñada ($\dot{\psi}_{ref}$, yaw) y un incremento proporcional en la velocidad angular en los cuatro motores ($\Delta\omega$, throttle). Y en el caso del modelo Ar.Drone 2.0 de la empresa Parrot ©, las referencias son los ángulos de *pitch* y *roll* y la velocidad de guiñada (similar al *X3D-BL*). La diferencia radica en la última referencia, la cual representa la velocidad en el eje Z con respecto al sistema de referencia inercial, de modo que si $\dot{z} = 0$, el helicóptero se mantendrá siempre a altura constante independientemente de las variaciones en las restantes referencias.

Los primeros tres bloques componen lo que se denomina el modelo de bajo nivel, que relaciona desde las referencias enviadas a la aeronave hasta la fuerzas y torques

consecuencia de los propulsores. Y el restante, es el denominado modelo de alto nivel, que normalmente se modela como un cuerpo rígido en el espacio sujeto a fuerzas y torques.

4.2 Modelado de Bajo Nivel

La primera etapa que se considera, aunque no aparece en la figura 15, es una malla de controladores PD que generan las tensiones necesarias (v_i), en función de los errores de control existentes. El esquema que se considera en el análisis se refiere a una estructura cuadricóptero tipo +, cuyas referencias coinciden con el modelo comercial *X3D-BL* de la empresa AscTec ©, aunque el enfoque es similar para el caso del modelo comercial Ar.Drone de la empresa Parrot ©.

La malla de PD genera las tensiones para cada motor, en función de los errores de control para que el helicóptero alcance las referencias de cabeceo, alabeo y velocidad de guiñada. El comando de *throttle* implica un aumento proporcional de la velocidad de los 4 motores, por lo tanto se considera de forma diferente a los otros casos.

Matemáticamente se puede representar de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -k_{d\phi}\dot{\tilde{\phi}} - k_{p\phi}\tilde{\phi} + k_{d\psi}\ddot{\tilde{\psi}} + k_{p\psi}\dot{\tilde{\psi}} + (\Delta v + V_o) \\
 v_2 &= -k_{d\theta}\dot{\tilde{\theta}} - k_{p\theta}\tilde{\theta} - k_{d\psi}\ddot{\tilde{\psi}} - k_{p\psi}\dot{\tilde{\psi}} + (\Delta v + V_o) \\
 v_3 &= k_{d\phi}\dot{\tilde{\phi}} + k_{p\phi}\tilde{\phi} + k_{d\psi}\ddot{\tilde{\psi}} + k_{p\psi}\dot{\tilde{\psi}} + (\Delta v + V_o) \\
 v_4 &= k_{d\theta}\dot{\tilde{\theta}} + k_{p\theta}\tilde{\theta} - k_{d\psi}\ddot{\tilde{\psi}} - k_{p\psi}\dot{\tilde{\psi}} + (\Delta v + V_o)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde $\tilde{\phi} = \phi_{ref} - \phi$, $\tilde{\theta} = \theta_{ref} - \theta$ y $\dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi}_{ref} - \dot{\psi}$, son los errores de control. El término V_o representa el valor de tensión tal que aplicado a cada uno de los cuatro motores, la suma del empuje de los cuatro propulsores es igual al peso del helicóptero. Para valores inferiores a este umbral, el sistema se comporta como una zona muerta, en donde aumentos de la tensión no generan cambios en la postura del helicóptero. Por ultimo el termino Δv representa el valor aplicado por el comando throttle.

La ecuación 4.1 puede expresarse,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}}_{V_i} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{A_v} \underbrace{\begin{bmatrix} k_{d\phi}\dot{\tilde{\phi}} + k_{p\phi}\tilde{\phi} \\ k_{d\theta}\dot{\tilde{\theta}} + k_{p\theta}\tilde{\theta} \\ k_{d\psi}\dot{\tilde{\psi}} + k_{p\psi}\tilde{\psi} \\ \Delta v + V_o \end{bmatrix}}_{e_i} \quad (4.2)$$

4.2.1 Modelo del Actuador

Dentro del esquema mostrado en la Fig. 15 el primer bloque es el modelo del actuador. El actuador de esta planta son los cuatro propulsores, que incluyen el conjunto motor-hélice. Normalmente se utilizan motores brushless DC, que ofrecen una mayor eficiencia que los motores DC con escobillas, incluyendo mayor torque por peso, mayor torque por watt, etc. [64]. A pesar de la complejidad electrónica en el proceso de conmutación (necesario para el funcionamiento de estos motores), estos motores se pueden modelar como los motores DC con escobillas. Por lo tanto se analiza el modelo matemático de un motor de corriente continua.

Las ecuaciones eléctricas y mecánicas que representan el esquema mecánico y eléctrico de un motor de corriente continua son,

$$\begin{aligned} V &= L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + e_b \\ \tau_m &= J_m \frac{d\omega}{dt} + B_m\omega + \tau_l \end{aligned}$$

Donde V es la tensión aplicada al motor, $i(t)$ es la corriente eléctrica, $e_b = K_b\omega$ es la fuerza contraelectromotriz, K_b es la constante de la fuerza contraelectromotriz, $\tau_m = K_m i(t)$ es el par motor, K_m es la constante de torque, ω es la velocidad angular del eje del motor, $B_m\omega$ representa el par fricción, B_m es la constante de fricción y τ_l es el torque producido por la carga en el eje del motor. Las constantes L, R, J_m representan la inductancia, la resistencia y el momento de inercia del motor. Suponiendo que la constante eléctrica es mucho menor que la constante mecánica, resulta

$$J_m\dot{\omega} + (B_m + \frac{K_m K_b}{R})\omega = \frac{K_m}{R}V - \tau_l. \quad (4.3)$$

La carga del motor es la hélice del propulsor, por esto se considera la relación existente entre ésta y el empuje y torque generado. La hélice es el transductor que relaciona el movimiento rotacional del motor con el empuje y torque generado por el propulsor.

De [82] se puede observar la relación existente entre la hélice y el movimiento rotacional del motor. Existen dos relaciones aerodinámicas de las hélices que son de gran interés, la generación de una fuerza F_{as} a lo largo del eje de rotación y el torque T_{as} generado alrededor del eje de rotación. Cuando la velocidad de las hélices alcanzan el estado estacionario, F_{as} y T_{as} se puede calcular como [83]

$$F_{as} = \frac{N}{6} \rho C_l b \omega^2 (R_2^3 - R_1^3) \quad (4.4)$$

$$F_{as} = C_f \omega^2 \quad (4.5)$$

$$T_{as} = -\frac{N}{8} \rho C_d b \omega^2 (R_2^4 - R_1^4) \quad (4.6)$$

$$T_{as} = C_t \omega^2 \quad (4.7)$$

Las ecuaciones (4.4) y (4.6) involucran varios parámetros dependientes de la hélice que se esté utilizando (R_1 y R_2 son los radios internos y exterior, N es el número de palas, b largo de las palas, y por último las constantes de las hélices C_l y C_d), la densidad del aire ρ y la velocidad angular del motor ω .

Se puede agrupar todas estas constantes en una sola C_f (fuerza) y C_t (torque). De (4.5),(4.7) se puede apreciar la relación cuadrática entre la velocidad de angular de los motores, el empuje y torque producido por las hélices.

La relación entre la fuerza de los cuatro motores, y las fuerzas y torques proyectados sobres los tres ejes (x, y, z)

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mathcal{R} \mathcal{A}_t \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \mathcal{A}_r \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix},$$

\mathcal{R} es una matriz de rotación que relaciona el sistema de referencia inercial con el

sistema de referencia móvil acoplado al helicóptero, dado por

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi \\ s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

donde $c_{(\cdot)}$ representa $\cos(\cdot)$, $s_{(\cdot)}$ representa $\sin(\cdot)$. Las matrices \mathcal{A}_t y \mathcal{A}_r , relacionan el nivel de empuje y el torque aplicado al cuerpo del cuadricóptero y se definen de la siguiente manera

$$\mathcal{A}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{A}_r = \begin{bmatrix} -l & 0 & l & 0 \\ 0 & l & 0 & -l \\ C_{f,t} & -C_{f,t} & C_{f,t} & -C_{f,t} \end{bmatrix}.$$

La característica principal del cuadricóptero es que las cuatro fuerzas de los propulsores apuntan en el eje ${}^b z$ del sistema de referencia del helicóptero, como se puede apreciar en \mathcal{A}_t . En \mathcal{A}_r , l representa la distancia entre el centro de masa y el eje del motor, y $C_{f,t}$ es la relación torque-empuje ($C_{f,t} = \frac{C_t}{C_f}$).

4.2.2 Modelado

A continuación resta realizar la combinación entre todos los bloques mencionados, con el objetivo de poder obtener el modelo de bajo nivel.

Se determina la velocidad angular de cada uno de los cuatro motores de forma tal que la suma de la fuerza ascendente de los cuatro propulsores sea igual al peso del helicóptero.

$$F_i = \frac{mg}{4} \quad (4.9)$$

De 4.5

$$\omega_{i,o} = \sqrt{\frac{mg}{4C_f}}, \quad (4.10)$$

El valor de tensión aplicado a los motores tales que su velocidad angular de rotación sea $\omega_i = \omega_{i,o}$ se lo denomina V_o , como se mencionó en 4.1.

Analizando 4.2 es posible establecer una relación entre el error existente y la tensión que

se aplica a cada uno de los cuatro motores.

$$V_i = A_v e_i \rightarrow e_i = A_v^{-1} V_i \quad (4.11)$$

Donde,

$$e_i = \underbrace{\begin{bmatrix} k_{d\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{d\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{d\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{K_d} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\phi}} \\ \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{\psi}} \\ \Delta v \end{bmatrix}}_{\dot{e}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{p\phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{p\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{p\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{K_p} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\phi} \\ \tilde{\theta} \\ \tilde{\psi} \\ \Delta v + V_o \end{bmatrix}}_e \quad (4.12)$$

A continuación se analiza la ecuación que modela el comportamiento de cada uno de los cuatro motores, para eso recordamos la ecuación 4.3 y teniendo en cuenta que la carga del motor es la hélice acoplada a su eje, resulta que $\tau_l = C_t \omega_i^2$.

$$J_m \dot{\omega}_i + (B_m + \frac{K_m K_b}{R}) \omega_i = \frac{K_m}{R} V - C_t \omega_i^2 \quad (4.13)$$

De 4.5 es posible obtener las siguientes relaciones,

$$\omega_i = \frac{\sqrt{F_i}}{\sqrt{C_f}} \quad (4.14)$$

$$\dot{\omega}_i = \frac{\dot{\sqrt{F_i}}}{\sqrt{C_f}} \quad (4.15)$$

$$\omega_i^2 = \frac{F_i}{C_f} \quad (4.16)$$

Reemplazando 4.14 y 4.15 en 4.13 resulta,

$$\frac{R J_m}{K_m} \frac{\dot{\sqrt{F_i}}}{\sqrt{C_f}} + (\frac{R B_m}{K_m} + K_m) \frac{\sqrt{F_i}}{\sqrt{C_f}} + \frac{R C_t}{K_m C_f} F_i = V \quad (4.17)$$

Agrupando las constantes,

$$U_1 \dot{\sqrt{F_i}} + U_2 \sqrt{F_i} + U_3 F_i = V \quad (4.18)$$

Donde,

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{RJ_m}{K_m \sqrt{C_f}} \\ U_2 &= \frac{B_m R + K_m K_b}{R \sqrt{C_f}} \\ U_3 &= \frac{RC_t}{K_m C_f} \end{aligned}$$

Combinando 4.11 y 4.18,

$$e = K_p^{-1} \left\{ A_v^{-1} \left[U_1 \sqrt{F} + U_2 \sqrt{F} + U_3 F \right] - K_d \dot{e} \right\} = T \bar{\Theta} \quad (4.19)$$

Donde,

$$\begin{aligned} e &= [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]^T \\ F &= [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4]^T \end{aligned}$$

Debido a cuestiones prácticas es correcto realizar la siguiente suposición,

$$\begin{aligned} k_{p\theta} &= k_{p\phi} \\ k_{d\theta} &= k_{d\phi} \end{aligned}$$

Desarrollando 4.19,

$$T^T = \begin{bmatrix} \sqrt{F_3} - \sqrt{F_1} & \sqrt{F_2} - \sqrt{F_4} & 0 & 0 \\ \sqrt{F_3} - \sqrt{F_1} & \sqrt{F_2} - \sqrt{F_4} & 0 & 0 \\ F_3 - F_1 & F_2 - F_4 & 0 & 0 \\ -\dot{\phi} & -\dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{F_1} + \sqrt{F_3} - \sqrt{F_2} - \sqrt{F_4} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{F_1} + \sqrt{F_3} - \sqrt{F_2} - \sqrt{F_4} & 0 \\ 0 & 0 & F_1 + F_3 - F_2 - F_4 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3} + \sqrt{F_4} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} + \sqrt{F_3} + \sqrt{F_4} \\ 0 & 0 & 0 & F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\Theta}^T = \begin{bmatrix} \frac{U_1}{2k_{p\phi}} & \frac{U_2}{2k_{p\phi}} & \frac{U_3}{2k_{p\phi}} & \frac{k_{d\phi}}{2k_{p\phi}} & \frac{U_1}{4k_{p\psi}} & \frac{U_2}{4k_{p\psi}} & \frac{U_3}{4k_{p\psi}} & \frac{k_{d\psi}}{4k_{p\psi}} & \frac{U_1}{4} & \frac{U_2}{4} & \frac{U_3}{4} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

4.2.3 Identificación

Una vez definido el modelo propuesto resta identificar los once parámetros que resultaron del mismo, para ello se expresa de forma matricial el modelo 4.19,

$$e = T\bar{\Theta} \quad (4.21)$$

La matriz T es la matriz de regresión, la cual está compuesta por señales conocidas, dado que se montará el vehículo sobre un sensor de fuerza y torque en los 3 ejes (x, y, z) , y $\bar{\Theta}$ son los parámetros a identificar del modelo y e representa un vector de salida del vector de regresión. Los valores de error se suponen como la diferencia entre el comando enviado al helicóptero y su posición actual. Para el proceso de identificación éste está sujeto e inmóvil sobre el sensor de fuerza, por lo que se puede suponer que e es igual al comando enviado.

Para el proceso de identificación se capturan las mediciones experimentales en diferentes instantes de tiempo y se guardan de la siguiente manera,

$$e_m = \begin{bmatrix} e_{(1)} \\ \vdots \\ e_{(q)} \end{bmatrix}, T_m = \begin{bmatrix} T_{(1)} \\ \vdots \\ T_{(q)} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Donde $e_{(k)}$ es el valor del comando en el instante k-ésimo y su correspondiente $T_{(K)}$ valor de la matriz de señales. Luego se obtiene,

$$e_m = T_m \bar{\Theta} \quad (4.23)$$

La estima de los parámetros se obtiene por mínimos cuadrados [84],

$$\bar{\Theta} = (T_m^T T_m)^{-1} T_m^T e_m \quad (4.24)$$

Las señales necesarias de excitación son importantes debido a que definen el grado de exactitud de los resultados obtenidos.

4.3 Modelo de alto Nivel: Modelo Dinámico

En esta sección, se obtiene el modelo dinámico de un helicóptero de cuatro rotores mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se puede observar el desarrollo completo en [70] y [9].

Las ecuaciones generalizadas de un vehículo aéreo se pueden escribir como:

$$q = (x, y, z, \phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^6 \quad (4.25)$$

donde $\xi = (x, y, z)$ denota la posición del centro de masa del helicóptero referido al sistema inercial $\langle e \rangle$, y $\eta = (\phi, \theta, \psi) \in \mathbb{R}^3$ son los ángulos de Euler, ϕ es denominado el ángulo de cabeceo (pitch), θ es el ángulo de alabeo (roll) y ψ es el ángulo de guiñada (yaw) en el sistema de referencia espacial $\langle s \rangle$, donde $(-\pi \leq \psi \leq \pi)$, $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$ y $(-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2)$ representan la orientación del quadricóptero (Ver Fig.16).

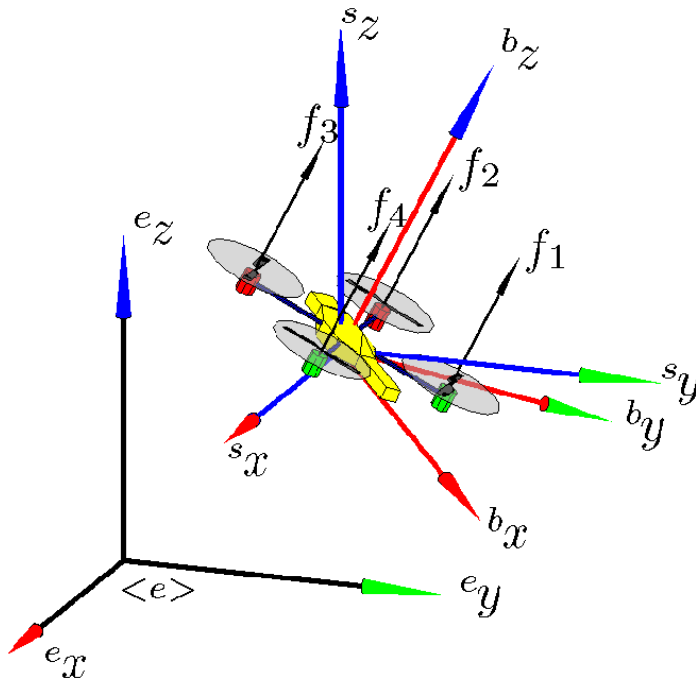


Figura 16: Modelo del quadrotor y los sistemas de referencias considerados, e_i , s_i and b_i representan los sistemas de referencia inercial, espacial y del cuerpo rígido, respectivamente.

El modelo obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange se basa en las siguientes suposiciones [85]

- La estructura es rígida;
- La estructura es simétrica;
- El centro de gravedad y el origen del sistema de referencia móvil asociado a la aeronave son coincidentes;
- Las hélices son rígidas;

- El empuje y la fricción son proporcionales al cuadrado de la velocidad de los propulsores

Definiendo el Lagrangiano:

$$L_{(q,\dot{q})} = T_{trans} + T_{rot} - U \quad (4.26)$$

Donde $T_{trans} = \frac{m}{2}\dot{\xi}^T\dot{\xi}$ es la energía cinética traslacional, $T_{rot} = \frac{1}{2}\omega^T I \omega$ es la energía cinética rotacional, $U = mgz$ es la energía potencial del sistema, z es la altura del vehículo, m denota la masa del helicóptero, ω es el vector que representa las velocidades angulares con respecto al sistema de referencia $\langle b \rangle$, g es la aceleración de la gravedad e I es la matriz de inercia.

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Teniendo en cuenta las suposiciones mencionadas anteriormente, la matriz 4.27 resultaría una matriz diagonal, y los valores de inercia cruzados serían nulos.

El vector velocidad angular ω respecto a los ejes de coordenadas del cuerpo se relaciona con las velocidades generalizadas (en donde los ángulos de Euler son válidos) utilizando una relación cinemática estándar,

$$\dot{\eta} = W_{\eta}^{-1}\omega \quad (4.28)$$

donde

$$W_{\eta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & 1 \\ \cos\theta \sin\psi & \cos(\psi) & 0 \\ \cos\theta \cos\psi & \sin(\psi) & 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

definiendo

$$J = J_{(\eta)} = W_{\eta}^T I W_{\eta} \quad (4.30)$$

tal que,

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T J \dot{\eta} \quad (4.31)$$

La matriz J actúa como matriz de inercia para la energía total del helicóptero expresada en términos de las coordenadas generalizadas η . El modelo dinámico completo del helicóptero es obtenido de las ecuaciones de Euler-Lagrange con las fuerzas generalizadas externas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} F_\xi \\ \tau \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

donde $F_\xi = R\hat{F} \in \mathfrak{R}^3$ es la fuerza traslacional aplicada al vehículo causada por la entrada de control principal (el empuje de los cuatro rotores) y R es la matriz de rotación $R_{(\phi, \theta, \psi)} \in SO(3)$ que representa la orientación del helicóptero que lo relacionada al sistema inercial fijo, y $\tau \in \mathfrak{R}^3$ representa a los momentos aplicados al cuerpo rígido (τ_ϕ , τ_θ y τ_ψ).

La principal entrada de control es el empuje de los cuatro propulsores

$$\hat{F} = [0 \ 0 \ u]^T, \quad (4.33)$$

donde,

$$u = \sum_{i=1}^4 f_i \quad ; \quad f_i = C_{f_i} \omega_i^2 \quad \text{para } i = 1, \dots, 4 \quad C_{f_i} > 0 \quad (4.34)$$

El parámetro k_i es una constante función de las características de la hélice como de la densidad del aire [86], y ω_i es la velocidad angular del motor i -ésimo.

Los momentos o pares generalizados son:

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F_3 - F_1)l \\ (F_2 - F_4)l \\ \sum_{i=0}^4 \tau_{Mi} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Donde l representa la distancia ente el propulsor y el centro de gravedad, y τ_{Mi} es el torque producido por el motor M_i , $i = 1, \dots, 4$ alrededor del centro de gravedad del

vehículo.

Como el Lagrangiano no tiene términos que combinen $\dot{\xi}$ con $\dot{\eta}$, las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden ser divididas en la dinámica para las coordenadas ξ y para las coordenadas de η

$$m\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = F_{\xi} \quad (4.36)$$

$$J\ddot{\eta} + \dot{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}) = \tau. \quad (4.37)$$

Se definen los términos de Coriolis que contienen los efectos giroscópicos y centrífugos como

$$C_{(\eta, \dot{\eta})} \dot{\eta} = \dot{J}\dot{\eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T J \dot{\eta}), \quad (4.38)$$

se obtiene

$$m\ddot{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix} = F_{\xi} \\ J\ddot{\eta} + C_{(\eta, \dot{\eta})} \dot{\eta} = \tau. \quad (4.39)$$

El modelo 4.39 puede expresarse de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} mI_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_{(\eta, \dot{\eta})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G(g) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\xi} \\ \tau \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{\xi} \\ D_{\tau} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$G(g) = [0 \ 0 \ mg]^T$ es el vector de fuerza gravitatorio. Los vectores D representan al vector de disturbios y de fuerzas de fricción que actúan sobre la aeronave, el cual incluye los efectos aerodinámicos del fuselaje, las perturbaciones a causa de viento, efecto del suelo entre otros. Por simplicidad matemática, la ecuación 4.40 se puede representar como

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G = \tau + D \quad (4.41)$$

Este modelo tiene la misma estructura que los obtenidos por Euler-Lagrange para los manipuladores robóticos. De estos se derivan las siguientes propiedades

- $M(q)$ es simétrica y definida positiva;
- $M(q)^{-1}$ existe y también es definida positiva;
- $C(q, 0) = 0 \forall q \in \mathbb{R}^3$;
- $N = \dot{M} - 2C = \underline{\dot{q}}^T \frac{\partial M}{\partial q}$ es anti-simétrica si $C(q, \dot{q})$ es obtenida a través de los símbolos de Christofel.

Para simplificar el modelo, se propone el siguiente cambio de las variables de entrada

$$\tau = C_{(\eta, \dot{\eta})} \dot{\eta} + J\tilde{\tau} \quad (4.42)$$

donde $\tilde{\tau} = [\tilde{\tau}_\phi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\psi]$, son las nuevas entradas de control. Por lo tanto

$$\ddot{\eta} = \tilde{\tau}. \quad (4.43)$$

Finalmente resulta:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi)u \\ m\ddot{y} &= (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \cos \psi \sin \phi)u \\ m\ddot{z} &= u \cos \theta \cos \phi - mg \\ \ddot{\phi} &= \tilde{\tau}_\phi \\ \ddot{\theta} &= \tilde{\tau}_\theta \\ \ddot{\psi} &= \tilde{\tau}_\psi \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde x e y son las coordenadas en el plano horizontal y z es la posición vertical, $\tilde{\tau}_\phi$, $\tilde{\tau}_\theta$ y $\tilde{\tau}_\psi$ son los momentos de roll, pitch y yaw respectivamente, que están relacionados con los momentos generalizados τ_ϕ , τ_θ and τ_ψ por la Eq. 4.42.

5 *Seguimiento de Trayectoria de un helicóptero de 4 rotores*

5.1 Introducción

En el ultimo tiempo, los esfuerzos relacionados con el control de los vehículos aéreos autónomos (UAV, Unmanned aerial vehicle o UAS, Unmanned aerial system) ha presentado un gran crecimiento. Al comienzo del desarrollo de esta disciplina la mayoría de las aplicaciones desenvueltas se debían al campo militar, pero con el devenir de los años cada vez es mayor el número de aplicaciones civiles, tales como inspección de grandes áreas en aplicaciones de seguridad publica [7], control de incendios forestales [87], transporte cooperativo de cargas con múltiples vehículos aéreos [3], servicio de inspección de lineas de transmisión eléctricas [88], fotogrametría [89], intervención en ambientes hostiles, mantenimiento de estructuras y agricultura de precisión [90], [91]. En todos estos caso, el uso de un UAV es extremadamente ventajoso, comparado con el uso de uno o varios vehículos terrestres no tripulados (UGV, Unmanned Ground Vehicles), debido a su movilidad tridimensional.

Los vehículos aéreos autónomos pueden clasificarse en tres grandes grupos: De alas fijas (tipo avión), alas rotativas (tipo helicóptero) y más livianos que el aire. La mayor ventaja de los vehículos de alas rotativas sobre los de alas fijas es la capacidad de vuelo estacionario y de movilidad omnidireccional. Una desventaja es, sin embargo, un consumo de energía relativamente alto durante el vuelo.

Dentro de la clasificación de los vehículos de alas rotativas, los helicópteros de cuatro rotores o *quadrotor* (por su nombre en inglés) son más simple y fácil de construir en comparación a los helicópteros de rotor de cola, debido a que sólo se los controla variando la velocidad angular de cada motor.

De acuerdo con [65], hay dos enfoques pueden adoptarse para modelar un helicóptero de miniatura, que son el modelado basado en ecuaciones físicas y la otra basado en sistemas

de identificación. La primera utiliza las ecuaciones de movimiento para representar el sistema físico, mientras que el otro estima la dinámica del modelo del sistema basado en los datos correspondientes y su respuesta frente a valores de entradas conocidas. Es importante mencionar que tales enfoques no son mutuamente excluyentes, y muchas veces es común el uso de uno para complementar el otro [92], [93].

En la literatura científica diferentes estrategias se han propuesto para el control de dichas aeronaves, algunas de éstas basadas en técnicas de linealización [94], [95]. En [96] se presenta un modelo del sistema incluyendo motores DC, además se utilizan funciones de Lyapunov para el control no lineal para la estabilización de la orientación de un helicóptero de cuatro rotores, se incluye la comparación del comportamiento del sistema de tiempo real con las correspondientes simulaciones.

Un estudio meticuloso sobre los efectos ignorados, tales como ondulaciones y mal modelado de la hélice, fue presentado en [97]. En [98], los autores obtienen el modelo de la propulsión que se incluye en el esquema de control. A partir de experimentos reales con helicópteros y quadrotors, también concluyeron que las fuerzas y torques aerodinámicos para robots *VTOL* de menos de 20 kg, pueden aproximarse por simple ecuaciones algebraicas. En [99], se desarrolla un esquema de control no lineal de tiempo real de saturaciones anidadas basado en criterios de estabilidad de Lyapunov, donde cada sistema de estados es secuencialmente estabilizado a través de amplias regiones de estabilidad, esto logra maniobras más agresivas y mejor rechazo a las perturbaciones. Después en [100], se compara su control no lineal con un controlador lineal LQR, que presenta problemas de estabilidad cuando el sistema está lejos de su punto de operación. Es importante mencionar que se utiliza en este trabajo las ecuaciones de Euler-Lagrange para el modelado del mini-helicóptero. Otras propuestas utilizan técnicas de backstepping, como en [72, 101].

En este capítulo se presente una técnica de control capaz de seguir trayectorias continuas por partes, con derivadas continuas por partes. Este nuevo enfoque de control presenta la originalidad se basa en aplicar métodos numéricos y álgebra lineal para el seguimiento de trayectorias de un quadrotor. La filosofía del mismo es la siguiente, conociendo el valor del estado próximo deseado, es posible encontrar el valor para las acciones de control que comanden el sistema para moverse del estado actual al estado próximo.

La contribución principal de este trabajo radica en que la misma está basada en conceptos de fácil entendimiento, requiriendo solo conceptos básicos de álgebra lineal y

métodos numéricos. Por lo tanto la ley de control será de fácil comprensión por la mayoría de la comunidad científica, comparado con otras propuestas que requieren herramientas matemáticas más complejas [70, 72]. También en comparación con otras propuestas [73], [74], el controlador necesita realizar solo operaciones algebraicas y resolver un sistema de ecuaciones lineales en cada periodo de muestreo, evitando cálculos complejos. Esto da ventaja a nuestra propuesta para aplicaciones on-board, donde la capacidad computacional es reducida. La principal ventaja es que el diseño está realizado sobre ecuaciones en tiempo discreto, lo que lo hace muy simple de implementar en sistemas computacionales. Esta metodología está basada en la definición de trayectorias de referencia en términos de un subconjunto de variables de estado, y determinando los valores de referencias para las restantes variables. Estas variables de estado se encuentra analizando las condiciones para que el sistema tenga siempre solución exacta. Por lo tanto las acciones de control se encuentran resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. En [102], [103] and [104], se introduce el control basado en álgebra lineal y los métodos numéricos. Este esquema de control permite tareas de seguimiento de trayectoria y de posicionamiento, porque solo depende del valor de la referencia.

5.2 Diseño del Controlador

5.2.1 Planteo del Problema

El análisis del siguiente controlador está basado en el modelo dinámico de un helicóptero presentado en el capítulo 4.

Considerando la ecuación diferencial,

$$\dot{y} = f_{(y,t)} \quad , \quad y(0) = y_0 \quad (5.1)$$

con el objetivo de determinar el valor de $y(t)$ en instantes discretos de tiempo $t = nT_o$ (donde T_o es el periodo de muestreo y $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$), la variable $y(t)$ para $t = nT_o$, se simboliza como $y_{(n)}$. Por lo tanto, si es necesario calcular $y_{(n+1)}$ a partir del valor conocido de $y_{(n)}$, la ecuación 5.1 debe integrarse en el intervalo $nT_o \leq t \leq (n+1)T_o$, como

$$y_{(n+1)} = y_{(n)} + \int_{nT_o}^{(n+1)T_o} f_{(y,t)} dt \quad (5.2)$$

Un valor aproximado de $y_{(n+1)}$ puede obtenerse utilizando métodos numéricos para

aproximar la integral del miembro derecho de 5.2. Por esto, se puede calcular

$$y_{(n+1)} \cong y_{(n)} + T_o f_{(y_{(n)}, t_{(n)})}, \quad (5.3)$$

que es denominada como aproximación de Euler. Aunque existen otros métodos numéricos para aproximar la integral de la ecuación 5.2, se utiliza la aproximación de Euler para obtener el modelo dinámico discreto del *quadrotor*.

Basado en este modelo, se obtendrán las acciones de control óptimas que permitan que el helicóptero siga un camino previamente establecido.

5.2.2 Seguimiento de Trayectoria y Posicionamiento

En esta sección, se diseñará una ley de control capaz de generar las señales de control $[u, \tilde{\tau}_\phi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\psi]$, con el objetivo de hacer que la posición del helicóptero $[X_{(t)}, Y_{(t)}, Z_{(t)}, \Psi_{(t)}]$, siga la trayectoria deseada $[X_{d(t)}, Y_{d(t)}, Z_{d(t)}, \Psi_{d(t)}]$. La relación entre los pares generalizados y las nuevas entradas ($\tilde{\tau}$) esta expresada en 4.42.

El primer paso en el diseño del controlador implica expresar el modelo de 4.44 en variables de estado como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{u}{m} \sin x_9 \\ x_4 \\ \frac{u}{m} \cos x_9 \sin x_7 \\ x_6 \\ \frac{u}{m} \cos x_9 \cos x_7 - g \\ x_8 \\ \tilde{\tau}_\phi \\ x_{10} \\ \tilde{\tau}_\theta \\ x_{12} \\ \tilde{\tau}_\psi \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Utilizando la aproximación de Euler para discretizar el sistema de ecuaciones anterior, resulta

$$\begin{aligned}
x_{1(n+1)} &= x_{1(n)} + x_{2(n)} T_o \\
x_{2(n+1)} &= x_{2(n)} - \frac{u(n)}{m} \sin x_{9(n)} T_o \\
x_{3(n+1)} &= x_{3(n)} + x_{4(n)} T_o \\
x_{4(n+1)} &= x_{4(n)} + \frac{u(n)}{m} \cos x_{9(n)} \sin x_{7(n)} T_o \\
x_{5(n+1)} &= x_{5(n)} + x_{6(n)} T_o \\
x_{6(n+1)} &= x_{6(n)} + \frac{u(n)}{m} \cos x_{9(n)} \cos x_{7(n)} T_o - g T_o \\
x_{7(n+1)} &= x_{7(n)} + x_{8(n)} T_o \\
x_{8(n+1)} &= x_{8(n)} + \tilde{\tau}_\phi(n) T_o \\
x_{9(n+1)} &= x_{9(n)} + x_{10(n)} T_o \\
x_{10(n+1)} &= x_{10(n)} + \tilde{\tau}_\theta(n) T_o \\
x_{11(n+1)} &= x_{11(n)} + x_{12(n)} T_o \\
x_{12(n+1)} &= x_{12(n)} + \tilde{\tau}_\psi(n) T_o
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Si se conoce la trayectoria deseada $[X_{d(n+1)}, Y_{d(n+1)}, Z_{d(n+1)}, \Psi_{d(n+1)}]^T$, entonces se podría tener en cuenta para computar las acciones de control requeridas $[u, \tilde{\tau}_\phi, \tilde{\tau}_\theta, \tilde{\tau}_\psi]^T$, de forma tal que la posición del helicóptero evolucione de su posición inicial a la trayectoria deseada.

Expresando 5.5 de forma matricial y operando matemáticamente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{T_o}{m} \sin x_{9(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T_o}{m} \cos x_{9(n)} \sin x_{7(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{T_o}{m} \cos x_{9(n)} \cos x_{7(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_o \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u(n) \\ \tilde{\tau}_\phi(n) \\ \tilde{\tau}_\theta(n) \\ \tilde{\tau}_\psi(n) \end{bmatrix}}_w = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{2(n+1)} - x_{2(n)} \\ x_{4(n+1)} - x_{4(n)} \\ x_{6(n+1)} - x_{6(n)} + g T_o \\ x_{8(n+1)} - x_{8(n)} \\ x_{10(n+1)} - x_{10(n)} \\ x_{12(n+1)} - x_{12(n)} \\ x_{1(n+1)} - x_{1(n)} - T_o x_{2(n)} \\ x_{3(n+1)} - x_{3(n)} - T_o x_{4(n)} \\ x_{5(n+1)} - x_{5(n)} - T_o x_{6(n)} \\ x_{7(n+1)} - x_{7(n)} - T_o x_{8(n)} \\ x_{9(n+1)} - x_{9(n)} - T_o x_{10(n)} \\ x_{11(n+1)} - x_{11(n)} - T_o x_{12(n)} \end{bmatrix}}_b, \tag{5.6}$$

en forma compacta se puede expresar como

$$A\mathbf{w} = b. \quad (5.7)$$

La ecuación 5.6 representa un sistema de ecuaciones lineales que permite calcular las acciones de control (\mathbf{w}) en cada periodo de muestreo, tal que posibilite al *quadrotor* alcanzar la trayectoria deseada. Ahora es necesario expresar las condiciones para que este sistema siempre tenga solución exacta. La primer condición para el sistema 5.6 es que el sub-sistema de 6 y 4 incógnitas en 5.8 tenga solución exacta.

$$\begin{bmatrix} -\sin x_{9(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \cos x_{9(n)} \sin x_{7(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \cos x_{9(n)} \cos x_{7(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u/m \\ \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\psi \end{bmatrix} = \frac{1}{T_o} \begin{bmatrix} x_{2(n+1)} - x_{2(n)} \\ x_{4(n+1)} - x_{4(n)} \\ x_{6(n+1)} - x_{6(n)} + gT_o \\ x_{8(n+1)} - x_{8(n)} \\ x_{10(n+1)} - x_{10(n)} \\ x_{12(n+1)} - x_{12(n)} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

De 5.9 se puede concluir que estas condiciones están dadas por 5.10 y 5.11

$$\begin{bmatrix} -\sin x_{9(n)} \\ \cos x_{9(n)} \sin x_{7(n)} \\ \cos x_{9(n)} \cos x_{7(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u/m \end{bmatrix} = \frac{1}{T_o} \begin{bmatrix} x_{2(n+1)} - x_{2(n)} \\ x_{4(n+1)} - x_{4(n)} \\ x_{6(n+1)} - x_{6(n)} + gT_o \end{bmatrix} = \frac{1}{T_o} \begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_6 + gT_o \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\tan x_{7_{ez}} = \frac{\Delta x_4}{\Delta x_6 + gT_o} \quad (5.10)$$

$$\tan x_{9_{ez}} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_4} \sin x_{7_{ez}} \quad (5.11)$$

De las ecuaciones 5.10 y 5.11 se obtienen las variables de referencia $x_{7_{ez}}$ y $x_{9_{ez}}$ ($_{ez}$ hace referencia a las orientaciones necesarias para que los errores de control tiendan a cero, del inglés *zero error*), de modo que el sistema de ecuaciones 5.6 tenga solución exacta y así el *quadrotor* siga la trayectoria de referencia. Estas variables representan las orientaciones necesarias para hacer que el error de seguimiento tienda a cero, y los valores de referencias

para los ángulos de cabeceo o pitch ($x_{7ez} = x_{7d(n+1)}$) y alabeo o roll ($x_{9ez} = x_{9d(n+1)}$), como se muestra en la demostración de convergencia a cero de los errores de control.

Además, de 5.6 es posible notar que las filas de b correspondientes con las filas nulas de A , deben ser iguales a cero. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} x_{2(n)} \\ x_{4(n)} \\ x_{6(n)} \\ x_{8(n)} \\ x_{10(n)} \\ x_{12(n)} \end{bmatrix} = \frac{1}{T_o} \begin{bmatrix} x_{1ref(n+1)} - x_{1(n)} \\ x_{3ref(n+1)} - x_{3(n)} \\ x_{5ref(n+1)} - x_{5(n)} \\ x_{7ez} - x_{7(n)} \\ x_{9ez} - x_{9(n)} \\ x_{11ref(n+1)} - x_{11(n)} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

De la ecuación anterior, se obtienen las referencias de velocidad que le posibilitan al helicóptero seguir la trayectoria deseada. Con el objetivo de que los errores de control tiendan a cero, se definen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} x_{1ref(n+1)} &= x_{1d(n+1)} - k_{x1}(x_{1d(n)} - x_{1(n)}) \\ x_{3ref(n+1)} &= x_{3d(n+1)} - k_{x3}(x_{3d(n)} - x_{3(n)}) \\ x_{5ref(n+1)} &= x_{5d(n+1)} - k_{x5}(x_{5d(n)} - x_{5(n)}) \\ x_{7ref(n+1)} &= x_{7ez(n+1)} - k_{x7}(x_{7ez(n)} - x_{7(n)}) \\ x_{9ref(n+1)} &= x_{9ez(n+1)} - k_{x9}(x_{9ez(n)} - x_{9(n)}) \\ x_{11ref(n+1)} &= x_{11d(n+1)} - k_{x11}(x_{11d(n)} - x_{11(n)}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde $0 < k_{x1}, k_{x3}, k_{x5}, k_{x7}, k_{x9}, k_{x11} < 1$.

Remplazando 5.13 en 5.12, se obtienen los valores de referencias de velocidad necesarios que hacen que los errores de control tiendan a cero. Estos valores son valores deseados que permiten seguir la trayectoria correctamente, y son denotados por el sub-índice “ d ”. Esto último es una ventaja importante de la técnica de control presentada, con respecto a la mayoría de los controladores de seguimiento de trayectoria existentes en la literatura, debido a que la estrategia calcula intrínsecamente las velocidades de referencia, y no es necesario tener como referencia la derivada temporal de la trayectoria deseada.

$$\begin{aligned}
x_{2d(n+1)} &= \frac{(x_{1d(n+1)} - k_{x1}(x_{1d(n)} - x_{1(n)})) - x_{1(n)}}{T_o} \\
x_{4d(n+1)} &= \frac{(x_{3d(n+1)} - k_{x3}(x_{3d(n)} - x_{3(n)})) - x_{3(n)}}{T_o} \\
x_{6d(n+1)} &= \frac{(x_{5d(n+1)} - k_{x5}(x_{5d(n)} - x_{5(n)})) - x_{5(n)}}{T_o} \\
x_{8d(n+1)} &= \frac{(x_{7ez(n+1)} - k_{x7}(x_{7ez(n)} - x_{7(n)})) - x_{7(n)}}{T_o} \\
x_{10d(n+1)} &= \frac{(x_{9ez(n+1)} - k_{x9}(x_{9ez(n)} - x_{9(n)})) - x_{9(n)}}{T_o} \\
x_{12d(n+1)} &= \frac{(x_{11d(n+1)} - k_{x11}(x_{11d(n)} - x_{11(n)})) - x_{11(n)}}{T_o}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Similar a 5.13 se utiliza la misma estructura, con las referencias de velocidad obtenidas en 5.14 para hacer que las velocidades tiendan a los valores de referencia

$$\begin{aligned}
x_{2ref(n+1)} &= x_{2d(n+1)} - k_{x2}(x_{2d(n)} - x_{2(n)}) \\
x_{4ref(n+1)} &= x_{4d(n+1)} - k_{x4}(x_{4d(n)} - x_{4(n)}) \\
x_{6ref(n+1)} &= x_{6d(n+1)} - k_{x6}(x_{6d(n)} - x_{6(n)}) \\
x_{8ref(n+1)} &= x_{8d(n+1)} - k_{x8}(x_{8d(n)} - x_{8(n)}) \\
x_{10ref(n+1)} &= x_{10d(n+1)} - k_{x10}(x_{10d(n)} - x_{10(n)}) \\
x_{12ref(n+1)} &= x_{12d(n+1)} - k_{x12}(x_{12d(n)} - x_{12(n)}),
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde $0 < k_{x2}, k_{x4}, k_{x6}, k_{x8}, k_{x10}, k_{x12} < 1$.

El sistema de ecuaciones final que se debe resolver para calcular las acciones de control en cada periodo de muestreo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\sin x_{9ez(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \cos x_{9ez(n)} \sin x_{7ez(n)} & 0 & 0 & 0 \\ \cos x_{9ez(n)} \cos x_{7ez(n)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u/m \\ \tilde{\tau}_\phi \\ \tilde{\tau}_\theta \\ \tilde{\tau}_\psi \end{bmatrix}}_w = \frac{1}{T_o} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_4 \\ \Delta x_6 + gT_o \\ \Delta x_8 \\ \Delta x_{10} \\ \Delta x_{12} \end{bmatrix}}_b \tag{5.16}$$

Donde $\Delta x_i = x_{ref(n+1)} - x_{ref(n)}$ con $i = \{2, 4, 6, \dots, 12\}$. La ecuación 5.16 se resuelve utilizando la matriz pseudoinversa, que permite obtener las acciones de control

$$\mathbf{w} = A^\dagger b \quad (5.17)$$

La ecuación 5.17 representa la solución óptima de mínimos cuadrados [84]. Las columnas de la matriz A son linealmente independientes, por lo tanto, la solución de 5.16 puede expresarse

$$\mathbf{w} = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (5.18)$$

Desarrollando la expresión anterior

$$(A^T A)^{-1} = \begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

y

$$A^T b = \frac{1}{T_o} \begin{bmatrix} -s x_{9ez(n)} \frac{\Delta x_2}{m} + c x_{9ez(n)} s x_{7ez(n)} \frac{\Delta x_4}{m} + c x_{9ez(n)} c x_{7ez(n)} \frac{(\Delta x_6 + g T_o)}{m} \\ x_{8ref(n+1)} - x_{8(n)} \\ x_{10ref(n+1)} - x_{10(n)} \\ x_{12ref(n+1)} - x_{12(n)} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

La expresión $s x_{9ez(n)} = \sin x_{9ez(n)}$, y se utiliza para las restantes relaciones trigonométricas de la ecuación anterior y siguientes.

Una vez resuelto el sistema 5.18, se obtienen las acciones de control

$$u = \frac{m}{T_o} [-sx_{9ez(n)}\Delta x_2 + cx_{9ez(n)}sx_{7ez(n)}\Delta x_4 + cx_{9ez(n)}cx_{7ez(n)}(\Delta x_6 + gT_o)] \quad (5.21)$$

$$\tilde{\tau}_\phi = \frac{x_{8ref(n+1)} - x_{8(n)}}{T_o} \quad (5.22)$$

$$\tilde{\tau}_\theta = \frac{x_{10ref(n+1)} - x_{10(n)}}{T_o} \quad (5.23)$$

$$\tilde{\tau}_\psi = \frac{x_{12ref(n+1)} - x_{12(n)}}{T_o} \quad (5.24)$$

De 5.22, 5.23 y 5.24, y utilizando la ecuación 4.42 se obtienen los torques reales $[\tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi]^T$ que permiten al cuadricóptero seguir la trayectoria previamente definida. La acción de control u , puede aplicarse al vehículo cuyo modelo esta expresado en la ecuación 4.39.

5.3 Análisis de Estabilidad: Convergencia a cero de los errores de control

El controlador fue diseñado en el dominio discreto; por lo tanto el análisis de estabilidad se desarrollará en el mismo dominio [105]. De manera consecuente, es necesario una versión discreta del modelo del helicóptero. Considerando el modelo descrito por 4.44, el modelo es discretizado utilizando la aproximación de Euler en 5.5 y el controlador propuesto 5.21, 5.22, 5.23 y 5.24. La aproximación de Euler es un método usual de discretización que muestra un razonable grado de certeza cuando el periodo de muestreo es pequeño en relación a la dinámica del vehículo.

En la siguiente demostración se considera conocimiento perfecto del modelo real del cuadricóptero y la no existencia de ruido aditivo en las señales de control, como así el conocimiento perfecto de las variables que definen la postura y sus derivadas temporales.

Definiendo $e_{(n)}$ como el error de control en el instante n -ésimo ($e_{(n)} = [x_{d(n)} - x_{(n)}, y_{d(n)} - y_{(n)}, z_{d(n)} - z_{(n)}, \psi_{d(n)} - \psi_{(n)}]$), entonces, $\|e_n\| \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$, cuando se consideran los problemas de seguimiento de trayectoria y posicionamiento.

Se considera que las acciones de control $(u, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$ son constantes en cada periodo de muestreo.

Comenzando con la variable $x_{11} = \psi$, la cual puede considerarse independiente para el análisis, porque no está acoplada con otra variable. Substituyendo 5.24 en la correspondiente ecuación del sistema 5.5, se analiza el comportamiento de $x_{12} = \dot{\psi}$

$$\begin{aligned} x_{12(n+1)} &= x_{12(n)} + T_o \left[\frac{x_{12d(n+1)} - k_{x12}(x_{12d(n)} - x_{12(n)}) - x_{12(n)}}{T_o} \right] \\ 0 &= x_{12(n+1)} - x_{12d(n+1)} - k_{x12}(x_{12d(n)} - x_{12(n)}) \\ 0 &= ex_{12(n+1)} - k_{x12}ex_{12(n)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Si, $0 < k_{x12} < 1$, entonces $ex_{12(n+1)} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. El mismo procedimiento es aplicado al ángulo $x_{11} = \psi$.

$$\begin{aligned} x_{11(n+1)} &= x_{11(n)} + T_o x_{12(n+1)} = x_{11(n)} + T_o(x_{12d(n+1)} + ex_{12(n+1)}) \\ x_{11(n+1)} &= x_{11(n)} + T_o x_{12d(n+1)} + T_o ex_{12(n+1)} \end{aligned}$$

Reemplazando 5.14 en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} x_{11(n+1)} &= x_{11(n)} + T_o \left[\frac{x_{11d(n+1)} - k_{x11}(x_{11d(n)} - x_{11(n)})}{T_o} \right] + T_o ex_{12(n+1)} \\ 0 &= x_{11d(n+1)} - x_{11(n+1)} - k_{x11}(x_{11d(n)} - x_{11(n)}) + T_o ex_{12(n+1)} \\ 0 &= ex_{11(n+1)} - k_{x11}ex_{11(n)} + T_o ex_{12(n+1)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Si $0 < k_{x11} < 1$ y como $ex_{12(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty \Rightarrow ex_{11(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

Se demostró que la referencia de ángulo ψ_d se sigue utilizando la acción de control definida en 5.24.

Se aplica el mismo análisis a ϕ y θ ; por lo tanto, se omite en esta demostración y las conclusiones son las mismas, $ex_{10(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty \Rightarrow ex_{9(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$ y $ex_{8(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty \Rightarrow ex_{7(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

El análisis para las restantes variables se realiza a continuación.

La próxima variable a analizar es x_6 , que representa la velocidad en z (\dot{z}). De la correspondiente ecuación del sistema de ecuaciones 5.5

$$x_{6(n+1)} = x_{6(n)} + \frac{u(n)T_o}{m} \cos x_{9(n+1)} \cos x_{7(n+1)} - gT_o \quad (5.27)$$

Definiendo la serie de Taylor de primer orden para una función multivariable,

$$F_{(x,y)} = F_{(a,b)} + R_{n(F)} = F_{(a,b)} + \frac{\partial F(c)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F(c)}{\partial y}(y - b) \quad (5.28)$$

donde $(x, y) < c < (a, b)$. Aplicando 5.28 en 5.27,

$$\begin{aligned} \cos x_{9(n+1)} \cos x_{7(n+1)} &= \cos x_{9d(n+1)} \cos x_{7d(n+1)} + (x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)}) \cdot \\ &\cdot \left[-\sin(x_{9d(n+1)} + \Theta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})) \right] \\ &\cos(x_{7d(n+1)} + \Theta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)})) + \\ &+ (x_{7(n+1)} - x_{7d(n+1)}) \cos(x_{9(n+1)} + \Theta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})) \cdot \\ &\cdot \left[-\sin(x_{7d(n+1)} + \Theta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)})) \right] \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde $0 < \Theta < 1$. También, definiendo $ex_{7(n+1)} = (x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)})$, $ex_{9(n+1)} = (x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})$,
 $f_1 = \left[-\sin(x_{9d(n+1)} + \Theta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})) \right] \cos(x_{7d(n+1)} + \Theta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)}))$ y
 $f_2 = \cos(x_{9(n+1)} + \Theta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})) \left[-\sin(x_{7d(n+1)} + \Theta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)})) \right]$; substituyendo todo esta en la ecuación anterior,

$$x_{6(n+1)} = x_{6(n)} + \frac{u(n)T_o}{m} \left[\cos x_{9d(n+1)} \cos x_{7d(n+1)} - f_1 ex_{9(n+1)} - f_2 ex_{7(n+1)} \right] - gT_o \quad (5.30)$$

de 5.10 y 5.11

$$\begin{aligned} \Delta x_4 &= \frac{\sin x_{7d(n+1)}}{\cos x_{7d(n+1)}} (\Delta x_6 + gT_o) \\ -\Delta x_2 &= \frac{\Delta x_4 \sin x_{9d(n+1)}}{\sin x_{7d(n+1)} \cos x_{9d(n+1)}} = \frac{\sin x_{9d(n+1)} (\Delta x_6 + gT_o)}{\cos x_{7d(n+1)} \cos x_{9d(n+1)}}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

y reemplazando 5.31 en la definición de la acción de control en 5.21

$$\begin{aligned}
u_{(n)} &= \frac{m}{T_o}(\Delta x_6 + gT_o) \cdot \left[\frac{\sin^2 x_{9d_{(n+1)}}}{\cos x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}}} + \frac{\sin^2 x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}}}{\cos x_{7d_{(n+1)}}} + \right. \\
&\quad \left. + \cos x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}} \right] \\
u_{(n)} &= \frac{m}{T_o}(\Delta x_6 + gT_o) \cdot \left[\frac{\sin^2 x_{9d_{(n+1)}} + \sin^2 x_{7d_{(n+1)}} \cos^2 x_{9d_{(n+1)}} + \cos^2 x_{7d_{(n+1)}} \cos^2 x_{9d_{(n+1)}}}{\cos x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}}} \right] \\
u_{(n)} &= \frac{m}{T_o}(\Delta x_6 + gT_o) \frac{1}{\cos x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}}}. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Luego, substituyendo 5.32 en 5.30

$$\begin{aligned}
x_{6(n+1)} &= x_{6(n)} + \frac{m}{T_o}(\Delta x_6 + gT_o) \frac{1}{\cos x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}}} \frac{T_o}{m} \\
&\quad \cdot \cos x_{7d_{(n+1)}} \cos x_{9d_{(n+1)}} - gT_o + \frac{u_{(n)}T_o}{m} (-f_1 ex_{7(n+1)} - f_2 ex_{9(n+1)})
\end{aligned}$$

También se reemplaza Δx_6 por su expresión dada en 5.13 y 5.16

$$\begin{aligned}
x_{6(n+1)} &= x_{6(n)} + x_{6ref_{(n+1)}} - k_{x6}(x_{6ref_{(n)}} - x_{6(n)}) - x_{6(n)} + \\
&\quad + \frac{u_{(n)}T_o}{m}(f_1 ex_{7(n+1)} + f_2 ex_{9(n+1)}) \\
ex_{6(n+1)} &= k_{x6} ex_{6(n)} - \frac{u_{(n)}T_o}{m}(f_1 ex_{7(n+1)} + f_2 ex_{9(n+1)}), \tag{5.33}
\end{aligned}$$

La ecuación 5.33 representa un sistema lineal y una no-linealidad que tiende a cero 0, porque $ex_{7(n+1)}$ y $ex_{9(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

Se aplica el mismo análisis a x_4 . De 5.5

$$x_{4(n+1)} = x_{4(n)} + \frac{u_{(n)}T_o}{m} \cos x_{9(n+1)} \sin x_{7(n+1)}. \tag{5.34}$$

Aplicando 5.28 en 5.34

$$\begin{aligned}
\cos x_{9(n+1)} \sin x_{7(n+1)} &= \cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)} + [x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)}] \cdot \\
&\cdot [-\sin(x_{9(n+1)} + \zeta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)}))]. \\
&\cdot [\sin(x_{7(n+1)} + \zeta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)}))] \quad (5.35) \\
&+ [x_{7(n+1)} - x_{7d(n+1)}] \cos(x_{9(n+1)} + \zeta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})) \cdot \\
&\cdot \cos(x_{7(n+1)} + \zeta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)})),
\end{aligned}$$

donde $0 < \zeta < 1$, definiendo $ex_{7(n+1)} = (x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)})$, $ex_{9(n+1)} = (x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)})$, $h_1 = \cos(x_{9(n+1)} + \zeta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)})) \cos(x_{7(n+1)} + \zeta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)}))$ y $h_2 = [-\sin(x_{9(n+1)} + \zeta(x_{9d(n+1)} - x_{9(n+1)}))] [\sin(x_{7(n+1)} + \zeta(x_{7d(n+1)} - x_{7(n+1)}))]$, y reemplazando todo esto en la ecuación anterior.

$$\cos x_{9(n+1)} \sin x_{7(n+1)} = \cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)} + h_1 ex_{7(n+1)} + h_2 ex_{9(n+1)} \quad (5.36)$$

Substituyendo 5.36 en 5.34

$$x_{4(n+1)} = x_{4(n)} + \frac{u(n)T_o}{m} \cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)} + \frac{u(n)T_o}{m} [h_1 ex_{7(n+1)} + h_2 ex_{9(n+1)}], \quad (5.37)$$

De 5.10 y 5.11 se obtienen las siguiente relaciones

$$-\Delta x_2 = \frac{\Delta x_4 \sin x_{9d(n+1)}}{\cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)}} \quad (5.38)$$

$$\Delta x_6 + gT_o = \Delta x_4 \frac{\cos x_{7d(n+1)}}{\sin x_{7d(n+1)}}. \quad (5.39)$$

Reemplazando 5.38 en la acción de control u definida en 5.21,

$$\begin{aligned}
u(n) &= \frac{m}{T_o} \left[\frac{\Delta x_4 \sin^2 x_{9d(n+1)}}{\cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)}} + \Delta x_4 \cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)} + \right. \\
&\quad \left. + \Delta x_4 \frac{\cos^2 x_{7d(n+1)}}{\sin x_{7d(n+1)}} \cos x_{9d(n+1)} \right] \\
u(n) &= \frac{m\Delta x_4}{T_o} \left[\frac{\sin^2 x_{9d(n+1)} + \cos^2 x_{9d(n+1)} \sin^2 x_{7d(n+1)} + \cos^2 x_{7d(n+1)} \cos^2 x_{9d(n+1)}}{\cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)}} \right] \\
u(n) &= \frac{m\Delta x_4}{T_o} \frac{1}{\cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)}} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Ahora, 5.40 en 5.37

$$\begin{aligned}
x_{4(n+1)} &= x_{4(n)} + \frac{m\Delta x_4}{T_o} \frac{1}{\cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)}} \frac{T_o}{m} \cos x_{9d(n+1)} \sin x_{7d(n+1)} \\
&\quad + \frac{u(n)T_o}{m} [h_1 ex_{7(n+1)} + h_2 ex_{9(n+1)}] \tag{5.41}
\end{aligned}$$

De 5.13 y 5.16, se encuentra la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
x_{4(n+1)} &= x_{4(n)} + x_{4ref(n+1)} - k_{x4}(x_{4ref(n)} - x_{4(n)}) - x_{4(n)} + \\
&\quad + \frac{u(n)T_o}{m} [h_1 ex_{7(n+1)} + h_2 ex_{9(n+1)}], \tag{5.42}
\end{aligned}$$

operando matemáticamente

$$ex_{4(n+1)} = k_{x4} ex_{4(n)} - u(n) \frac{T_o}{m} [h_1 ex_{7(n+1)} + h_2 ex_{9(n+1)}]. \tag{5.43}$$

La ecuación 5.43 representa un sistema lineal con una no-linealidad que tiende a 0 porque $ex_{7(n+1)}$ y $ex_{9(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

Finalmente analizamos x_2 del mismo modelo que en los casos anteriores. De 5.5

$$x_{2(n+1)} = x_{2(n)} - \frac{u(n)T_o}{m} \sin x_{9(n+1)} \tag{5.44}$$

y aplicando 5.28 en 5.44

$$\sin x_{9(n+1)} = \sin x_{9d(n+1)} + \cos(x_{9d(n+1)} + \varrho(x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)}))(x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)}), \quad (5.45)$$

donde $0 < \varrho < 1$. También se define $ex_{9(n+1)} = (x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)})$ y $g_1 = \cos(x_{9d(n+1)} + \varrho(x_{9(n+1)} - x_{9d(n+1)}))$. Substituyendo en 5.44

$$x_{2(n+1)} = x_{2(n)} - \frac{u_{(n)}T_o}{m} \left[\sin x_{9d(n+1)} - g_1 ex_{9(n+1)} \right]. \quad (5.46)$$

De 5.10 y 5.11

$$\begin{aligned} \Delta x_4 &= -\Delta x_2 \frac{\sin x_{7d(n+1)} \cos x_{9d(n+1)}}{\sin x_{9d(n+1)}} \\ \Delta x_6 + gT_o &= \Delta x_4 \frac{\cos x_{7d(n+1)}}{\sin x_{7d(n+1)}} = -\Delta x_2 \frac{\cos x_{9d(n+1)} \cos x_{7d(n+1)}}{\sin x_{9d(n+1)}}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

reemplazando en 5.47 la expresión de la acción de control $u_{(n)}$ dada por 5.21 se obtiene

$$\begin{aligned} u_{(n)} &= \frac{m}{T_o} \left[-\Delta x_2 \sin x_{9d(n+1)} - \frac{\Delta x_2 \sin^2 x_{7d(n+1)} \cos^2 x_{9d(n+1)}}{\sin x_{9d(n+1)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x_2 \cos^2 x_{9d(n+1)} \cos^2 x_{7d(n+1)}}{\sin x_{9d(n+1)}} \right] \\ u_{(n)} &= \frac{m\Delta x_2}{T_o} \left[\frac{-\sin^2 x_{9d(n+1)} - \sin^2 x_{7d(n+1)} \cos^2 x_{9d(n+1)}}{\sin x_{9d(n+1)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\cos^2 x_{7d(n+1)} \cos^2 x_{9d(n+1)}}{\sin x_{9d(n+1)}} \right] \\ u_{(n)} &= -\frac{m}{T_o} \frac{\Delta x_2}{\sin x_{9d(n+1)}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Substituyendo 5.48 en 5.46

$$\begin{aligned}
x_{2(n+1)} &= x_{2(n)} + \frac{m}{T_o} \frac{\Delta x_2}{\sin x_{9d(n+1)}} \frac{T_o}{m} \sin x_{9d(n+1)} + u_{(n)} \frac{T_o}{m} g_1 ex_{9(n+1)} \\
x_{2(n+1)} &= x_{2(n)} + \Delta x_2 + u_{(n)} \frac{T_o}{m} g_1 ex_{9(n+1)},
\end{aligned} \tag{5.49}$$

y reemplazando Δx_2 definida por 5.13 y 5.16 en 5.49, resulta

$$\begin{aligned}
x_{2(n+1)} &= x_{2(n)} + x_{2ref} - k_2(x_{2ref(n)} - x_{2(n)}) - x_{2(n)} + u_{(n)} \frac{T_o}{m} g_1 ex_{9(n+1)} \\
ex_{2(n+1)} &= k_2 ex_{2(n)} - u_{(n)} \frac{T_o}{m} g_1 ex_{9(n+1)}.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

La ecuación 5.50 representa un sistema lineal y una no-linealidad que tiende a 0 porque $ex_{9(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

Recordando la ecuación 5.33, 5.43 y 5.50.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} ex_{2(n+1)} \\ ex_{4(n+1)} \\ ex_{6(n+1)} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} k_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & k_{x4} & 0 \\ 0 & 0 & k_{x6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ex_{2(n)} \\ ex_{4(n)} \\ ex_{6(n)} \end{bmatrix}}_{\text{Sistema Lineal}} + \underbrace{\frac{u_{(n)} T_o}{m} \begin{bmatrix} -g_1 & 0 \\ h_1 & h_2 \\ f_1 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ex_{9(n+1)} \\ ex_{7(n+1)} \end{bmatrix}}_{\text{No linealidad}}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

La ecuación 5.51 representa un sistema lineal y una no-linealidad que tiende a cero porque $ex_{7(n+1)}$ y $ex_{9(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow 0$. Finalmente, como $0 < k_{x2}, k_{x4}, k_{x6} < 1$ y $ex_{7(n+1)}$ y $ex_{9(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow 0$, se demuestra que $ex_{2(n+1)}, ex_{4(n+1)}$ y $ex_{6(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$.

Hasta este punto, se demostró que los errores de velocidad ($ex_{2(n+1)}, ex_{4(n+1)}, ex_{6(n+1)}$) tienden a 0 con $n \rightarrow \infty$, y que 5.26 ha demostrado que los errores del ángulo de guiñada o yaw ($ex_{11(n+1)}$) $\rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$. Solo resta analizar los errores ($ex_{1(n+1)}, ex_{3(n+1)}, ex_{5(n+1)}$) y verificar que tienden a 0 con $n \rightarrow \infty$. De 5.5

$$\begin{aligned}
x_{1(n+1)} &= x_{1(n)} + T_o x_{2(n+1)} = x_{1(n)} + T_o(x_{2d(n+1)} + ex_{2(n+1)}) \\
x_{1(n+1)} &= x_{1(n)} + T_o x_{2d(n+1)} + T_o ex_{2(n+1)},
\end{aligned}$$

y reemplazando $x_{2ref(n+1)}$ por su expresión de 5.13

$$x_{1(n+1)} = x_{1(n)} + T_o \frac{(x_{1ref(n+1)} - k_{x1}(x_{1ref(n)} - x_{1(n)})) - x_{1(n)}}{T_o} + T_o ex_{2(n+1)} \tag{5.52}$$

Con un análisis similar para x_3 y x_5 , son obtenidas las siguientes expresiones

$$ex_{1(n+1)} = k_{x1}ex_{1(n)} - T_o ex_{2(n+1)} \quad (5.53)$$

$$ex_{3(n+1)} = k_{x3}ex_{3(n)} - T_o ex_{4(n+1)} \quad (5.54)$$

$$ex_{5(n+1)} = k_{x5}ex_{5(n)} - T_o ex_{6(n+1)}. \quad (5.55)$$

Debido a que $ex_{2(n+1)}$, $ex_{4(n+1)}$ y $ex_{6(n+1)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$, finalmente se prueba que $ex_{1(n)}$, $ex_{3(n)}$ y $ex_{5(n)} \rightarrow 0$ con $n \rightarrow \infty$, y los errores de control tienden a 0.

5.4 Resultados de la Simulación

En esta sección se presentan tres simulaciones de vuelo 3D con el *quadrotor*, utilizando el controlador diseñado en la sección 5.2. Las simulaciones tienen como objetivo confirmar el desempeño de la ley de control. La primera simulación muestra el desempeño del controlador sin incertidumbres en el modelo y sin perturbaciones. La segunda simulación incluye errores en los parámetros del modelo y ruido en las mediciones, y la última muestra el desempeño del controlador frente a una trayectoria cuadrada.

Las simulaciones fueron desarrolladas en un simulador basado en la plataforma Matlab ©, que considera un modelo preciso del vehículo. El valor de los parámetros del modelo del helicóptero 4.36 y 4.37 se obtienen de [101],

$$\begin{aligned} m &= 0,5kg & l &= 0,24m & g &= 9,81m/s^2 \\ I &= \text{diag}[3,8, 3,8, 7,1] * 10^{-3} Nm s^2 / rad \end{aligned}$$

Con el objetivo de corroborar el funcionamiento del controlador propuesto, se propone una trayectoria tipo helicoides, centrada en el origen de coordenadas del sistema inercial con radio de $2m$ y la orientación deseada (Ψ_d) se determina en $\pi/2$ radianes. Para demostrar que la propuesta también sirve para tareas de posicionamiento, se considera el punto $(Xd, Yd, Zd, \Psi_d) = (0m, 0m, 12m, -\pi/2rad)$ como referencia, y finalmente la simulación acaba en el origen de coordenadas $(Xd, Yd, Zd, \Psi_d) = (0m, 0m, 0m, 0rad)$. La trayectoria se genera con una velocidad ascendente de $v_z = 0,8m/s$ y una velocidad angular de $\omega = 1rad/s$. La posición inicial del helicóptero está localizada en el origen de coordenadas del sistema de referencia global y la trayectoria comienza en $[0m; 0m; 2m]$. El periodo de muestreo utilizado en las simulaciones es de $50ms$.

Las ganancias seleccionadas para el controlador se muestran en la tabla 1. Estos valores se eligieron de manera heurística, de forma tal que los errores de control tiendan a cero de forma suave. Las constantes son parámetros de diseño, y en cierto modo, ellos ajustan la tasa

de convergencia de los estados actuales hacia los valores deseados. Es importante a tener en cuenta que los constantes deben verificar $0 < k_{xi} < 1$ con $i = 1, 2, \dots, 12$, para asegurar la convergencia a cero de los errores. Para valores cercanos a 0, las variables alcanzan los valores de referencias más rápido, pero con respuestas más abruptas, mientras que constantes cercanas a 1 causa respuestas más suaves, aunque las referencias se alcanzan en un lapso de tiempo mayor. Por lo tanto, los valores de k_{xi} , asociados con los ángulos ϕ (roll) y θ (pitch) son menores que las k_{xi} asociadas con las restantes variables, dado que x e y dependen de estas variables.

Tabla 1: Ganancias del controlador utilizadas en la simulación 1.

$k_{x1} = 0,78$	$k_{x2} = 0,8$
$k_{x3} = 0,77$	$k_{x4} = 0,8$
$k_{x5} = 0,9$	$k_{x6} = 0,95$
$k_{x7} = 0,7$	$k_{x8} = 0,67$
$k_{x9} = 0,7$	$k_{x10} = 0,67$
$k_{x11} = 0,8$	$k_{x12} = 0,85$

La figura 17 muestra la evolución 3D de la posición del helicóptero, y es posible observar cómo el *quadrotor* alcanza y sigue la trayectoria de referencia.

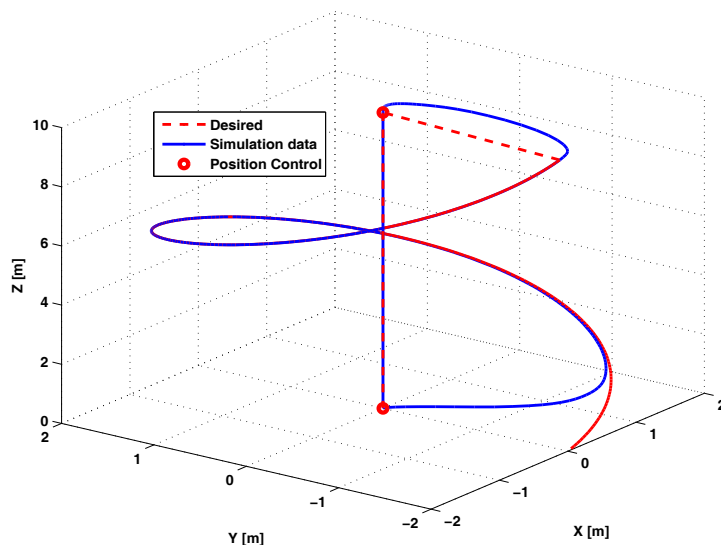


Figura 17: Evolución de la posición del quadrotor.

En la figura 18 se muestra la evolución de las coordenadas x , y , z , que tienden hacia los valores de referencia. La Fig. 19 muestra la evolución de las variables de orientación ϕ , θ y ψ , que también tienden a los valores de referencia. En 20 se muestran los errores de control y se comprueba que tienden a cero, inclusive en las tareas de control de posicionamiento. Finalmente, Fig. 21 presenta las acciones de control $(u, \tau_\phi, \tau_\theta, \tau_\psi)$, expresadas por 4.34 y 4.35, que son las acciones de control real aplicadas al modelo del vehículo.

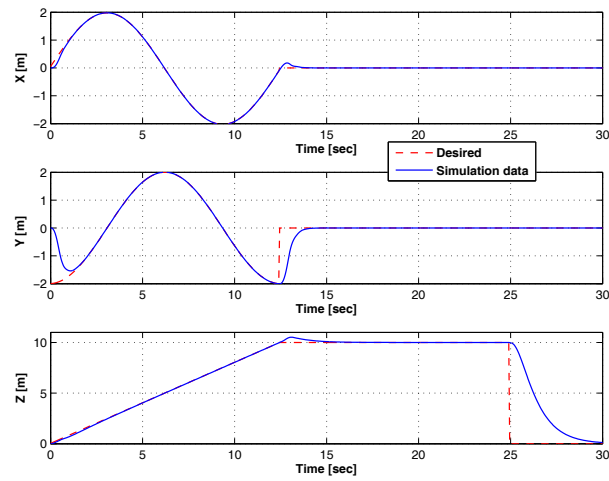


Figura 18: Evolución de las variables de posición.

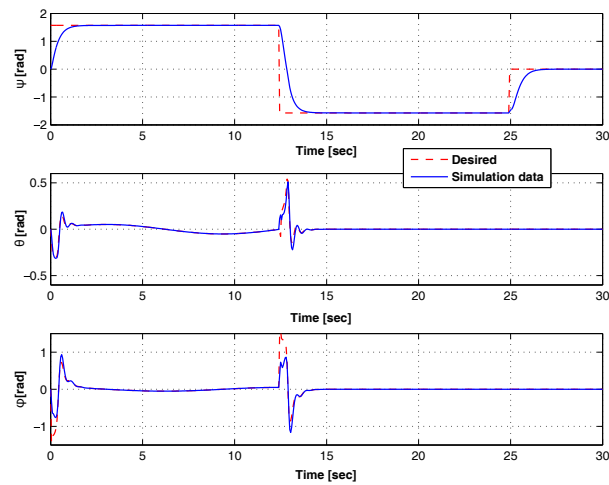


Figura 19: Evolución de las variables de orientación.

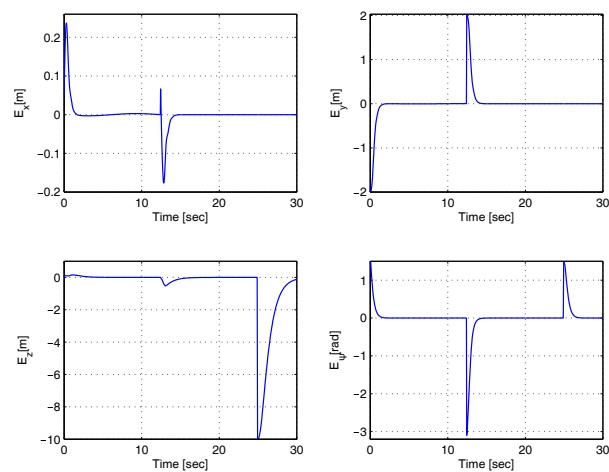


Figura 20: Evolución de los errores de postura.

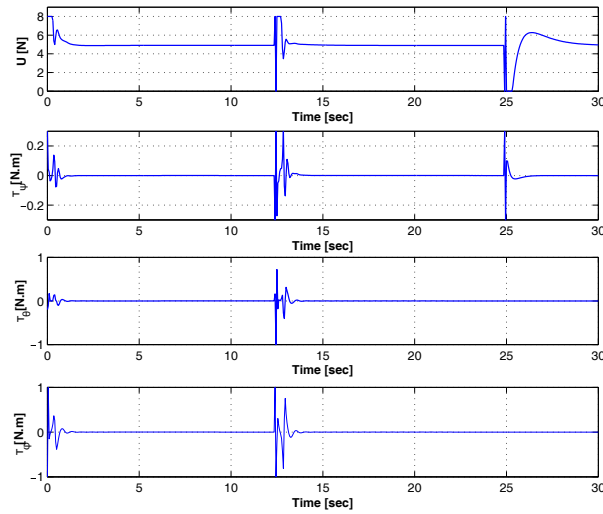


Figura 21: Evolución temporal de las acciones de control.

En el segundo experimento, el objetivo es mostrar el desempeño del controlador frente a errores paramétricos y ruido en las mediciones. Los errores en los parámetros utilizado es del orden del 20% de los valores reales. La tabla 2 muestra los valores de los parámetros considerados para esta simulación. También se agregó ruido blanco Gaussiano en las mediciones de las aceleraciones, alrededor de un 5%. Este error afecta las mediciones de velocidades y posición, porque estas son obtenidas integrando las medidas de aceleraciones.

Tabla 2: Parámetros del modelo dinámico.

Parámetros del controlador	Parámetros del modelo
$m = 0,6[kg]$ $I_{xx} = 2,7 * 10^{-3}m/s^2$ $I_{yy} = 4,8 * 10^{-3}m/s^2$ $I_{zz} = 8,9 * 10^{-3}m/s^2$	$m = 0,5[kg]$ $I_{xx} = 3,8 * 10^{-3}m/s^2$ $I_{yy} = 3,8 * 10^{-3}m/s^2$ $I_{zz} = 7,1 * 10^{-3}m/s^2$

La fig.22 muestra la evolución 3D del vehículo, con un error de estado estacionario en z . Esto se debe al error introducido en el parámetro de la masa del helicóptero, que causa errores de cálculo del peso de la planta del controlador. Pero este parámetro, es el de mayor facilidad para medir o estimar el valor del mismo, y de esta manera se puede disminuir este error. El desempeño de las restantes variables controladas (x, y, ψ) son bastantes aceptables.

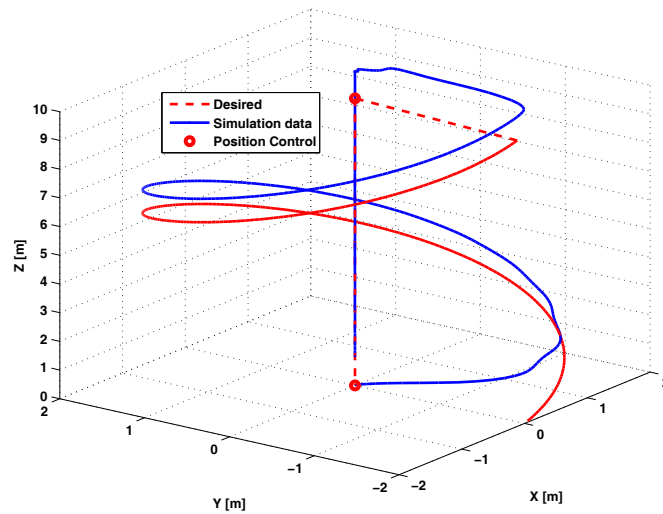


Figura 22: Evolución de la posición del helicóptero frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.

La fig. 23 muestra la evolución de las coordenadas x , y , z , con z mostrando un error de estado estacionario, como se mencionó anteriormente. La figura 24 muestra la evolución de las variables de orientación (ϕ , θ y ψ) del quadrotor. Estas variables son menos afectadas por los errores de los parámetros que las variables de posición. La Fig. 25 muestra la evolución de los errores, que no tienden a cero pero son relativamente bajos. Finalmente, la figura 26 muestra las acciones de control para esta simulación.

Las variaciones en las señales entre los 12 y 25 segundos son explicadas por las bruscas variaciones en las referencias del control de posición. En los $t = 12 \text{ seg}$ todas las referencias varían, pero en $t = 25 \text{ seg}$, solo la posición vertical y el ángulo de yaw lo hacen. El desempeño del controlador frente a errores de parámetros y error Gaussiano blanco aditivo en las mediciones es bastante satisfactorio, como se observó en las figuras.

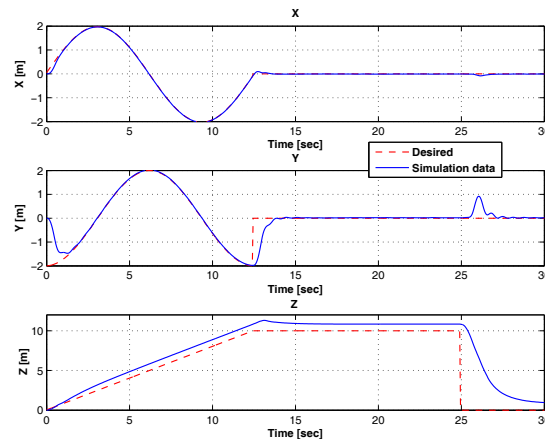


Figura 23: Evolución de las variables de posición frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.

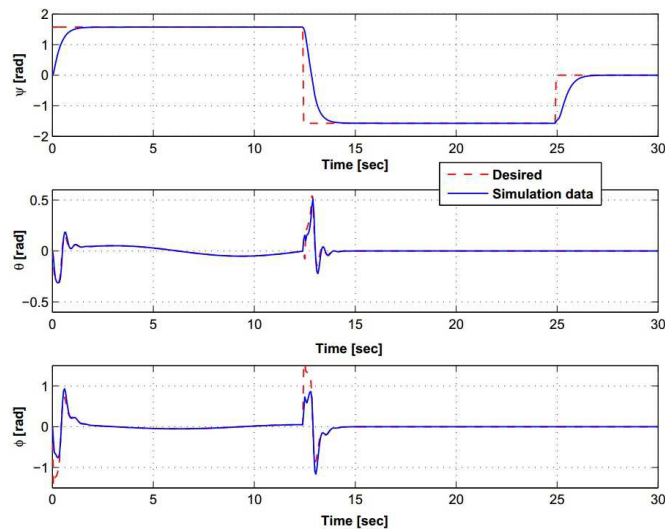


Figura 24: Evolución de las variables de orientación frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.

En la última simulación, el objetivo es demostrar cómo nuestro controlador se comporta frente a una trayectoria de referencia cuadrada, y cómo maneja las variaciones que se producen en las esquinas de la misma. Para ello se utiliza una referencia a una altura constante de $5m$, con los cuatro lados iguales de $5m$.

Esta referencia no genera singularidad alguna en el controlador. Como se mencionó en la sección 5.1, la técnica de control presentada puede seguir trayectorias continuas por partes con derivadas continuas por partes. El problema generado en las esquinas son grandes variaciones en la referencias, que causa grandes errores de control, que genera a su vez acciones de control relativamente grandes que son imposibles de alcanzar, debido a las condiciones impuestas por los sistemas físicos reales. Como el helicóptero es un sistema inercial, es imposible que pueda seguir las esquinas de la trayectoria de forma perfecta, pero lo hace aproximando esta por una curva. Las figuras 27, 28, 29 y 31 son las simulaciones para una trayectoria cuadrada a una altura constante, donde se observa que el controlador propuesto puede responder a trayectorias de este tipo.

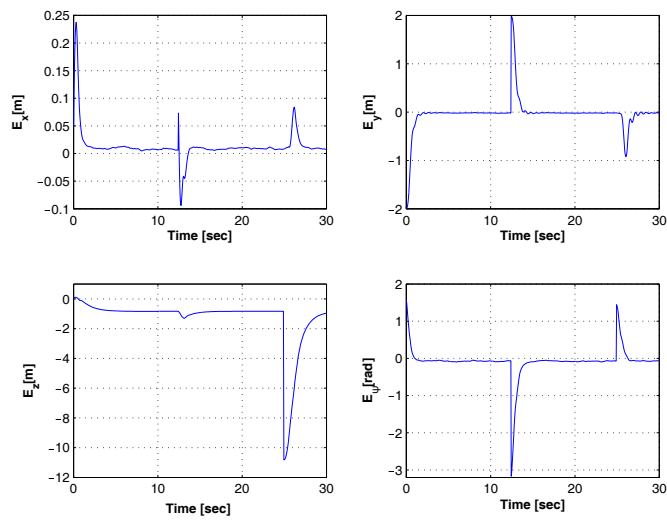


Figura 25: Evolución de los errores de control frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.

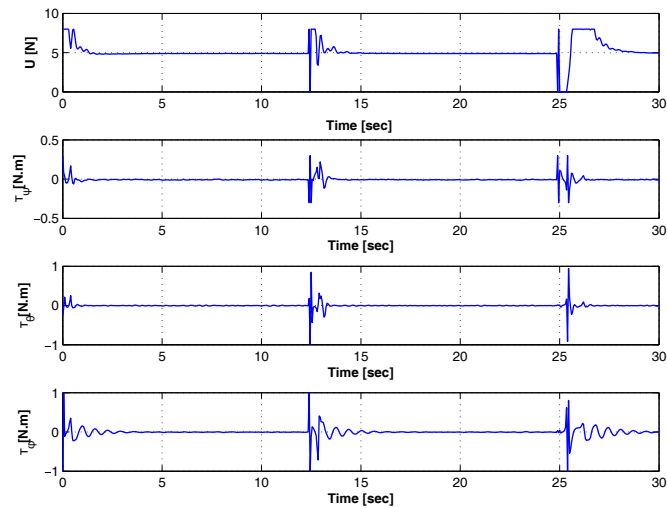


Figura 26: Acciones de control frente a incertidumbres paramétricas y ruido en las mediciones.

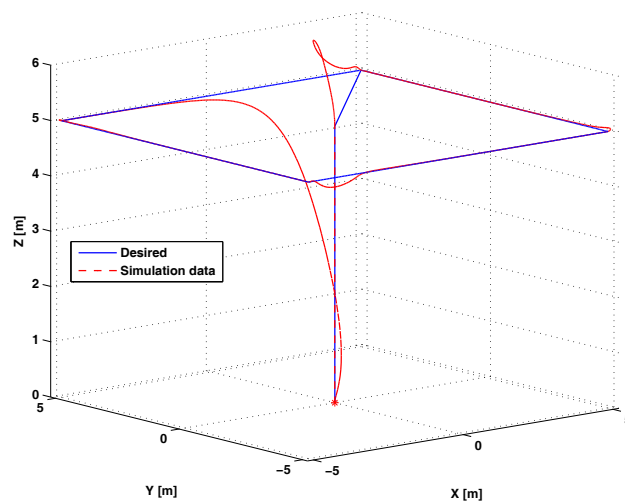


Figura 27: Evolución de la posición del helicóptero para una trayectoria cuadrada.

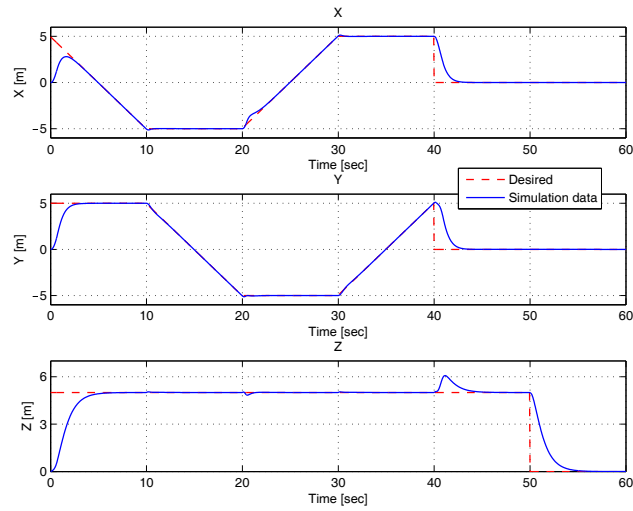


Figura 28: Evolución de las variables de posición para una trayectoria cuadrada.

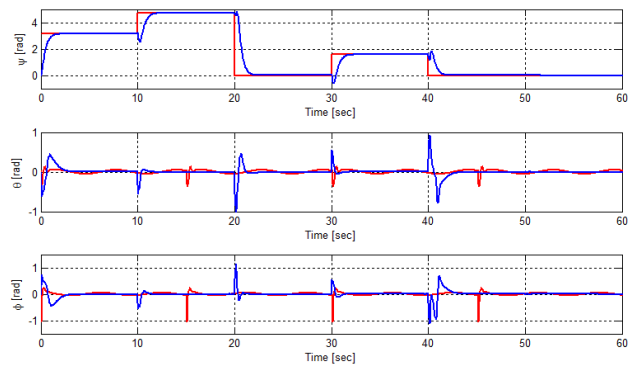


Figura 29: Evolución de los errores de orientación para una trayectoria cuadrada..

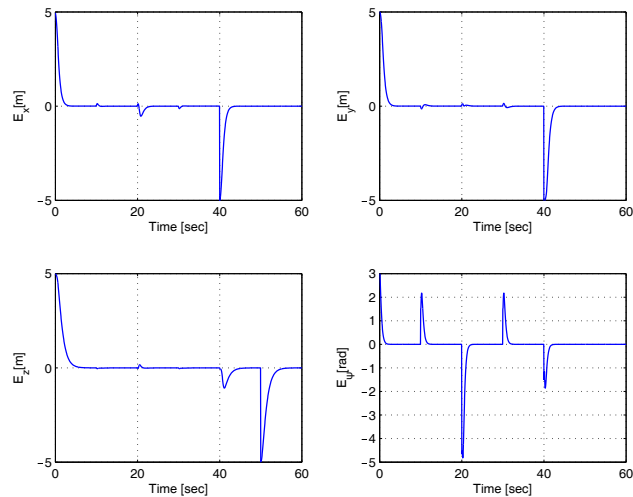


Figura 30: Errores de postura para una trayectoria cuadrada..

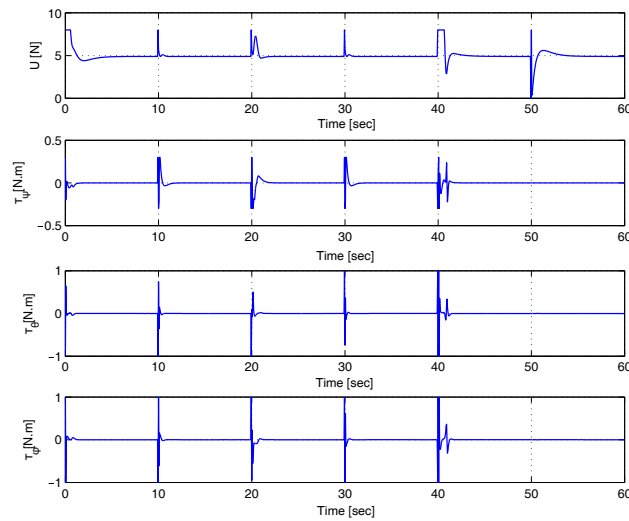


Figura 31: Evolución de las acciones de control para una trayectoria cuadrada..

5.5 Resultados Experimentales

En esta sección se demostrará experimentalmente la propuesta desarrollada en la sección 5.2 del presente capítulo.

Como planta se utilizó el *quadrotor* de la empresa Parrot © el modelo Ar.Drone 2.0. En la figura 32 se lo puede apreciar con sus respectivos sistemas de referencia asociados (inercial y móvil). Este vehículo es comercializado como juguete tecnológico, dado que fue realizado con el objetivo de operarse a través de smartphones o tablets vía Wi-Fi. El Ar.Drone está equipado con dos placas embebidas a bordo. La primera, denominada placa de sensores, contiene un conjunto de sensores, tales como acelerómetros, giroscopios, magnetómetros, un sensor de ultrasonido y un barómetro. La segunda placa se denomina la placa principal, es una unidad de procesamiento basada en un procesador ARM Cortex-A8 de 1 Ghz, donde corre un sistema operativo *Linux* embebido.



Figura 32: Ar.Drone en su versión 2.0 y sus correspondientes sistemas de referencia móvil asociado al helicóptero $\{b\}$, y el sistema de referencia inercial $\{w\}$.

Tabla 3: Parámetros del modelo dinámico utilizado en la simulación.

Parámetros del modelo de Alto Nivel	
$m = 0,380$ [kg]	$l = 0,1782$ [m]
$C_{f,t} = 0,02890$ [N.m.s ²]	$I_{xx} = 9,57 \cdot 10^{-3}$ [kg.m ²]
$I_{yy} = 18,57,10^{-3}$ [kg.m ²]	$I_{zz} = 25,5510^{-3}$ [kg.m ²]
$I_{xy} = 0$ [kg.m ²]	$I_{xz} = 0$ [kg.m ²]
$I_{zz} = 0$ [kg.m ²]	
Parámetros del modelo de Bajo Nivel	
$k_{d\phi} = k_{d\theta} = 1,0$ [V/rad]	$k_{p\phi} = k_{p\theta} = 1,0$ [Vs/rad]
$k_{d\psi} = 0,01$ [V/rad]	$k_{p\psi} = 15$ [Vs/rad]
$k_{dz} = 0,01$ [V/rad]	$k_{pz} = 15$ [Vs/rad]
$R = 8,214$ [Ω]	$J_m = 2,8,10^{-5}$ [kg.m ²]
$B_m = 1,06,10^{-5}$ [N.m.s ²]	$K_m = 0,39$ [N.m/A]
$K_b = 8,0,10^{-5}$ [N.m/A]	$C_f = 1,1429,10^{-9}$ [N.s ²]
$C_t = 3,2,10^{-11}$ [N.m.s ²]	$C_f = 3,2,10^{-9}$ [N.s ²]
$\phi_{max} = 25$ [°]	$\theta_{max} = 25$ [°]
$\dot{z}_{max} = 0,6$ [m/s]	$\dot{\psi}_{max} = 10$ [°/s]

A pesar de ser un juguete, el mismo presenta una capacidad de sensado y cómputo que permite utilizarse como planta de experimentación. La principal ventaja que presenta frente a otras alternativas es su precio, y la posibilidad de conseguir fácilmente repuestos para mantener el equipo operativo [106].

Como se aprecia en la sección 5.2, las acciones de control que se obtienen con el algoritmo se presentan en la ecuación 5.21. Estas son u , τ_ϕ , τ_θ y τ_{psi} , muy distintas a las entradas que acepta el modelo comercial utilizado (Ar.Drone 2.0). El motivo de esto radica en que la propuesta elaborada sirve para el control del modelo de alto nivel de esta aeronave (ver sección 4.3), y no se considera el modelo de bajo nivel (ver sección 4.2).

En la tesis doctoral [107] se presentan los parámetros para el modelo de bajo nivel para un vehículo Ar.Drone 1.0. Las dimensiones físicas y las características de los propulsores, son idénticas entre los modelos Ar.Drone 1.0 y 2.0. Por lo tanto es posible utilizar estos parámetros para poder relacionar las acciones de control obtenidas por el controlador con las entradas de referencia del cuadricóptero.

A partir del modelo de bajo nivel descrito en el capítulo 4, es posible realizar la acción inversa. Es decir, a partir de los valores de fuerzas y torques deseados, calcular los comandos reales necesarios que se deben enviar al helicóptero que produzcan dichos valores. Esto permite a partir de las acciones de control 5.21, calcular los comandos a enviar al Ar.Drone.

Los parámetros utilizados durante la experimentación se detallan en la siguiente tabla 3.

5.5.1 Control de Trayectoria

Con el objetivo de validar la propuesta realizada para el control de un helicóptero de cuatro rotores, se realizó el control de trayectoria siguiendo una referencia circular. Las referencias utilizadas para el experimento se detallan en la siguiente tabla 4.

Tabla 4: Referencias utilizadas en el control de trayectoria.

Variable \ t	0 – 35[sec]
$x(t)[m]$	$\cos(\pi/15)$
$y(t)[m]$	$\sin(\pi/15)$
$z(t)[m]$	1
$\psi(t)[rad]$	0

La evolución del *quadrotor* en el espacio \mathbb{R}^3 se puede apreciar en la figura 33. En esta se aprecia cómo el helicóptero evoluciona de su posición inicial ($[0[m] 0[m] 0,7[m]]^T$), hacia la trayectoria de referencia.

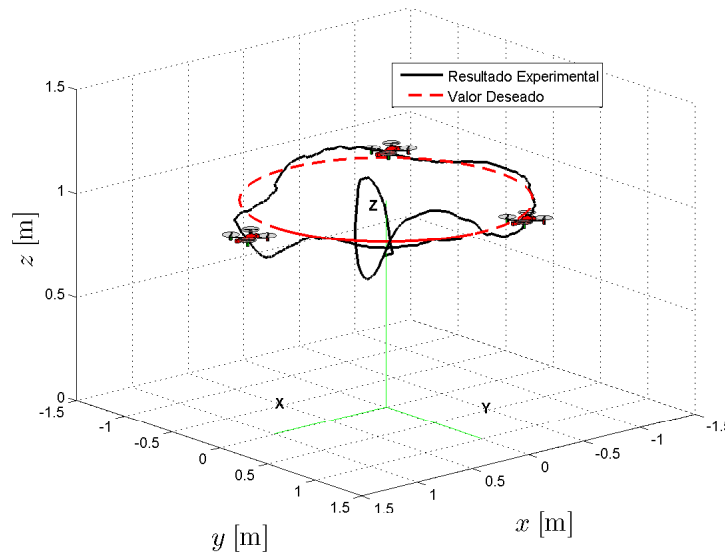
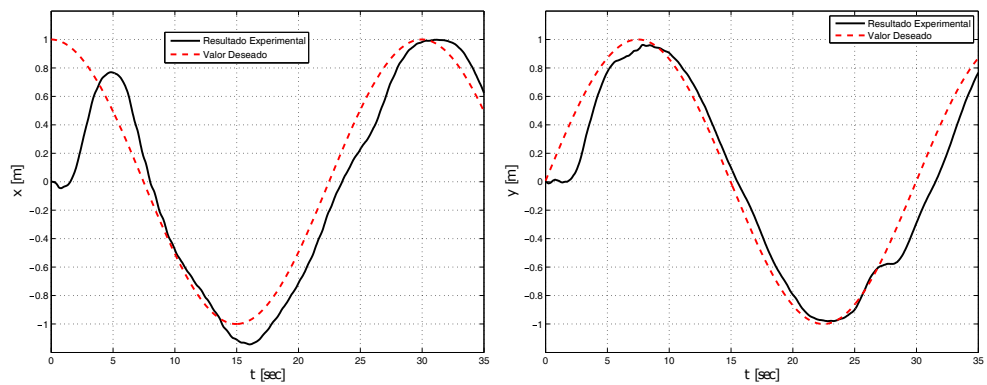


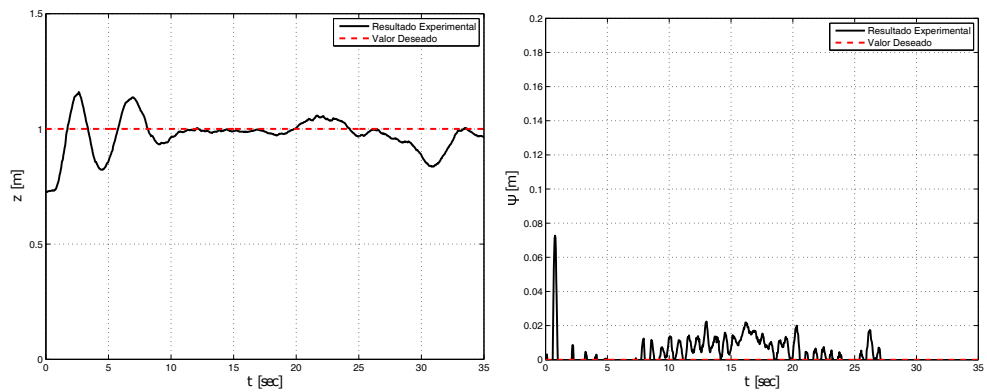
Figura 33: Representación 3D de la tarea de seguimiento de una trayectoria circular por parte del Ar.Drone.

En 34 se observan las cuatro variables que definen la pose del cuadricóptero en \mathbb{R}^3 , y en todas las gráficas se aprecia cómo el valor real tiende a la referencia.

Por último, recordando los comandos que recibe el Ar.Drone 2.0 (ϕ_d , θ_d , \dot{z}_d y ψ_d), en las figuras 35 se observan los comandos enviados a la aeronave utilizada durante las experimentaciones.



(a) Evolución de la posición en x del quadrotor. (b) Evolución de la posición en y del quadrotor.



(c) Evolución de la posición en z del quadrotor. (d) Evolución de la posición en ψ del quadrotor.

Figura 34: Evolución temporal de las variables de postura del *quadrotor* y de las referencias utilizadas durante la experimentación.

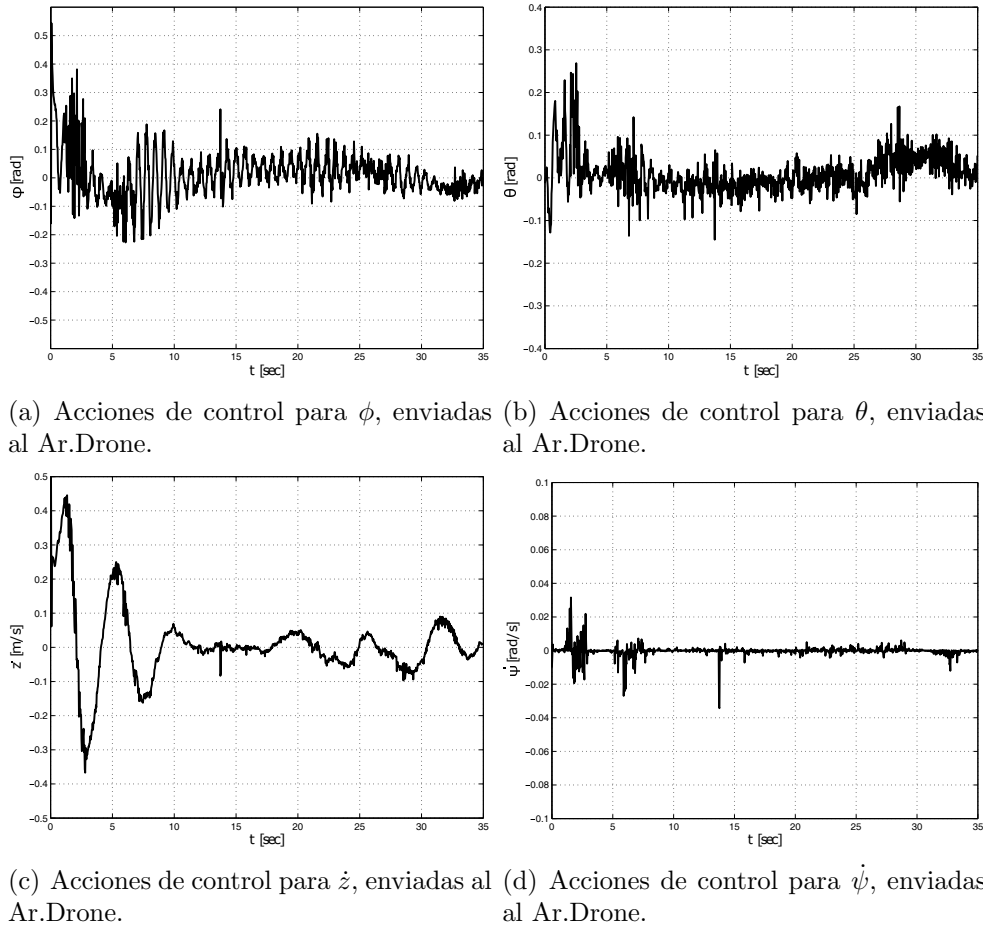


Figura 35: Acciones de control enviadas al Ar.Drone.

5.6 Conclusiones

En el presente capítulo se ha presentado un controlador para seguimiento de trayectoria y posicionamiento, basado en álgebra lineal y métodos numéricos. El mismo tiene la característica de ser diseñado en el dominio discreto, y los cálculos requeridos para obtener las acciones de control provocan una baja carga computacional.

Se ha incluido la demostración de convergencia a cero de los errores de control en la sección 5.3, y cómo las constantes de diseño permiten ajustar la convergencia de las variables de control a los valores de referencia.

Por último, resultados de simulaciones y experimentales validan a la propuesta del controlador descrito.

6 *Representación de un Sistema Multi-Robot*

6.1 Introducción

En el siguiente capítulo se planteará una forma de representar una formación de robots aéreos y terrestres. Dentro de las variables de formación, se presentan los mapeos directos e inversos que permiten obtener los valores de las variables de la formación en función de las posiciones de cada robot y la relación inversa, es decir, obtener las posiciones de cada robot en función de los valores de las variables de formación. Finalmente, se analizan las restricciones existentes en el conjunto .

6.2 Planteo del Problema

Se considera un conjunto de variables que representan una formación de varios robots. La calidad representativa de esta forma de expresar la forma y distribución de los robots, es que las variables que definen la forma (distancia entre cada uno de los robots), posición (posición del centroide del conjunto de robots) y orientación (como esta orientada la formación con respecto al sistema de referencia inercial) estén separadas y fácilmente diferenciables. Una ventaja de ello, es la posibilidad de controlar individualmente cada una de estas variables, permitiendo esto conseguir diferentes comportamientos de la formación (formación rígida, formación flexible, etc) sin grandes complicaciones. Además se plantea las relaciones cinemáticas entre las variables de la formación y las velocidades de cada uno de los robots que componen la formación.

6.3 Variables de la Formación

6.3.1 Introducción

En [76] se presenta el “cluster space approach”, en este enfoque se considera los n -robots como una sola entidad, un *cluster* que efectivamente actúa como un mecanismo cinemático

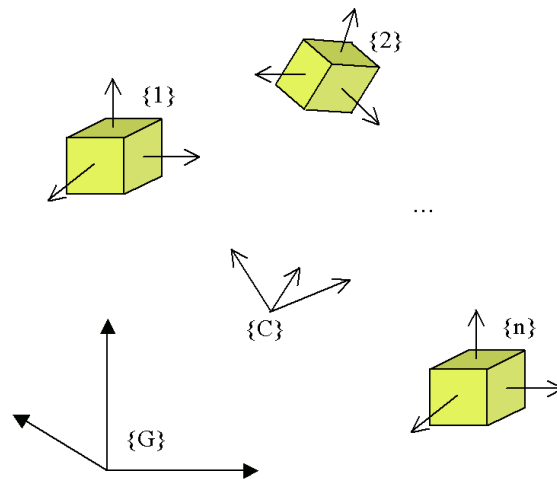


Figura 36: Descripción de los sistemas de referencia del cluster y de los robots con respecto al sistema de referencia inercial.

virtual. Este enfoque tiene como objetivo aquellas aplicaciones donde el control de la formación y la variación en el tiempo de la forma son críticos. Los movimientos deseados son especificados como una función de los atributos del *cluster*, tal como posición, orientación y geometría. Estos atributos guían la selección de un conjunto de variables independientes adecuadas para la especificación, control y monitoreo. Estas variables forman el denominado el *cluster* del sistema. Las variables del *cluster* pueden relacionar las posiciones de los robots a través de un conjunto de transformaciones cinemáticas. Estas transformaciones permiten convertir los comandos del *cluster* a comandos específicos para los robots, y datos de los robots convertirlos en datos del *cluster*. Esto permite que en tiempo real se controlen las variables que definen el *cluster* y mediante transformaciones cinemáticas obtener las acciones de control individual para cada uno de los robots (y por último a cada actuador de cada robot), y también permite que los datos de una variedad de sensores de los robots convertidos en variables del *cluster*.

6.3.2 Definición de las Variables de la Formación

El primer paso para el control del cluster o formación es la apropiada selección de las variables. Para ello se introduce un sistema de referencia y se debe seleccionar un conjunto de variables de estado que capturen la pose y geometría de la formación. Considérese el caso simplificado de un conjunto de n -robots donde cada robot tiene m grados de libertad (GDL) y un sistema de referencia asociado, como se muestra en la Fig. 36, con $m = p + r$, donde p son los GDL de traslación y r los GDL de rotación para cada robot [108].

Una representación típica de la pose de los robots utiliza nm variables para representar la posición y orientación de cada uno de los sistemas de referencias asociados, $\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}$ con respecto al sistema de referencia inercial global $\{G\}$. Se puede formalizar como un conjunto de n

transformaciones homogéneas específicas, ${}^G_1T, {}^G_2T, \dots, {}^G_nT$, para el robot i -ésimo de la formación|:

$${}^G_iT = \begin{bmatrix} {}^G_iR & {}^G P_{i_{org}} \\ [0 \ 0 \ 0] & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

donde G_iR es una matriz de rotación que denota la orientación del sistema de referencia móvil asociado al robot $\{i\}$, con respecto al sistema de referencia global $\{G\}$, y ${}^G P_{i_{org}}$ es un vector que especifica la traslación del origen del sistema de referencia $\{i\}$ con respecto a $\{G\}$. Para un robot de 6 GDL, la orientación y traslación puede ser representada por 3 variables de traslación y 3 variables de rotación, de tal forma que ${}^G P_{i_{org}} = (x_i, y_i, z_i)^T$ y ${}^G_iR(\phi_i, \theta_i, \psi_i)$ es una matriz de 3×3 .

En contraste, la representación del cluster comienza con la definición de su sistema de referencia asociado $\{C\}$, la pose del mismo queda denotada por la transformación homogénea ${}^C T$. La pose de cada robot se expresa relativo al sistema de referencia del cluster: ${}^C_1T, {}^C_2T, \dots, {}^C_nT$, de forma tal que para el robot i :

$${}^G_i = {}^C T * {}^C_i T \quad (6.2)$$

Con este formalismo, el sistema de n -robot de nm GDL es representada por $[(n+1)m]$ variables en $(n+1)$ transformaciones homogéneas con m restricciones. La posición del sistema de referencia asociado al cluster $\{C\}$ con respecto a los n robots es a menudo crítico para lograr que el cluster sea beneficioso para el operador/piloto. Normalmente $\{C\}$ se posiciona y orienta de manera que tenga un significado geométrico, como puede ser el centroide del cluster y orientado hacia el vehículo líder, coincidiendo con el sistema de referencia asociado al líder. La forma en que se seleccionen las variables del cluster determinan la naturaleza de las m restricciones que se representan a través de las $(n+1)m$ variables.

6.3.3 Selección de las Variables del Cluster

Es necesario realizar antes del control de la formación, la definición de las variables que definen a la formación o “cluster”. Esta selección depende de las necesidades del operador y los requerimientos específicos de la tarea [76].

Para ello seleccionamos un conjunto de variables (y sus derivadas) para capturar la postura y geometría de la formación. Estas variables, c_1, c_2, \dots, c_{mn} , están normalmente relacionadas (y en muchos casos equivalentes) con las variables utilizadas en ${}^C T$ y ${}^C_1T, {}^C_2T, \dots, {}^C_nT$.

Para el caso general de un robot de 6 GDL, donde las variables de postura de $\{C\}$ con respecto a $\{G\}$ son $(x_c, y_c, z_c, \phi_c, \theta_c, \psi_c)$ y las variables que definen la postura del robot i con

respecto a $\{C\}$ son $(x_i, y_i, z_i, \phi_i, \theta_i, \psi_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= f_1(x_c, y_c, z_c, \phi_c, \theta_c, \psi_c, x_1, y_1, z_1, \phi_1, \theta_1, \psi_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \phi_n, \theta_n, \psi_n) \\
 c_2 &= f_2(x_c, y_c, z_c, \phi_c, \theta_c, \psi_c, x_1, y_1, z_1, \phi_1, \theta_1, \psi_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \phi_n, \theta_n, \psi_n) \\
 &\vdots \\
 c_{6n} &= f_{6n}(x_c, y_c, z_c, \phi_c, \theta_c, \psi_c, x_1, y_1, z_1, \phi_1, \theta_1, \psi_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \phi_n, \theta_n, \psi_n)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

La selección de las variables debe ser en función de la aplicación, del diseño del sistema, y sujeto a criterios tales como la preferencia del operador. En la práctica, se ha encontrado de gran valor seleccionar variables basadas en la forma de una estructura virtual que puede moverse a través del espacio mientras puede aumentar su número de agentes y modificar la orientación de forma arbitraria. Esto conduce al uso de varias categorías de variables de postura del cluster (y sus derivadas) que especifica la posición, orientación y la forma del cluster.

Las variables de posición del cluster expresan la localización del cluster con respecto al sistema de referencia global como denota los componentes de ${}^G P_{C_{org}}$; p variables se necesitan para especificar esto, tomando como consideración que todos los robots tienen idénticos GDL. Las variables de orientación del cluster especifican la pose del sistema de referencia del cluster con respecto al sistema global, como se denota en la matriz de rotación ${}^G R$ se requieren $o = 3$ variables para sistemas donde $n \geq p = 3$, para los casos restantes se requiere $o = p - 1$ variables, donde o es el número de variables de orientación del cluster.

Finalmente, las variables de forma del cluster deben utilizarse para expresar la geometría del sistema multi-robot, dado un total de nm variables de forma del cluster que deben buscarse. El número de variables de forma del cluster s están dadas por

$$\begin{aligned}
 s &= (nm) - p - o = p(n - 1) - o \\
 s &= \left\{ \begin{array}{l} p(n - 1) - 3, \text{ para } n \geq p = 3 \\ p(n - 2) + 1, \text{ de otra manera} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Estas variables de forma permiten las especificaciones geométricas de interés, tal como el tamaño del cluster, y otras características de nuestra formación.

6.3.4 Formación de 3 Robots

Para este enfoque se toma como base el trabajo de [38], en el cual se presenta un esquema centralizado para controlar una formación compuesta por 3 robots terrestres no-holonómicos. En este trabajo se presentan unas variables de cluster o formación para representar el sistema compuesto por 3 robots. El control de posición (o seguimiento de trayectoria) se realiza sobre el centroide de la figura geométrica, en este caso, un triángulo. Esta definición de las variables que representan la formación tienen la característica de que aquellas variables que definen la forma, la posición y la orientación de la misma, pueden separarse y no tienen relación alguna entre ellas. Varios trabajos utilizan estas variables de formación definidas, en [28] se utiliza estas variables para el control de una formación de 3 robots terrestres no-holonómicos, utilizando un controlador cinemático en cascada con un compensador dinámico a fin de mejorar el desempeño del sistema. En [41] se utilizó este esquema y se presentó una solución para el caso donde la cantidad de robots a controlar es $n \geq 3$. Además se presenta la evasión de obstáculos de toda la formación, de modo que pueda modificar su forma de manera momentánea, presentando un comportamiento elástico.

La ventaja de este enfoque radica en considerar a la formación como una entidad única y especificar los movimientos individuales de los robots a través de los atributos de la formación, como la posición, orientación y la forma geométrica de la estructura virtual.

Es necesario la correcta selección de las variables que especifican a la formación, para el control y monitoreo, las cuales están relacionadas con las variables de los robots a través de un conjunto de transformaciones cinemáticas. Estas transformaciones, a su vez, permiten que los comandos de control en el espacio de la formación sean convertidos automáticamente en comandos en el espacio de los robots (en última instancia son transformadas en comandos para cada uno de los actuadores de los robots). De esta manera es posible el monitoreo y la especificación de los movimientos de los robots a partir de las variables de la formación, una vez que se computan las acciones de control en función de las variables de la formación.

6.3.4.1 Selección de las Variables del Cluster de 3 Robots en el Plano (R^2)

Las variables que representan a toda la formación se muestra en la Fig. 37. La posición de la formación esta definida por la posición del centroide del triángulo y la orientación de la formación $P_F = [x_F \ y_F \ \psi_F]$ y el control de la misma se realiza tomando al sistema global G como referencia. La forma de la misma queda definida por $S_F = [p_F \ q_F \ \beta_F]$, que representa la distancia entre R_1 y R_2 , la distancia entre R_1 y R_3 y el ángulo $\widehat{R_1 R_2 R_3}$.

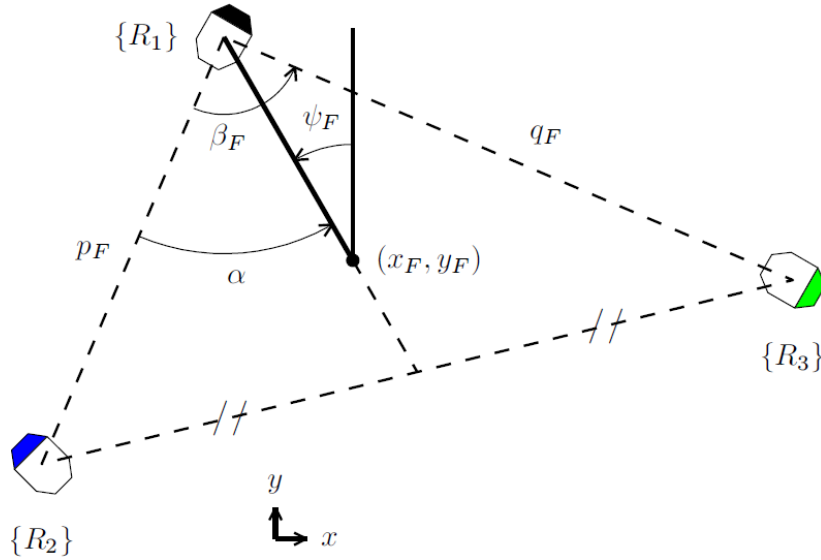


Figura 37: Variables para una Formación de 3 Robots.

Transformaciones Cinemáticas Directas e Inversa A continuación se presenta las relaciones necesarias entre las variables de posición y forma del cluster (“Formación”) y la posición de los robots $h_i = [x_i \ y_i \ z_i]^T$, que está dado por las transformaciones cinemáticas directas e inversas, $q = f(x)$ y $x = f_{(q)}^{-1}$, donde $q = [P_F \ S_F]^T$ y $x = [h_1 \ h_2 \ h_3]^T$. En esta propuesta no se tiene en cuenta la orientación del robot, debido a que no arroja mayor información al tratarse de robots no-holonómicos.

La transformación cinemática directa, como se puede apreciar en la Fig. 37, está dada por

$$P_F = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \arctan \frac{\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}(x_2 + x_3)}{\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}(y_2 + y_3)} \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

$$S_F = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\ \arccos \frac{p_F^2 + q_F^2 - r_F^2}{2p_F q_F} \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

donde $r_F = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$.

La cinemática inversa que permite obtener las posiciones de cada uno de los robots en

función de las variables de la formación está definida por:

$$x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_F + \frac{2}{3}h_F \sin \psi_F \\ y_F + \frac{2}{3}h_F \cos \psi_F \\ x_F + \frac{2}{3}h_F \sin \psi_F - p_F \sin(\alpha + \psi_F) \\ y_F + \frac{2}{3}h_F \cos \psi_F - p_F \cos(\alpha + \psi_F) \\ x_F + \frac{2}{3}h_F \sin \psi_F + q_F \sin(\beta_F - \alpha - \psi_F) \\ y_F + \frac{2}{3}h_F \cos \psi_F - q_F \cos(\beta_F - \alpha - \psi_F) \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

Donde $h_F = \sqrt{\frac{1}{2}(p_F^2 + q_F^2 - \frac{1}{2}r_F^2)}$ es la distancia desde $\{R_1\}$ hasta el punto medio del segmento $\overline{\{R_1\}\{R_2\}}$, pasando a través de (x_F, y_F) ; y $\alpha = \arccos \frac{p_F^2 + h_F^2 - \frac{1}{4}r_F^2}{2p_F h_F}$.

Derivando respecto al tiempo las relaciones cinemáticas directas 6.4, 6.5 e inversa 6.6 es posible obtener las relaciones entre las velocidades de x y q , representado por la matriz Jacobiana, que esta dada por $\dot{q} = J_{(x)}\dot{x}$ en sentido directo, y $\dot{x} = J_{(x)}^{-1}\dot{q}$ en sentido inverso, donde

$$\begin{aligned} J_{(x)} &= \frac{\partial q_{n \times 1}}{\partial x_{m \times 1}} \\ J_{(x)}^{-1} &= \frac{\partial x_{m \times 1}}{\partial q_{n \times 1}} \end{aligned} \quad (6.7)$$

para $m, n = 1, 2, \dots, 6$.

6.3.4.2 Variables del Cluster de 3 Robots en el Espacio (\mathbb{R}^3)

Anteriormente se establecieron las variables para una formación de 3 robots en el plano \mathbb{R}^2 . El objetivo ahora es ampliar este enfoque hacia una formación en el espacio \mathbb{R}^3 . En el caso de una formación en el plano se necesitaban dos conjuntos de variables para definirla, $P_F = [x_F \ y_F \ \psi_F]^T$ (posición del centroide del triángulo y la orientación del triángulo con respecto a $\{G\}$) y las variables que definen la forma de la misma $S_F = [p_F \ q_F \ \beta_F]^T$, que representa la distancia entre R_1 y R_2 , la distancia entre R_1 y R_3 y el ángulo $\widehat{R_1 R_2 R_3}$. En el caso de un sistema multi-robot 3D las variables son parecidas, aunque se pueden dividir entre aquellas que definen la posición de la formación $P_F = [x_F \ y_F \ z_F]^T$, las que definen la forma $S_F = [p_F \ q_F \ \beta_F]^T$, conceptualmente similares a las de una formación planar. Por ultimo, las variables que definen la pose del sistema,

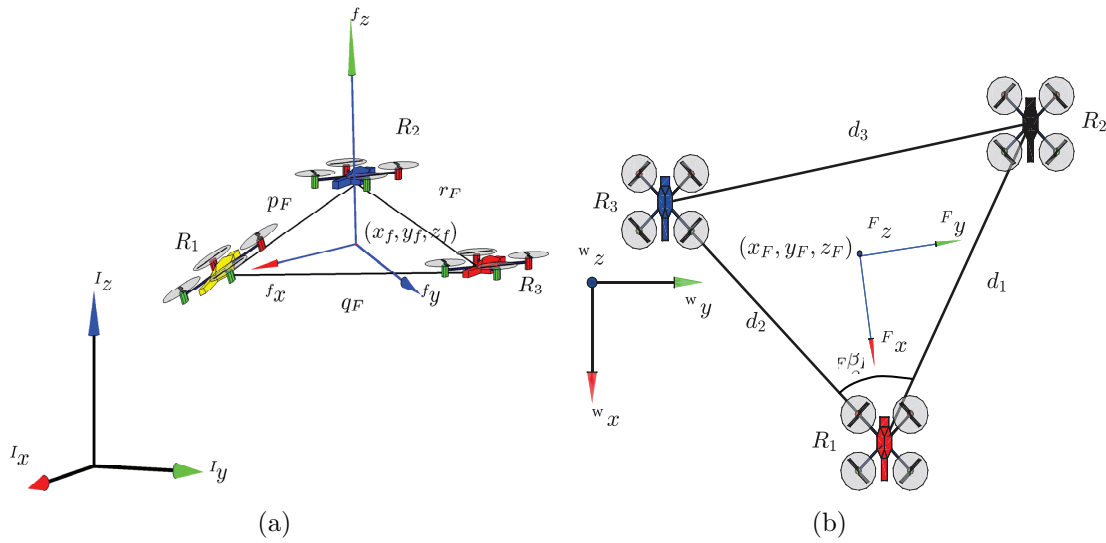


Figura 38: Variables de la Formación en \mathbb{R}^3 . (a) Vista normal de la Formación. (b) Vista superior de la Formación.

que a diferencia del caso de una formación en \mathbb{R}^2 , se requieren 3 ángulos para definir la orientación del conjunto. Para ello se utiliza los ángulos de Tait-Bryan, muchas veces conocidos de forma equivocada como ángulos de Euler, para definir la pose de nuestro sistema con respecto al sistema de referencia inercial. Los ángulos de Tait-Bryan, son tres ángulos usados para describir una rotación general en el espacio Euclídeo tridimensional a través de tres rotaciones sucesivas en torno de ejes del sistema móvil en el cual están definidos, en nuestro caso $\{C\}$. Estos ángulos se los conoce como alabeo o roll por su término en inglés (ϕ), cabeceo o pitch por su término en inglés (θ) y guiñada o yaw (ψ). En la literatura es más frecuente encontrar los términos en inglés para los ángulos de Tait-Bryan, por lo tanto en esta tesis así se realizará.

La orientación de la formación queda definida por las variables $O_F = [\phi_F \ \theta_F \ \psi_F]^T$, que son los ángulos de Tait-Bryan que definen la pose del sistema de referencia $\{C\}$ asociado a la formación con respecto al sistema global $\{G\}$.

La transformación cinemática directa, como se puede apreciar en la Fig. 38, está dada por

$$P_F = \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \\ \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

$$S_F = \begin{bmatrix} p_F \\ q_F \\ \beta_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2} \\ \arccos \frac{p_F^2 + q_F^2 - r_F^2}{2p_F q_F} \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

donde $r_F = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2}$. Para las variables de orientación del cluster se requiere definir $\{C\}$ en función de los 3 robots que componen el sistema multi-robot, cuyo origen de coordenadas se hace coincidir con el centroide del triángulo. Por definición se ha adoptado que el eje ${}^F x$ esté definido en sentido desde el origen de coordenadas del sistema (baricentro o centroide del triángulo) y el robot de mayor jerarquía dentro del conjunto al cual se denomina $\{R_1\}$. El eje ${}^F z$ es normal al plano que forman los 3 robots y el eje ${}^F y = {}^F z \times {}^F x$ define la terna de ejes del sistema móvil. Es necesario normalizar cada uno de los ejes que se obtienen de $\{C\}$, el proceso de normalización sirve para transformar a cada uno de nuestros vectores en vectores de norma igual a 1. Una vez normalizado el vector v , este conserva la dirección y sentido del vector original pero su norma es unitaria $\|v\| = 1$.

$${}^F x = h_1 - P_F = [x_1 \ y_1 \ z_1]^T - [x_f \ y_f \ z_f]^T \quad (6.10)$$

$${}^F z = (h_1 - h_2) \times (h_1 - h_3) \quad (6.11)$$

$${}^F y = {}^F z \times {}^F x \quad (6.12)$$

El sistema de referencia global $\{G\}$ son los vectores que componen las bases canónicas en R^3

$$\mathcal{G} = \{i, j, k\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad (6.13)$$

Teniendo en cuenta ambos sistemas de referencias, es necesario encontrar la relación entre la pose de ambos sistemas. Este vínculo está dada por una matriz de rotación, también conocida como Matriz de Coseno Directa [109], es una matriz de transformación que permite relacionar entre las bases de $\{G\}$ y $\{C\}$. Cabe recordar que los ejes de ambos sistemas de referencia representan una base del espacio R^3 . Al conjunto de los vectores de $\{C\}$, los denominaremos $\mathcal{F}_C = \{{}^F x, {}^F y, {}^F z\}$, y la base de $\{C\}$ es la base canónica de R^3 . Por lo tanto, relacionando ambas bases mediante la matriz de rotación ${}^G_C R$ resulta

$$[{}^F x \ {}^F y \ {}^F z]_{3 \times 3} = {}^G_C R \cdot [i \ j \ k]_{3 \times 3}. \quad (6.14)$$

Las columnas de las matrices de la ecuación anterior son los vectores de la base canónica $\{C\}$ y

del sistema móvil del *cluster* \mathcal{F}_C . De 6.14 resulta

$${}^G_C R = \mathcal{F}_C, \quad (6.15)$$

Las columnas de la matriz ${}^G_C R$ están formadas por los vectores de la base \mathcal{F}_C , que a fin de cuentas son los ejes coordenados del sistema de referencia $\{C\}$. De [110] es posible encontrar las relaciones necesarias para obtener los ángulos de alabeo o roll(ϕ_F), cabeceo o pitch(θ_F) y guiñada o yaw (ψ_F).

El cálculo de los ángulos está en función de los elementos de la matriz de rotación, donde ${}^G_C R_{ij}$ representa el elemento i, j de la matriz de rotación ${}^G_C R$. Las columnas de dicha matriz son los ejes del sistema de referencia asociado a la formación, por lo tanto el subíndice j hace referencia a uno de los 3 vectores que representan cada uno de los ejes del sistema de referencia $\{C\}$, mientras que el subíndice i hace referencia a la componente de dicho vector (x, y, z).

$$\begin{aligned} \phi_F &= \arctan \frac{{}^G_C R_{21}}{{}^G_C R_{11}} = \arctan \frac{{}^F x(y)}{{}^F x(x)} \\ \theta_F &= -\arcsin {}^G_C R_{31} = -\arcsin {}^F x(z) \\ \psi_F &= \arctan \frac{{}^G_C R_{32}}{{}^G_C R_{33}} = \arctan \frac{{}^F z(y)}{{}^F z(z)} \end{aligned} \quad (6.16)$$

La cinemática inversa que permite obtener las posiciones de cada uno de los robots en función de las variables de la formación está definida por:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_F + \frac{2}{3}h_F \cos \theta_F \cos \psi_F \\
y_1 &= y_F + \frac{2}{3}h_F(\sin \phi_F \sin \theta_F \cos \psi_F - \cos \phi_F \sin \psi_F) \\
z_1 &= z_F - \frac{2}{3}h_F(\cos \phi_F \sin \theta_F \cos \psi_F + \sin \phi_F \sin \psi_F) \\
\\
x_2 &= x_1 - p_F \cos \theta_F \cos(\alpha + \psi_F) \\
y_2 &= y_1 - p_F \cos \phi_F \sin(\alpha + \psi_F) - q_F \sin \phi_F \sin \theta_F \cos(\alpha + \psi_F) \\
z_2 &= z_1 + p_F \sin \phi_F \sin(\alpha + \psi_F) + q_F \cos \phi_F \sin \theta_F \cos(\alpha + \psi_F) \\
\\
x_3 &= x_1 - q_F \cos \theta_F \cos(\beta_F - \alpha - \psi_F) \\
y_3 &= y_1 + q_F \cos \phi_F \sin(\beta_F - \alpha - \psi_F) - q_F \sin \phi_F \sin \theta_F \cos(\beta_F - \alpha - \psi_F) \\
z_3 &= z_1 - q_F \sin \phi_F \sin(\beta_F - \alpha - \psi_F) + q_F \cos \phi_F \sin \theta_F \cos(\beta_F - \alpha - \psi_F)
\end{aligned} \tag{6.17}$$

donde $h_F = \sqrt{\frac{1}{2}(p_F^2 + q_F^2 - \frac{1}{2}r_F^2)}$ es la distancia entre R_1 y el punto central del segmento $\overline{R_2R_3}$ pasando a través del punto (x_F, y_F, z_F) , y $\alpha = \arccos \frac{p_F^2 + h_F^2 - \frac{1}{4}r_F^2}{2p_F h_F}$. Para el caso particular de una formación planar donde $\phi_f = 0$ y $\theta_f = 0$, 6.17 resulta igual a 6.6, la cual se presentó en [38].

Derivando respecto al tiempo las relaciones cinemáticas directas 6.8, 6.9, 6.16 e inversa 6.17 es posible obtener las relaciones entre las velocidades de x y q , representado por la matriz Jacobiana, que esta dada por $\dot{q} = J_{(x)}\dot{x}$ en sentido directo, y $\dot{x} = J_{(x)}^{-1}\dot{q}$ en sentido inverso, donde

$$J_{(x)} = \frac{\partial q_{n \times 1}}{\partial x_{m \times 1}} \tag{6.18}$$

$$J_{(x)}^{-1} = \frac{\partial x_{m \times 1}}{\partial q_{n \times 1}} \tag{6.19}$$

para $m, n = 1, 2, \dots, 9$.

El desarrollo de las ecuaciones 6.17 se realizó de forma similar a los expuesto en [38], es decir, que la posición de los robots R_2 y R_3 se exprese en función de la posición de R_1 .

6.4 Restricciones en las variables de Referencia

Dentro del espacio \mathfrak{R}^9 que forman las variables de formación presentadas anteriormente, y su relación con las variables que describen la posición de los 3 robots en el espacio, existe una transformación, $T : \mathfrak{R}^9 \rightarrow \mathfrak{R}^9$ entre ambos conjuntos dados por 6.8, 6.9 y 6.16, para el sentido directo, y 6.17, para el sentido inverso.

La principal limitación deriva de la imposibilidad de que las alturas de los vehículos sean negativas, por lo tanto, esta restricción hace que la transformación quede limitada de un subespacio de \mathfrak{R}^9 , hacia otro subespacio de \mathfrak{R}^9 . De esta forma, siempre se debe corroborar que los valores de las variables de formación garanticen que $z_i \geq 0$, donde $i = \{1, 2, 3\}$, para $\forall t > 0$. De 6.17

$$\begin{aligned}
 z_1 &\geq z_F - \frac{2}{3}h_F(\cos \phi_F \sin \theta_F \cos \psi_F + \sin \phi_F \sin \psi_F) \\
 z_2 &\geq z_1 + p_F \sin \phi_F \sin(\alpha + \psi_F) + q_F \cos \phi_F \sin \theta_F \cos(\alpha + \psi_F) \\
 z_3 &\geq z_1 - q_F \sin \phi_F \sin(\beta_F - \alpha - \psi_F) + q_F \cos \phi_F \sin \theta_F \cos(\beta_F - \alpha - \psi_F),
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

De la ecuación 6.20 la desigualdad se transformaría en igualdad en el caso de que alguno de los robots sea terrestre(R_i). De esta manera la altura de dicho o dichos agentes es nula ($z_i = 0$).

En todo momento debe corroborarse que dichas desigualdades se cumplen, para evitar que los robots aéreos puedan colisionar contra el suelo. Esto se logra mediante un supervisor que garantice que las referencias sean adecuadas en todo momento.

7 *Control de Formación Basado en el Espacio Nulo*

7.1 Introducción

En este capítulo se presenta un esquema de control basado en Espacio Nulo para una formación de vehículos aéreos. Esta técnica de control, está clasificada dentro de los denominados *Behaviour Control*, estos esquemas se basan en dividir la problemática general en varias sub-tareas, eventualmente desarrollar algoritmos para controlar cada una individualmente, sin tener en cuenta las restantes tareas. Por último, se debe combinar cada una de las salidas de los controladores, de forma que se cumpla con el objetivo de control planteado.

La forma en que combinan las salidas de control para cada tarea es crítico, y define el desempeño del controlador. En [44] se analizan tres esquemas de control basados en comportamiento (*Behaviour Control*). En [45] se presenta el primero de ellos denominado *the layered control system*, el segundo denominado *the motor schema control* [46], y por último el denominado *Null-Space-Based behavioral control* [48].

The layered control system consiste en ordenar las posibles tareas de manera jerárquica, de aquellas que es vital cumplir hasta aquellas que se pueden delegar para alcanzar después que se cumplieron las de mayor jerarquía. Cada sub-tarea puede ser absorbida por la de mayor jerarquía, de esta manera siempre se garantiza el cumplimiento de las tareas de mayor jerarquía. Para ello existe un módulo asíncrono, que es el responsable de decidir cuál de todos los módulos (*controladores*) está activo, no existiendo combinación alguna de las salidas de los módulos.

La diferencia principal entre el esquema anteriormente mencionado y *the motor schema control*, radica en el módulo que decide cuál de las salidas debe estar activa. En este caso, la selección es dinámica y la salida general será la suma pesada de las salidas activas. La ponderación está definida de manera heurística, para el caso donde la ganancia de una salida es nula, significa que no se la tendrá en cuenta. Este ajuste de ganancias se realiza en línea y es función del contexto al que está expuesto el sistema. En este enfoque no se garantiza el cumplimiento de la tarea de mayor jerarquía, para ello el módulo de selección de las salidas debería anular las restantes

salidas (ganancia nula). En este caso ambos enfoques son similares.

Por último se analiza el *Null-Space-Based behavioral control*. Este enfoque se deriva de la solución cinemática inversa para manipuladores robóticos industriales redundantes [111], [112]. La redundancia cinemática ocurre cuando el manipulador tiene más grados de libertad que los necesarios para cumplir la tarea. Desde el punto de vista estricto, no necesariamente debe existir de forma real la redundancia en el sistema, sino que la tarea a cumplir hace que el sistema sea redundante. En un manipulador redundante, el problema de cinemática inversa admite un número infinito de soluciones, por lo tanto es necesario un criterio para poder escoger la solución. El método más simple es utilizar la pseudo-inversa de la matriz Jacobiana [113], esto garantiza la reconstrucción óptima de la velocidad deseada del extremo del manipulador (en el sentido de mínimos cuadrados) con mínima norma de las velocidades de las articulaciones. El inconveniente de este método es que, a pesar de la reducción de las velocidades de las articulaciones, no se garantiza la evasión de las singularidades [114].

La redundancia del sistema se puede explotar para lograr restricciones adicionales en la solución del problema de cinemática inversa además de las tareas del extremo del manipulador, que normalmente es el posicionamiento (seguimiento de trayectoria o camino) del extremo operativo. Una posibilidad es agregar términos a esta solución donde se contemplen soluciones a otros tipos de problemas (evasión de obstáculos, máxima manipulabilidad, minimización del torque de las articulaciones, etc) garantizando que no existan conflictos entre ellos que haga al sistema ineficiente. Este problema se soluciona mediante la estrategia de prioridad de tareas, asignando un orden adecuado de prioridad a las tareas dadas y luego satisfaciendo las de menor jerarquía en el espacio nulo de las de mayor jerarquía [75].

7.2 Control Basado en el Espacio Nulo

Cuando se realizan tareas de navegación con un conjunto de robots, normalmente la misión involucra que uno o varios de ellos deban cumplir un número de tareas al mismo instante y de manera simultánea. Un enfoque común es resolver cada una de forma individual, y combinar las salidas de cada tarea, generando los comandos para los robots, y eventualmente a los actuadores de cada uno de ellos [50].

Se define como $q \in \mathbb{R}^m$ al conjunto de variables que deben controlarse (también denominadas variables de la tarea). Además, se define $x \in \mathbb{R}^3$ como las variables que representan las posiciones de los vehículos de la formación; en esta tesis siempre se tendrá en cuenta al vehículo como un robot inserto en \mathbb{R}^3 , por más que sea un vehículo terrestre ($z = 0$). La relación entre

ambos conjuntos de variables está dado por

$$q = f(x), \quad (7.1)$$

con su correspondiente relación diferencial,

$$\dot{q} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \dot{x} = J_{(x)} \dot{x}, \quad (7.2)$$

donde $J_{(x)} \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ es la matriz Jacobiana asociada a la tarea, que relaciona las velocidades de los robots con las velocidades de las tareas. El valor de m representa el numeral de las variables de la tarea y n depende del sistema robótico que se analiza.

Una forma efectiva de generar las referencias de movimiento para cada robot $x_{i,d(t)}$, a partir de los valores deseado de las variables de la tarea $q_{d(t)}$, es invirtiendo la relación cinemática 7.2, este problema se ha estudiado amplia mente en robótica [115].

Para matrices con más columnas que filas (esto sucede normalmente en el caso de sistemas de control multi-robot, $n > m$), el problema admite infinitas soluciones y suele optimizar de alguna forma la solución de este problema. Un requerimiento típico es encontrar la solución de mínima norma, que se obtiene mediante la solución de mínimos cuadrados [84]

$$\dot{x}_d = J^\dagger \dot{q}_d = J^T (J J^T)^{-1} \dot{q}_d, \quad (7.3)$$

J^\dagger es la matriz pseudo-inversa del Jacobiano. En este punto tenemos velocidades de referencia para cada uno de los robots, aunque los controladores propuestos requieren de referencias de posición que pueden obtenerse integrando \dot{x}_d en (7.3). Sin embargo, una integración discreta (como se suele hacer en la práctica) de estas referencias de velocidades puede resultar en *drift* o *deriva* numéricas en la posición de los robots, el *drift* se puede contrarrestar mediante la versión de lazo cerrado del algoritmo, conocido para manipuladores industriales como *Closed Loop Inverse Kinematics (CLIK)*. Definiendo $\tilde{q} = q_d - q$ como el error de la tarea, resulta

$$\dot{x}_{d(t_k)} = J^\dagger (\dot{q}_d + \lambda \tilde{q})|_{t=t_k}, \quad (7.4)$$

donde t_k representa el i -ésimo periodo de muestreo, T_s es el periodo de muestreo y λ es una matriz diagonal de ganancias positivas. Las referencias de posición para cada robot será

$$x_{d(t_k)} = x_{d(t_{k-1})} + \dot{x}_{d(t_k)} T_s, \quad (7.5)$$

Considerando que existen más de una tarea a cumplir en el mismo instante de tiempo, se

puede pensar en apilar estas tareas en el vector q que representa las variables de la tarea. Como resultado, el Jacobiano contempla a todas las tareas dentro de su definición, por lo que la inversa 7.3 actúa como un simple sumador que adiciona el aporte parcial de velocidad a los robots que se obtendrían si cada tarea se ejecutara de manera solitaria. Es fácil notar que este enfoque es poco efectivo debido al conflicto que puede existir entre las tareas, esto puede provocar que componentes de velocidades pueden contrarrestarse entre sí.

Para solucionar esto se presenta un enfoque donde se asigna orden de prioridad a las tareas proyectando las diferentes velocidades en el espacio nulo de la tarea inmediata superior, de esta forma el problema de competencia entre las soluciones se resuelve. El primer paso es calcular la velocidad deseada para cada sub-tarea,

$$\dot{x}_{id} = J_i^\dagger(\dot{q}_{id} + \lambda_i \tilde{q}_i), \quad (7.6)$$

donde i denota la i -ésima tarea. El índice puede también indicar la prioridad de cada tarea, por lo que la tarea 1 es de mayor nivel de jerarquía que cualquier otra. Resolviendo cada tarea individualmente, es posible combinar las soluciones individuales. Para el caso de 3 tareas, la solución de 7.6 se modifica del siguiente modo:

$$\dot{x}_d = \dot{x}_{1d} + (I - J_1^\dagger J_1)[\dot{x}_{2d} + (I - J_2^\dagger J_2)\dot{x}_{3d}], \quad (7.7)$$

donde I es la matriz identidad de orden apropiado.

En las ecuaciones 7.6 y 7.7, cada sub-tarea es resuelta individualmente como si no tuviese relación con alguna otra. Luego, su contribución a la solución general se agrega. Las velocidades de las tareas de menor nivel son proyectadas en el espacio nulo de la tarea superior inmediata, de esta forma se remueven las componentes que pueden tener conflictos. Para ejemplificar esto, se analiza el caso del control de una formación de 2 vehículos aéreos donde se desea realizar el control del baricentro de dicha formación. Es posible analizar que si ambos vehículos rotan con respecto al baricentro siempre a la misma distancia se cumplirá el objetivo de control, entonces resulta evidente que es posible agregar otra tarea dentro del esquema de control que restrinja la posición de dichos robots. Todas aquellas soluciones que no modifican la posición del baricentro, están en el espacio nulo del Jacobiano asociado a la tarea.

Una característica importante del enfoque de control Basado en Espacio Nulo es que siempre se cumple la tarea de mayor prioridad o jerarquía. Las de menor prioridad, se alcanzan en un subespacio donde éstas no generan conflicto con aquellas de mayor jerarquía. Esta es una clara ventaja frente a los esquemas competitivos, donde solo se realiza una tarea a la vez, y los enfoques cooperativos, donde el uso de una combinación lineal de cada una de las salidas de las tareas cuyo resultado no garantiza el cumplimiento por completo de ninguna de las tareas. Cabe notar

que, con este enfoque, la tarea de mayor prioridad subsume a las de menor jerarquía. En caso de J_1 sea de rango completo, el espacio nulo será vacío y por lo tanto no será posible cumplir las tareas de menor prioridad.

Otra ventaja de este enfoque con respecto a las técnicas competitivas, es su formalidad matemática que permite realizar análisis de estabilidad para demostrar analíticamente el desempeño de la ley de control.

7.3 Análisis de Estabilidad

Para analizar la convergencia de los errores de las tareas de forma global, se analiza cada tarea para comprobar la convergencia a los valores deseados.

Multiplicando 7.7 miembro a miembro por J_1 y suponiendo que es de rango completo y observando que $J_1(I - J_1^\dagger J_1) = 0$, entonces:

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_{1d} + \lambda_1 \tilde{q}_1 \quad (7.8)$$

La ecuación anterior 7.8 puede reescribirse de la siguiente manera,

$$\dot{\tilde{q}}_1 = -\lambda_1 \tilde{q}_1. \quad (7.9)$$

Donde $\tilde{q}_1 = q_{1d} - q_1$. Considerando la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \tilde{q}_1^T \tilde{q}_1. \quad (7.10)$$

Derivando,

$$\dot{V} = -\tilde{q}_1^T \lambda \tilde{q}_1, \quad (7.11)$$

La matriz λ_1 es una matriz definida positiva, por lo tanto la ecuación 7.11 es definida negativa, por lo tanto se demuestra la estabilidad uniforme exponencial de los errores de la tarea 1 ($\tilde{q}_1 \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$). La ganancia λ es un parámetro de diseño que sirve para ajustar la tasa de convergencia de los errores de la tarea hacia los valores deseados.

Hasta el momento se comprobó que los errores de la tarea 1 convergen a los valores de referencia, ahora resta definir qué sucede con las restantes tareas. Las tareas de menor jerarquía se cumplen solo si no hay conflicto con las de mayor prioridad [48]. El siguiente paso es analizar

la segunda tarea. Para ello multiplicamos ambos miembros de 7.7 por J_2 ,

$$\dot{q}_2 = J_2 J_1^\dagger (\dot{q}_{1d} + \lambda_1 \tilde{q}_1) + \dot{q}_{2d} + \lambda_2 \tilde{q}_2 \quad (7.12)$$

Asumiendo que no hay conflicto de intereses entre las dos tareas, se puede expresar esto como una relación entre los Jacobianos de ambas tareas

$$J_2 J_1^\dagger = 0, \quad (7.13)$$

El significado de la ecuación 7.13, indica que las velocidades de las dos tareas son proyectadas en espacios ortogonales y por lo tanto es posible cumplir ambas tareas simultáneamente [48]. La propiedad 7.13 también se puede analizar matemáticamente considerando el rango $R(\cdot)$ y el espacio nulo $N(\cdot)$

$$R(J_2^\dagger) \perp R(J_1^\dagger). \quad (7.14)$$

Substituyendo 7.13 en 7.12 se obtiene

$$\dot{q}_2 = \dot{q}_{2d} + \lambda_2 \tilde{q}_2 \quad (7.15)$$

La ecuación (7.15) es similar (7.8), por lo que haciendo el mismo análisis se demuestra que el punto de equilibrio es uniformemente exponencialmente estable ($\tilde{q}_2 \rightarrow 0$ con $t \rightarrow \infty$). Esta condición implica que

$$R(J_2^\dagger) \subseteq I - J_1^\dagger J_1 = N(J_1). \quad (7.16)$$

Si se agrega una tercera tarea, la estabilidad de las dos primeras tareas no es modificada. Siguiendo el análisis para dos tareas, una tercera puede ser analizada en la misma manera. Esto implica que la tercer tarea esta desacoplada de las dos primeras si

$$R(J_3^\dagger) \subseteq [N(J_1) \cap N(J_2)], \quad (7.17)$$

se puede cumplir esta última tarea.

De esta manera se ha analizado la estabilidad de un sistema de control basado en el espacio nulo para cumplir múltiples objetivos de control, por lo tanto, la cuestión a considerar es la cantidad de tareas posibles que se pueden cumplir. Suponiendo que la tarea primaria, de dimensión genérica m_1 , se alcanza por un sistema multi-robot de n Grados de Libertad (GDL).

El espacio nulo del Jacobiano es un espacio de dimensión $n - r_1$ (donde $r_1 \leq m_1$, es el rango del Jacobiano). Suponiendo que la tarea secundaria (de dimensión m_2 y rango $r_2 \leq m_2$) no tiene conflicto de intereses con la tarea primaria (esto significa que la tarea secundaria actúa en el espacio nulo de la tarea primaria), el espacio nulo de la combinación de ambas tiene dimensión $n - r_1 - r_2$. Escogiendo las tareas de manera que no haya conflicto de intereses para cumplirlas de forma simultánea, es útil agregar tareas hasta que $\sum r_i = n$. Así, una vez cubierto todos los grados de libertad del sistema, si se continúa agregando sucesivas tareas de menor prioridad, éstas se proyectarán en un espacio nulo vacío (así esta tarea no contribuye a la velocidad del sistema). En el caso de tareas conflictivas, no es posible hacer una asunción genérica con respecto al número de tareas, pero se debe analizar la intersección entre los espacios nulos.

7.4 Control de una Formación de 3 Robots en \mathbb{R}^3

En esta sección se presenta un esquema de control para una formación de 3 robots en \mathbb{R}^3 , con el objetivo de poder controlar la postura y forma de dicha formación. Este controlador tiene como objetivo calcular las referencias de posición y velocidad para cada uno de los agentes que conforman el sistema. La propuesta utiliza un enfoque basado en estructura virtual, debido a esto necesariamente debe existir un controlador por cada uno de los robots, que permita alcanzar las referencias que se obtuvieron del control de formación. De esta forma, se garantiza que el conjunto de vehículos se muevan de forma coordinada hacia los valores de referencia.

Analizando lo visto en el Capítulo 6 es posible distinguir entre las variables que definen a la formación, tanto su forma como su postura. Las variables que definen la forma son las variables $S_F = [p_F \ q_F \ \beta_F]^T$, las que definen la orientación $O_F = [\phi_F \ \theta_F \ \psi_F]^T$ y aquellas que definen la posición del baricentro $P_F = [x_F \ y_F \ z_F]^T$. Cada una de las variables que definen la formación se las podría asumir como una tarea a cumplir, aunque la selección se debe analizar con mayor profundidad.

En los esquemas de Control Basado en Espacio Nulo siempre se cumple la tarea de mayor jerarquía, por lo tanto es vital realizar una buena elección de la jerarquía. Muchas veces el tipo de tarea que se requiera realizar con el sistema multi-robot, condiciona dicha elección. En algunos casos es necesario que la formación se mantenga rígida en todo momento, y en otros caso no es necesario por lo que puede modificar su forma de manera transitoria. Analizando las variables que definen la formación es posible determinar aquellas variables que definen la forma geométrica, estas son S_F y O_F (las que definen la forma y su pose u orientación en el espacio), mientras que P_F no afecta de manera alguna dicha geometría. De acuerdo a la forma en que las variables de la formación fueron definidas en el Capítulo 6, el Jacobiano asociado al problema es una matriz de 9×9 , considerando a cada robot como un vehículo en el espacio (eventualmente para un robot terrestre su componente $z_i = 0$) y las variables a controlar son 9, entonces en caso

de existir solución, es única. Esto debido a que para un valor de variables de formación deseado, solo puede existir una configuración de los 3 robots en el espacio que lo pueden satisfacer. En vez de considerar al problema como un todo, se pueden separar las variables a controlar como se explica a continuación.

Se divide el problema de control en dos tareas:

- S_F y O_F : Control de las variables de Forma y Orientación de la Formación
- P_F : Control de la Posición del baricentro de la Formación

El objetivo de esta definición radica en la posibilidad de poder obtener una respuesta de formación rígida, en cuyo caso la mayor prioridad es controlar la geometría y pose de la formación, y el control de la posición del baricentro del sistema multi-robot. Con esta definición se obtienen tareas que deben alcanzarse para cumplir el objetivo de control planteado, pero a diferencia del problema original donde existía solución única, en ambos casos se transforman en problemas con infinitas soluciones. Por ejemplo, considerar que se desea controlar la posición del centroide de la formación y que esta siga una trayectoria predeterminedada. El objetivo planteado da libertad a que los valores de S_F y O_F sean arbitrarios y no existe restricción alguna sobre éstas, por lo tanto existen infinitas soluciones a este problema. Caso similar es plantear el control de S_F y O_F , y dar libertad sobre P_F .

De este modo tenemos dos matrices Jacobianas, uno para cada tarea, donde cada una tiene un espacio nulo donde es proyectada la restante tarea. En la figura 39 se aprecia la estructura del controlador propuesto. En ella se estipulan las dos tareas

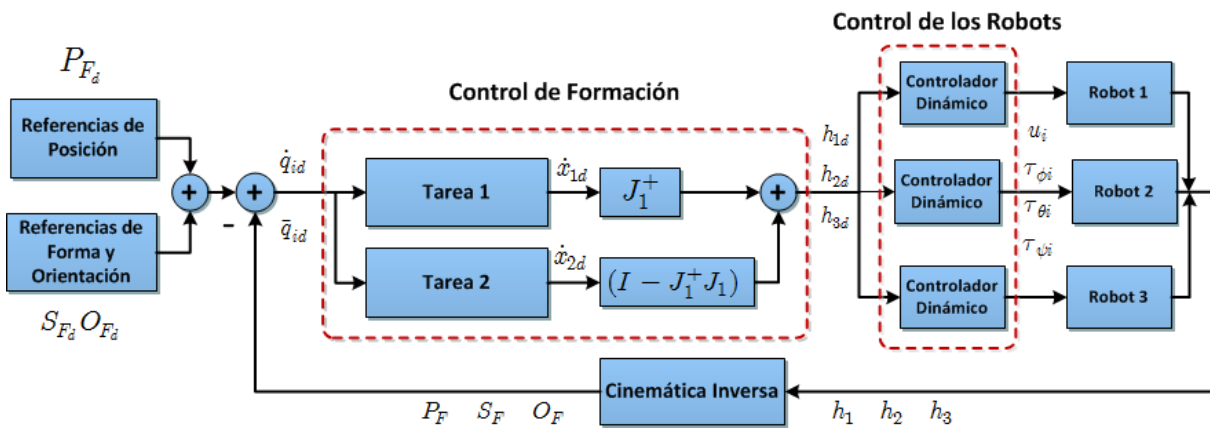


Figura 39: Esquema del Control de una Formación de 3 Robots en \mathbb{R}^3 . En el esquema se identifica el bloque de control de Formación y el Control Dinámico para cada uno de los robots.

La propuesta que se va a presentar en el presente capítulo, para el control de una formación de robots donde al menos uno de sus miembros es del tipo aéreo, radica en obtener las referencias

de posición y velocidad para cada uno de sus miembros, y controladores locales para cada robot posibilitarán que dichos sistemas alcancen dichas referencias. El enfoque utilizado es del tipo estructura virtual, pero además utiliza herramientas de los controladores basado en comportamiento y teoría de control, lo cual es un aporte sumamente potente para el control de varios robots que deben trabajar de forma coordinada y bajo restricciones impuestos por la tarea o el medio.

7.4.1 Control de Forma y Orientación

El controlador propuesto se utiliza para definir la forma y orientación del conjunto de robots. Este grupo de variables definen la geometría y pose de nuestro sistema en el espacio. Analizando la matriz Jacobiana 6.18, es posible separar aquellas filas que relacionan las variaciones temporales de los 3 robots con las variaciones temporales de las variables de forma y orientación de nuestro sistema

$$q_s = J_s \dot{x}, \quad (7.18)$$

donde $q_s = [p_F \ q_F \ \beta_F \ \phi_F \ \theta_F \ \psi_F]$, por lo tanto queda definida la siguiente matriz Jacobiana

$$J_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_F}{\partial x_1} & \frac{\partial p_F}{\partial y_1} & \frac{\partial p_F}{\partial z_1} & \frac{\partial p_F}{\partial x_2} & \frac{\partial p_F}{\partial y_2} & \frac{\partial p_F}{\partial z_2} & \frac{\partial p_F}{\partial x_3} & \frac{\partial p_F}{\partial y_3} & \frac{\partial p_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial q_F}{\partial x_1} & \frac{\partial q_F}{\partial y_1} & \frac{\partial q_F}{\partial z_1} & \frac{\partial q_F}{\partial x_2} & \frac{\partial q_F}{\partial y_2} & \frac{\partial q_F}{\partial z_2} & \frac{\partial q_F}{\partial x_3} & \frac{\partial q_F}{\partial y_3} & \frac{\partial q_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \beta_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \beta_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \beta_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \beta_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \beta_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \beta_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \beta_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \beta_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \beta_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \phi_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \phi_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \phi_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \phi_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \phi_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \theta_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \theta_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \theta_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \theta_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \theta_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial \psi_F}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_1} & \frac{\partial \psi_F}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_2} & \frac{\partial \psi_F}{\partial x_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_3} \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Para cumplir con el primer objetivo de control se propone la siguiente ley de control

$$\dot{x}_d = J_s^\dagger (\dot{q}_{sd} + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)), \quad (7.20)$$

Las variables \dot{q}_{sd} representan las velocidades deseadas de las referencias de forma y orientación, \tilde{q}_s representa los errores de control y \dot{x}_d señala las velocidades deseadas para cada robot.

La tangente hiperbólica fue incluida para limitar el valor de las velocidades obtenidas por

el controlador y evitar la saturación de los actuadores, debido a que el error \tilde{q}_{sd} puede ser muy grande lo que hace que los valores \dot{x}_d también lo sean. La tangente hiperbólica es similar a la función saturación pero tiene la ventaja de ser continua, como se aprecia en la figura 40. Para valores cercanos al origen la función tiene un comportamiento casi lineal y cuando $x \rightarrow \pm\infty$ $\tanh(x)$ tiende asintóticamente a ± 1 . El valor de la ganancia positiva L_s sirve para ajustar el valor donde la función satura para valores grandes de \tilde{q}_s , dado que $L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s) \approx L_s$. Para valores pequeños de \tilde{q}_{sd} se puede considerar $L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_{sd}) \approx K_s \tilde{q}_{sd}$, la ganancia positiva K_s sirve para ajustar la forma de la pendiente de nuestra función en el intervalos donde la tangente hiperbólica es casi lineal.

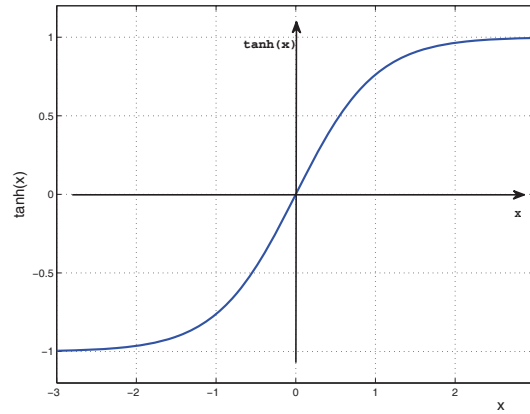


Figura 40: Función Tangente Hiperbólica.

7.4.2 Control de Posición del Baricentro

El controlador propuesto en esta sub-sección se utiliza para definir la posición del baricentro de nuestra formación. Este conjunto de variables definen la posición en el espacio del centroide, y por lo tanto condiciona la posición de cada robot en \mathbb{R}^3 pero no las define de forma unívoca. Analizando la matriz Jacobiana 6.18, es posible separar aquellas filas que relacionan las variaciones temporales de los 3 robots con las variaciones temporales del centroide del sistema

$$q_p = J_p \dot{x}, \quad (7.21)$$

donde $q_p = [x_F \ y_F \ z_F]$, quedando definida la siguiente matriz Jacobiana

$$J_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_F}{\partial x_1} & \frac{\partial x_F}{\partial y_1} & \frac{\partial x_F}{\partial z_1} & \frac{\partial x_F}{\partial x_2} & \frac{\partial x_F}{\partial y_2} & \frac{\partial x_F}{\partial z_2} & \frac{\partial x_F}{\partial x_3} & \frac{\partial x_F}{\partial y_3} & \frac{\partial x_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_F}{\partial x_1} & \frac{\partial y_F}{\partial y_1} & \frac{\partial y_F}{\partial z_1} & \frac{\partial y_F}{\partial x_2} & \frac{\partial y_F}{\partial y_2} & \frac{\partial y_F}{\partial z_2} & \frac{\partial y_F}{\partial x_3} & \frac{\partial y_F}{\partial y_3} & \frac{\partial y_F}{\partial z_3} \\ \frac{\partial z_F}{\partial x_1} & \frac{\partial z_F}{\partial y_1} & \frac{\partial z_F}{\partial z_1} & \frac{\partial z_F}{\partial x_2} & \frac{\partial z_F}{\partial y_2} & \frac{\partial z_F}{\partial z_2} & \frac{\partial z_F}{\partial x_3} & \frac{\partial z_F}{\partial y_3} & \frac{\partial \psi_F}{\partial z_3} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Para cumplir con nuestro objetivo de control se propone el siguiente controlador

$$\dot{x}_d = J_p^\dagger(\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)). \quad (7.23)$$

La variable \dot{q}_{pd} representa las velocidades deseadas de las referencias de forma y orientación, \tilde{q}_p representa los errores de control, y \dot{x}_d son las velocidades deseadas para cada robot.

La tangente hiperbólica fue incluida para limitar el valor de las velocidades obtenidas por el controlador y evitar la saturación de los actuadores, debido a que el error \tilde{q}_p puede ser muy grande lo que hace que los valores \dot{x}_d también lo sean. Las ganancias L_p y K_p sirven para ajustar el comportamiento de la tangente hiperbólica a fin de evitar la saturación de los actuadores, de igual forma que para el controlador de forma y pose.

7.4.3 Control de Formación

Una vez que ambas tareas se resolvieron de manera individual es necesario combinarlas para poder cumplir el objetivo de control completo. El controlador presentado en este capítulo es del tipo control basado en Espacio Nulo, por lo tanto es necesario definir las prioridades entre las dos tareas que se definieron anteriormente. En el caso de múltiples tareas sin conflictos de intereses el Control Basado en Espacio Nulo no garantiza que la tarea de menor prioridad (objetivo secundario) se alcanza de manera instantánea con la velocidad sub-óptima [116]. Sin embargo, el lazo cerrado garantiza que los errores de la tarea secundaria convergen a cero. Cabe recordar que siempre la tarea de mayor jerarquía se cumple en este tipo de enfoque, por lo que es fácil pensar que dependiendo del orden se obtendrán respuestas diferentes del sistema.

Caso 1 En el primer caso se plantea como objetivo primario el control de la forma y orientación del sistema multi-robot, que representa un control de formación rígida donde tiene mayor interés la forma geométrica de la formación, de forma que estas variables alcancen los valores de referencia bajo cualquier circunstancia del sistema. El control de la posición del baricentro se proyecta en el objetivo secundario para cumplirlo siempre que no cause conflicto

con el objetivo primario.

En este caso el control de formación queda definido de la siguiente forma,

$$\dot{x}_d = J_s^\dagger(\dot{q}_s + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) + (I - J_s^\dagger J_s) J_p^\dagger(\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) \quad (7.24)$$

Caso 2 En el segundo caso, el objetivo primario es el control de la posición del centroide de la formación y como objetivo secundario el control de la forma y pose (control de formación flexible). En este caso el control de formación queda definido de la siguiente forma,

$$\dot{x}_d = J_p^\dagger(\dot{q}_p + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) + (I - J_p^\dagger J_p) J_s^\dagger(\dot{q}_{sd} + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) \quad (7.25)$$

7.4.4 Análisis de Estabilidad

La velocidad deseada de los robots que componen la formación está dada por 7.24 y 7.25, de acuerdo a las propuestas presentadas anteriormente. Ambas ecuaciones son parecidas en su estructura por lo que el análisis de alguna de ellas concluirá iguales resultados para la otra.

Asumiendo el seguimiento perfecto de velocidad por parte de cada uno de los robots, $\dot{h} = \dot{x}_d$, la prueba de estabilidad se reduce a probar la convergencia de los errores de cada una de las tareas.

Se propone la siguiente candidata de Lyapunov

$$V_s(\tilde{q}_s) = \frac{1}{2} \tilde{q}_s^T \tilde{q}_s, \quad (7.26)$$

derivando 7.26, $\dot{V}_s(\tilde{q}_s)$ resulta

$$\dot{V}_s = \tilde{q}_s^T \dot{\tilde{q}}_s. \quad (7.27)$$

Recordando que $\dot{\tilde{q}}_s = \dot{q}_{sd} - \dot{q}_s = \dot{q}_{sd} - J_s \dot{x}_d$ y reemplazando 7.24 en 7.27

$$\begin{aligned} \dot{V}_s &= \tilde{q}_s^T [\dot{q}_{sd} - J_s J_s^\dagger (\dot{q}_p + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) - \\ &\quad - J_s (I - J_s^\dagger J_s) J_p^\dagger (\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p))] \end{aligned} \quad (7.28)$$

$$\dot{V}_s = \tilde{q}_s^T [\dot{q}_{sd} - J_s J_p^\dagger (\dot{q}_p + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p))] \quad (7.29)$$

$$\dot{V}_s = -\tilde{q}_s^T L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p) \quad (7.30)$$

Las ganancias K_s y L_s son ganancias positivas, por lo tanto la función es definida negativa $\Rightarrow \tilde{q}_s \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para la segunda tarea se propone la siguiente candidata

$$V_{p(\tilde{q}_p)} = \frac{1}{2} \tilde{q}_p^T \tilde{q}_p, \quad (7.31)$$

derivando la expresión anterior

$$\dot{V}_p = \tilde{q}_p^T \dot{\tilde{q}}_p. \quad (7.32)$$

Recordando que $\dot{\tilde{q}}_p = \dot{q}_{pd} - \dot{q}_p = \dot{q}_{pd} - J_p \dot{x}_d$ y reemplazando 7.25 en 7.32

$$\begin{aligned} \dot{V}_p &= \tilde{q}_p^T [\dot{q}_{pd} - J_s J_p^\dagger (\dot{q}_p + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) - \\ &\quad - J_s (I - J_p^\dagger J_p) J_s^\dagger (\dot{q}_{sd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p))] \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\dot{V}_s = \tilde{q}_s^T [\dot{q}_{sd} - J_s J_p^\dagger (\dot{q}_p + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p))] \quad (7.34)$$

$$\dot{V}_s = -\tilde{q}_s^T L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p) \quad (7.35)$$

Como se explicó en la sección 7.3, la tarea secundaria se cumple cuando la tarea no tiene conflicto de intereses con la tarea primaria. Las ganancias K_p y L_p son ganancias positivas, por lo tanto la función es definida negativa $\Rightarrow \tilde{q}_p \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto se puede concluir que la tarea primaria siempre es estable, y la tarea secundaria es también estable cuando no es conflictiva con la tarea primaria.

7.4.5 Resultados de la Simulación

En la presente sección se presentan los resultados obtenidos mediante la simulación del sistema de control propuesto. En esta sección se realizará la simulación de diferentes experimentos que manifiestan el buen desempeño del controlador propuesto.

7.4.5.1 Formación de 3 Vehículos Aéreos

En este trabajo el vehículo aéreo que se utiliza en todas las simulaciones es el helicóptero de cuatro rotores o *quadrotor* (su denominación en inglés).

Recuérdese el esquema que se presentó en la figura 39, donde el controlador de la formación determina las referencias para cada uno de los 3 robots que conforman el sistema multi-robot. Cada uno de ellos, tiene asociado un controlador cuyo fin es hacer evolucionar cada vehículo hacia

las referencias determinadas por el controlador de formación. El controlador utilizado para los helicópteros es el presentado en el Capítulo 5.

En la primera simulación se presenta un esquema de control basado en la asignación de prioridades tipo Caso 1, donde el objetivo de mayor prioridad es el control de la forma y pose de nuestro sistema, mientras que el control de la posición del centroide queda relegado como objetivo secundario. La simulación es realizada en MatLab© y el modelo considerado para el helicóptero de cuatro rotores está basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange [9].

Las tareas a realizar en la simulación es el control de forma y pose de la trayectoria. En el caso de la referencia para el control del baricentro de la formación, se considera la tarea de seguimiento de trayectoria y tareas de control de posicionamiento, con el objetivo de comprobar el correcto funcionamiento del controlador para ambas tareas, debido a que el controlador dinámico del helicóptero utilizado, permite ambas tareas sin necesidad de modificar alguna característica de su estructura.

Para probar el controlador propuesto se pretende realizar una simulación donde quede en evidencia el desempeño del mismo, para eso se pretende hacer control de seguimiento de trayectoria y posicionamiento del centroide, además de modificaciones de las referencias y de orientación. En el último caso no se considera seguimiento de una trayectoria de forma u orientación, porque es más fácil de ver en gráficas cómo responde el controlador frente a referencias de posición del centroide parametrizada en el tiempo.

En ambas simulaciones se tendrán los mismo valores de referencia, para poder comparar la diferencia que puede existir cuando se permuta el orden de prioridad de las tareas.

Simulación 1: Posicionamiento En la primera experiencia, la tarea es realizar el control de posicionamiento de la formación. En la tabla 5 se presentan las referencias de posicionamiento utilizadas en la presente simulación. En cada una de las tareas, se modifican todas las variables de referencia a fin de comprobar el funcionamiento del sistema de control planteado.

En los resultados se presenta la evolución 3D del sistema multi-robot, los errores de control y cómo evoluciona la posición de cada uno de los 3 robots. La primera simulación se realiza con el esquema de control tipo 1, en el cual el objetivo primario es el control de forma y pose y el objetivo secundario el control de posición del baricentro de la formación. La evolución en el espacio de la formación se aprecia en la figura 41, se puede observar claramente cómo el sistema alcanza las referencias y se adapta a los cambios de referencia de forma y pose. En las figuras 42(a) y 42(b) se observan los errores de control para la forma y pose del sistema. En ambos casos es posible observar las variaciones bruscas al producirse los cambios de referencia. Por último, en la figura 42(c) es posible corroborar cómo el error de posición del baricentro tiende a cero para cada una de las tareas de posicionamiento.

Tabla 5: Referencias para las Variables de Formación para la tarea de control de posicionamiento.

Variable \ t	0 – 15[sec]	15 – 30[sec]	30 – 45[sec]	45 – 60[sec]
$x_F[m]$	5	5	-5	-5
$y_F[m]$	5	-5	-5	5
$z_F[m]$	3	5	4	3
$p_F[m]$	2	4	2	4
$q_F[m]$	2	4	2	4
$\beta_F[rad]$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/2$
$\phi_F[rad]$	0	$-\pi/8$	$\pi/2$	$\pi/3$
$\theta_F[rad]$	0	0	$-\pi/16$	$\pi/3$
$\psi_F[rad]$	0	0	0	$\pi/3$

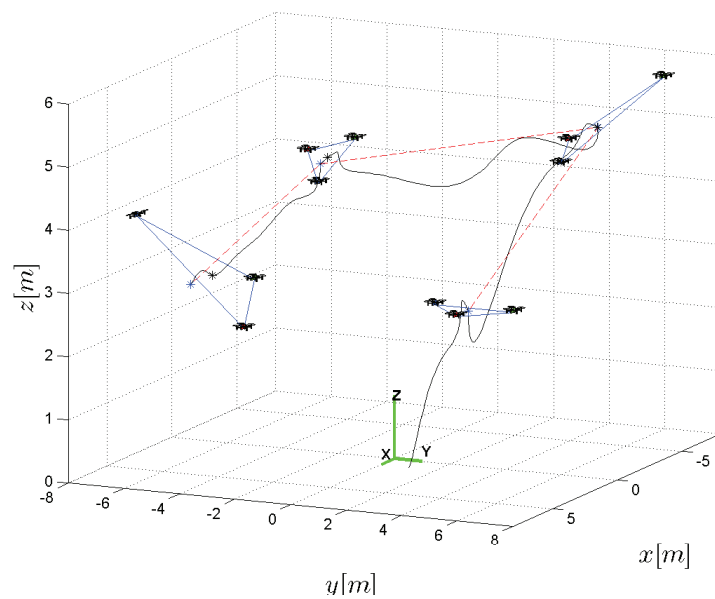
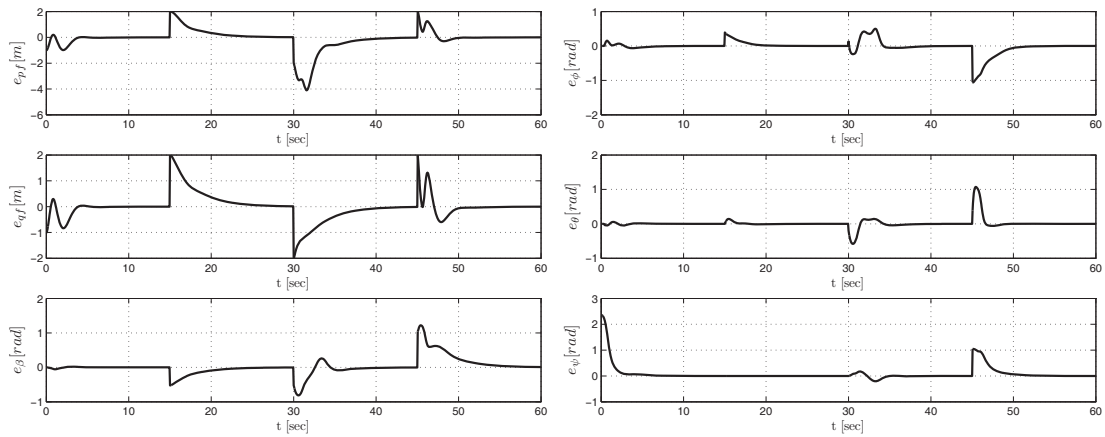
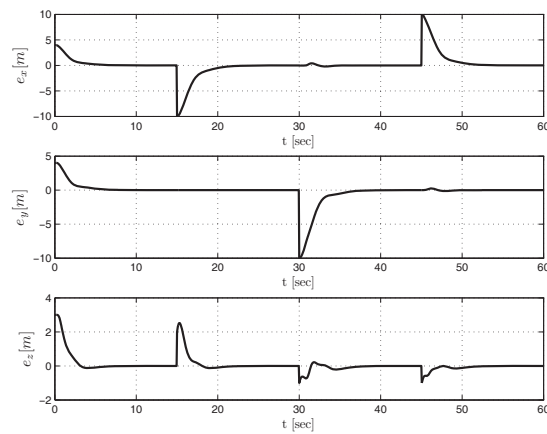


Figura 41: Evolución de la formación en el espacio 3D en la tarea de control de posicionamiento. El objetivo primario es el control de forma y pose, y el objetivo secundario es el control de posición del baricentro (Caso 1).



(a) Errores de Forma en la tarea de posicionamiento, para el Caso 1. (b) Errores de Orientación en la tarea de posicionamiento, para el Caso 1.



(c) Errores de Posicionamiento en la tarea de posicionamiento, para el Caso 1.

Figura 42: Evolución temporal de los robots en la tarea de posicionamiento, para el Caso 1

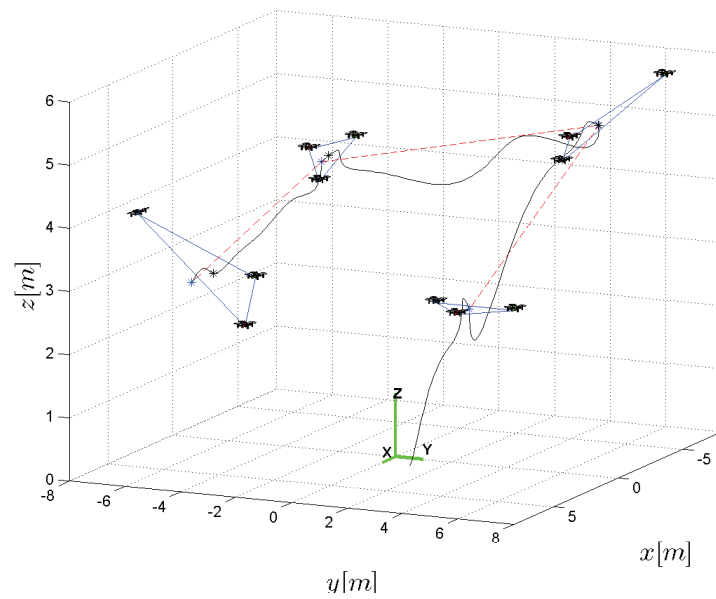
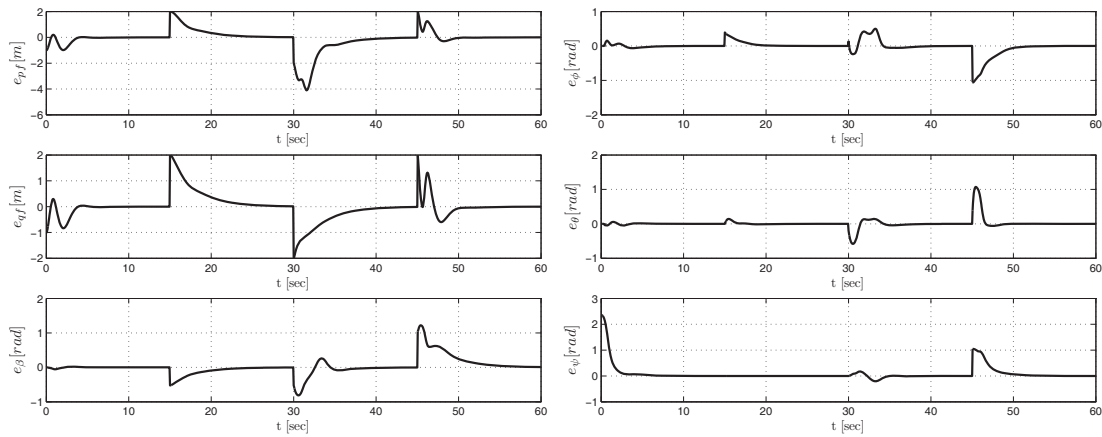


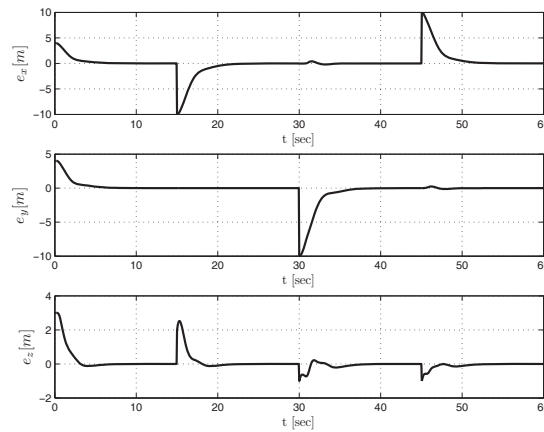
Figura 43: Evolución de la formación en el espacio $3D$ en la tarea de control de posicionamiento. El objetivo primario es el control posición del baricentro, y objetivo secundario es el control de forma y pose (Caso 2).

En la segunda simulación se aprecia la misma tarea de posicionamiento, aunque el esquema de control utilizado corresponde al Caso 2. En esta se prioriza el control de la posición del baricentro, y como objetivo secundario el control de forma y orientación. En las figuras 44(b), 44(a) y 44(c) se aprecian los errores de control de la simulación. Es posible ver cómo estos convergen después de cada transitorio a cero. Por último en la figura 43 se aprecia la evolución del sistema en el espacio \mathbb{R}^3 .



(a) Errores de Forma en la tarea de posicionamiento, para el Caso 1.

(b) Errores de Orientación en la tarea de posicionamiento, para el Caso 2.



(c) Errores de Posicionamiento en la tarea de posicionamiento, para el Caso 2.

Figura 44: Evolución temporal de los robots en la tarea de posicionamiento, para el Caso 2.

Simulación 2: Seguimiento de Trayectoria El objetivo es realizar el control de trayectoria con los esquemas de control presentados anteriormente. En la tabla 6 se muestran las referencias de las variables de formación utilizadas, que consisten en una trayectoria tipo “ocho” con variación sinusoidal en su valor de altitud.

Tabla 6: Referencias de las Variables de Formación.

Variable \ t	0 – 10[sec]	10 – 40[sec]
$x_F[m]$	$5 \sin(t/2)$	$5 \sin(0,5t)$
$y_F[m]$	$5 \cos(t/4)$	$5 \cos(0,25t)$
$z_F[m]$	$4 - \sin(0,5t)$	$4 - \sin(0,5t)$
$p_F[m]$	2	3
$q_F[m]$	2	3
$\beta_F[rad]$	$\pi/2$	$\pi/4$
$\phi_F[rad]$	0	$-\pi/16$
$\theta_F[rad]$	0	$-\pi/6$
$\psi_F[rad]$	0	$\pi/4$

En la figura 45 se muestra la evolución del sistema multi-robot en el espacio, cuando se desea controlar como objetivo primario la forma y pose de la misma, y como objetivo secundario el control de la posición del baricentro. En 48 se presenta el resultado de la formación para el segundo caso. Analizando ambas simulaciones se puede ver que prácticamente ambas son iguales, por lo tanto inicialmente se puede pensar que es indiferente el orden de los objetivos de control.

De estas simulaciones se corrobora lo que antes se mencionó que ambas tareas no tienen conflictos de intereses entre sí, por lo que dividir el control de la formación en dos tareas como se realizó en las secciones 7.4.1 y 7.4.2, conducen a que ambas tareas convergen de manera óptima [116].

Se puede observar en las figuras 46 y 49 cómo los errores de control para ambas simulaciones convergen a cero, alcanzando las variables las referencias estipuladas. Es posible notar cómo en ambas figuras se alcanzan a notar las variaciones de referencia a la que se somete el controlador, y después cómo el sistema converge a la referencia. Finalmente, en las figuras 47 y 50 se muestran las trayectorias seguidas por cada uno de los robots y la referencia para cada uno de ellos, que se deriva del control de formación que se explicó en la sección 7.4 y el controlador presentado en el Capítulo 5. Este no considera la saturación de las acciones de control, pero en el controlador propuesto de formación si esta considerado en 7.4, por lo que de manera indirecta es posible limitar las referencias que se asigna a cada uno de los helicópteros.

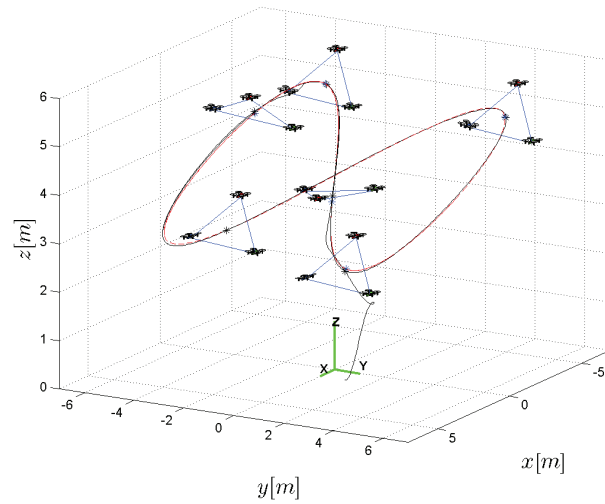
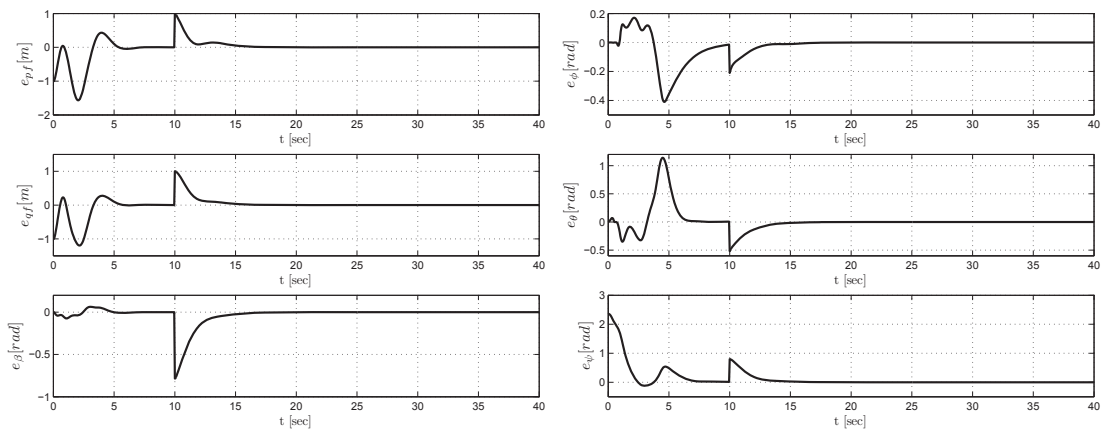
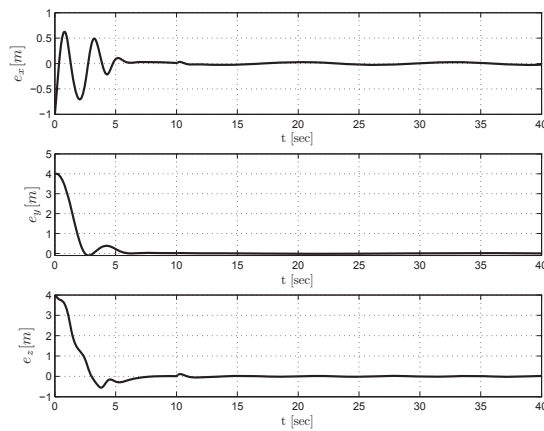


Figura 45: Evolución de la formación en el espacio con objetivo primario control de forma y pose, y objetivo secundario posición del baricentro.

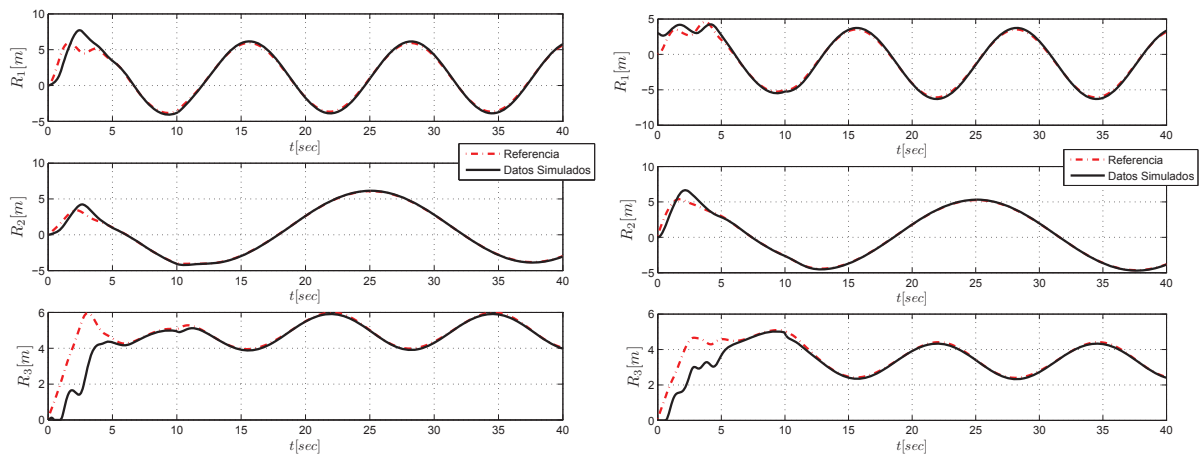


(a) Errores de Forma de la Formación para el Caso 2. (b) Errores de Orientación de la Formación para el Caso 2.

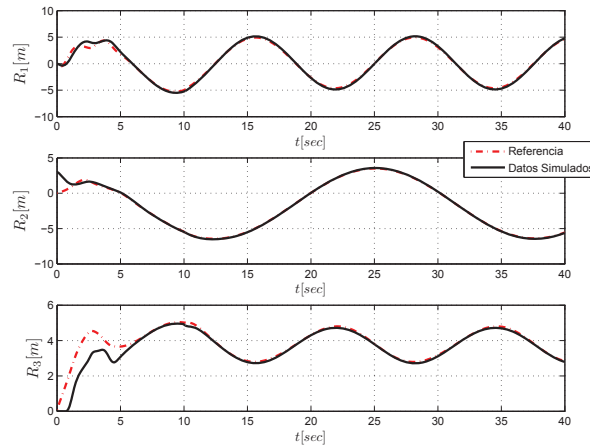


(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación para el Caso 2.

Figura 46: Errores de Control para el Caso 2.



(a) Evolución temporal del $\{R_1\}$ para el Caso 2. (b) Evolución temporal del $\{R_2\}$ para el Caso 2.



(c) Evolución temporal del $\{R_3\}$ para el Caso 2.

Figura 47: Evolución temporal de los robots para el Caso 2.

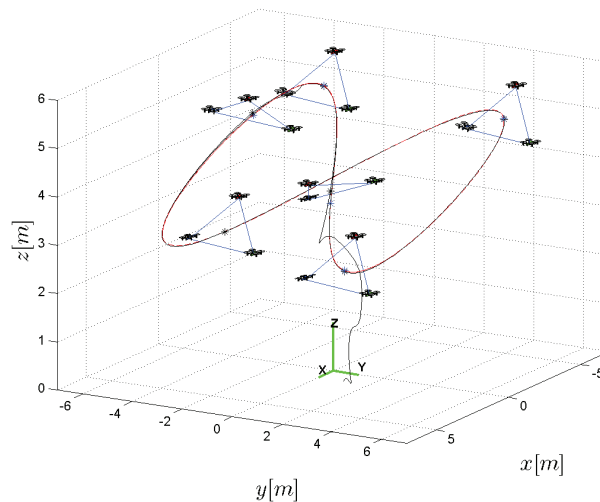
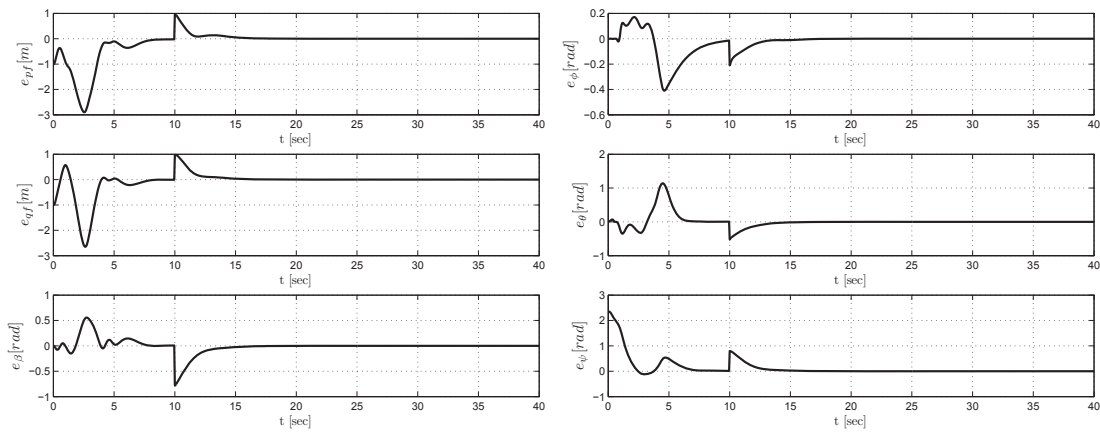
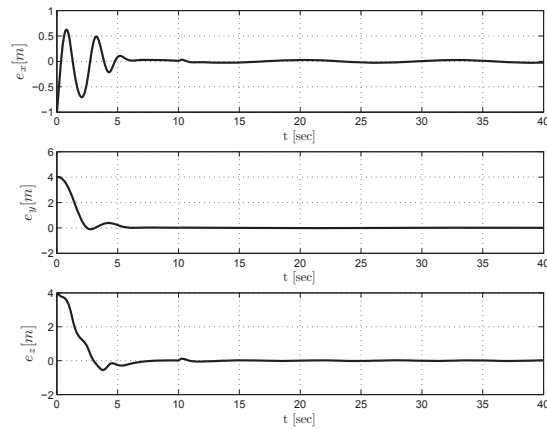


Figura 48: Evolución de la formación en el espacio con objetivo primario control posición del baricentro, y objetivo secundario control de forma y pose.



(a) Errores de Forma de la Formación para el Caso 1 (b) Errores de Orientación de la Formación para el Caso 1.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación para el Caso 1.

Figura 49: Evolución temporal de los robots para el Caso 1.

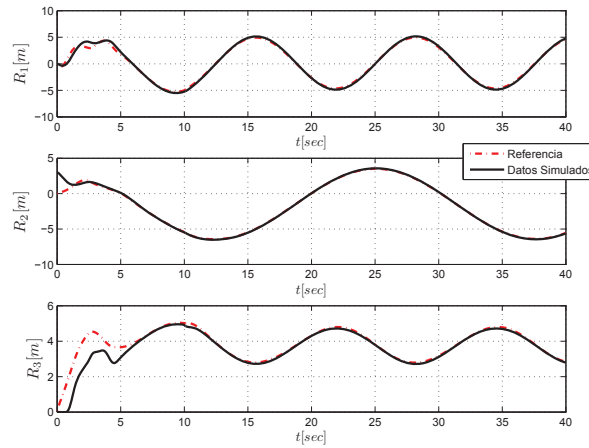
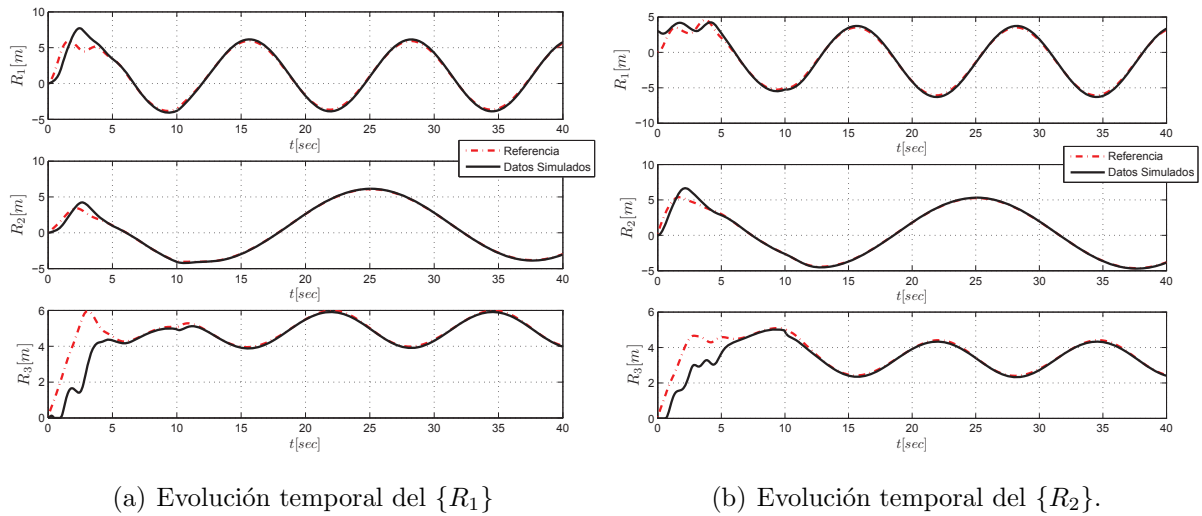


Figura 50: Errores de Control.

7.4.6 Resultados Experimentales

En la presente sub-sección se describen las experimentaciones realizadas con el objetivo de validar las propuestas de control presentadas anteriormente.

Como planta se utilizó el *quadrotor* de la empresa Parrot © el modelo Ar.Drone 2.0. Esta plataforma se describió en la sección 5.5, detallándose características de esta aeronave comercial.

El primer paso consiste en colocar en la misma red Wi-Fi los 3 vehículos y el computador central. Para ello se modificó el sistema operativo de los mismos para que se puedan conectar entre ellos en una red ad-hoc, y se modificó el número de IP de cada uno (todos tienen por defecto el mismo número IP, 192.168.0.1). El esquema que se implementó se presenta en la figura 51.

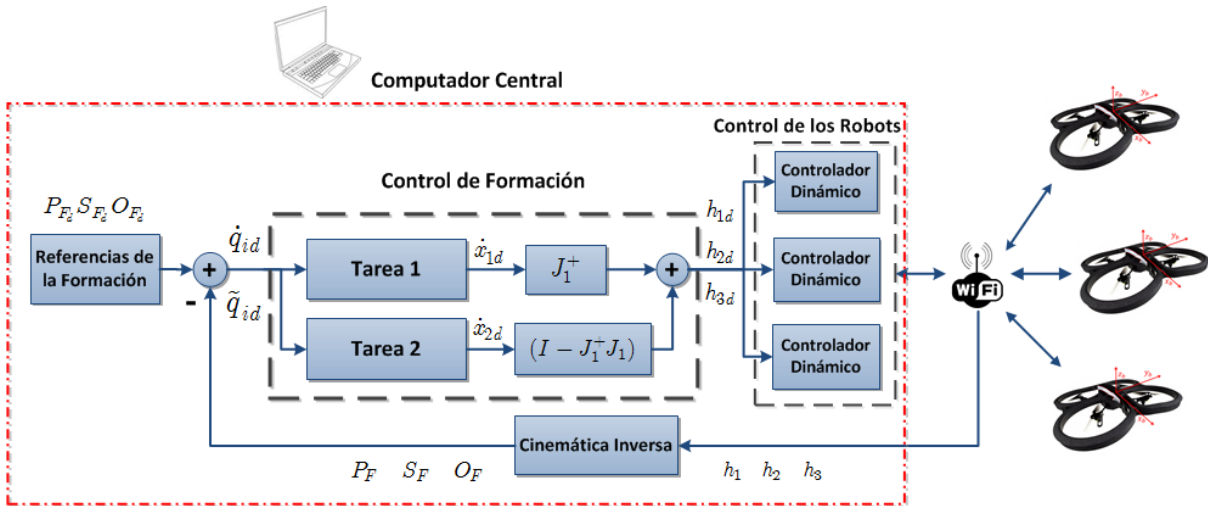


Figura 51: Esquema general de la estructura de control utilizada para realizar la experimentación con 3 vehículos Ar.Drone 2.0 de la empresa Parrot ©.

Es necesario establecer un canal de comunicación bi-direccional con cada uno de los helicópteros. Para ello se utilizó la solución brindada por [117], que integra la SDK proporcionada por Parrot y las librerías Open CV, la cual está íntegramente desarrollada en *C* y *C++*. Además, todo el código del control de formación y del controlador dinámico de los *quadrotor* se implementó en MatLab ©.

Para fusionar ambas estructuras, se utiliza una aplicación desarrollada en *C*, que permite a través de memoria compartida el envío de datos entre MatLab y la aplicación que comunica con el Ar.Drone. De esta manera el control de formación, como el control dinámico de los *quadrotor* se desarrollaron en MatLab.

Una de las limitaciones que se tuvo al momento de realizar las experiencias fue el espacio de trabajo disponible. El recinto utilizado tiene dimensiones $8m \times 20m \times 3m$, pero este volumen de trabajo se limitó por cuestiones de seguridad. Por lo tanto, el espacio de trabajo disponible constituyó un límite a la duración de las experimentaciones como las distancias recorridas.

7.4.6.1 Control de Posicionamiento

La primer tarea que se utilizó para validar el control de formación propuesto consiste en el control de un referencia fija (tarea de posicionamiento) del sistema multi-robot. Para ello, utilizando el esquema antes mencionado se implementaron en MatLab los algoritmos desarrollados.

Las referencias para las variables de formación que se utilizaron durante la experimentación fueron

Es posible observar en la figura 52 dos capturas del experimento real llevado a cabo. En la misma se puede ver como a partir del momento inicial ($t = 0$ segundos), el conjunto va hacia las

Variable \ t	0 – 40[sec]
x_F [m]	1.5
y_F [m]	0
z_F [m]	1
p_F [m]	4
q_F [m]	4
β_F [rad]	$\pi/3$
ϕ_F [rad]	0
θ_F [rad]	$-\pi/18$
ψ_F [rad]	0

Tabla 7: Referencias de las Variables de Formación, durante la experimentación de posicionamiento.

referencias establecidas. En la segunda imagen ($t = 30$ segundos), se muestra cómo la formación se adelantó, debido a la referencia $x_F = 1$ [m], y cómo la altura de R_1 mayor que los demás integrantes del sistema, consecuencia del valor de referencia $\theta_F = -\pi/18$.

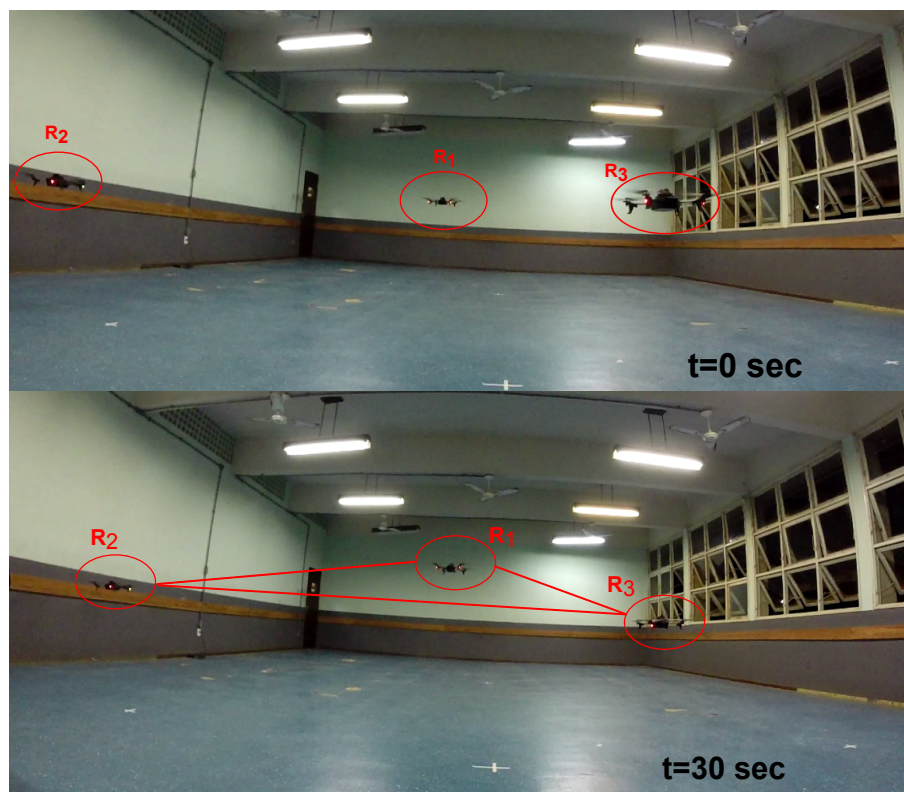
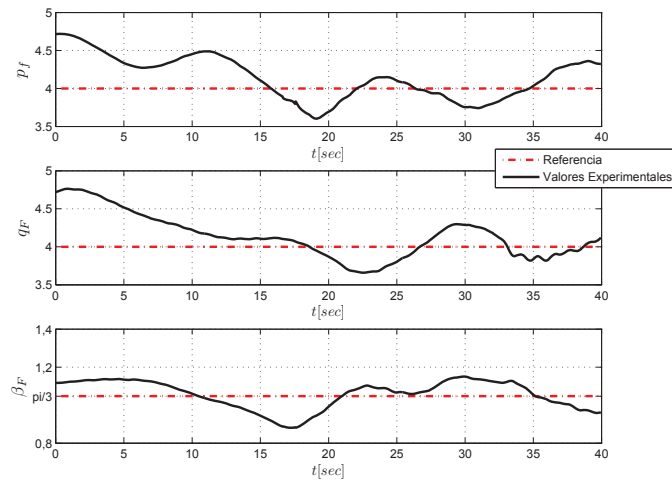


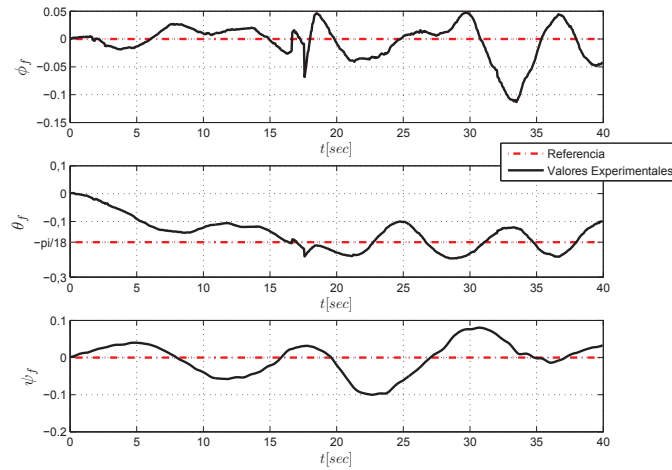
Figura 52: Capturas de la experimentación realizada. En la imagen superior se presenta la posición de los 3 Ar.Drone al comienzo de la tarea, y en la imagen inferior una captura en $t = 30$ segundos. Es posible notar cómo la formación se adelantó hacia el valor de referencia para el baricentro, y cómo la altura del R_1 es mayor que el resto, consecuencia de la referencia $\theta_F = -\pi/18$.

En las figuras 53 se presenta la evolución de las variables de formación. En la figura 53(a) y 53(b), se observan las variables de forma y pose del sistema. En ambos casos es posible ver cómo la formación evoluciona hacia los valores de referencia. Lo mismo sucede con la posición del baricentro, como puede apreciarse en la figura 53(c). Las 3 variables que representan su posición convergen a los valores de referencia.

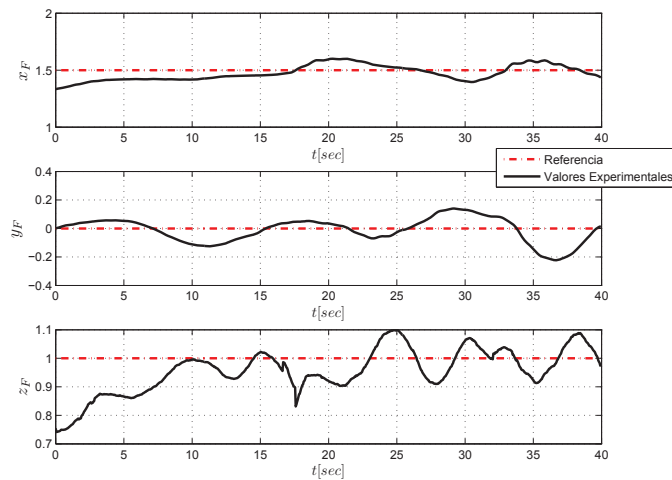
Por último en las figuras 54(a), 54(b) y 54(c), es posible analizar la posición de cada uno de los 3 robots del sistema. El controlador de estos se presentó en el Capítulo 5, y en todos los casos se ve claramente cómo cada uno de ellos sigue la referencia determinada por el controlador de la formación.



(a) Evolución de las variables de forma, para el experimento de posicionamiento.

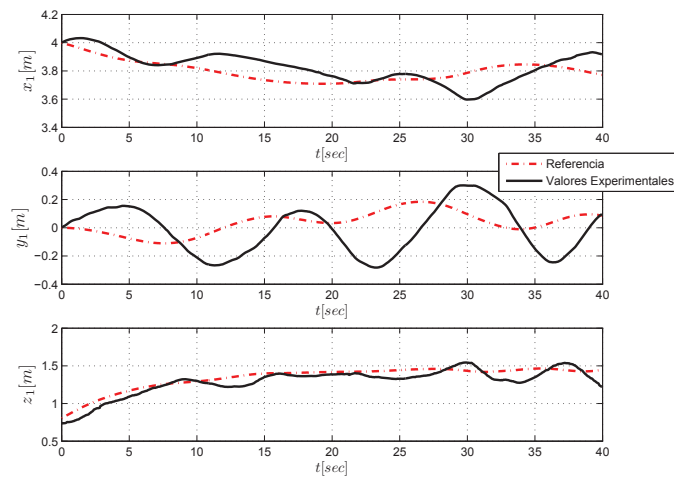


(b) Evolución de las variables de orientación, para el experimento de posicionamiento.

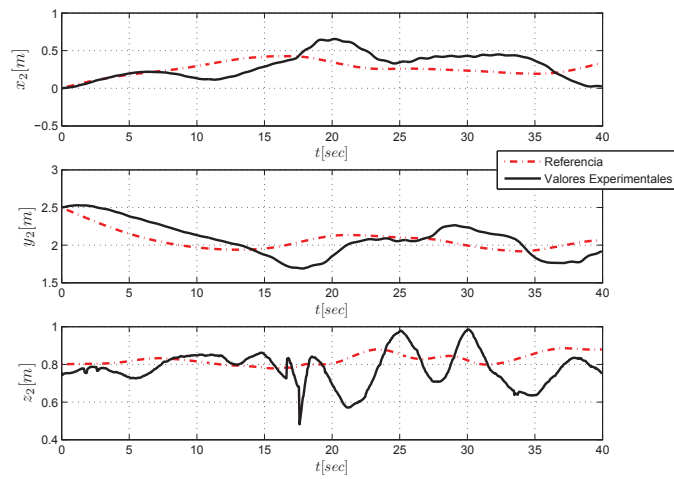


(c) Evolución de las variables de posición del centroide, para el experimento de posicionamiento.

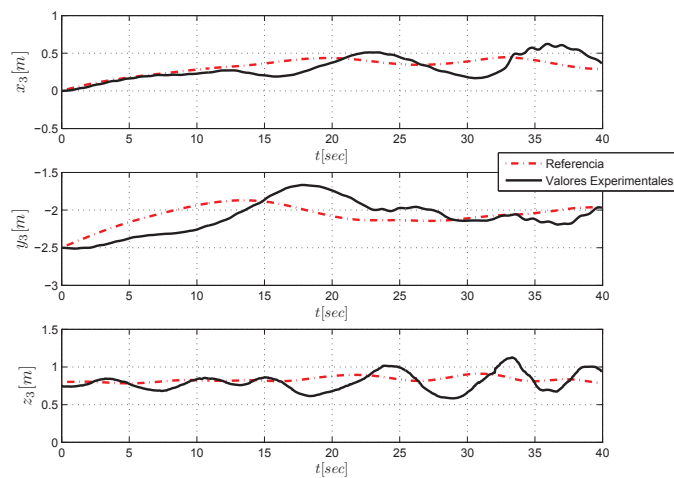
Figura 53: Variables de formación, para la tarea de posicionamiento de la formación.



(a) Posición del robot R_1 , para el experimento de posicionamiento.



(b) Posición del robot R_2 , para el experimento de posicionamiento.



(c) Posición del robot R_3 , para el experimento de posicionamiento.

Figura 54: Evolución temporal de los robots, para el experimento de posicionamiento.

7.4.6.2 Seguimiento de Trayectoria

El control de trayectoria o seguimiento de trayectoria, consiste en controlar una planta de manera tal que siga una referencia parametrizada en el tiempo. Esto significa que la misma debe estar en un cierto valor de referencia en un determinado instante de tiempo, esto hace que el sistema tenga la restricción mayor de cumplir con los requisitos de control en un determinado lapso de tiempo.

El controlador propuesto en el presente capítulo tiene la virtud de servir para el control de posicionamiento, como el control de trayectoria, por lo tanto el objetivo es validar experimentalmente esto último. Para esto se propone la siguiente tarea,

Variable \ t	0 – 40[sec]
x_F [m]	$0,2t$
y_F [m]	$\sin(\pi/16t)$
z_F [m]	2
p_F [m]	3.5
q_F [m]	3.5
β_F [rad]	$\pi/3$
ϕ_F [rad]	0
θ_F [rad]	$-\pi/18$
ψ_F [rad]	0

Tabla 8: Referencias de las Variables de Formación, durante la experimentación de seguimiento de trayectoria.

En la figura 55 se muestran 3 capturas de la tarea de seguimiento de trayectoria realizada por la formación. En la imagen superior se presenta la posición de los 3 Ar.Drone al comienzo de la tarea ($t = 0$ segundos). En la imagen del medio se muestra una captura en $t = 14$ segundos. Es posible notar cómo la formación se adelantó hacia el valor de referencia para el centroide (recta en x_F), además como la altura de R_1 es mayor que los restantes (debido a la referencia $\theta_F = -\pi/18$), además cómo es posible ver como varió su posición en y_F debido a la referencia sinusoidal utilizada. Finalmente, en la última figura es posible ver cómo la referencia continua avanzando (x_F), se mantiene la forma de geométrica, y se observa la variación en y_F dado que en ese instante el valor de referencia es negativa, a diferencia de la imagen anterior donde era positiva.

En las figuras 56 se presenta la evolución de las variables de formación. En la figura 56(a) y 56(b), se observan las variables de forma y pose del sistema. En ambos casos es posible ver cómo la formación evoluciona hacia los valores de referencia. Lo mismo sucede con la posición del baricentro, como puede apreciarse en la figura 56(c). Las 3 variables que representan su posición

convergen a los valores de referencia.

Por último en las figuras 57(a), 57(b) y 57(c), es posible analizar la posición de cada uno de los 3 robots del sistema. El controlador de estos se presentó en el Capítulo 5, y en todos los casos se ve claramente cómo cada uno de ellos sigue la referencia determinada por el controlador de la formación.

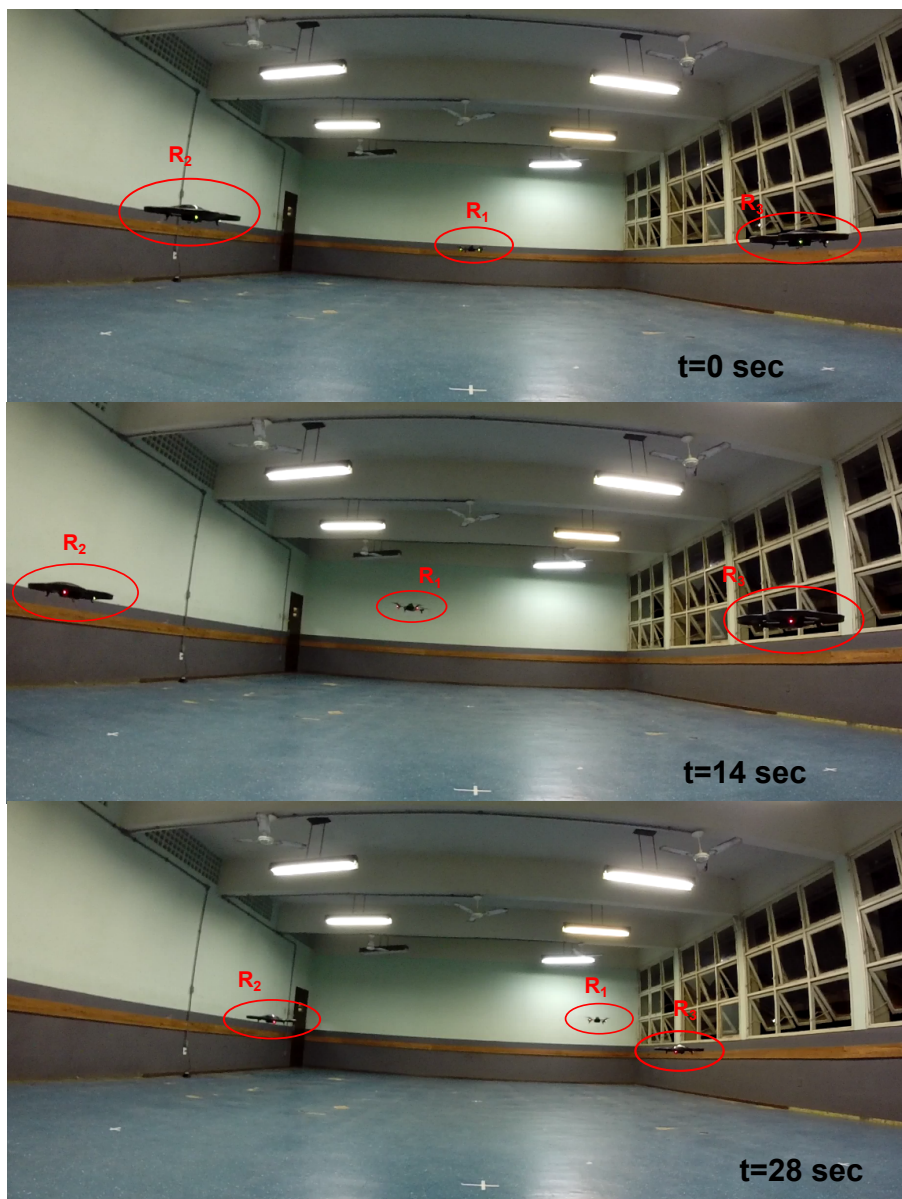
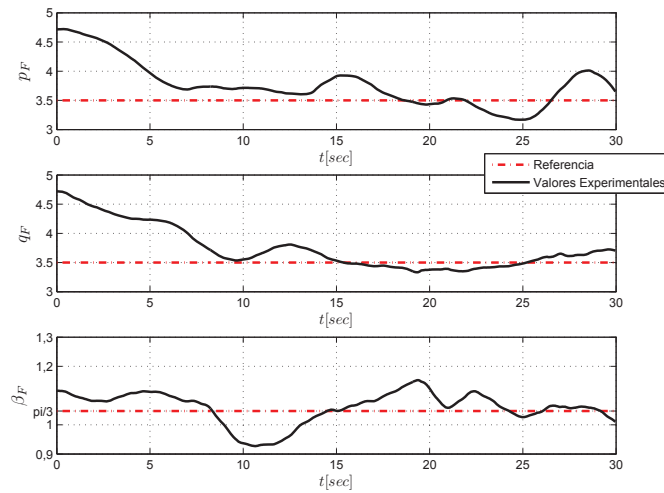
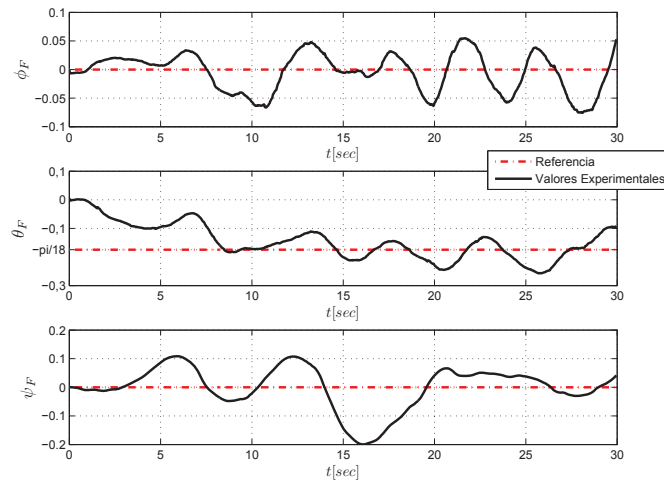


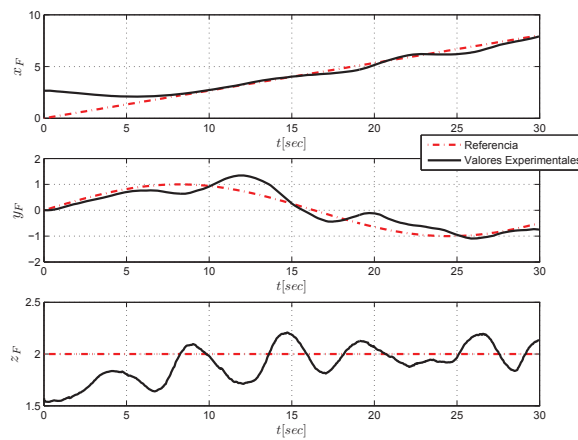
Figura 55: Capturas de la experimentación realizada. En la imagen superior se presenta la posición de los 3 Ar.Drone al comienzo de la tarea ($t = 0$ segundos). La segunda imagen muestra una captura para $t = 14$ segundos, y finalmente se muestra una captura del experimento para $t = 28$ segundos.



(a) Evolución de las variables de forma, para el experimento de control de trayectoria.

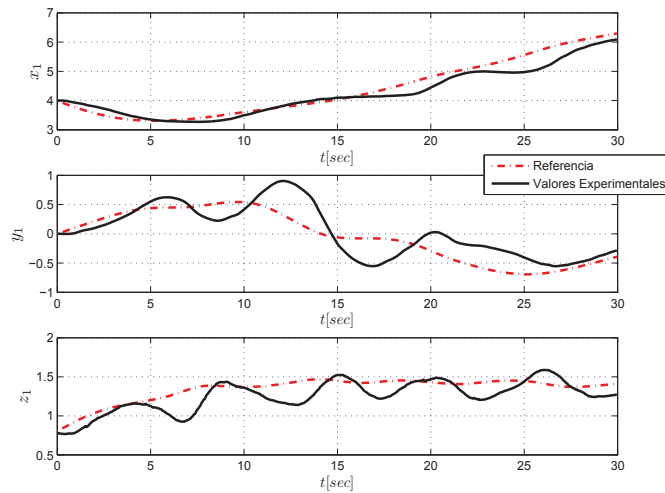


(b) Evolución de las variables de orientación, para el experimento de control de trayectoria.

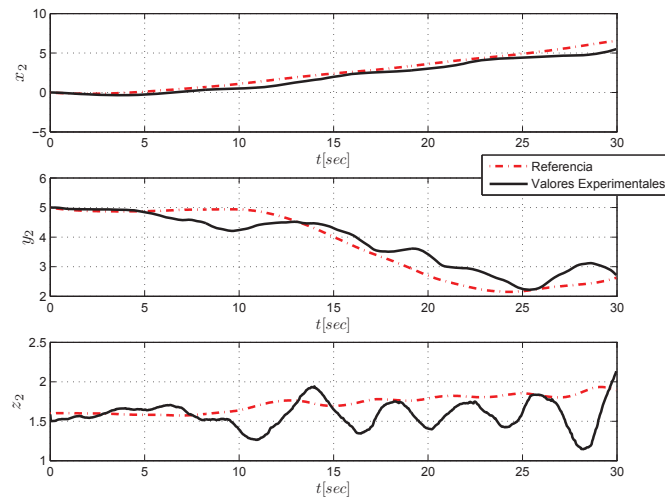


(c) Evolución de las variables de posición del centroide, para el experimento de control de trayectoria.

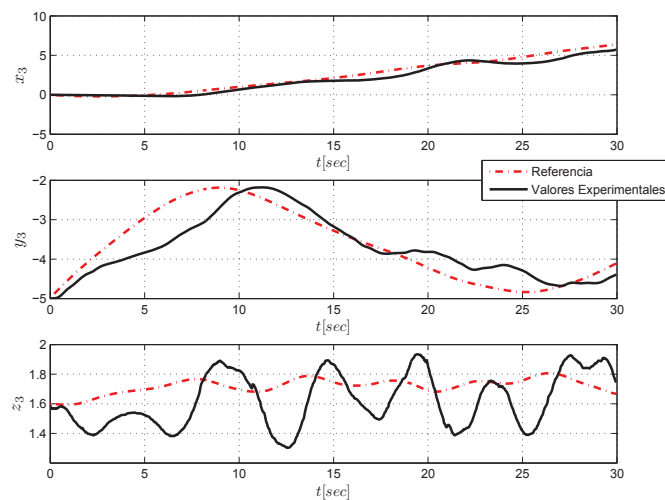
Figura 56: Variables de formación, para la tarea de seguimiento de trayectoria.



(a) Posición del robot R_1 , para el experimento de control de trayectoria.



(b) Posición del robot R_2 , para el experimento de control de trayectoria.



(c) Posición del robot R_3 , para el experimento de control de trayectoria.

Figura 57: Evolución temporal de los robots, para el experimento de seguimiento de trayectoria.

7.5 Control de una Formación de $n > 3$ Robots

7.5.1 Introducción

En las secciones anteriores se presentó un esquema de control basado en espacio nulo para el control de una formación de 3 Robots, por lo tanto el objetivo de esta sección es expandir esta filosofía de control a una formación de mayor cantidad de vehículos.

En [76] se dan los fundamentos de las variables que se utilizaron para describir nuestro sistema. En este trabajo se especifica la cantidad de variables necesarias que se requieren para definir de manera correcta a dicho sistema, en función de la cantidad de agentes y de los *grados de libertad* de cada uno de los vehículos. En [38] se presenta el control de una formación de 3 UGV basado en el trabajo [76], donde se especifican las variables que son utilizadas en este trabajo. Para el caso de un sistema multi-robot de 4 robots en [118] se presenta el control de una formación de 4 UGV para el transporte de una carga distribuida entre los agentes. Se definen las variables del *cluster* y al compararlas con el trabajo [38] no existe una relación evidente entre la definición de las variables en ambos casos.

Por lo tanto el esquema de control presentado en [76] tiene como ventaja ser modular para el control de formación independientemente del tipo de vehículo y de la cantidad, la manera en que se definen las variables del sistema no está extrapolado para cualquier conjunto de n agentes, sino que cada tipo de sistema requiere un análisis para obtener las relaciones necesarias que particularizan ese sistema.

En [41] y [77] se presenta un solución a dicho problema basado en la triangulación de un polígono de n vértices en $n - 2$ triángulos [119]. El teorema de triangulación de un polígono expresa que es posible descomponer un polígono de n vértices en $n - 2$ triángulos, como se puede apreciar en la figura 58.

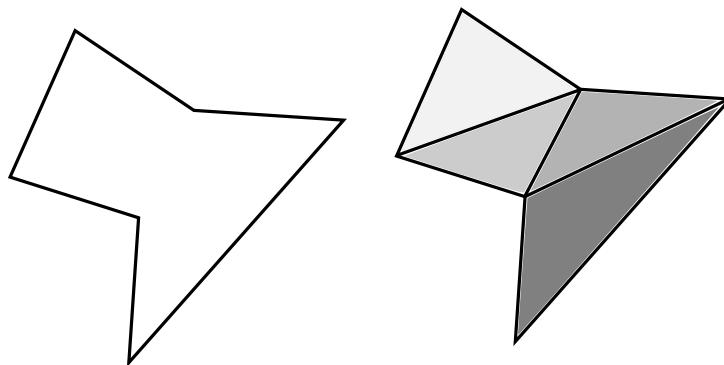


Figura 58: Triangulación de un polígono de n lados en $n - 2$ triángulos.

Una vez que se tiene la formación dividida en $n - 2$ triángulos se aplica el esquema de control a cada uno de los triángulos sin necesidad de modificar significativamente el controlador.

La ventaja de este planteo es que no es necesario modificar o re-definir la matriz Jacobiana del sistema debido a que la composición del conjunto de robots no se modifica (siempre son 3 robots); a diferencia de [63] donde para cada nuevo robot que se adiciona es necesario definir nuevamente esta matriz.

La desventaja de este esquema es que al calcular las acciones de control para los triángulos de manera individual, para aquellos robots que son comunes a dos triángulos, se tiene redundancia de acciones de control. La solución presentada es simple y poco eficiente, cada robot que tiene más de una acción de control solo considera aquella proveniente del triángulo de mayor jerarquía, desechando la restante. El objetivo de este capítulo es plantear una solución generalizada sin necesidad de tener redundancia de acciones de control y sin requerir definir nuevamente la matriz Jacobiana.

7.5.2 Planteo del Problema

Una vez definido el objetivo a conseguir es necesario definir nuestro problema y analizar qué sucede con la formación de 3 robots al adicionar un nuevo vehículo. Para ello se aplica la técnica utilizada en [41] donde se utiliza el teorema de triangulación de un polígono de n vértices en $n - 2$ triángulos, en la figura 59 se aprecia el esquema para un formación de 4 robots después de descomponer el cuadrado que forman estos 4 vehículos en 2 triángulos. De esta forma se aprovecha la ventaja de no necesitar modificar la matriz Jacobiana porque la forma del sistema no varía.

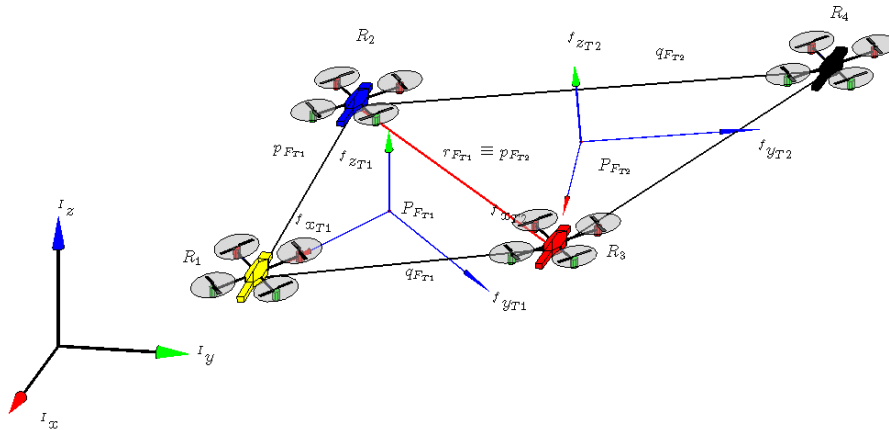


Figura 59: Descomposición de una formación de 4 robots en dos formaciones de 3.

A partir de la definición del primer sistema de 3 robots es necesario definir la secuencia a seguir para caracterizar cada sub-sistema. De la formación principal se toman los 2 de menor jerarquía (R_2 y R_3) y se adiciona el nuevo agente para generar el nuevo triángulo ($R_j \widehat{R_{j+1}} R_{j+2}$, donde $j = 1, \dots, n - 2$ representa la formación triangular actual).

Recordando la sección 7.4 y la estructura del Jacobiano asociado a la formación,

$$\dot{x}_{d[9 \times 1]} = J_{[9 \times 9]}^\dagger \dot{q}_{d[9 \times 1]} = \begin{bmatrix} J_{R_1[3 \times 9]}^\dagger \\ J_{R_2[3 \times 9]}^\dagger \\ J_{R_3[3 \times 9]}^\dagger \end{bmatrix} \dot{q}_{d[9 \times 1]} \quad (7.36)$$

Cada matriz $J_{R_i}^\dagger$ con $i = 1, 2, 3$, representa las filas de la inversa del Jacobiano que relaciona las velocidades del robot i , por lo tanto esta sub-matriz permite relacionar las velocidades de la formación que afectan solo al robot i .

$$\dot{x}_{id[3 \times 1]} = J_{R_i[3 \times 9]}^\dagger \dot{q}_{d[9 \times 1]} \quad (7.37)$$

De esta manera se soluciona la redundancia de acciones de control para aquellos robots que son comunes a dos formaciones que se presenta en [41] y [77], y solo se calculan las acciones de control para cada nuevo robot que se agrega al sistema.

Cada formación está asociada a un conjunto de variables que la definen $q_i = [P_{F_i} \ S_{F_i} \ O_{F_i}]$, aunque las variables de los triángulos posteriores al principal son dependientes de aquellas del conjunto inmediato superior, por causa que comparten dos agentes en común. En la figura 59 se marca el segmento que comparten ambos triángulos con rojo, donde se ve claramente que $r_{FT_1} \equiv p_{FT_2}$. Del total de las 9 variables que definen el nuevo triángulo solo contamos con 3 *grados de libertad* del nuevo robot que se adicionó, porque los demás pertenecen a otro conjunto. Analizando las variables de la nueva formación se concluye que no es posible ni necesario controlar las 9 variables (como se realiza en el triángulo de mayor jerarquía) sino que con solo 3 variables se define la nueva formación. Resulta necesario definir la posición del nuevo robot en función de variables de posición y de forma, para ello se proponen dos soluciones:

- La nueva formación queda definida por la posición del baricentro o centroide de este nuevo conjunto de agentes. Esto sería como dar prioridad a la posición del sistema en el espacio y no a la forma de la misma.
- El nuevo triángulo queda definido en función a variables de forma que definen de manera única la posición del nuevo agente que se adiciona al conjunto, teniendo en cuenta las limitaciones implícitas, consecuencia de que dos de los tres robots pertenecen a otra estructura de control.

7.5.2.1 Control del baricentro

Analizando el caso de una formación compuesta por cuatro robots y aplicando el teorema de triangulación de polígonos antes mencionado, se transforma el conjunto en dos formaciones

triangulares. El control del primer triángulo ya fue analizado 7.4, y se utiliza la misma estructura de control.

La propuesta utilizada para controlar el nuevo agente se basa en utilizar las variables del baricentro de la nueva estructura triangular, para ello se define dichas variables

$$P_{FT_2} = \begin{bmatrix} x_{FT_2} \\ y_{FT_2} \\ z_{FT_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \\ \frac{y_2 + y_3 + y_4}{3} \\ \frac{z_2 + z_3 + z_4}{3} \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

De la ecuación anterior claramente se vislumbra que $P_{FT_2} = f_{(x_4, y_4, z_4)}$, debido a que la posición de $R_2 = (x_2, y_2, z_2)$ y $R_3 = (x_3, y_3, z_3)$ están definidas por la estructura de control del triángulo anterior (en este caso triángulo número uno). Por lo tanto, controlando la posición del baricentro del nuevo triángulo se controla de forma directa la posición del nuevo robot (R_4). Cada nuevo robot que se agregue a la formación se lo considerará como el robot de mayor jerarquía o líder (R_1) del nuevo triángulo. Teniendo en cuenta esto, de la ecuación 7.37 se aprecia que las tres primeras filas de \dot{q}_d en conjunto con $J_{R_1}^\dagger$, son aquellas que relacionan las variaciones de la posición del centroide con las velocidades del nuevo vehículo.

La estructura de control propuesta para el robot que se adiciona en la formación

$$\dot{x}_{id_{[3 \times 1]}} = J_{R_i}^\dagger \left[\dot{q}_{pd_{T_2}} + L_{p_{T_2}} \tanh(K_{p_{T_2}} L_{p_{T_2}}^{-1} \tilde{q}_{p_{T_2}}) \right]_{[3 \times 1]} \quad (7.39)$$

La estructura del controlador propuesto en 7.39 se utiliza para cada robot que se adicione a la formación ($n > 3$), las cuales tienen la misma estructura que la utilizada en los controladores antes vistos.

La posición del centroide del nuevo triángulo es conveniente realizarla en función de la posición del centroide de mayor jerarquía para tener un vínculo analítico directo entre ellos que exprese la relación física que existe. Por lo tanto las coordenadas del mismo deberán estar en función del sistema de referencia asociado al conjunto de robots inmediato superior. Para pasar estas coordenadas al sistema de referencia global es necesario utilizar una matriz de transformación homogénea

$${}^G \{P_{F_{d_{T_2}}}\} = \begin{bmatrix} R_{\phi_F, \theta_F, \psi_F} & [x_{FT_1}, y_{FT_1}, z_{FT_1}]^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

La matriz $R_{\phi_F, \theta_F, \psi_F}$ representa una matriz de rotación que relaciona el sistema asociado

a la formación anterior con el sistema global, y $[x_{F_{T1}}, y_{F_{T1}}, z_{F_{T1}}]^T$ es la distancia del origen del sistema asociado al conjunto con respecto al origen del sistema global. De esta manera las referencias para la posición del baricentro del nuevo *cluster*, está en función del sistema definido anteriormente antes que se considere al nuevo robot como parte del conjunto.

El baricentro del nuevo triángulo esta definido de la siguiente manera,

$$P_{F_{T2}} = \begin{bmatrix} \frac{x_j + x_{j+1} + x_{j+2}}{3} \\ \frac{y_j + y_{j+1} + y_{j+2}}{3} \\ \frac{z_j + z_{j+1} + z_{j+2}}{3} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

con $j > 1$. De la ecuación solo los valores de la posición del robot h_{j+2} no está definido por la formación superior inmediata. Por lo tanto a través del controlador de la ecuación 7.39 se logra controlar la posición del nuevo robot que se agrega a la formación de forma indirecta, sin necesidad de calcular las acciones de control para todos los robots, mejorando la propuesta de [41] y [77].

Se presenta la simulación del comportamiento de una formación de 5 agentes que se descompone en tres formaciones triangulares. El controlador del primer triángulo fue desarrollado en la sección 7.4, el controlador del agente que se agrega está dado por la ecuación 7.39.

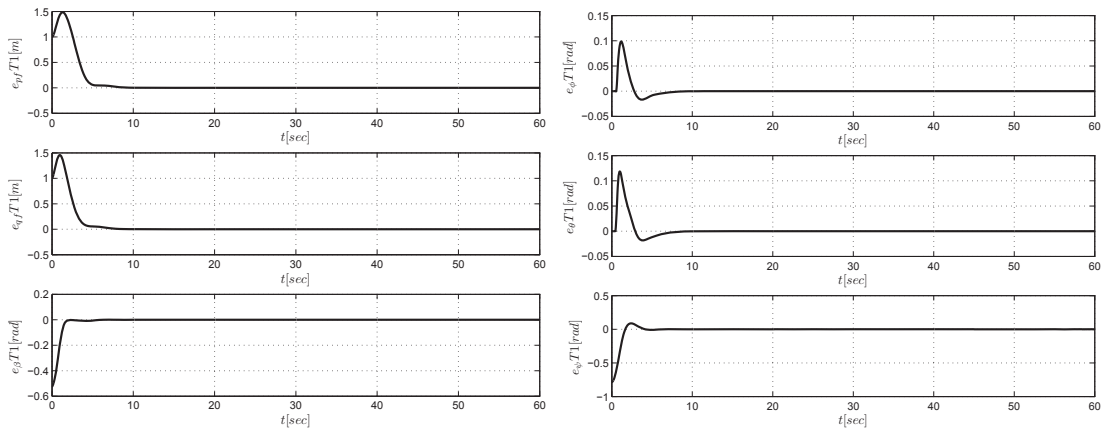
Las referencias de la simulación están dadas en la tabla 9.

Tabla 9: Referencias de las Variables de Formación.

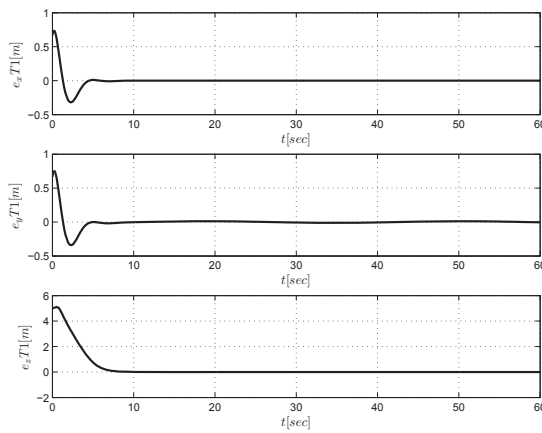
Variable \ t	0 – 60[sec]
x_{FT1}	$0,8t$
y_{FT1}	$4 \sin(0,2t)$
z_{FT1}	$5 + 2 \sin(0,1t)$
p_{FT1}	3
q_{FT1}	3
β_{FT1}	$\pi/3$
ϕ_{FT1}	0
θ_{FT1}	0
ψ_{FT1}	0
x_{FT2}	$x_{FT1} - 2$
y_{FT2}	y_{FT1}
z_{FT2}	z_{FT1}
x_{FT3}	$x_{FT1} - 5$
y_{FT3}	$y_{FT1} - 1$
z_{FT3}	z_{FT1}

En la figura 60 se presenta la evolución de los errores para la formación del primer conjunto de 3 robots, que es similar a la simulación obtenida anteriormente al controlar un conjunto de 3 robots. Claramente se ve que los errores del conjunto de 3 variables que definen a dicho sistema tienden a cero. En la figura 62 se puede observar la evolución del sistema multi-robot en el espacio, y cómo ambas formaciones tienden a sus valores de referencia. En las figuras 61(a) y 61(b), se observa la evolución de los errores de control para los baricentros del triángulo 2 y 3, donde ambos convergen a cero. De esta manera se logra controlar un sistema multi-robot compuesto por 5 vehículos aéreos, sin redundancia de acciones de control.

En las simulaciones se comprueba cómo funciona correctamente este esquema y se soluciona la redundancia de acciones de control para aquellos robots que son comunes a más de una sub-formación triangular.

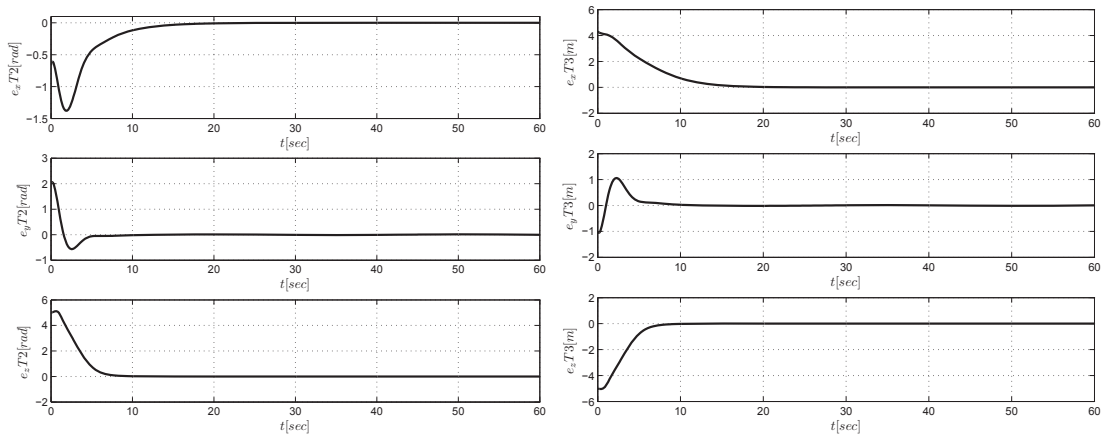


(a) Errores de Forma de la Formación (b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 60: Errores de control para la Formación del Triángulo 1.



(a) Errores de posición del baricentro del triángulo 2 (b) Errores de posición del baricentro del triángulo 3.

Figura 61: Errores de control del baricentro, para la Formación del Triángulo 2 y el Triángulo 3.

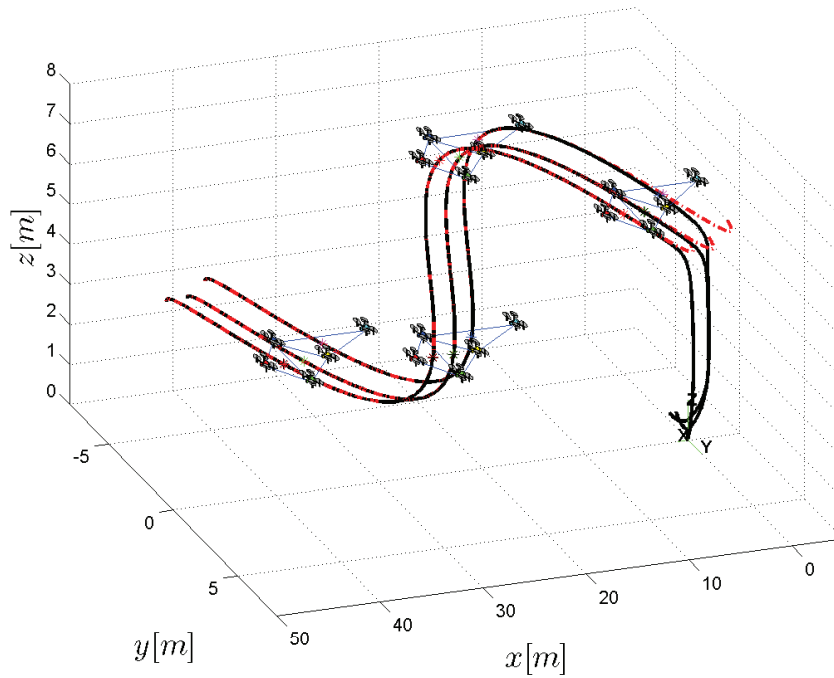


Figura 62: Evolución temporal de la formación de 5 robots en el espacio.

7.5.2.2 Control variables de forma

El segundo método para extrapolar la propuesta desarrollada en 7.4 a una formación compuesta por $n > 3$ robots se basa en utilizar variables de forma para definir al nuevo robot. El motivo es tener dos enfoques para definir al nuevo agente, similar a lo expuesto en 7.4 y de esta forma poder obtener un comportamiento tipo flexible o rígido, dependiendo de como se define al nuevo robot. Antes se desarrolló el primer método, el cual se basa en las variables de posición de la formación, por lo tanto a continuación se expondrá el segundo método que se basa en variables de forma.

Considerando al nuevo robot como el robot líder del nuevo triángulo, resulta que algunas variables del nuevo triángulo quedan definidas o restringidas, debido que dos robots pertenecen a la estructura de control anterior. Analizando las seis variables de forma se concluyó en que las siguientes variables sirven para definir de manera única la posición del nuevo robot β_{FT_2} , θ_{FT_2} y ψ_{FT_2} . Las variables θ_{FT_2} y ψ_{FT_2} definen la orientación de la nueva estructura triangular, en la presente tesis se la definió relativa siempre a la estructura $T1$.

En base a la propuesta anterior se define el siguiente controlador, cuya estructura es la misma que 7.39

$$\dot{x}_{id[3 \times 1]} = J_{R_i[3 \times 3]}^\dagger \left[\dot{q}_{fd_{T_2}} + L_{f_{T_2}} \tanh(K_{f_{T_2}} L_{f_{T_2}}^{-1} \tilde{q}_{f_{T_2}}) \right]_{[3 \times 1]} \quad (7.42)$$

donde $q_f = [\beta_{F_{T_2}} \ \theta_{F_{T_2}} \ \psi_{F_{T_2}}]$ y $J_{R_i}^\dagger$ representa la sub-matriz de la matriz pseudoinversa 7.37 que relaciona las variaciones de las variables de forma con el nuevo robot (R_4). El Controlador propuesto en 7.42 genera velocidades en función de los errores de control existentes para q_f , que hace que el sistema de control se comporte como un sistema regulador que hace alcanzar las referencias q_{fd} .

Para el caso en que la formación este desarrollando una tarea de seguimiento de trayectoria, esta provoca una constante perturbación al controlador presentado. Ante el conocimiento que la formación en una tarea debe comportarse como un cuerpo rígido, donde cada una de las partículas (robots) deber moverse con la misma velocidad, se propone adicionar otro término que tenga en cuenta eso. A partir de esto, se corrige el controlador propuesto

$$\dot{x}_{id_{[3 \times 1]}} = \dot{P}_{dF_{T_1}} + J_{R_i}^\dagger \left[\dot{q}_{fd_{T_2}} + L_{f_{T_2}} \tanh(K_{f_{T_2}} L_{f_{T_2}}^{-1} \tilde{q}_{f_{T_2}}) \right]_{[3 \times 1]}. \quad (7.43)$$

Las velocidades $\dot{P}_{dF_{T_1}}$ representan las referencias para la posición del baricentro del triángulo 1. La ecuación 7.43 permite el calculo de las velocidades de referencia para cada robot que se agrega a la formación de forma individual sin redundancia de cálculo.

Finalmente resulta que la estructura del controlador esta compuesta por dos partes. La primera es la velocidad de referencia con la que se mueve toda la formación y la segunda genera una componente que hace que el robot alcance las referencias de las variables de forma. La combinación de ambas componentes permiten al sistema multi-robot moverse de manera solidaria como un cuerpo rígido.

En la tabla 10 se observan las variables de referencia utilizadas para la simulación realizada con el objetivo de validar la propuesta realizada.

La figura 63 presenta la evolución en \mathfrak{R}^3 del sistema multi-robot aéreo compuesto por 4 miembros. Para el control de esta tarea, se dividió la formación en dos triángulos a controlar, en el primer de ellos se utilizó el controlador 7.24, y para el robot número 4 se utilizó el controlador 7.43. En la figura 64 se aprecia la evolución temporal de los errores de control, tanto para la primer estructura triangular, como para la segunda. Se puede apreciar como todos los errores de control convergen a cero y de esta forma se valida la segunda propuesta desarrollada para extrapolar la estrategia de control presentada en 7.4, para una formación con $n > 3$ y sin redundancia en el cálculo de las acciones de control.

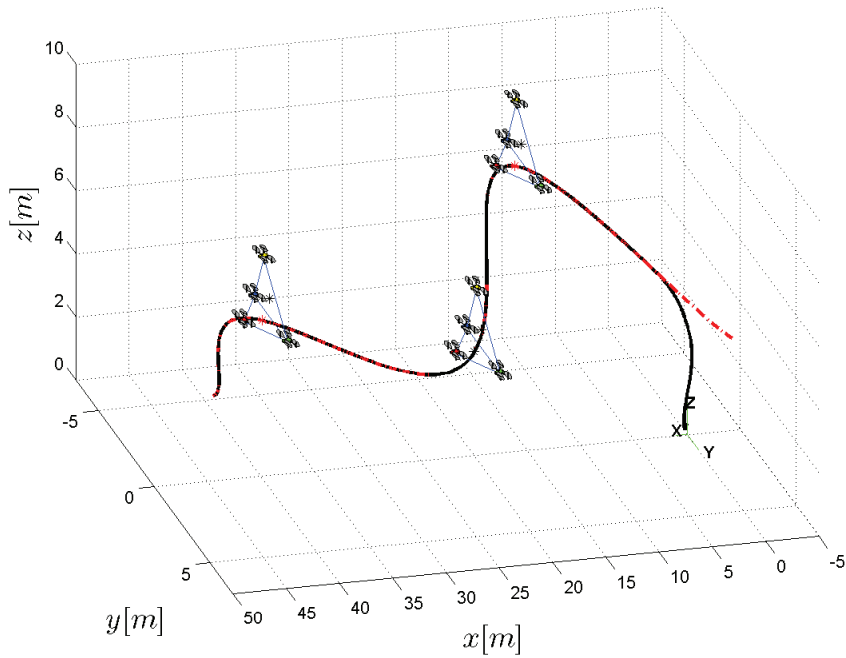


Figura 63: Evolución temporal de la formación de 5 robots en el espacio.

Tabla 10: Referencias de las Variables de Formación para la segunda propuesta de $n > 3$ robots.

Variable	t
	0 – 40[sec]
x_{FT1}	$0,8t$
y_{FT1}	$4 \cos(0,2t)$
z_{FT1}	$5 + 2 \sin(0,1t)$
p_{FT1}	3
q_{FT1}	3
β_{FT1}	$\pi/3$
ϕ_{FT1}	0
θ_{FT1}	0
ψ_{FT1}	0
β_{FT2}	$\pi/3$
θ_{FT2}	$-\pi/3$
ψ_{FT2}	$\pi/8$

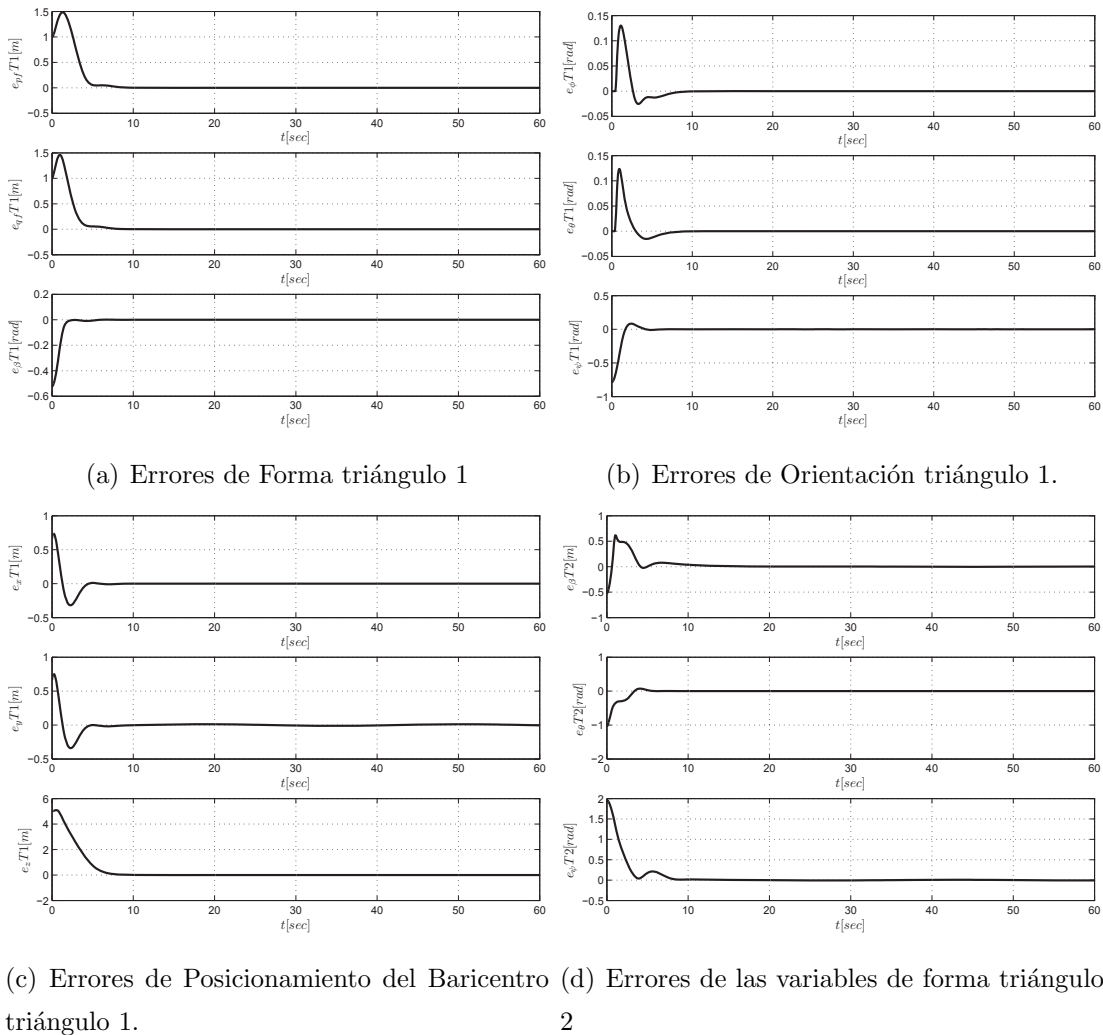


Figura 64: Errores de control para la Formación.

7.6 Formación vehículos UAV-UGV (Terrestres y Aéreos)

7.6.1 Introducción

En el caso de que alguno de los robots del sistema sea del tipo terrestre (*UGV*, Unmanned Ground Vehicle) la desigualdad expresada en 6.20 se transforma en una igualdad $z_i = 0$. Por lo tanto, esto implica una nueva restricción para el sistema, además de las presentadas en 6.4, acotando aún más el conjunto de variables de formación que el sistema puede adoptar.

Las opciones existentes es que uno de los robots sea un *UGV* (ver figura 65), o dos de ellos (ver figura 66), porque si los 3 robots fueran terrestres el sistema multi-robot sería terrestre, y la tesis tiene como objetivo contemplar dentro de la formación la existencia de al menos un robot aéreo.

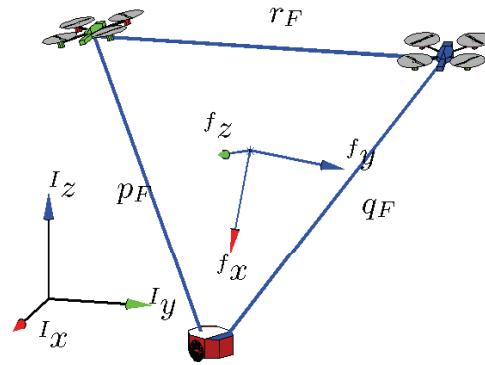


Figura 65: Variables para una Formación de 2 vehículos aéreos y 1 terrestre.

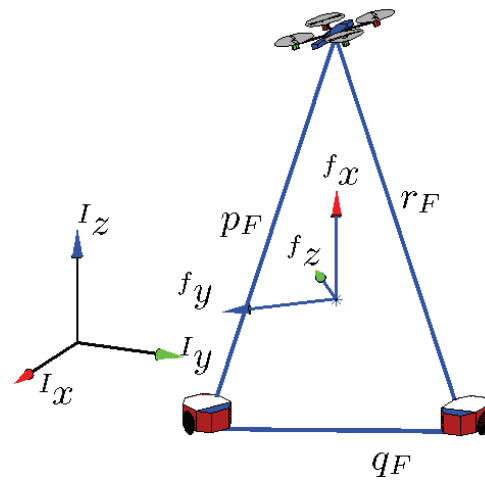


Figura 66: Variables para una Formación de 2 vehículos aéreos y 1 terrestre.

Dentro de las variables que definen el sistema multi-robot (ver capítulo 6) y analizando las restricciones que involucran los robots *UGV*. Se pueden considerar como independientes las variables de forma (S_F), y las variables x_F e y_F , debido a que no existen restricción alguna sobre ellas la obligación que $z_i = 0$. La variables z_F queda condicionada de forma directa, y las variables de orientación O_F deben analizarse en función de cuantos robots terrestres tiene la formación.

7.6.2 Formación con 1 robot *UGV*

Suponiendo que el R_1 es un *UGV*, se debe cumplir que $z_1 = 0$

$$z_F = \frac{2}{3}h_F(\cos \phi_F \sin \theta_F \cos \psi_F + \sin \phi_F \sin \psi_F), \quad (7.44)$$

El numero total de variables que definen la formación sigue siendo 9, tres de forma (S_F), tres de postura (O_F) y tres de posición (P_F). Pero el echo que $z_1 = 0$, implica que se pierde un

grado de libertad, dado que las variables que describen la posición de todos los miembros de la formación son 8 y no 9, como en el caso que los 3 robots sean UAV. Del conjunto de variables definidas, las de forma no están limitadas por el hecho que uno de los robots sea del tipo terrestre. Y las variables de posición x_F e y_F tampoco lo están, no el caso de z_F que si lo está como se aprecia en 7.44. El caso de las variables de orientación merecen un análisis más complejo.

Al definir como robot R_1 de la formación al vehículo terrestre, implica que el ángulo de guiñada o pitch (θ_F) no puede ser negativo o nulo, porque esto implicaría que el valor de altura para R_2 y R_3 debería ser menor o igual que cero. Por lo tanto, $0 < \theta_F < \pi$.

Analizando la ecuación 7.44, los valores de referencia de los ángulos ϕ_F y ψ_F deben ser de manera tal que dicha ecuación implique que $z_F > 0$. De esta manera, siempre es necesario corroborar esto porque si el conjunto de referencias que se seleccionan no cumplen con esto, necesariamente el valor de altura z_1 deberá ser $\neq 0$. El valor de referencia para z_F , necesariamente está dado por la ecuación 7.44.

En el capítulo 7 se presentaron varios esquemas para el control de una formación compuesta por 3 robots aéreos. Se pretende utilizar alguno de estos esquemas para controlar una formación compuesta por un robot terrestre. Se propone utilizar el siguiente controlador para tal fin

$$\dot{x}_d = J^\dagger(\dot{q}_s + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) + (I - J_s^\dagger J_s) J_{p_z}^\dagger(\dot{q}_{p_z} + L_{p_z} \tanh(K_{p_z} L_{p_z}^{-1} \tilde{q}_{p_z})), \quad (7.45)$$

donde $q_s = [p_F \ q_F \ \beta_F \ \phi_F \ \theta_F \ \psi_F]^T$, y $q_{p_z} = [x_F \ y_F \ z_F]^T$. El primer objetivo de control es idéntico al presentado en la sección 7.4.1, y el segundo miembro es similar al presentado en la sección 7.4.2 aunque difiere en un pequeño aspecto. De acuerdo a la definición de J_s y J_p dados por las ecuaciones 7.19 y 7.22 respectivamente, la tercera columna de dichas matrices será omitida, dado que se corresponde a z_1 y esta variable siempre será igual a cero. Debido a esto, el orden de dichas matrices se altera y resulta, J_s orden 6×8 y J_p orden 3×8 .

7.6.2.1 Resultados de las Simulaciones

Para validar la propuesta se plantea utilizar la misma plataforma desarrollada en MatLab © utilizada en los capítulos anteriores. Para este motivo se considera a R_1 como un robot terrestre y los restantes son del tipo aéreo.

Las referencias de la simulación se presenta en la tabla 11.

Tabla 11: Referencias de las Variables de Formación.

Variable \ t	0 – 40[sec]
$x_F[m]$	$4 \sin(0,5t)$
$y_F[m]$	$4 \cos(0,25t)$
$z_F[m]$	$-1/3h_F \sin \theta_F \cos \psi_F \cong 0,8$
$p_F[m]$	4
$q_F[m]$	4
$\beta_F[rad]$	$\pi/2$
$\phi_F[rad]$	$\pi/32$
$\theta_F[rad]$	$-\pi/3$
$\psi_F[rad]$	$\pi/16$

Finalmente, en la figura 67 se observa la evolución en el espacio de la formación y es posible apreciar como el conjunto sigue la trayectoria tipo “ocho”, y además como se el robot terrestre se mueve de manera coordinada con el resto. En las figuras 68 se presentan los errores de control de la simulación realizada. Se aprecia en dichas gráficas, como dichos errores tienden a cero y el sistema evoluciona hacia las referencias.

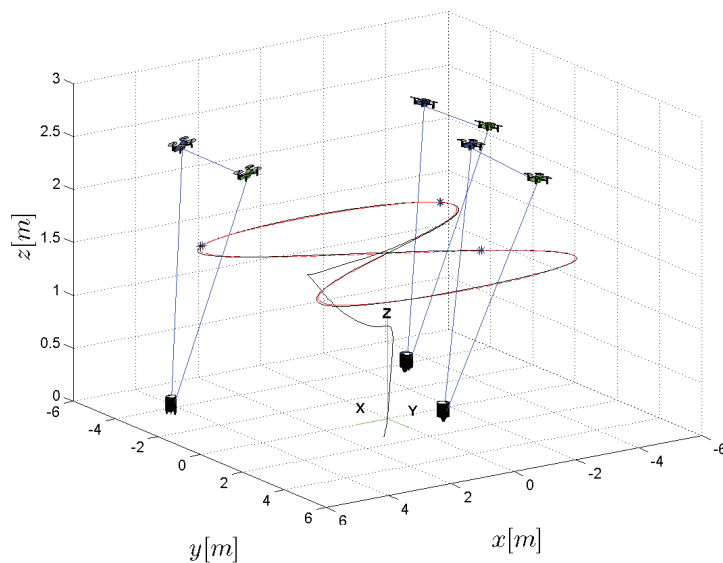
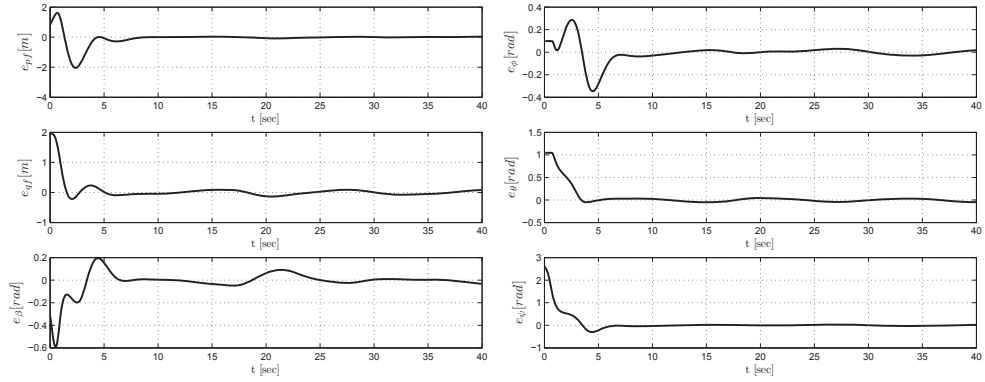
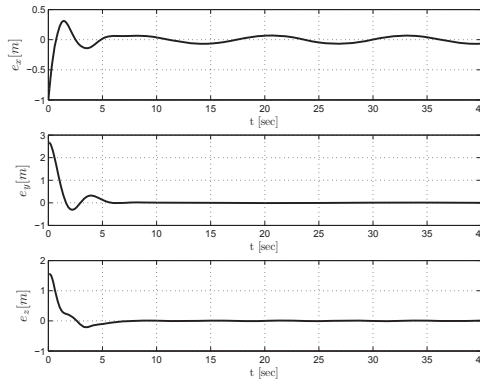


Figura 67: Evolución temporal de la formación de 3 robots, compuesta por un robots tipo *UGV* y dos tipo *UAV*.



(a) Errores de Forma de la Formación (b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Orientación de la Formación.

Figura 68: Errores de control para una formación de 3 robots, compuesta por un robots tipo *UGV* y dos tipo *UAV*.

7.6.3 Formación con 2 robot *UGV*

La formación al contar con dos robots terrestres limita el conjunto de posiciones que puede alcanzar dicho conjunto. Por conveniencia se escogió como robot R_1 al robot aéreo de la formación, para conseguir que el eje Fx coincida en la dirección de dicho robot con el objetivo de simplificar el análisis, aunque la elección se puede realizar de manera arbitraria.

A partir de las ecuaciones 6.17 se analiza que condición implica en la formación el echo que los robots R_2 y R_3 sean del tipo terrestre, y $z_2 = z_3 = 0$.

$$z_F > \frac{2}{3} h_F (\cos \phi_F \sin \theta_F \cos \psi_F + \sin \phi_F \sin \psi_F), \quad (7.46)$$

Por lo tanto, las referencias de ϕ_F , θ_F y ψ_F deben ser tales que $z_F > 0$. Si se utiliza el mismo criterio que el caso anterior y se define como robot 1 al UAV, también surge la condición que $0 < \phi_F < \pi$ porque de otro modo la altura del baricentro de la formación sería negativa.

Para el control de dicho sistema se propone utilizar alguna de las estrategias presentadas en el capítulo 7. Se propone utilizar el siguiente esquema de control, presentado en la ecuación 7.24

$$\dot{x}_d = J_s^\dagger(\dot{q}_s + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) + (I - J_s^\dagger J_s) J_p^\dagger(\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) \quad (7.47)$$

7.6.3.1 Resultados de las Simulaciones

Para demostrar el comportamiento de las restricciones de la propuesta, se utilizó la plataforma desarrollada en MatLab ©. Las referencias para dicha simulación se definen en la tabla 12.

Tabla 12: Referencias de las Variables de Formación.

Variable \ t	0 – 40[sec]
$x_F[m]$	$4 \sin(0,5t)$
$y_F[m]$	$4 \cos(0,5t)$
$z_F[m]$	$-1/3h_F \sin \theta_F \cos \psi_F \cong 0,8$
$p_F[m]$	4
$q_F[m]$	4
$\beta_F[rad]$	$\pi/2$
$\phi_F[rad]$	0
$\theta_F[rad]$	$-\pi/3$
$\psi_F[rad]$	$\pi/16$

En la figura 69 se aprecia como la formación alcanza las referencias, en las figuras 70 se observan como los errores de control tienden a cero y se alcanzan las referencias.

7.7 Conclusiones del Capitulo

En el presente capítulo se presentaron varios aportes, el principal es la propuesta para el control de una formación de 3 vehículos aéreos en \mathbb{R}^3 . La innovación radica en la forma que se combina las variables utilizadas con la técnica de control basado en espacio nulo, las mismas permiten controlar individualmente dos características muy importantes para la formación: la estructura geométrica de la misma y la posición de la misma, para luego combinarlas y cumplirlas de forma simultanea. Debido a que el control basado en espacio nulo garantiza siempre el cumplimiento de la tarea de mayor prioridad, posibilita obtener esquema de control para una

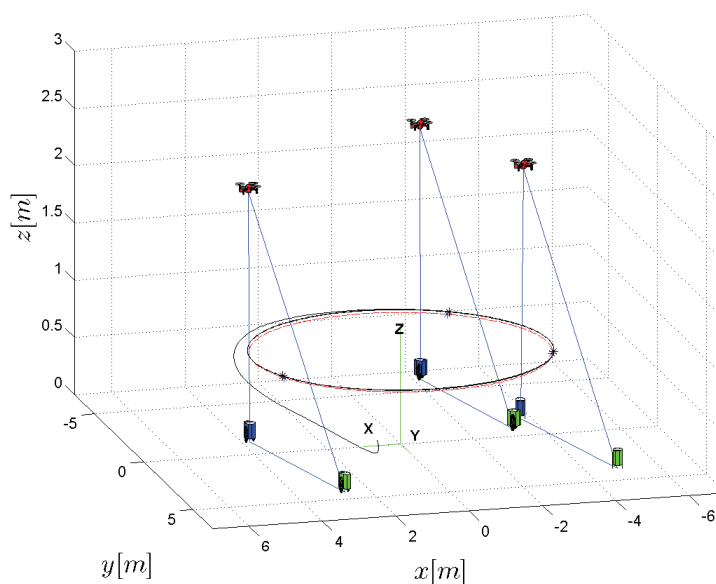
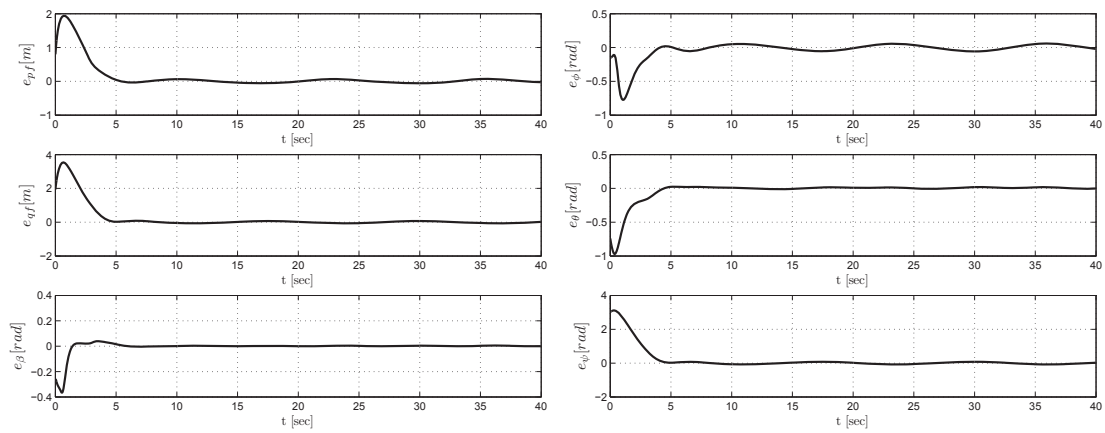


Figura 69: Evolución temporal de la formación de 3 robots, compuesta por dos robots tipo *UGV* y uno tipo *UAV*.

formación tipo rígida, donde los parámetros que definen la estructura no se alteran, o tipo flexible para el caso donde se modifique. En la literatura existen trabajos que utilizan una definición similar de las variables utilizadas para definir a la formación de 3 robots que definen un triángulo, también existen trabajos que extrapolan para el caso donde $n > 3$, pero en las mismas existen redundancia en el cálculo de las acciones de control. Un aporte importante de esta tesis, es la definición de las acciones de control para cada nuevo robot que se agrega a la formación y donde no existe redundancia alguna, además se propusieron dos esquemas para realizar el control en función de la posición del nuevo robot o de variables que definen la forma del nuevo triángulo.

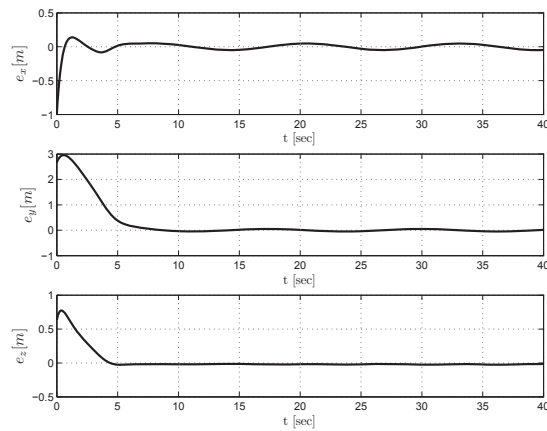
Por ultimo se analizo los casos posibles cuando existe un robot terrestre en la formación, donde se utiliza el mismo esquema de control antes mencionados, pero se analizan las restricciones en las variables de formación que se pueden alcanzar. Cada robot terrestre limita el conjunto de variables que se pueden conseguir, lo cual se debe tener en cuenta en el planificador de la tarea o generador de las referencias, pero la etapa de control es la misma que la utilizada para 3 vehículos aéreos.

El potencial de los aportes es su capacidad de adaptarse a diferentes requerimientos que demande la tarea a desarrollar, de una forma simple y de fácil comprensión.



(a) Errores de Forma de la Formación

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Orientación de la Formación.

Figura 70: Errores de control para una formación de 3 robots, compuesta por dos robots tipo *UGV* y uno tipo *UAV*.

8 *Evasión de Obstáculos de Sistemas Multi-Robot*

8.1 Introducción

La seguridad en la navegación de los robots es fundamental al desempeñar tareas en ambientes donde interactúan con otros autómatas u obstáculos. Dentro de la literatura existen muchas propuestas para garantizar la navegación segura del vehículo o conjunto de robots. Algunas de ellas se basan en conocimiento previo del ambiente y se realiza una planificación *off-line* que garantice la navegación del sistema por zonas seguras donde no exista riesgo de colisión [79], [78], [120]. Existen además, otras propuestas basadas en técnicas reactivas, que se diferencian por no considerar conocimiento previo del ambiente y ante la aparición de un agente desconocido que interfiere con la tarea, genera una política que evite cualquier situación que pueda afectar la integridad del sistema. Algunas de ellas son [121], [80] y [59]. Una de las técnicas más utilizadas en la literatura para esta misión son aquellas basadas en campos potenciales [51], [81]. El principio de estas radica en considerar los objetivos de control como puntos con un campo potencial atractivo, con respecto al sistema robótico, y los obstáculos se los considera de una carga potencial repulsiva. De modo que la suma de los campos atractivos y repulsivos guíen al robot hacia el objetivo de control de una forma segura. Esta propuesta tiene algunas limitaciones que se analizan de forma clara y concisa en [56]. Las más sobresalientes son el problema de navegación en espacios angostos, y la existencia de mínimos locales. Probablemente el último es el mayor inconveniente de este trabajo y existen en la literatura muchas posibles soluciones a dicho problema [81], [122], aunque es un tema de investigación todavía abierto.

En esta sección se presentará un esquema de evasión de obstáculos, basado en múltiples objetivos de control y campos potenciales para la navegación segura del sistema de robots.

8.2 Planteo del Problema

La evasión de obstáculos está basado en la utilización de campos potenciales ficticios $V_{(t,x,y,z)}$, que depende de la posición relativa entre el robot y los diferentes obstáculos existentes. En

ausencia de alg3n obst3culo el valor de $V_{(t,x,y,z)} = 0$ y en presencia de obst3culos el mismo es $V_{(t,x,y,z)} > 0$.

El objetivo de control propuesto para la navegaci3n segura de la formaci3n, es garantizar que todo el sistema lo haga por lugares del espacio donde el potencial sea $V_{(t,x,y,z)} = 0$, $\forall t > 0$. Cuando la formaci3n est3 en cercan3as de un obst3culo o un conjunto de ellos, eventualmente la misma debe modificar algunas de las variables de navegaci3n (posici3n del baricentro, forma u orientaci3n), porque de otra manera la colisi3n ser3 evidente.

Por lo tanto, se propone la siguiente funci3n potencial que depende del tiempo y de la posici3n relativa entre el/los robot/s y el/los obst3culo/s,

$$V_{(t,x,y,z)} = e^{-\left(\frac{x(t) - x_{obs(t)}}{a}\right)^n - \left(\frac{y(t) - y_{obs(t)}}{b}\right)^n - \left(\frac{z(t) - z_{obs(t)}}{c}\right)^n} \quad (8.1)$$

$n \in \aleph_p$, donde \aleph_p son los n3meros naturales pares mayores que cero. El valor de las constantes a , b , c sirven para ajustar el ancho, largo y alto de esta funci3n. Las coordenadas del obst3culos hacen que la funci3n definida sea trasladada desde el origen de coordenadas del sistema inercial, hacia el punto $(x_{obs(t)}, y_{obs(t)}, z_{obs(t)})$.

Como esta funci3n est3 definida en \Re^4 , 3sta carece de interpretaci3n gr3fica, aunque es posible obtener una estimaci3n de su forma analizando una curva de nivel para el cual el valor de una de las 3 variables independientes es nula. En este caso se defini3 $z = 0$, y el valor de $a = 2b$ por lo tanto dicha figura es m3s ancha sobre el eje x , como se puede apreciar en la 71. Si cada uno de los par3ntesis se eleva a una potencia m3ltiplo de 2 se obtiene una familia de funciones de similares caracter3sticas. Mientras mayor es el exponente m3s abrupta la ca3da de la funci3n a partir de los valores $|x| > a$, $|y| > b$ y $|z| > c$. Adem3s dentro del dominio $|x| < a$, $|y| < b$ y $|z| < c$, la misma tender3 a ser cada vez m3s plana, teniendo siempre el valor m3ximo $V_{(t,x,y,z)} = 1$ en el punto $(x, y, z) = (x_{obs(t)}, y_{obs(t)}, z_{obs(t)})$, como se puede apreciar en las Fig. 71(a) y 71(b).

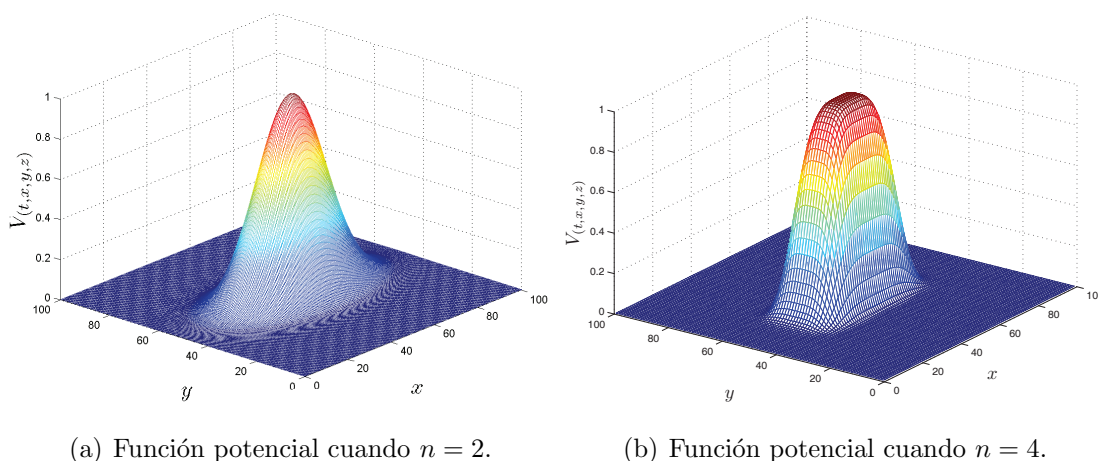


Figura 71: Función campo potencial utilizada.

Una vez definida la función potencial ficticia, el objetivo es que esta función encierre el espacio donde exista un obstáculo que pueda afectar la seguridad del sistema. Para analizar cómo varía la relación entre la posición del robot con la posición del obstáculo, se deriva $V_{(t,x,y,z)}$ en las trayectorias del obstáculo, lo que posibilita obtener la relación entre las variaciones del campo potencial con las variaciones temporales de la posición del robot

$$\frac{\partial V_{(t,x,y,z)}}{\partial t} = J_o \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (8.2)$$

El primer de los términos se refiere a las variaciones causadas por cambios en la posición del robot y el segundo por cambios en la posición del obstáculos.

La matriz J_o representa el Jacobiana que relaciona las variaciones de la posición relativa entre el obstáculo y el robot, con las variaciones del valor del campo potencial

$$J_o = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial y_1} & \frac{\partial V}{\partial z_1} \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

A partir de 8.3 se realiza el cálculo de esta matriz Jacobiana

$$J_o = -nV_{(t,x,y,z)} \begin{bmatrix} \frac{(x(t) - x_{obs(t)})^{n-1}}{a^n} & \frac{(y(t) - y_{obs(t)})^{n-1}}{b^n} & \frac{(z(t) - z_{obs(t)})^{n-1}}{c^n} \end{bmatrix}, \quad (8.4)$$

Esta matriz nos va a permitir obtener la relación del primer término de la ecuación 8.2 para cada uno de los robots.

Es sumamente importante y útil poder obtener la matriz pseudoinversa de la ecuación 8.4, con el objetivo de relacionar las variaciones del campo potencial con las velocidades de cada

robot. Para el c3lculo de la pseudoinversa cabe recordar que la matriz es de orden 1×3 , por lo tanto el numero de columnas es mayor que el n3mero de filas. Esta matriz solo permite el c3lculo de la pseudoinversa por derecha, de forma tal que

$$I = J_o J_o^\dagger \quad (8.5)$$

La pseudoinversa por derecha se define

$$J_o^\dagger = J_o^T (J_o J_o^T)^{-1} \quad (8.6)$$

Operando matem3ticamente, la matriz pseudoinversa del Jacobiano es:

$$J_o^\dagger = -\frac{V_{(t,x,y,z)}}{D} \begin{bmatrix} \frac{(x(t) - x_{obs(t)})^{n-1}}{a^n} \\ \frac{(y(t) - y_{obs(t)})^{n-1}}{b^n} \\ \frac{(z(t) - z_{obs(t)})^{n-1}}{c^n} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

donde

$$D = \frac{(x(t) - x_{obs(t)})^{2(n-1)}}{a^{2n}} + \frac{(y(t) - y_{obs(t)})^{2(n-1)}}{b^{2n}} + \frac{(z(t) - z_{obs(t)})^{2(n-1)}}{c^{2n}} \quad (8.8)$$

Si realizamos la multiplicaci3n de 8.4 por 8.7 el resultado de dicha operaci3n es 1, donde se comprueba que la matriz calculada es la pseudoinversa.

Desarrollando el segundo t3rmino $\partial V / \partial t$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= nV_{(t,x,y,z)} \left[\frac{(x - x_{obs})^{n-1}}{a^n} \dot{x}_{obs} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y - y_{obs})^{n-1}}{b^n} \dot{y}_{obs} + \frac{(z - z_{obs})^{n-1}}{c^n} \dot{z}_{obs} \right], \end{aligned}$$

Como se observa en la ecuaci3n anterior 8.9, el t3rmino $\frac{\partial V}{\partial t}$ arroja informaci3n de la velocidad del obst3culo y los cambios que produce en el potencial. La informaci3n que arroja es 3til dado que sirve como un predictor de la velocidad del obst3culo, en el caso que los mismos sean din3micos.

8.3 Generalización para n obstáculos

Hasta el momento, se analizó la relación entre el potencial definido y la velocidad del robot, pero solo considerando un caso puntual entre un solo robot y un solo obstáculo. A continuación se analiza el caso donde la cantidad de obstáculos dentro del espacio de navegación es mayor que 1 (una situación típica en un ambiente de navegación).

Bajo un escenario real donde existan varios objetos físicos que pueden poner en peligro la integridad física del robot, ya sean elementos estáticos o dinámicos, es necesario analizar cómo afectan el potencial definido para cada uno de ellos (que los envuelve) a la energía total del robot. En la figura 72 se aprecia un esquema de un robot frente a n obstáculos.

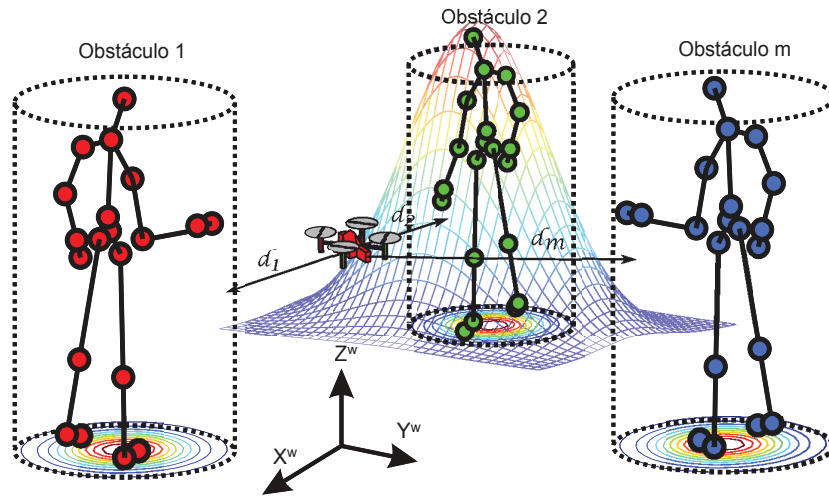


Figura 72: Energía potencial para un robot frente a la presencia de múltiples obstáculos.

Frente a la presencia de varios obstáculos la energía potencial del robot será la suma del potencial aportado por cada uno de ellos. De esta manera, como era de esperar, la energía potencial es función de la distancia relativa entre el agente y cada uno de los obstáculos, además de la forma física de ellos. De la ecuación 8.1 se aprecia que la función definida depende de las constantes a , b y c , cuyos valores son función de las dimensiones físicas del objeto.

Suponiendo que tenemos N robots en la formación y que existen n obstáculos presentes, la energía potencial de cada uno será

$$V_i = V_{(d_1)} + V_{(d_2)} + \dots + V_{(d_n)} = \sum_{j=1}^n V_{(d_j)} \quad , \text{ donde } i = \{1, 2, \dots, N\}, \quad (8.9)$$

d_j con $j = \{1, 2, \dots, n\}$, representa la distancia entre el robot i y el obstáculo j .

Cada uno de los robots del sistema tiene asociado un potencial que es función de la cantidad de obstáculos que se encuentran en las cercanías del mismo, y la distancia relativa con respecto a

cada uno de ellos. Para cada agente de la formaci3n existe una relaci3n definida por la ecuaci3n 8.2, que vincula las variaciones temporales de la posici3n relativa entre obst3culo y robot, y las variaciones de la energ3a potencial del mismo. Entonces es posible definir dicha ecuaci3n de la siguiente manera

$$\dot{V} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{o_1} & 0_{1 \times 3} & \cdots & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & J_{o_2} & \cdots & 0_{1 \times 3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \cdots & J_{o_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (8.10)$$

$$\dot{V}_{[N \times 1]} = J_{o_{[N \times 3N]}} \dot{x}_{[3N \times 1]} + \frac{\partial V}{\partial t}_{[N \times 1]} \quad (8.11)$$

La ecuaci3n anterior relaciona las variaciones del potencial de cada robot, en funci3n de las variaciones de posici3n de cada uno de ellos y de cada obst3culo. De esta manera se obtiene una relaci3n sumamente importante para evitar que el sistema se exponga a situaciones de riesgo.

En esta secci3n se present3 una definici3n de energ3a ficticia que tiene como objetivo evitar la colisi3n de los robots con alg3n cuerpo tangible, que pueda afectar la integridad f3sica del mismo. El valor de energ3a se define individualmente para cada agente, y vale aclarar que cada agente considera a los restantes robots de la formaci3n como obst3culos. El objetivo de esto, es garantizar que la formaci3n en todo momento navegue de forma segura, hasta en los transitorios donde los robots evolucionan de su posici3n inicial a su referencia, donde existe la probabilidad de alg3n accidente dentro de este intervalo de tiempo.

8.4 Evasi3n de obst3culos de una formaci3n

El objetivo de control es garantizar la navegaci3n de cada uno de los robots por zonas libres de obst3culos o cualquier tipo de elemento que pueda afectar la seguridad o integridad de ellos. Para conseguir esto se propone el siguiente controlador

$$\dot{x}_d = J_o^\dagger (\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial t}), \quad (8.12)$$

El valor de potencial deseado es $V_d = 0$, de forma que las velocidades de cada robot sean calculadas para evitar que el sistema navegue por puntos de potencial $V > 0$. Las ganancias de control k_{obs} y k_{pre} son matrices definidas positivas que sirven para ajustar la respuesta del controlador frente a la presencia de un valor de $V_i > 0$.

El término $-\frac{\partial V}{\partial t}$ sirve como un tipo de predictor de las variaciones temporales del campo potencial, que mejora el desempeño cuando el obstáculo es dinámico.

Este término aporta un beneficio sustancial, dado que el primer término de 8.12 solo plantea el análisis frente a situaciones estáticas donde no se tiene en cuenta la velocidad entre ambos agentes (robot y obstáculo), sino solamente el estado permanente de la relación (navegar por zonas del espacio donde $V_{(t,x,y,z)} = 0$).

La ley de control resulta en un mismo esquema que en definitiva afecta a cada robot del sistema para garantizar que navegan por zonas del espacio donde $V = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= \begin{bmatrix} \dot{x}_{1d} \\ \dot{x}_{2d} \\ \vdots \\ \dot{x}_{Nd} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} J_{o_1}^\dagger & 0_{1 \times 3} & \cdots & 0_{1 \times 3} \\ 0_{1 \times 3} & J_{o_2}^\dagger & \cdots & 0_{1 \times 3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & \cdots & J_{o_N}^\dagger \dot{V}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_{1d} + k_{obs_1} \tilde{V}_1 - k_{pre_1} \frac{\partial V_1}{\partial t} \\ \dot{V}_{2d} + k_{obs_2} \tilde{V}_2 - k_{pre_2} \frac{\partial V_2}{\partial t} \\ \vdots \\ \dot{V}_{Nd} + k_{obs_N} \tilde{V}_N - k_{pre_N} \frac{\partial V_N}{\partial t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

En la ecuación 8.13 garantiza la navegación segura de cada agente del sistema multi-robot por puntos del espacio donde el potencial del mismo sea $V = 0$.

Al considerar dentro de la estrategia la energía de cada agente por separado y no considerar a la energía del sistema en total (se define como la suma del potencial de cada robot), se tiene mayor flexibilidad en cuanto a la respuesta del sistema cuando se tienen muchos robots dentro del sistema.

Con el controlador propuesto se garantiza la navegación de cada agente del sistema, por puntos del espacio donde no existan objetos (agentes u obstáculos) que puedan causar colisión con ellos. El siguiente problema es cómo hacer para que naveguen de forma coordinada, y aprovechar la capacidad de evitar situaciones donde se ponga en riesgo la integridad física del sistema robótico. Para ello, se debe proyectar esta tarea en el espacio nulo de la tarea primaria (evitado de colisión). De esta manera, siempre el potencial asociado a cada agente será nulo, y al proyectarse en el espacio nulo las tareas de navegación se logra el cumplimiento de la tarea asignada sin posibilidad de colisión.

La estructura propuesta para esto resulta

$$\dot{x}_d = J_o^\dagger(\dot{V}_d + k_{obs}\tilde{V} - k_{pre}\frac{\partial V}{\partial t}) + (I - J_o^\dagger J_o)\dot{x}_{tarea}, \quad (8.14)$$

\dot{x}_{tarea} representa las velocidades obtenidas por el controlador relacionado a las tareas de navegaci3n. Estas pueden ser las presentadas en el capitulo 7.

A continuaci3n se propone una tarea de posicionamiento de la formaci3n que generari3 una situaci3n de colisi3n con un objeto de dimensiones conocidas. Para ello se asume en la simulaci3n que se cuenta con un sensor que permite estimar la distancia relativa entre los robots y los obst3culos, y que se puede estimar las dimensiones de los mismos.

La tarea se considera utilizando el esquema de control presentado en 7.24 no teniendo en cuenta estrategia alguna para evitar colisi3n de la formaci3n. La posici3n inicial de los 3 robots a3reos:

$$R1 = [-2 \ 0 \ 0]^T$$

$$R2 = [0 \ -2 \ 0]^T$$

$$R3 = [0 \ 2 \ 0]^T$$

Y las referencias de la tarea de posicionamiento son:

Variable \ t	0 – 10[sec]	10 – 30[sec]
$x_F[m]$	0	10
$y_F[m]$	0	10
$z_F[m]$	2	3
$p_F[m]$	1,5	1,5
$q_F[m]$	1,5	1,5
$\beta_F[rad]$	$\pi/4$	$\pi/4$
$\phi_F[rad]$	0	0
$\theta_F[rad]$	$\pi/16$	$\pi/16$
$\psi_F[rad]$	0	0

En la posici3n $Obs = [5m \ 5m \ 2m]^T$ se encuentra un obst3culo de dimensiones $d_x = 1,7m$, $d_y = 0,7m$ y $d_z = 1m$. Este objeto se encuentra entre la posici3n inicial de la formaci3n y el objetivo de control, por lo tanto se pone en riesgo el cumplimiento de la tarea. Para el c3lculo del

valor numérico de la energía potencial ficticia se utilizó los valores de $d_x = a$, $d_y = b$ y $d_z = c$ de forma directa, sin ningún margen de seguridad. En la figura 73 se aprecia la evolución de la formación y cómo las trayectorias de algunos de los robots de la formación colisionan con el obstáculo.

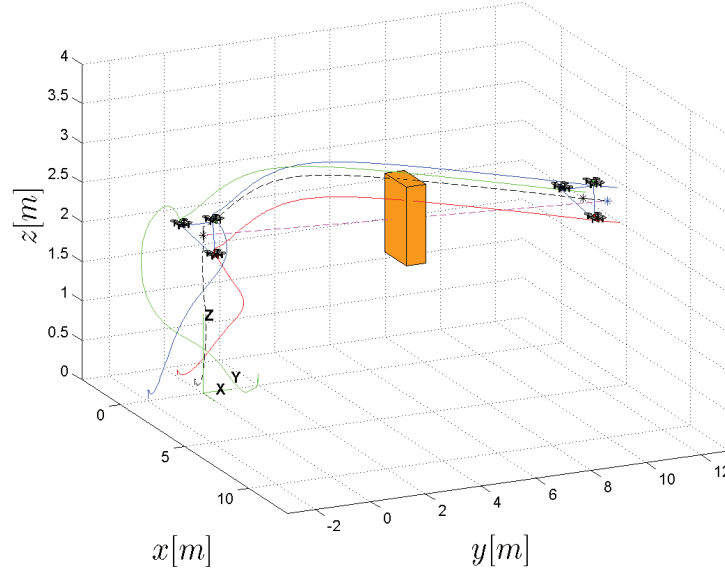


Figura 73: Tarea de posicionamiento con evasión de colisión.

De acuerdo a la definición de potencial definido en 8.1, y utilizando un exponente de orden 4, se observa la evolución durante la simulación en la Fig. 74. Es posible observar valores cercanos a 1 que indica la existencia de una colisión entre los robots y el obstáculo. Debido a situaciones como ésta, las cuales son sumamente comunes en ambientes reales donde los sistemas robóticos interactúan con distintos objetos, es necesario definir alguna política para evitarlas.

Para evitar este tipo de situaciones, se propone implementar el esquema de evasión de colisión expuesto en 8.14. El término \dot{x}_{tarea} representa las velocidades deseadas para cumplir la tarea secundaria.

En el capítulo anterior se presentaron dos esquemas para el control de una formación de vehículos aéreos, por lo tanto se propone aplicar dichos controladores para obtener \dot{x}_{tarea} y se proyecta en el espacio nulo de J_o , a fin de evitar que estas estas velocidades causen conflictos de intereses con el algoritmo de evasión de colisión.

De acuerdo a lo expuesto en el Capitulo 7, se presentan dos esquemas de control para la evasión de obstáculos, de este modo se re define 8.14 primero considerando 7.25

$$\begin{aligned} \dot{x}_d = & J_o^\dagger(\dot{V}_d + k_{obs}\tilde{V} - k_{pre}\frac{\partial V}{\partial t}) + (I - J_o^\dagger J_o)[J_p^\dagger(\dot{q}_p + L_p \tanh(K_p L_p^{-1}\tilde{q}_p)) + \\ & + (I - J_p^\dagger J_p)J_s^\dagger(\dot{q}_{sd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1}\tilde{q}_p))], \end{aligned} \quad (8.15)$$

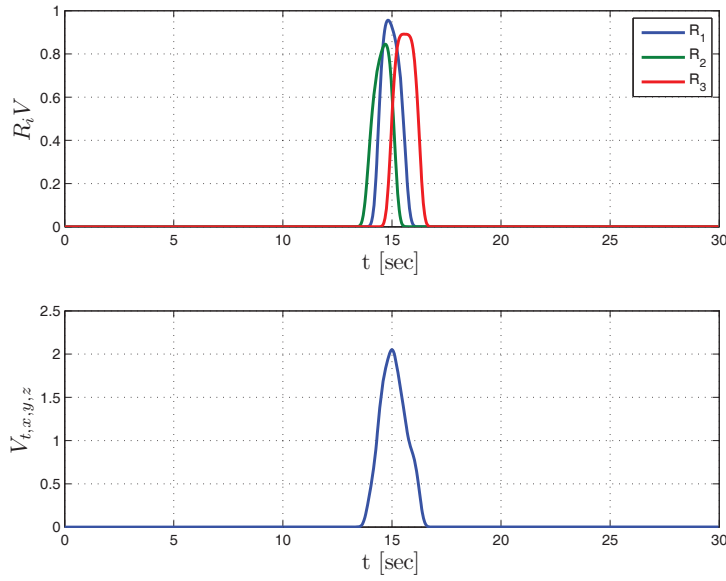


Figura 74: Evoluci3n en el tiempo de la funci3n potencial ficticia definida para cada uno de los robots, y la suma de todas.

Y luego 7.24

$$\begin{aligned} \dot{x}_d = & J_o^\dagger (\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial t}) + (I - J_o^\dagger J_o) [J_s^\dagger (\dot{q}_s + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) + \\ & + (I - J_s^\dagger J_s) J_p^\dagger (\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p))], \end{aligned} \quad (8.16)$$

A continuaci3n se repite la tarea de posicionamiento propuesta anteriormente, utilizando estos dos esquemas de control.

El primer esquema que se simul3 es el presentado en la ecuaci3n 8.15. La figura 75 representa la evoluci3n del sistema utilizando el esquema de control antes mencionado, se observa c3mo el sistema rodea al obst3culo manteniendo una distancia de seguridad y contin3a hacia el objetivo de control. En el plano $z = 0$ o $X - Y$, se presenta una curva de nivel del potencial ficticio con $z = 0$, debido a que la funci3n definida 8.1 $\in \mathbb{R}^4$. Adem3s en la figura 76 se aprecia c3mo var3a el potencial ficticio anteriormente definido. Los valores m3ximos son mucho menores a los que se aprecian en 74, consecuencia del algoritmo de control propuesto, y de esta manera se evita la colisi3n entre cualquier de los agentes de la formaci3n y el obst3culo simulado.

Por 3ltimo, para el segundo esquema de evasi3n de colisi3n 8.16, se presenta la evoluci3n de la formaci3n en la figura 77, donde claramente se aprecia c3mo el sistema evita la zona del espacio donde se encuentra el obst3culo y la evoluci3n obtenida es similar a la expuesta

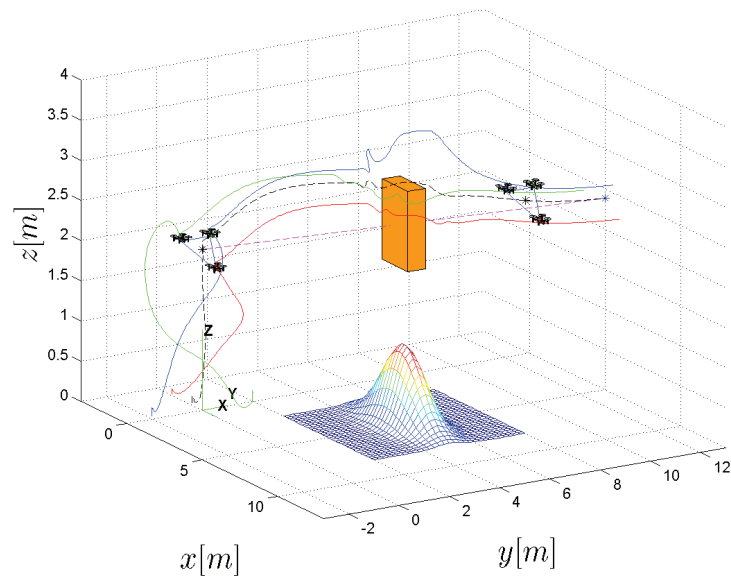


Figura 75: Tarea de posicionamiento con evasión de colisión.

anteriormente. En 78 se presenta cómo varía el campo potencial ficticio asociado al obstáculo y los valores máximos son menores a los obtenidos en 73.

Ambos esquemas presentan una respuesta idéntica, como consecuencia a que la trayectoria que el sistema sigue, está definida por el controlador de colisión. De esta manera, el orden en que los objetivos de control de la formación se coloquen (control de forma y control de posición del baricentro), no afectan el desempeño del sistema de manera significativa. El esquema de control presentado es de *formación flexible*, debido a que la forma de la formación se modifica al momento de existir algún objeto que pueda colisionar con la misma.

8.4.1 Evasión de Colisión entre Robots de la Formación

Dentro de la área del control de Sistemas Multi-Robots, un campo de estudio importante es el control específico de formación. El objetivo más importante es coordinar un grupo de robots móviles para alcanzar unas características determinadas de formación mientras se evita la colisión entre agentes de la formación al mismo tiempo [10].

Una de las propiedades interesantes de la propuesta de evasión de obstáculos, es el evitado de la colisión entre agentes de la formación. La estrategia planteada en la sección anterior, se aplica a cada agente y este considera la región en el espacio con potencial $V > 0$, a toda aquella ocupada por una entidad que físicamente pueda dañar al mismo. Debido a esto, cada vehículo del sistema considera como obstáculo a cualquier elemento que pueda poner en riesgo su integridad física, incluyendo los demás agentes de la formación. Esta es una cualidad importante de la ley de control, porque desde su filosofía se tiene en cuenta la seguridad de los robots en todo momento, inclusive en los transitorios donde los robots evolucionan desde la posición inicial hasta el valor

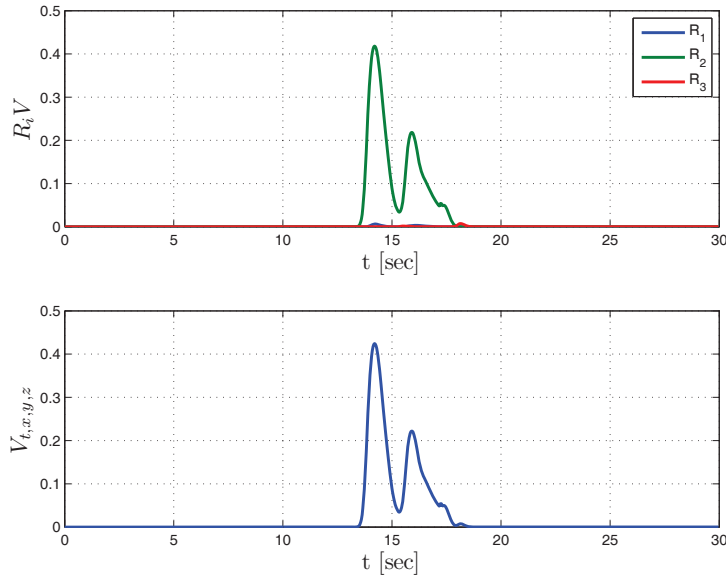


Figura 76: Evolución en el tiempo de la función potencial ficticia definida para cada uno de los robots, y la suma de todos.

de referencia estipulado, donde puede suceder situaciones potenciales de colisión entre agentes de la formación. Para ello, se asocia a cada robot una función potencial que tiene en cuenta las dimensiones del robot. En el caso del vehículo aéreo utilizado en las simulaciones los valores establecidos son de $a = 0,5m$ y $b = 0,5m$ para los casos de distancia lateral y frontal, y $c = 0,4$ para el valor de altura; además se establecieron zonas de seguridad para cada robot, para evitar que cualquier elemento supere dicha distancia relativa.

Para demostrar esta propiedad, se plantea realizar una simulación de una formación de 3 robots, con referencias de formación que provoquen la colisión entre los robots. Las referencias para el sistema se presentan en la tabla 13. Estos valores se escogieron de manera que para cumplirlos, se produzca la colisión o una situación de cercanía peligrosa entre los robots. El algoritmo de evasión garantiza la seguridad física de los robots, priorizando la seguridad por sobre las demás tareas. La ventaja de los algoritmos de control basados en comportamiento, es poder descomponer el objetivo de control en varias sub-tareas que se controlan individualmente, para finalmente combinarlas. La política que se define para realizar esta combinación es sumamente importante para cumplir con el objetivo de control. El esquema denominado *Control Basado en Espacio Nulo*, permite realizar la combinación de varios esquemas de control utilizando una formulación matemática formal (a diferencia de varios existentes en la literatura [45], [46]), y dicha formulación permite definir jerarquías para las sub-tareas. Los esquemas para el control y evasión de colisión de un sistema multi-robot, presentados en la presente tesis utilizan esta estructura de control. El esquema de evasión de obstáculos tiene como tarea principal la evasión de obstáculos, y como secundarias aquellas que permiten la navegación del sistema (posicionamiento, seguimiento de trayectoria, referencias de forma, etc.). Por lo tanto, estos

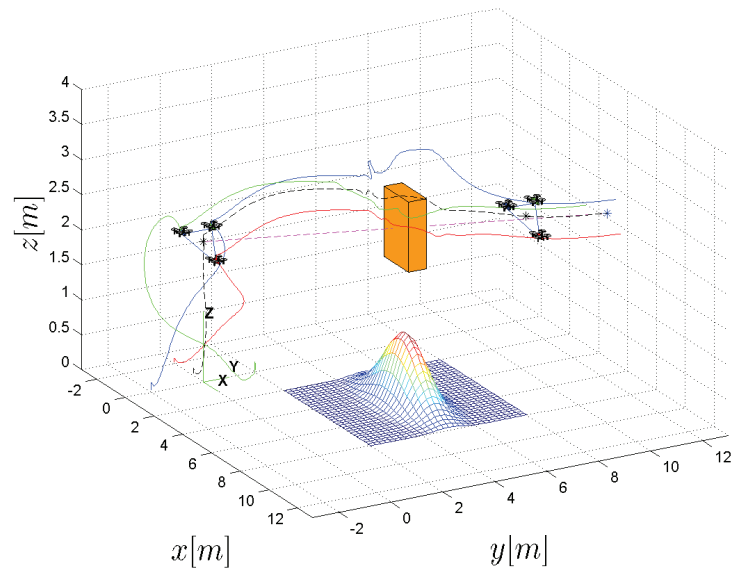


Figura 77: Tarea de posicionamiento con evasión de colisión.

esquemas garantizan el cumplimiento de la tarea de mayor jerarquía (evasión de colisión), y las de menor se cumplen siempre y cuando no tengan conflictos de intereses con la de mayor jerarquía. Las referencias presentadas en 13 generan la posible colisión entre los robots de la formación, por lo tanto, el algoritmo de colisión evita que suceda. Y las referencias de forma y orientación del sistema no se alcanzan, porque causan conflictos de intereses con la tarea primaria.

Tabla 13: Referencias de las Variables de Formación, que provocan una posible colisión entre los robots de la formación.

Variable \ t	t
	0 – 20[sec]
$x_F[m]$	0
$y_F[m]$	0
$z_F[m]$	2
$p_F[m]$	0,5
$q_F[m]$	0,5
$\beta_F[rad]$	$\pi/2$
$\phi_F[rad]$	0
$\theta_F[rad]$	0
$\psi_F[rad]$	0

La posición inicial de los robots se escogió de manera que para alcanzar las referencias necesariamente se tenga que producir situaciones de cruce entre los agentes. La posición inicial

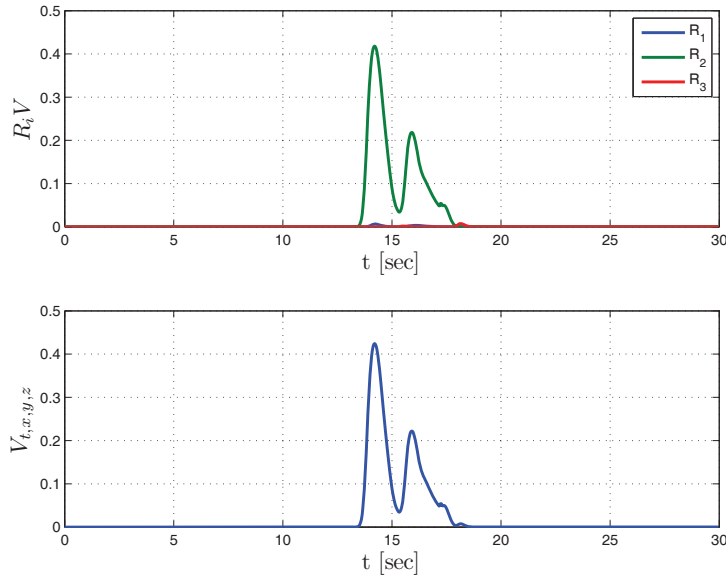


Figura 78: Evolución en el tiempo de la función potencial ficticia definida para cada uno de los robots, y la suma de todas.

de los robots son $R\{1\} = [-2, 0, 0]^T$, $R\{2\} = [0, -2, 0]^T$ y $R\{3\} = [0, 2, 0]^T$. En la figura 79 se presenta la evolución en el espacio $3D$ de las trayectorias de cada uno de los robots, donde claramente se observa que el algoritmo de control genera referencias para cada agente de forma que no se produzca situación de colisión entre los agentes.

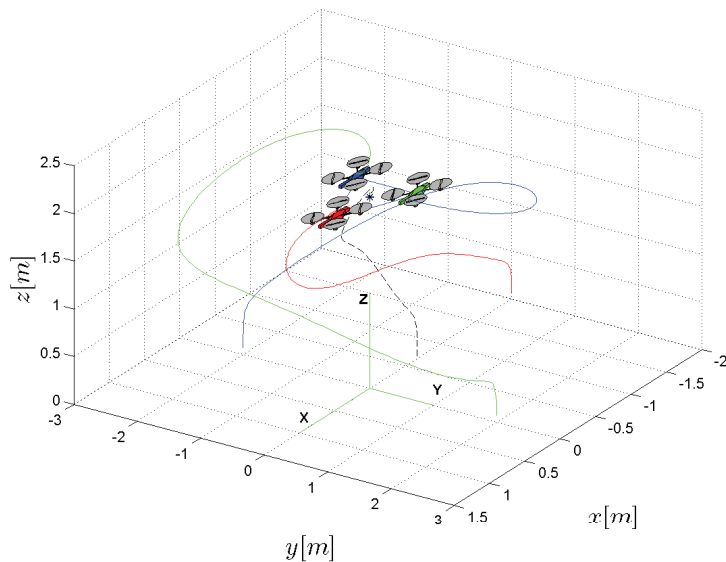
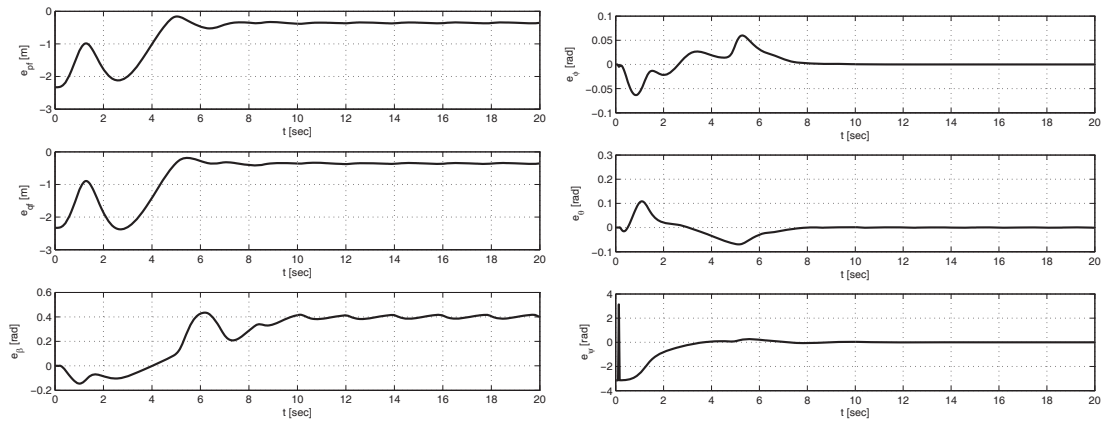


Figura 79: Evolución $3D$ de la formación, bajo referencias de posible colisión entre robots de la formación.

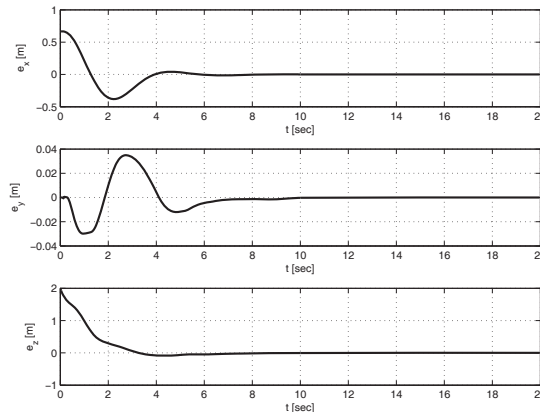
En la figura 80 se presenta la evolución de los errores de la formación. En la figura 80(a) se observa cómo los errores de control no tienden a cero, debido a que los valores de referencia indicados para la formación no son seguros para la formación. Debido a que la distancia entre cada robot es menor que los márgenes de seguridad establecidos. El objetivo primario en toda

navegación es garantizar que dicho sistema mantenga la seguridad del mismo evitando cualquier situación que ponga en riesgo esto, y como las referencias que se estipularon provoca que las distancias entre los robots sea menor que los márgenes de seguridad definidos. Por lo tanto no se alcanzan estos valores de referencia, provocando un error en cada variable que define la forma del sistema multi-robot.



(a) Errores de Forma de la Formación.

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 80: Evolución temporal de los robots para referencias de posible colisión entre agentes de la formación.

En la figura 81 se presenta la evolución de la energía potencial asociada a cada uno de los 3 robots de la formación y la energía total del sistema (que es la suma de todas las energías). A partir de los 5 segundos de la simulación se observa un valor de potencial considerable que activa el algoritmo de evasión de obstáculos, y de esta manera se evita la colisión entre los robots.

Cabe recordar que el exponente utilizado para definir 8.1 en esta simulación fue $n = 4$, pero las variaciones de potencial son bruscas en cercanías del obstáculo, por lo tanto para el resto de las simulaciones se considerará a $n = 2$.

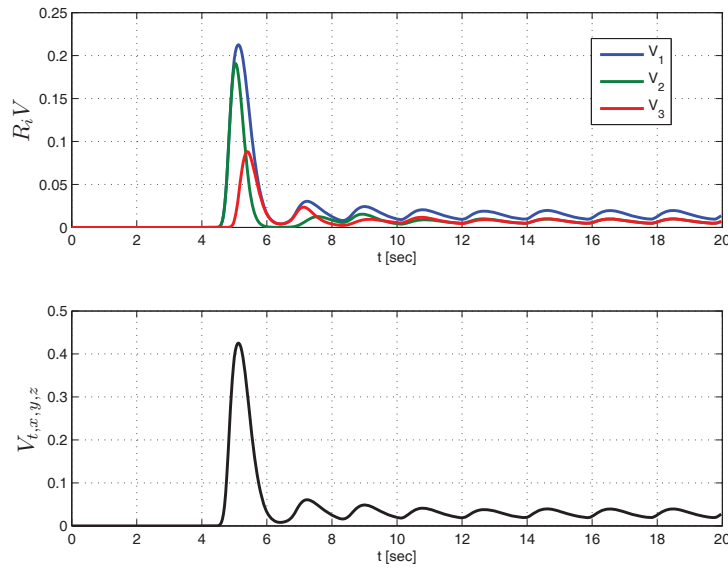


Figura 81: Evolución de la energía potencial ficticia de la formación.

8.4.2 Formación Rígida y Formación Flexible

En la literatura tenemos dos enfoques en el sentido de cómo el conjunto de robots realiza las tareas dentro de un ambiente, formaciones rígidas [123] y formaciones flexibles [124].

En la primera se considera a la formación de forma análoga a un cuerpo rígido. Se define a un cuerpo rígido como un sistema de n partículas donde la distancia entre las partículas permanece siempre constante, $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = d_{i,j}$, con $\dot{d}_{i,j} = 0 \forall t > 0$. Por lo tanto, es simple entender que ante la existencia de un obstáculo que pueda poner en peligro la navegación segura, una formación rígida, solo debe modificar las variables de posición de la misma porque no es posible modificar las otras variables por la restricción anteriormente mencionada.

En el caso de las formaciones flexibles, no existe restricción alguna en cuanto a la forma física de dicho sistema. En este caso existe la libertad de poder modificar las variables de forma con el objetivo de realizar la evasión de la colisión.

Recordando las variables que definen una formación de 3 robots presentado en el capítulo 6, ellas son $P_F = [x_F \ y_F \ z_F]^T$ que representa la posición en el espacio \mathfrak{R}^3 del centroide de la formación, la forma definida por $S_F = [p_F \ q_F \ \beta_F]$, que representa la distancia entre R_1 y R_2 , la distancia entre R_1 y R_3 y el ángulo $\widehat{R_1 R_2 R_3}$, y por último la orientación de la misma con respecto al sistema de referencia inercial $O_F = [\phi_F \ \theta_F \ \psi_F]^T$.

Las variables que definen el sistema se pueden dividir en dos grupos, aquellas que están relacionadas directamente con la forma física de dicha formación, como son S_F y O_F , y la posición de la misma P_F .

Las variables que definen la forma son aquellas que determinan la forma física y la disposición

de la misma en el espacio, y la de posición define donde va a estar centrada dicha formación.

En la sección anterior se adoptó $d_x = a$, $d_y = b$ y $d_z = c$ para realizar el cálculo de la energía ficticia definida en 8.1. Por cuestiones de seguridad se adoptará un margen de distancia $\Delta_d = 0,5[m]$ a fin de evitar que la cercanía de los robots a los obstáculos sea demasiado pequeña. Por lo tanto los valores utilizados serán, $a = d_x + \Delta_d$, $b = d_y + \Delta_d$ y $c = d_z + \Delta_d$. Este valor se adoptó de manera heurística y se puede actualizar en función del tipo de ambiente y tarea que desarrollará la formación.

8.4.3 Formación Rígida

El objetivo de esta sección es definir una estrategia conjunta entre las estrategias de control presentadas en el capítulo 7 y el algoritmo de evasión de obstáculos del presente capítulo, de forma de obtener una estrategia de navegación de una formación en \mathbb{R}^3 evitando la colisión con cualquier obstáculo existente, y además, que en todo momento se conserve la rigidez del sistema.

La premisa de obtener un controlador que garantice una formación rígida implica, solo la posibilidad modificar la referencia de posición del centroide como herramienta para evitar la colisión. Porque en otro caso, se altera la forma física del sistema, lo cual no es posible.

Las formaciones rígidas son importantes en muchas tareas donde es vital que no se altere la forma física del sistemas, por ejemplo tareas de transporte de cargas entre varios robots [118], [3], donde es esencial mantener la formación durante toda la tarea para lograr el objetivo planteado.

Dentro de los múltiples objetivos de control que se plantearon en el capítulo 7 (control de la forma, orientación y posición del sistema multi-robot), se debe adicionar el objetivo planteado en este capítulo (navegación segura por puntos del espacio donde $V = 0$), de forma tal de que solo se modifiquen las variables de la posición para evadir cualquier posibilidad de colisión y se mantenga las variables de forma constantes en todo momento.

Para cumplir con el objetivo de control planteado, se propone dos esquemas de control. El primero de ellos,

$$\begin{aligned} \dot{x}_d = & J_p^\dagger \left[(\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) + J_p J_o^\dagger (\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial t}) \right] + \\ & + (I - J_p^\dagger J_p) J_s^\dagger (\dot{q}_{sd} + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Y por último,

$$\dot{x}_d = \begin{bmatrix} J_s^\dagger(\dot{q}_{sd} + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) + (I - J_s^\dagger J_s) \\ J_o^\dagger(\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial t}) + (I - J_o^\dagger J_o) J_p^\dagger(\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

8.4.3.1 Primer esquema de Formación Rígida

En el primer esquema presentado en la ecuación 8.17 el objetivo primario en el controlador propuesto combina el control de posicionamiento con el ley de control para evasión de obstáculos, y en el espacio nulo del Jacobiano asociado se proyectan las variables de posición del centroide.

Cuando no exista obstáculo cerca de alguno de los robots de la formación y $V_i = 0$, con $i = \{1, 2, 3\}$, la estructura del mismo se modifica y queda igual a la expuesta en el capítulo 7. Por lo tanto se propone un agente supervisor que analice en todo momento el valor de energía potencial de cada agente y si esta está por debajo de un umbral, se considera navegación segura y solo se tiene en cuenta el control de la formación. En la figura 82 se presenta el esquema de control propuesto para una formación rígida y evasión de obstáculos. En la misma es posible observar un bloque supervisor que determina la necesidad de activar el control de evasión de colisión.

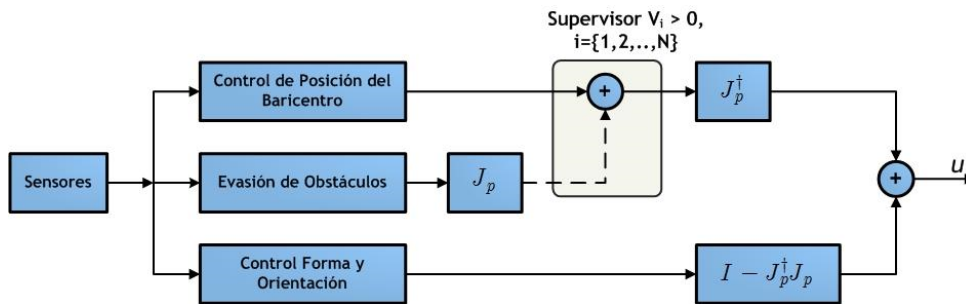


Figura 82: Estructura del controlador de formación rígida y evasión de obstáculos.

Cuando aparece un valor de energía en alguno de los robots de la formación mayor que 0, automáticamente se activa el algoritmo de evasión de colisión.

Como se analizó previamente el valor de potencial es función de la distancia relativa entre el vehículo y el obstáculo, siendo una relación inversamente proporcional, mientras menor es la distancia mayor es el valor de energía propuesto en la ecuación 8.1. Del controlador propuesto en 8.17, el control de la forma física de la formación está proyectada en el espacio nulo del Jacobiano asociado al control de posición. Y en el espacio fila de dicho Jacobiano, se proyectan

las velocidades generadas por el controlador de posición y el de evasión de obstáculos. Ante la presencia de alguna situación en la formación donde $V_i > 0$, con $i = \{1, 2, 3\}$, el bloque de evasión de colisión genera velocidades para evitar que esto suceda, afectando a las velocidades obtenidas por el controlador de posición, pero en ningún momento afecta a las acciones de control del controlador de forma.

Para verificar el desempeño del controlador propuesto se plantea una simulación en Matlab ©, donde la formación esté frente a un ambiente real con obstáculos rígidos y móviles.

La posición inicial de los robots del sistema son $R\{1\} = [-2, 0, 0]^T$, $R\{2\} = [0, -2, 0]^T$ y $R\{3\} = [0, 2, 0]^T$. Y las referencias de navegación se presentan en la tabla 14.

Tabla 14: Referencias de las variables utilizadas para la formación de evasión de obstáculo.

Variable \ t	t	
	0 – 10[sec]	10 – 70[sec]
$x_F[m]$	0	$0,7t$
$y_F[m]$	0	$3 \sin(0,2t)$
$z_F[m]$	2	2
$p_F[m]$	1	2
$q_F[m]$	1	2
$\beta_F[rad]$	$\pi/2$	$\pi/2$
$\phi_F[rad]$	0	0
$\theta_F[rad]$	0	0
$\psi_F[rad]$	0	0

Dentro del ambiente se propone la presencia de 3 obstáculos que van a interactuar con la formación, dos de ellos estáticos y el restante dinámico. En estas simulaciones se supone que los obstáculos son prismas de 4 lados, por cuestiones de mayor simplicidad a la hora de analizar los resultados pero la técnica se puede extrapolar a cualquier tipo de obstáculo.

El primero de ellos es un obstáculo estático ubicado en la posición $Obs_1 = [11 \ -1 \ 1,1]^T$ y las dimensiones del mismo son $a = 1,7$, $b = 0,7$ y $c = 2,2$, estas constantes definen el ancho (x), la profundidad (y) y la altura (z) del obstáculo. Esta definición de constantes está directamente relacionada a los valores que se utilizan en la ecuación 8.1 para definir la energía potencial ficticia asociada al obstáculo. Los restantes obstáculos están posicionados en $Obs_2 = [24 \ -2 \ 1,25]^T$ y la forma física está definida por las constantes $a = 1,5$, $b = 2$ y $c = 3$. El último es un obstáculo dinámico de dimensiones $a = 1$, $b = 2$ y $c = 0,5$, y la trayectoria del mismo comienza en $t = 45$ segundos con $Obs_1 = [40 - 0,45t \ 6 - 0,6t \ 2]^T$.

Las referencias para la formación, como la posición y características de los obstáculos insertos en el ambiente de simulación, resultarán idénticos para todas las simulaciones que se presentarán.

En la figura 83 se presenta la trayectoria de la formación en el espacio $3D$, donde claramente se observa que ante la presencia de un obstáculo se modifica la trayectoria del baricentro, pero sin modificar la forma de la misma. Esta característica es sumamente importante en tareas como el transporte de cargas a través de varios agentes aéreos.

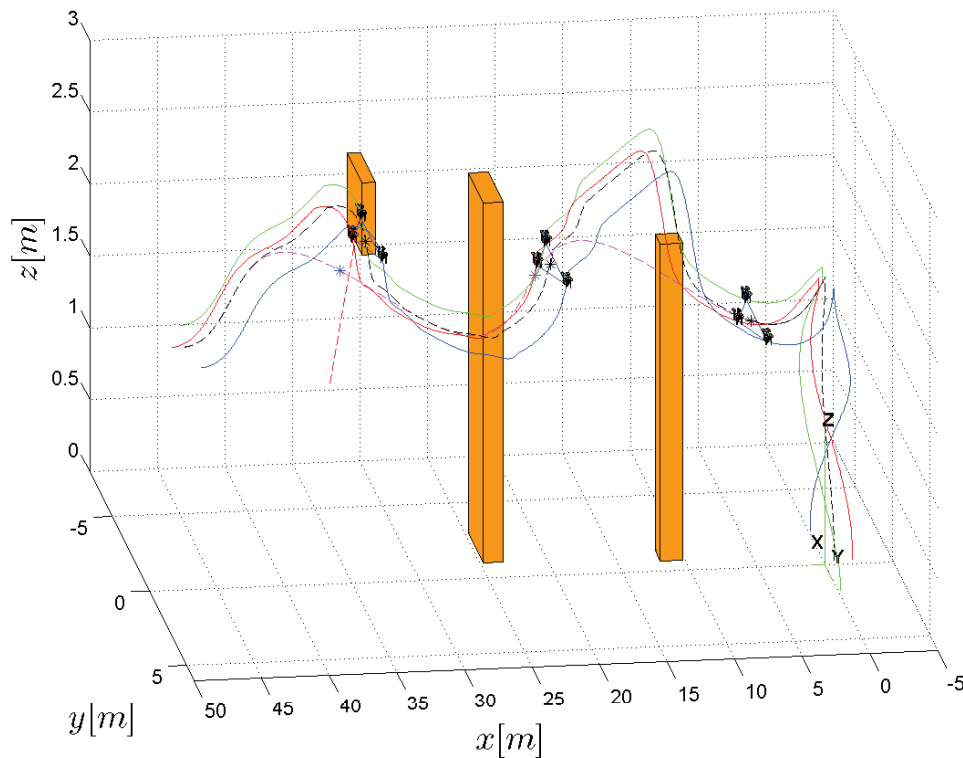
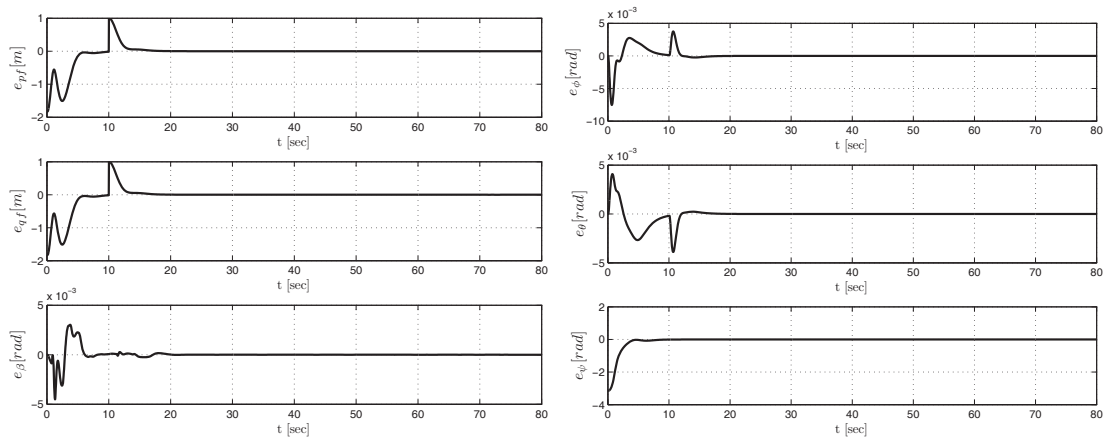


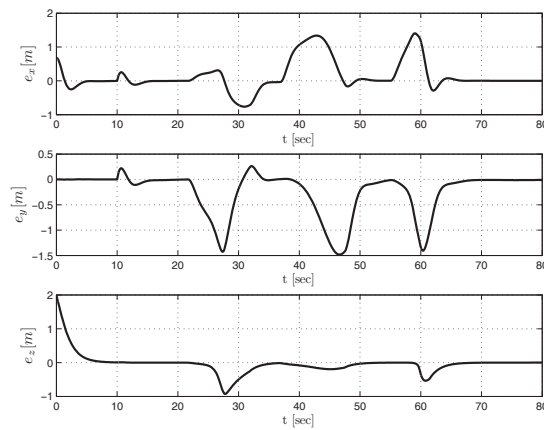
Figura 83: Evolución en el espacio $3D$ de las posiciones de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo manteniendo la formación rígida del primer esquema.

En la figura 84 se presenta la evolución de los errores de la simulación. En las figuras 84(a) y 84(b), se presentan los errores de forma y orientación del sistema. Claramente se observa que nunca se modifica la forma física del sistema multi-robot, sino que solo se modifica la posición del baricentro (figura 84(c)) como herramienta para evitar la colisión con los obstáculos.



(a) Errores de Forma de la Formación.

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 84: Evolución temporal de los errores de control para una formación rígida con evasión de colisión, utilizando el primer esquema.

En la figura 85 es posible observar la evolución de la energía potencial asociada a cada robot y la energía total del sistema. Aunque la misma alcanza valores cercanos a 1 nunca existe colisión, debido a que la forma con que se calcula la energía tiene en cuenta un volumen mayor que el volumen del obstáculo.

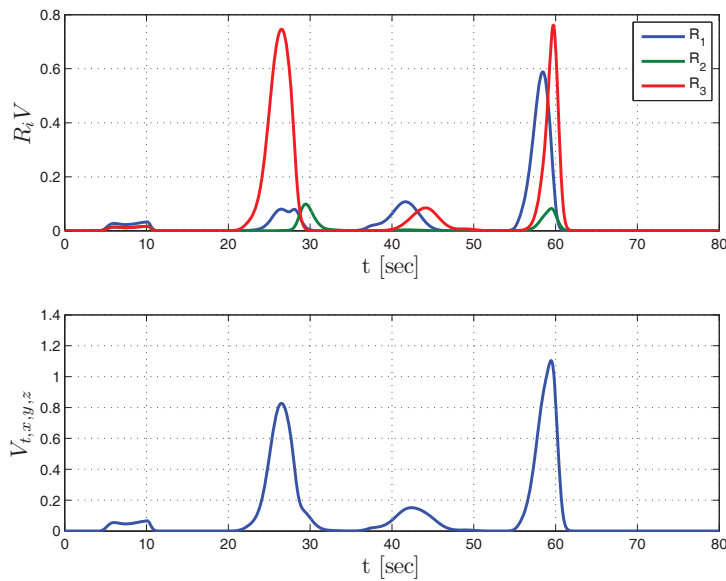


Figura 85: Evolución de la energía potencial ficticia de la formación rígida, utilizando el primer esquema.

8.4.3.2 Segundo esquema de Formación Rígida

En el segundo esquema presentado en 8.18 se plantea como objetivo primario de control la tarea de control de forma del sistema, y como objetivo secundario la evasión de obstáculos y control de posición del baricentro de la formación. El esquema se puede observar en la figura 86. De acuerdo a lo visto en los capítulos anteriores, los esquemas basados en espacio nulo garantizan siempre el cumplimiento de la tarea de mayor jerarquía (aquella que se proyecta en el espacio columna del Jacobiano asociado al problema). De esta manera, la formación siempre navega manteniendo la forma deseada y cuando aparece un nivel de energía potencial significativo, el control de colisión genera velocidades, estas se proyectan en el espacio nulo, evitando que el sistema colisione.

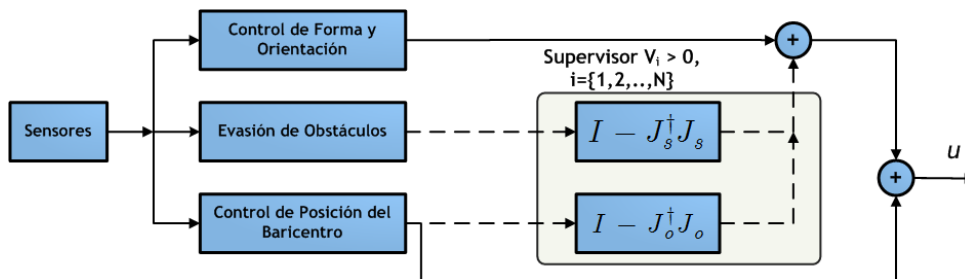


Figura 86: Estructura del controlador de formación rígida y evasión de obstáculos.

En la figura 87 se aprecia la trayectoria que sigue el sistema multi-robot, y cómo la misma se aleja de la referencia para evitar que los miembros colisione con los obstáculos presentados en el ambiente de simulación. En las figuras 88 se observan los errores de control, es posible ver cómo

los errores de forma nunca aumentan su valor (88(a) y 88(b)), y solo se aumentan los errores de posición del baricentro 88(c).

Los valores de potencial se aprecian en la Fig. 89, siendo estos valores cercanos a cero lo que demuestra que este esquema garantiza la seguridad de los robots en todo instante de la simulación.

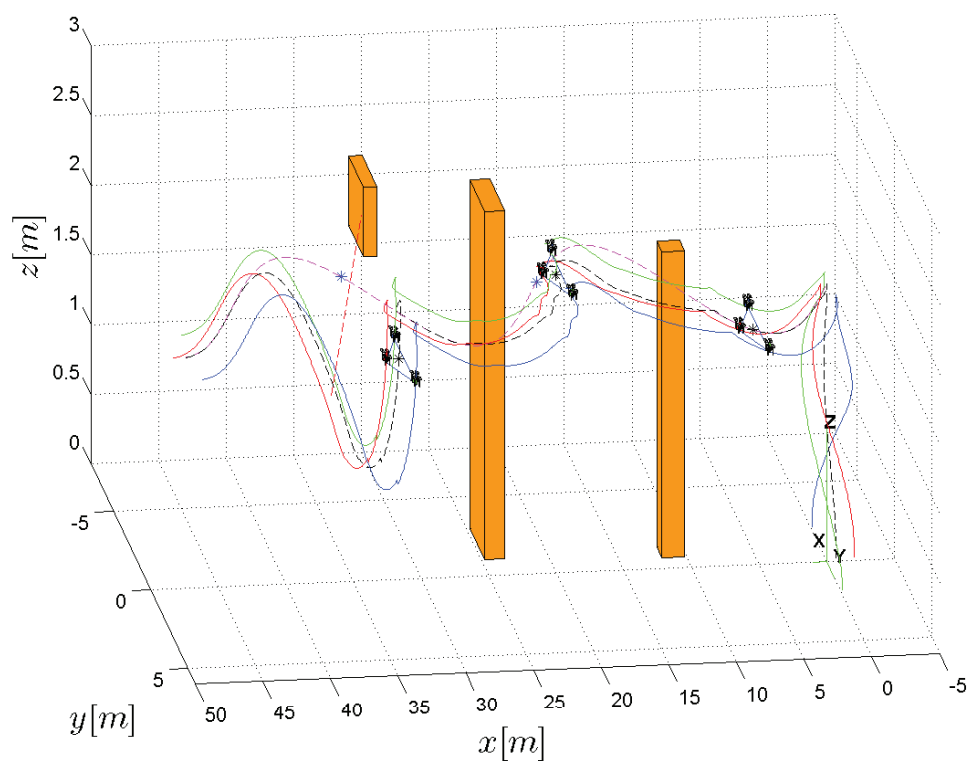
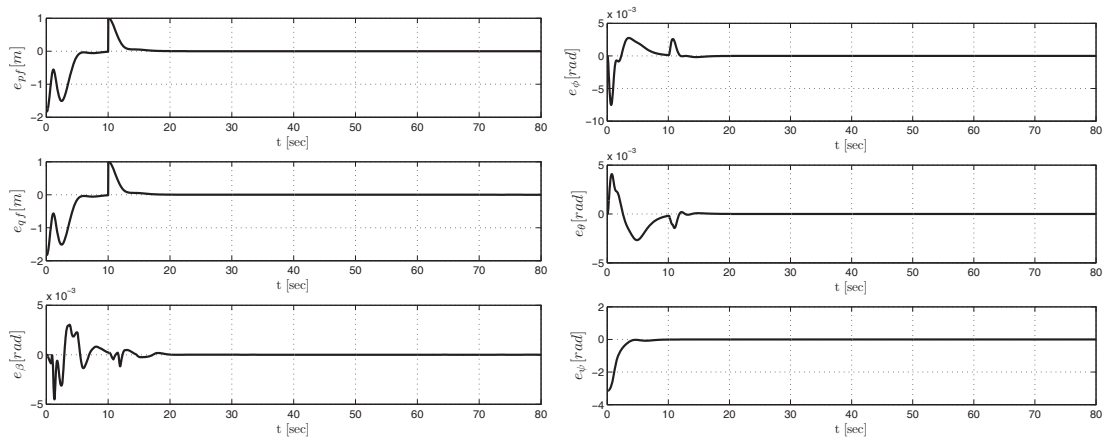
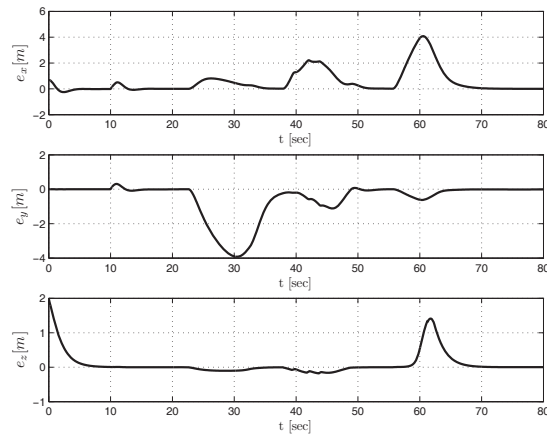


Figura 87: Evolución en el espacio 3D de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto en el segundo esquema para evasión de obstáculo manteniendo la formación rígida.



(a) Errores de Forma de la Formación.

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 88: Evolución temporal de los robots para una formación rígida con evasión de colisión, utilizando el segundo esquema.

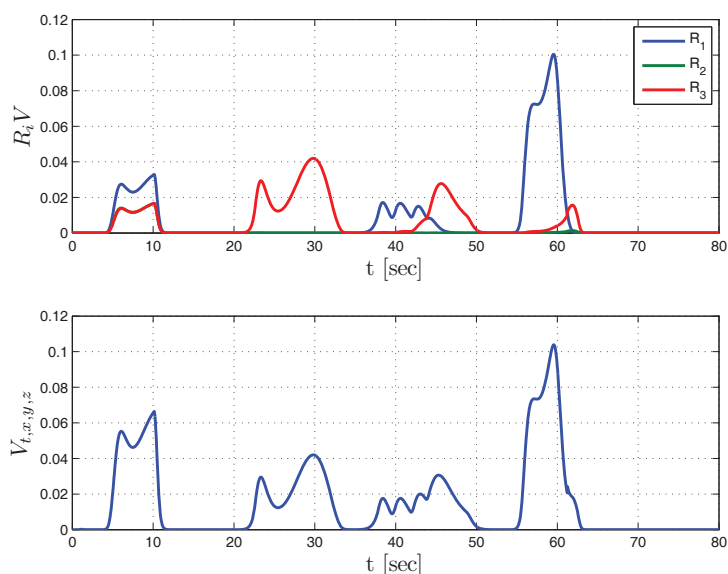


Figura 89: Evolución de la energía potencial ficticia de la formación rígida, utilizando el primer esquema.

8.4.4 Formación Flexible

En el capítulo anterior se presentó un controlador de formación rígida, para vehículos aéreos y evasión de colisión. La principal característica de este esquema es la capacidad de garantizar la navegación segura del sistema multi-robot sin modificar la estructura física de la formación.

En ciertas aplicaciones no es crítico mantener la forma de la formación, pudiéndose modificar en ciertos intervalos de tiempo (tarea de inspección de grandes áreas, reconocimiento, etc.). Este aspecto nos da la herramienta para evitar colisión con objetos extraños, mediante la alteración de la formación para evitar situaciones de posibles colisiones. Los controladores propuestos en 8.16 y 8.15, son del tipo control de formación flexible, como se mencionó anteriormente, por lo tanto también debe ser tenido en cuenta como otra alternativa.

Para cumplir el objetivo de control planteado, se propone tres alternativas. El primero de ellos se presentó en la ecuación 8.14, y a continuación se presentan los dos restantes

$$\begin{aligned} \dot{x}_d = & J_s^\dagger \left[(\dot{q}_{sd} + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) + J_s J_o^\dagger (\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial t}) \right] + \\ & + (I - J_p^\dagger J_p) J_p^\dagger (\dot{q}_{sd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)), \end{aligned} \quad (8.19)$$

Y la segunda

$$\dot{x}_d = J_p^\dagger(\dot{q}_{pd} + L_p \tanh(K_p L_p^{-1} \tilde{q}_p)) + (I - J_p^\dagger J_p) \left[J_o^\dagger(\dot{V}_d + k_{obs} \tilde{V} - k_{pre} \frac{\partial V}{\partial t}) + (I - J_o^\dagger J_o) J_s^\dagger(\dot{q}_{sd} + L_s \tanh(K_s L_s^{-1} \tilde{q}_s)) \right]. \quad (8.20)$$

8.4.4.1 Primer esquema de Formación Flexible

En el primero de ellos la diferencia 8.19 con respecto al controlador 8.17, radica en el orden de las tareas dentro de la estructura del controlador, pero la forma de la ley de control es similares en ambos casos. Para variar el comportamiento de la formación solo es necesario intercambiar el orden de las tareas dentro de la ecuación que representa el controlador propuesto.

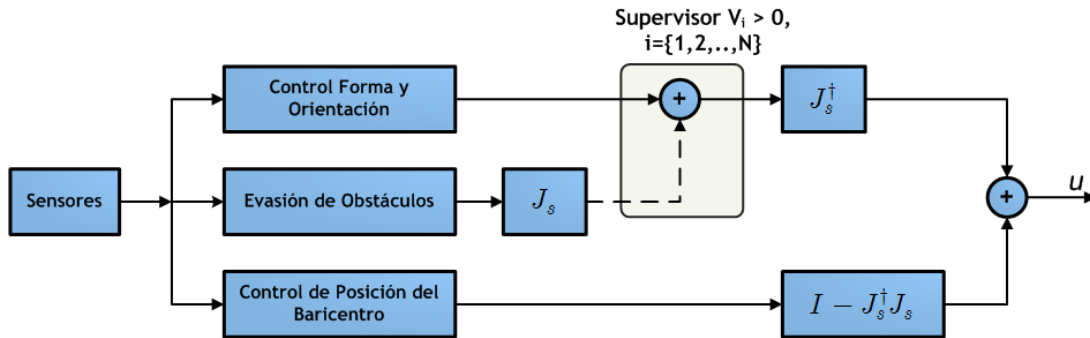


Figura 90: Estructura del controlador de formación flexible y evasión de obstáculos, utilizando el primer esquema.

En la figura 91 se aprecia la evolución del sistema multi-robot, y claramente se observa cómo la trayectoria de cada robot se modifica ante la presencia de los obstáculos. La figura 92 presenta los errores de control, y claramente se observa que los errores de posición del centroide (92(c)) se mantienen en cero durante la simulación, y los errores de forma y orientación (92(a) y 92(b)) aumentan su valor frente a la presencia de algún obstáculo. Finalmente en 93 se aprecian los valores de potencial ficticio para cada robot, y se ve claramente que en todo momento se mantienen en valores que aseguran la integridad del conjunto.

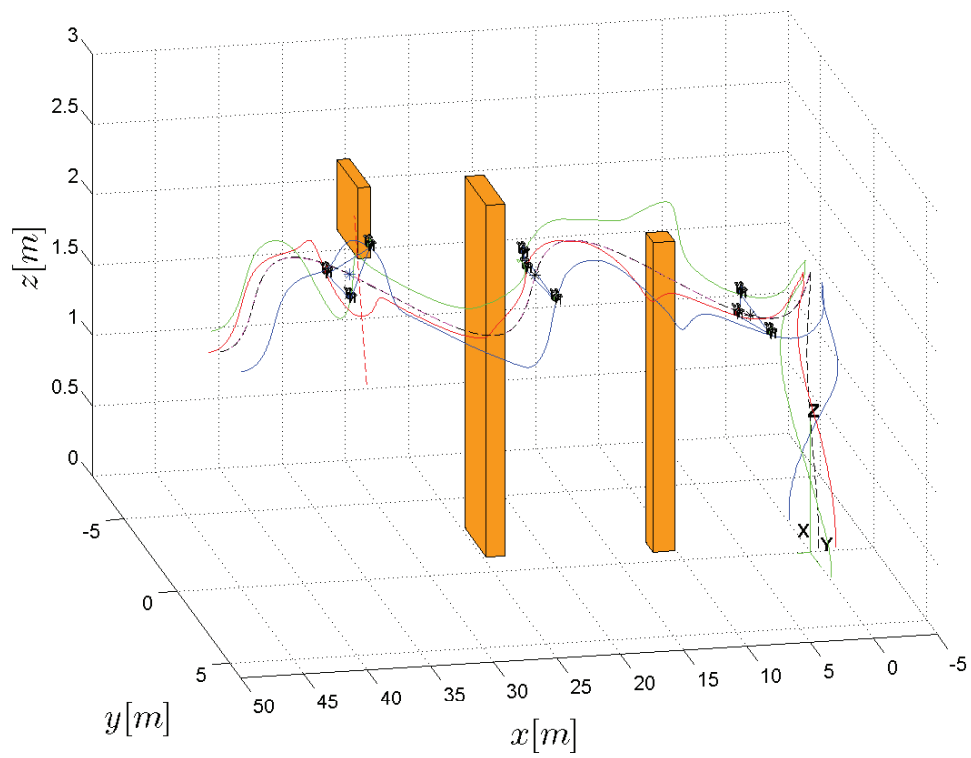
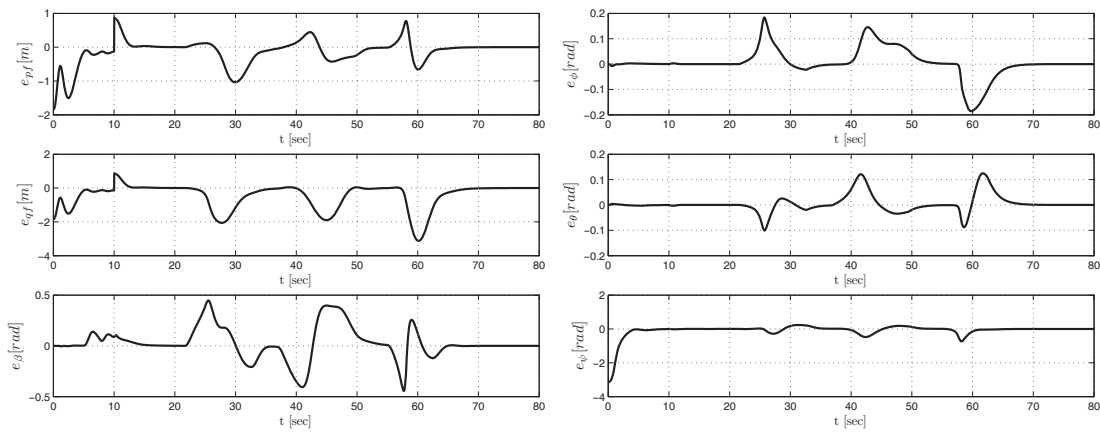
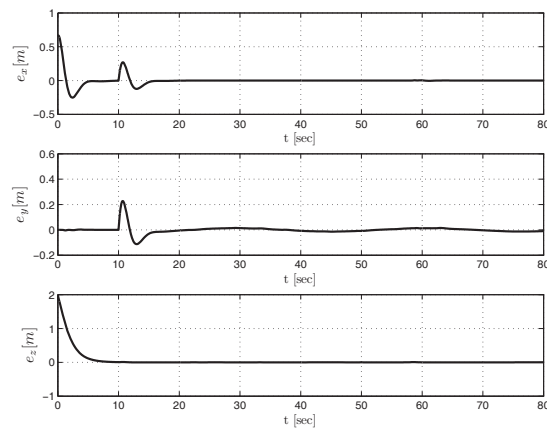


Figura 91: Evolución en el espacio $3D$ de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo para el primer caso de Formación Flexible.



(a) Errores de Forma de la Formación.

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 92: Evolución temporal de los errores de control para una formación flexible con evasión de colisión, utilizando el primer esquema.

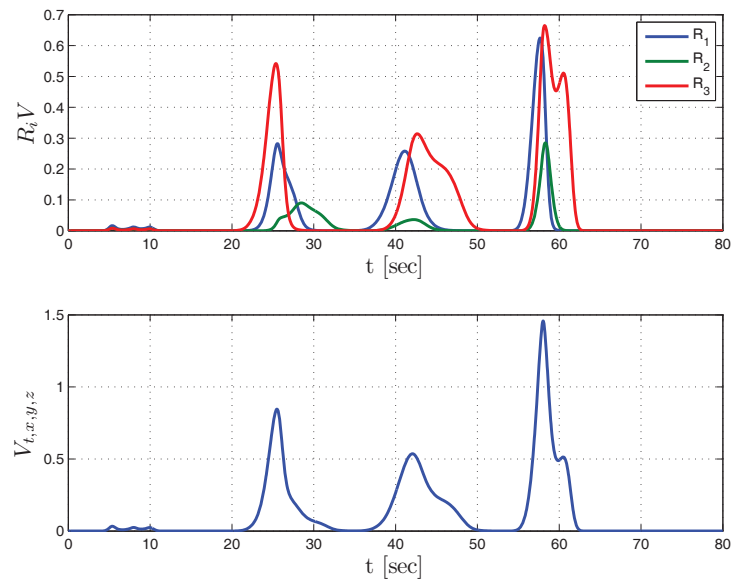


Figura 93: Evolución de la energía potencial ficticia de la formación para el primer esquema de formación flexible.

8.4.4.2 Segundo esquema de Formación Flexible

En el segundo se utiliza como objetivo primario el control de posición del baricentro de la formación. De este modo, en todo momento el controlador garantiza el cumplimiento de dicha tarea, no sucediendo lo mismo con el control de la forma del conjunto. En el espacio nulo de la tarea primaria, se proyectan las velocidades obtenidas por el algoritmo de evasión de obstáculos y el control de la forma. Cuando aparezca algún objeto que puede colisionar con algún/algunos robot/s del sistema, el control de evasión de colisión genera velocidades que modifican las que se obtienen del controlador de forma, pero en ningún momento afecta el control de posición (debido a que se proyectan en el espacio nulo). El diagrama del controlador propuesto se puede observar en la figura 94.

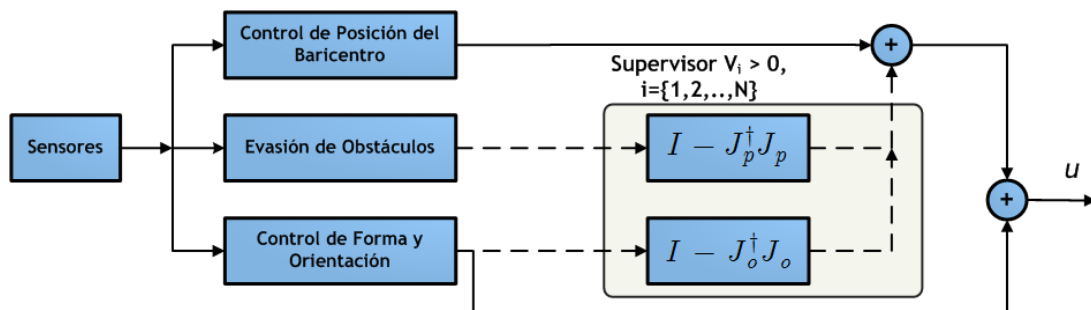


Figura 94: Estructura del controlador de formación flexible y evasión de obstáculos, utilizando el segundo esquema.

En la figura 95 se muestra la evolución de la formación, donde se aprecia que dicho conjunto se modifica en función de la presencia de los obstáculos. En 96 se aprecian los errores de control,

donde claramente en 96(c) se mantienen nulos durante la simulación, a diferencia de 96(a) y 96(b) que aumentan cuando algún objeto activa el control de colisión. Finalmente, en 97 es posible ver cómo el potencial asociado a cada robot se mantiene en valores que aseguran la no colisión de cada robot.

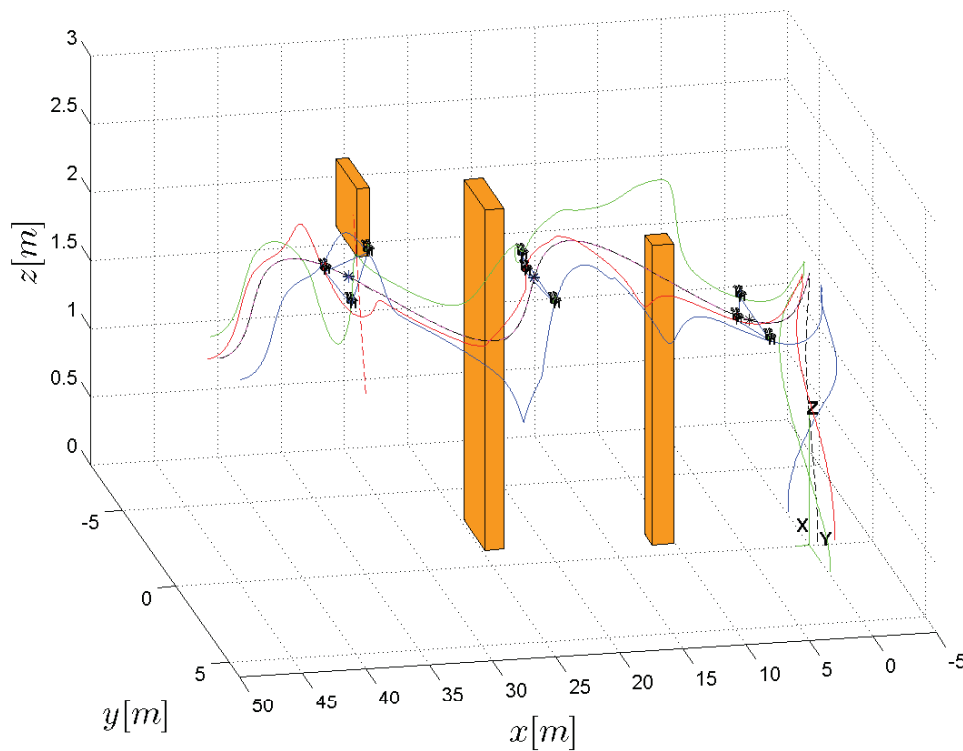
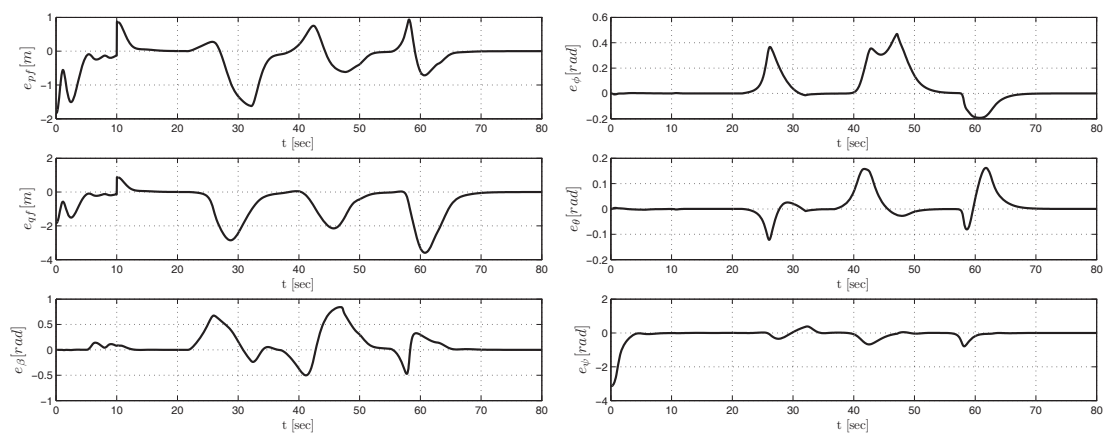
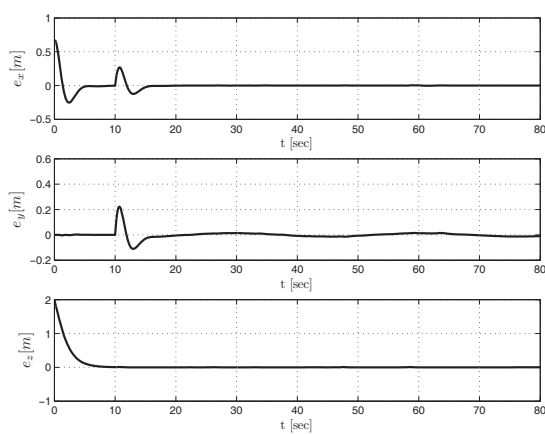


Figura 95: Evolución en el espacio 3D de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo para el segundo caso de Formación Flexible.



(a) Errores de Forma de la Formación.

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 96: Evolución temporal de los errores de control para una formación flexible con evasión de colisión, utilizando el segundo esquema.

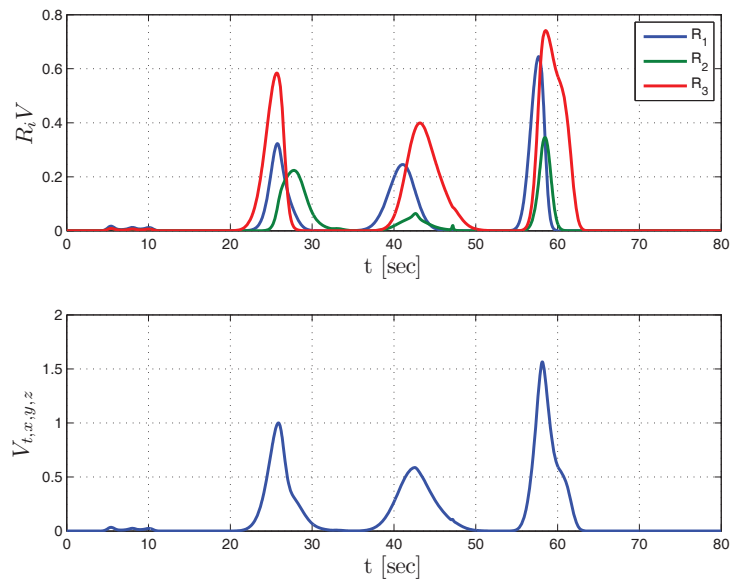


Figura 97: Evolución de la energía potencial ficticia de la formación para el primer esquema de formación flexible.

8.4.4.3 Tercer esquema de Formación Flexible

Finalmente, anteriormente en la sección 8.4 se propuso un controlador para la evasión de colisión del sistema multi-robot, y además se especificó que el mismo se clasifica como un esquema de formación flexible, debido a que el objetivo principal es que el potencial de todo el conjunto sea $V = 0$, quedando libertad en modificar, tanto las variables de forma como de posición del baricentro de la formación, para evitar cualquier posibilidad de colisión.

Utilizando el controlador propuesto en la ecuación 8.14, se realiza la misma simulación que los esquemas anteriores. Como el objetivo primario de este esquema es evitar cualquier zona donde $V_i > 0$, $i = \{1, 2, 3\}$, el cumplimiento de las restantes tareas de control estará sujeto a no causar conflictos de intereses con este objetivo de control, por lo tanto no se puede garantizar que se cumpla con alguna de las tareas que se proyectan en el espacio nulo. El diagrama en bloques del controlador propuesto se presenta en 98.

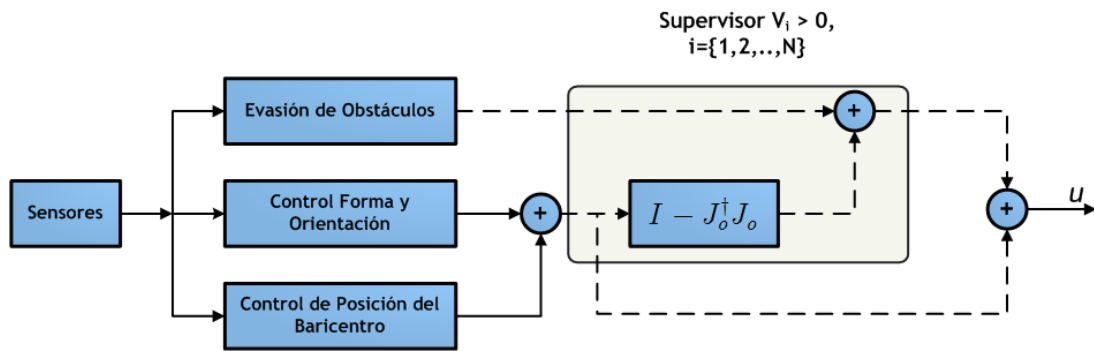


Figura 98: Estructura del controlador de evasión de obstáculos como objetivo principal, y de formación flexible.

En la figura 99 se presenta la trayectoria de la formación en \mathcal{R}^3 utilizando el tercer esquema de control de formación flexible con evasión de obstáculos. Es posible observar cómo el conjunto se deforma frente a la presencia de los obstáculos a fin de evitar cualquier situación de peligrosidad al sistema. Es interesante analizar las gráficas que representan los gráficos que representa los errores de control 100 (forma, orientación y posición), con las 3 sub-gráficas donde se aprecian los errores de forma 100(a), de orientación 100(b) y de posición del baricentro 100(c). Se observa en los instantes de tiempo donde algún/os obstáculo/s se encuentra/n en cercanía de algún robot del sistema, los tres errores se modifican (aumentan su valor), debido a que este esquema garantiza únicamente la tarea primaria que es evitar la colisión. Debido a esto los valores de energía potencial son de valores bajos, lo que corrobora que no existe situación de peligro hacia ningún agente de la formación.

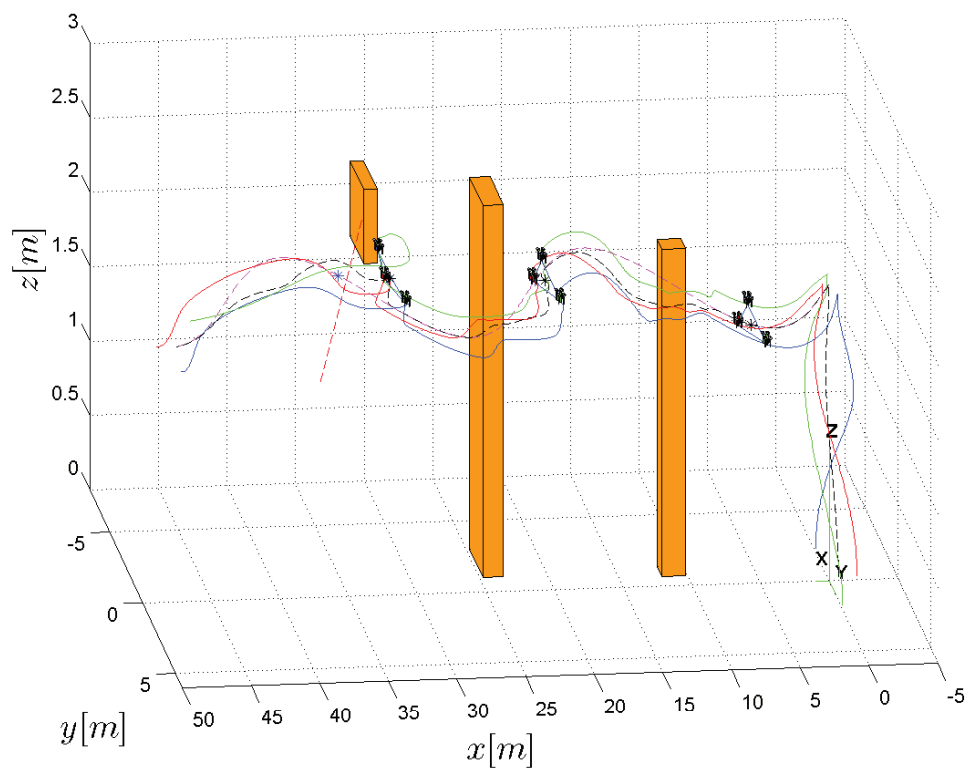
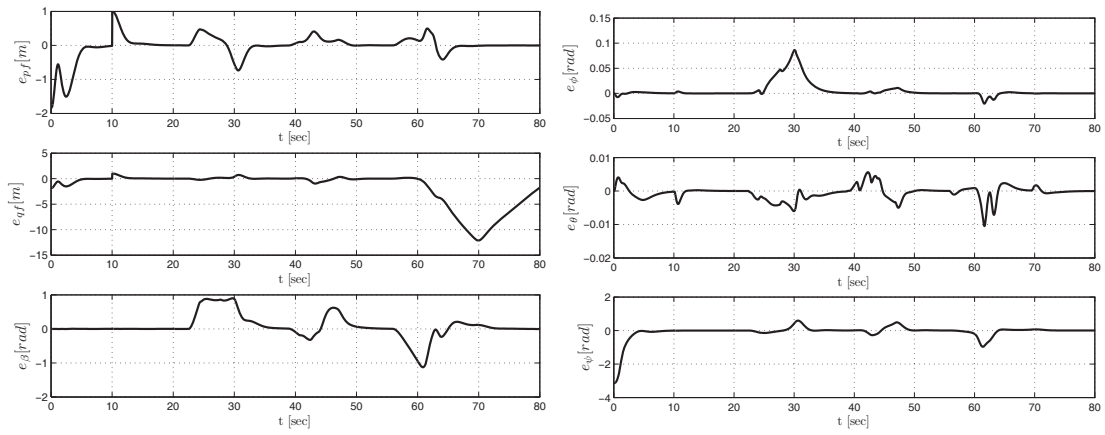
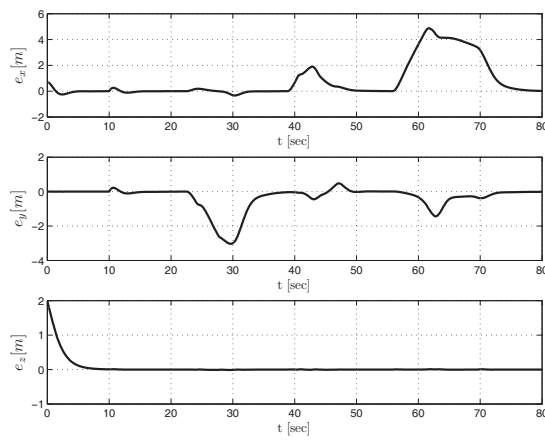


Figura 99: Evolución en el espacio $3D$ de las posición de cada uno de los robots, utilizando el algoritmo propuesto para evasión de obstáculo como objetivo primario.



(a) Errores de Forma de la Formación.

(b) Errores de Orientación de la Formación.



(c) Errores de Posicionamiento del Baricentro de la Formación.

Figura 100: Evolución temporal de los errores de control para una formación flexible con evasión de colisión, utilizando el tercer esquema.

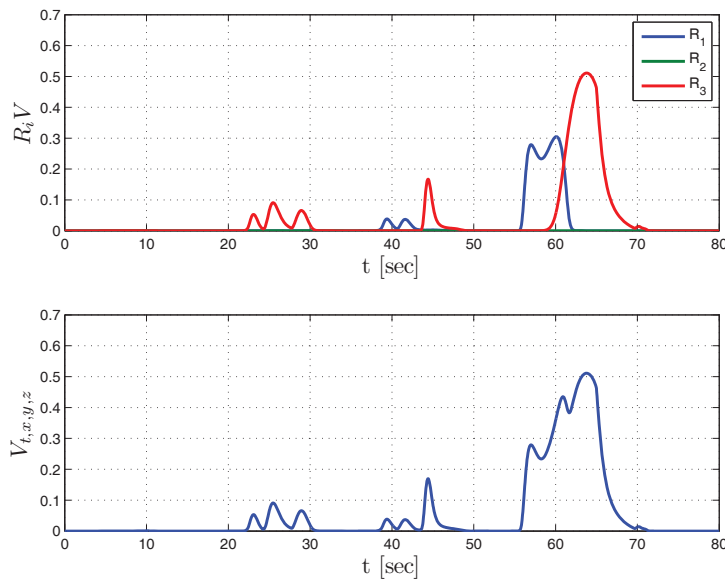


Figura 101: Evoluci3n de la energ3a potencial ficticia de la formaci3n para el tercer esquema de formaci3n flexible propuesto.

8.4.5 Conclusiones del Capitulo

Se present3 en el presente capitulo una t3cnica para evasi3n de colisi3n de un conjunto de robots que navegan de forma coordinada.

Se presentaron dos esquemas de formaci3n r3gida, los cuales garantizan que se mantenga la forma y disposici3n de los robots de la formaci3n durante la evasi3n de colisi3n. Ambos esquemas cumplen la tarea de mantener la forma del sistema multi-robot y evitar que dichos robots colisionen. Los esquemas son equivalentes, aunque el segundo esquema es m3s seguro debido a que los potenciales que se observan en 89, son menores a los del primer esquema 85.

Por otro lado, para tareas donde mantener la forma no es cr3tico, se presentaron tres esquemas de evasi3n de colisi3n para formaciones flexibles. En el primero de ellos se tiene como objetivo primario, el control de forma y de evasi3n de colisi3n, y como objetivo secundario el control de posici3n del baricentro. El segundo esquema presentado, tiene como objetivo primario el control de la posici3n del baricentro y como objetivos secundarios, el control de forma y evasi3n de colisi3n. Estos dos primeros esquemas, son de formaci3n flexible pero tienen la caracter3stica de mantener la posici3n del baricentro sobre la trayectoria de referencia, lo cual muchas veces limita las maniobras de las aeronaves cuando tienen que evadir alg3n obst3culo y muchas veces no es necesario esto para una formaci3n flexible. Por 3ltimo, se plantea un tercer esquema donde el objetivo primario es que el sistema se mueva sobre regiones del espacio libre de obst3culos, y en el espacio nulo se proyectan el control de forma y posici3n. En este 3ltimo enfoque, ante la presencia de un obst3culo la forma del sistema y la posici3n del baricentro, se modifican para cumplir la tarea de evasi3n de colisi3n. Este 3ltimo es m3s flexible que los dos anteriores.

Referencias

- [1] TANNER, H.; PAPPAS, G.; KUMAR, V. Leader-to-formation stability. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 20, n. 3, p. 443 – 455, June 2004.
- [2] LIU, J.; WU, J. *Multiagent Robotic Systems*. [S.l.]: CRC Press, 2001.
- [3] MICHAEL, N.; KINK, J.; KUMAR, V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots. *Autonomous Robots*, v. 30, n. 1, p. 73–86, September 2010.
- [4] BURGARD, W. et al. Coordinated multi-robot exploration. *Robotics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 21, n. 3, p. 376–386, 2005.
- [5] MARTIN, M. et al. Techsat 21 and revolutionizing space missions using microsatellites. 2001.
- [6] BENDER, J. G. An overview of systems studies of automated highway systems. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v. 40, n. 1, 1991.
- [7] MAZA, I. et al. Experimental results in multi-uav coordination for disaster management and civil security applications. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, v. 64, n. 1-4, p. 563–585, December 2010.
- [8] FANTONI, I.; LOZANO, R. *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. GB: Springer, 2002.
- [9] CASTILLO, P.; LOZANO, R.; DZUL, A. *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*. USA: Springer, 2005.
- [10] HERNÁNDEZ-MARTÍNEZ, E. G.; ARANDA-BRICAIRE, E. Convergence and collision avoidance in formation control: a survey of the artificial potential functions approach. *Multi-Agent Systems-Modeling, Control, Programming, Simulations and Application*, p. 103–126, 2011.
- [11] LONG, X.-L.; JIANG, J.-P.; XIANG, K. Towards multirobot communication. In: IEEE. *Robotics and Biomimetics, 2004. ROBIO 2004. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2004. p. 307–312.
- [12] SONG, K.-T.; TSAI, C.-Y.; HUANG, C.-H. C. Multi-robot cooperative sensing and localization. In: IEEE. *Automation and Logistics, 2008. ICAL 2008. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2008. p. 431–436.
- [13] DUDEK, G. et al. A taxonomy for multi-agent robotics. *Autonomous Robots*, Springer, v. 3, n. 4, p. 375–397, 1996.
- [14] KELLY, R. et al. Control de un pandilla de robots móviles para el seguimiento de una constelación de puntos objetivo. In: *VI Congreso Mexicano de Robótica*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [15] ROBERTI, F. et al. Control estable de formación basado en visión omnidireccional para robots móviles no holonómicos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, Elsevier, v. 8, n. 1, p. 29–37, 2011.

- [16] KOO, T. J.; SHAHRUZ, S. M. Formation of a group of unmanned aerial vehicles (uavs). In: IEEE. *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*. [S.l.], 2001. v. 1, p. 69–74.
- [17] BELTA, C.; KUMAR, V. Trajectory design for formations of robots by kinetic energy shaping. In: IEEE. *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2002. v. 3, p. 2593–2598.
- [18] ROSALES, C. D. et al. Formation control of unmanned aerial vehicles based on the null-space. In: IEEE. *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference on*. [S.l.], 2014. p. 229–236.
- [19] OKUBO, A. Dynamical aspects of animal grouping: swarms, schools, flocks, and herds. *Advances in biophysics*, Elsevier, v. 22, p. 1–94, 1986.
- [20] COUZIN, I. D. et al. Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of theoretical biology*, Elsevier, v. 218, n. 1, p. 1–11, 2002.
- [21] YAMAGUCHI, H.; ARAI, T.; BENI, G. A distributed control scheme for multiple robotic vehicles to make group formations. *Robotics and Autonomous systems*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 125–147, 2001.
- [22] LAWTON, J. R. T.; BEARD, R. W.; YOUNG, B. J. A decentralized approach to formation maneuvers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 19, n. 6, p. 933–941, December 2003.
- [23] TURPIN, M.; MICHAEL, N.; KUMAR, V. Decentralized formation control with variable shapes for aerial robots. In: IEEE. *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2012. p. 23–30.
- [24] HADAEGH, F. et al. A centralized optimal controller for formation flying spacecraft. In: *International Conference on Intelligent Technologies*. Bangkok, Thailand: [s.n.], 2000.
- [25] DESAI, J.; OSTROWSKI, J.; KUMAR, V. Controlling formations of multiple mobile robots. In: *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1998*. [S.l.: s.n.], 1998. v. 4, p. 2864–2869.
- [26] TAKAHASHI, H.; NISHI, H.; OHNISHI, K. Autonomous decentralized control for formation of multiple mobile robots considering ability of robot. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 51, n. 6, p. 1272–1279, 2004.
- [27] CHEN, J. et al. Leader-follower formation control of multiple non-holonomic mobile robots incorporating a receding-horizon scheme. *The International Journal of Robotics Research*, v. 29, n. 6, p. 727–747, 2010.
- [28] BRANDÃO, A. S. et al. Decentralized control of leader-follower formations of mobile robots with obstacle avoidance. In: *Proceedings of the International Conference on Mechatronics (ICM'09)*. Málaga, Spain: [s.n.], 2009.
- [29] BRANDAO, A.; SARCINELLI-FILHO, M.; CARELLI, R. Leader-following control of a uav-ugv formation. In: IEEE. *Advanced Robotics (ICAR), 2013 16th International Conference on*. [S.l.], 2013. p. 1–6.
- [30] DESAI, J. P. Modeling multiple teams of mobile robots: a graph theoretic approach. In: IEEE. *Intelligent Robots and Systems, 2001. Proceedings. 2001 IEEE/RSJ International Conference on*. [S.l.], 2001. v. 1, p. 381–386.

- [31] HENDRICKX, J. M. et al. Directed graphs for the analysis of rigidity and persistence in autonomous agent systems. *International journal of robust and nonlinear control*, Wiley Online Library, v. 17, n. 10-11, p. 960–981, 2007.
- [32] YU, C. et al. Three and higher dimensional autonomous formations: Rigidity, persistence and structural persistence. *Automatica*, Elsevier, v. 43, n. 3, p. 387–402, 2007.
- [33] BAYEZIT, I.; FIDAN, B. Distributed cohesive motion control of flight vehicle formations. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 60, n. 12, p. 5763–5772, 2013.
- [34] TAN, K.-H.; LEWIS, M. Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control. In: *Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'96)*. Osaka, Japan: IEEE, 1996. v. 1, p. 132–139.
- [35] BEARD, R. W. et al. A coordination architecture for spacecraft formation control. *IEEE Transactions on control systems technology*, v. 9, n. 6, p. 777–790, 2001.
- [36] CHEN, Y. Q.; WANG, Z. Formation control: a review and a new consideration. In: *Proceedings of the 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'05)*. Edmonton, Canada: IEEE, 2005. p. 3181–3186.
- [37] EGERSTEDT, M.; HU, X. Formation constrained multi-agent control. *IEEE TRANSACTIONS ON ROBOTICS AND AUTOMATION*, v. 17, n. 6, p. 947, 2001.
- [38] MAS, I.; PETROVIC, O.; KITTS, C. Cluster space specification and control of a 3-robot mobile system. In: *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA'08)*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 3763–3768.
- [39] AGNEW, M. S. et al. Cluster space control of aerial robots. In: *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (IEEE/ASME)*. Montréal, Canada: [s.n.], 2010. p. 1305–1310.
- [40] BRANDÃO, A. S. et al. A multi-layer control scheme for multi-robot formations with adaptative dynamic compensation. In: *Proceedings of the International Conference on Mechatronics (ICM'09)*. Málaga, Spain: [s.n.], 2009.
- [41] RAMPINELLI, V. et al. A multi-layer control scheme for multi-robot formations with obstacle avoidance. In: *International Conference on Advanced Robotics (ICAR)*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1–6.
- [42] BALCH, T.; ARKIN, R. Behavior-based formation control for multirobot teams. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 14, n. 6, p. 926–939, 1998.
- [43] MONTEIRO, S.; BICHO, E. A dynamical systems approach to behavior-based formation control. In: *IEEE. Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA'02. IEEE International Conference on*. [S.l.], 2002. v. 3, p. 2606–2611.
- [44] ANTONELLI, G.; ARRICHELLO, F.; CHIAVERINI, S. The null-space-based behavioral control for mobile robots. In: *IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation (CIRA)*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 15–20.
- [45] BROOKS, R. A. A robust layered control system for a mobile robot. *Robotics and Automation, IEEE Journal of*, IEEE, v. 2, n. 1, p. 14–23, 1986.
- [46] ARKIN, R. C. Motor schema-based mobile robot navigation. *The International journal of robotics research*, Sage Publications, v. 8, n. 4, p. 92–112, 1989.

- [47] NAKAMURA, Y.; HANAFUSA, H.; YOSHIKAWA, T. Task-priority based redundancy control of robot manipulators. *The International Journal of Robotics Research*, Sage Publications, v. 6, n. 2, p. 3–15, 1987.
- [48] CHIAVERINI, S. Singularity-robust task-priority redundancy resolution for real-time kinematic control of robot manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 13, n. 3, p. 398 – 410, 1997.
- [49] ANTONELLI, G.; CHIAVERINI, S. Kinematic control of platoons of autonomous vehicles. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 22, n. 6, p. 1285–1292, 2006.
- [50] ANTONELLI, G.; ARRICHIELLO, F.; CHIAVERINI, S. Experiments of formation control with multirobot systems using the null-space-based behavioral control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 17, n. 5, p. 1173–1182, 2009.
- [51] KHATIB, O. Real time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, v. 5, n. 1, p. 90–98, 1986.
- [52] SCHNEIDER, F. E.; WILDERMUTH, D. A potential field based approach to multi robot formation navigation. In: IEEE. *Robotics, Intelligent Systems and Signal Processing, 2003. Proceedings. 2003 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2003. v. 1, p. 680–685.
- [53] KWON, J.-W.; CHWA, D. Hierarchical formation control based on a vector field method for wheeled mobile robots. *Robotics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 28, n. 6, p. 1335–1345, 2012.
- [54] GE, S. S.; FUA, C.-H.; LIM, K. W. Multi-robot formations: queues and artificial potential trenches. In: IEEE. *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2004. v. 4, p. 3345–3350.
- [55] LEONARD, N. E.; FIORELLI, E. Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups. In: IEEE. *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*. [S.l.], 2001. v. 3, p. 2968–2973.
- [56] KOREN, Y.; BORENSTEIN, J. Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Robotics and Automation*. Sacramento, California: [s.n.], 1991. p. 1398–1404.
- [57] CONNELL, J.; VIOLA, P. Cooperative control of a semi-autonomous mobile robot. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 1990. v. 2, p. 1118–1121.
- [58] NILSSON, N. Teleo-reactive programs for agent control. *arXiv preprint cs/9401101*, 1994.
- [59] BORENSTEIN, J.; KOREN, Y. The vector field histogram - fast obstacle avoidance for mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 7, n. 3, p. 278–288, 1991.
- [60] KIM, J.-O.; KHOSLA, P. K. Real-time obstacle avoidance using harmonic potential functions. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 338–349, 1992.
- [61] DIMAROGONAS, D. V. et al. A feedback stabilization and collision avoidance scheme for multiple independent non-point agents. *Automatica*, Elsevier, v. 42, n. 2, p. 229–243, 2006.
- [62] TANNER, H. G.; KUMAR, A. Towards decentralization of multi-robot navigation functions. In: IEEE. *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2005. p. 4132–4137.

- [63] DE-LA-CRUZ, C.; CARELLI, R. Dynamic modeling and centralized formation control of mobile robots. In: *Proceedings of the 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2006)*. Paris, France: IEEE, 2006. p. 3880–3885.
- [64] LINDAHL, P.; MOOG, E.; SHAW, S. R. Simulation, design, and validation of an uav soft propulsion system. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 48, n. 3, p. 2582–2593, 2012.
- [65] BECKMANN, E. D.; BORGES, G. A. Nonlinear modeling, identification and control for a simulated miniature helicopter. In: *Proceedings of the Latin American Robotic Symposium*. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2008. p. 53–58. ISBN 978-0-7695-3536-4.
- [66] PETTERSEN, R.; MUSTAFIC, E.; FOGH, M. *Nonlinear control approach to helicopter autonomy*. [S.l.]: Aalborg University, 2005.
- [67] ZEIN-SABATTO, S.; ZHENG, Y. Intelligent flight controllers for helicopter control. In: *Proceedings of the International Conference on Neural Networks*. [S.l.: s.n.], 1997. v. 2, p. 617–621.
- [68] HASHIMOTO, S. et al. Robust control design based on identified model for autonomous flight system of an unmanned helicopter. In: IEEE. *Industrial Electronics Society, 2001. IECON'01. The 27th Annual Conference of the IEEE*. [S.l.], 2001. v. 1, p. 323–328.
- [69] KONDAK, K. et al. Mechanical model and control of an autonomous small size helicopter with a stiff main rotor. In: IEEE. *Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*. [S.l.], 2004. v. 3, p. 2469–2474.
- [70] RAFFO, G. V.; ORTEGA, M. G.; RUBIO, F. R. An integral predictive/nonlinear \mathcal{H}_∞ control structure for a quadrotor helicopter. *Automatica*, v. 46, p. 29–39, 2010.
- [71] KIM, S. K.; TILBURY, D. M. Mathematical modeling and experimental identification of a model helicopter. In: *Proceedings of the AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit*. Boston, MA, USA: [s.n.], 1998. p. 203–213.
- [72] DAS, A.; LEWIS, F.; SUBBARAO, K. Backstepping approach for controlling a quadrotor using lagrange form dynamics. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, v. 56, n. 1, p. 127–151, 2009.
- [73] WASLANDER, S. et al. Multi-agent x4-flyer testbed design: Integral sliding mode vs. reinforcement learning. In: *IEEE/RSJ International Intelligent Robots and Systems (IROS 2005)*. Edmonton, AB, Canada: [s.n.], 2005. p. 6085–6090.
- [74] ALTUG, E.; OSTROWSKI, J.; TAYLOR, C. Quadrotor control using dual camera visual feedback. In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2003. v. 3, p. 4294 – 4299.
- [75] MACIEJEWSKI, A. A.; KLEIN, C. A. Obstacle avoidance for kinematically redundant manipulators in dynamically varying environments. *The international journal of robotics research*, Sage Publications, v. 4, n. 3, p. 109–117, 1985.
- [76] KITTS, C. A.; MAS, I. Cluster space specification and control of mobile multirobot systems. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, IEEE, v. 14, n. 2, p. 207–218, 2009.
- [77] RAMPINELLI, V. T. L. et al. Embedding obstacle avoidance in the control of a flexible multi-robot formation. In: *Proceedings of the International Symposium on Industrial Electronics (ISIE2010)*. Bari, Italy: [s.n.], 2010.

- [78] KLODER, S.; HUTCHINSON, S. Path planning for permutation-invariant multirobot formations. *Robotics, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 22, n. 4, p. 650–665, 2006.
- [79] WANG, X.; YADAV, V.; BALAKRISHNAN, S. Cooperative uav formation flying with obstacle/collision avoidance. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 15, n. 4, p. 672–679, 2007.
- [80] FRAICHARD, T.; ASAMA, H. Inevitable collision states: a step towards safer robots. *Advanced Robotics*, Taylor & Francis, v. 18, n. 10, p. 1001–1024, 2004.
- [81] PARK, M. G.; JEON, J. H.; LEE, M. C. Obstacle avoidance for mobile robots using artificial potential field approach with simulated annealing. In: IEEE. *Industrial Electronics, 2001. Proceedings. ISIE 2001. IEEE International Symposium on*. [S.l.], 2001. v. 3, p. 1530–1535.
- [82] BERNARD, M. et al. Elaborated modeling and control for an autonomous quad-rotor. In: *Proceedings of the 21st Bristol UAV Systems Conference*. [S.l.: s.n.], 2007.
- [83] JONHSON, W. *Helicopter Theory*. [S.l.]: Dover Publications Inc., 2000. ISBN 978-0486682303.
- [84] STRANG, G. *Linear Algebra and its Application*. [S.l.]: Academic Press., 1980.
- [85] CZYBA, R.; SZAFRANSKI, G. Control structure impact on the flying performance of the multi-rotor vtol platform-design, analysis and experimental validation. *Int J Adv Robotic Sy*, v. 10, n. 62, 2013.
- [86] KONDAK, K. et al. Autonomously flying vtol-robots: Modeling and control. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Rome, Italy: [s.n.], 2007. p. 736–741.
- [87] VIGURIA, A.; MAZA, I.; OLLERO, A. Distributed service-based cooperation in aerial/ground robot teams applied to fire detection and extinguishing missions. *Advanced Robotics*, Taylor & Francis, v. 24, n. 1-2, p. 1–23, 2010.
- [88] MA, L.; CHEN, Y. *Aerial Surveillance System for Overhead Power Line Inspection*. [S.l.], 2004.
- [89] EISENBEISS, H. A mini unmanned aerial vehicle (uav): System overview and image acquisition. In: *Proceedings of the International Workshop on Processing and Visualization Using High-Resolution Imagery*. Pitsanulok, Thailand: [s.n.], 2004.
- [90] HSIEH, M. A. et al. Adaptive teams of autonomous aerial and ground robots for situational awareness. *Journal of Field Robotics*, v. 24, n. 11-12, p. 991–1014, 2007.
- [91] KENDOUL, F.; YU, Z.; NONAMI, K. Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of miniorotorcraft unmanned aerial vehicles. *Journal of Field Robotics*, v. 27, n. 3, p. 311–334, 2010.
- [92] SCHAFROTH, D. et al. Modeling, system identification and robust control of a coaxial micro helicopter. *Control Engineering Practice*, v. 18, n. 7, p. 700–711, July 2010.
- [93] DERAFA, L.; MADANI, T.; BENALLEGUE, A. Dynamic modelling and experimental identification of four rotors helicopter parameters. In: *IEEE International Conference on Industrial Technology*. Mumbai, India: [s.n.], 2006. p. 1834 – 1839.
- [94] BENALLEGUE, A.; MOKHTARI, A.; FRIDMAN, L. Feedback linearization and high order sliding mode observer for a quadrotor uav. In: *International Workshop on Variable Structure Systems*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 365 – 372.

- [95] VOOS, H. Nonlinear control of a quadrotor micro-uav using feedback-linearization. In: *IEEE International Conference on Mechatronics*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 1 – 6.
- [96] BOUABDALLAH, S.; MURRIERI, P.; SIEGWART, R. Design and control of an indoor micro quadrotor. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotic and Automation (ICRA 2004)*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 5, p. 4393–4398.
- [97] POUNDS, P. et al. Towards dynamically-favourable quad-rotor aerial robots. In: *Proceedings of the Australian Conference on Robotics and Automation*. [S.l.: s.n.], 2004.
- [98] BERNARD, M. et al. Elaborated modeling and control for an autonomous quad-rotor. In: *21st Bristol UAV Systems Conference*. [S.l.: s.n.], 2007.
- [99] CASTILLO, P.; DZUL, A.; LOZANO, R. Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. In: *Proceeding of the IEEE Transactions on Control Systems Technology*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 12, n. 4, p. 510–516.
- [100] CASTILLO, P.; LOZANO, R.; DZUL, A. Experimental implementation of linear and no linear control laws. *IEEE Control System Magazine*, 2005.
- [101] MADANI, T.; BENALLEGUE, A. Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. In: *Proc. 45th IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 2006.
- [102] SCAGLIA, G. et al. Numerical methods based controller design for mobile robots. *Robotica*, v. 27, p. 269–279, 2009.
- [103] ROSALES, A. et al. Trajectory tracking of mobile robots in dynamic environments - a linear algebra approach. *Robotica*, v. 27, p. 981–997, 2009.
- [104] ROSALES, A.; SCAGLIA, G.; SCIASCIO, F. di. Formation control and trajectory tracking of mobile robotic systems - a linear algebra approach. *Robotica*, v. 29, p. 335–349, 2011.
- [105] SCAGLIA, G. et al. A linear-interpolation-based controller design for trajectory tracking of mobile robots. *Control Engineering Practice*, v. 18, p. 318–329, 2010.
- [106] SANTANA, L. V. et al. A trajectory tracking and 3d positioning controller for the ar. drone quadrotor. In: IEEE. *Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 2014 International Conference on*. [S.l.], 2014. p. 756–767.
- [107] BRANDÃO, A. S. *Projeto de controladores não lineares para voo autônomo de veículo aéreos de pás rotativas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Espírito Santo, ES - Brasil, 2013.
- [108] MAS, I. *Cluster Space Framework for Multi-Robot Formation Control*. Tese (Doutorado) — Santa Clara University, School of Engineering, 2011.
- [109] BOUABDALLAH, S. *Design and control of quadrotors with application to autonomous flying*. Tese (Doutorado) — École Polytechnique federale de Lausanne, 2007.
- [110] SLABAUGH, G. G. *Computing Euler angles from a rotation matrix*. [S.l.], 1999.
- [111] KLEIN, C. A.; HUANG, C.-H. Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, IEEE, n. 2, p. 245–250, 1983.

- [112] PODHORODESKI, R. P.; GOLDENBERG, A. A.; FENTON, R. G. Resolving redundant manipulator joint rates and identifying special arm configurations using jacobian null-space bases. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 7, n. 5, p. 607–618, 1991.
- [113] WHITNEY, D. E. Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses. *IEEE Transactions on man-machine systems*, 1969.
- [114] BAILLIEUL, J. Kinematic programming alternatives for redundant manipulators. In: IEEE. *Robotics and Automation. Proceedings. 1985 IEEE International Conference on*. [S.l.], 1985. v. 2, p. 722–728.
- [115] SICILIANO, B. Kinematic control of redundant robot manipulators: A tutorial. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Springer, v. 3, n. 3, p. 201–212, 1990.
- [116] PARK, J. et al. Multiple tasks kinematics using weighted pseudo-inverse for kinematically redundant manipulators. In: *ICRA*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 4041–4047.
- [117] GITHUB.COM. <https://github.com/puku0x/cvdrone>. 2014.
- [118] MAS, I.; KITTS, C. Object manipulation using cooperative mobile multi-robot systems. In: *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 1.
- [119] FOURNIER, A.; MONTUNO, D. Y. Triangulating simple polygons and equivalent problems. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, ACM, v. 3, n. 2, p. 153–174, 1984.
- [120] RICHARDS, A.; HOW, J. P. Aircraft trajectory planning with collision avoidance using mixed integer linear programming. In: IEEE. *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*. [S.l.], 2002. v. 3, p. 1936–1941.
- [121] FOX, D.; BURGARD, W.; THRUN, S. The dynamic window approach to collision avoidance. *Robotics & Automation Magazine, IEEE*, v. 4, n. 1, p. 23–33, 1997.
- [122] HUANG, W. H. et al. Visual navigation and obstacle avoidance using a steering potential function. *Robotics and Autonomous Systems*, Elsevier, v. 54, n. 4, p. 288–299, 2006.
- [123] ANDERSON, B. D. et al. Rigid graph control architectures for autonomous formations. *Control Systems, IEEE*, IEEE, v. 28, n. 6, p. 48–63, 2008.
- [124] SHAO, J.; WANG, L.; XIE, G. Flexible formation control for obstacle avoidance based on numericalflow field. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA, USA: IEEE, 2006. p. 5986–5991.