

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

RAMON GALIMBERTI

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA  
RESOLVER PROBLEMAS DE HELMHOLTZ USANDO FUNÇÕES DE  
INTERPOLAÇÃO DE BASE RADIAL SEM REGULARIZAÇÃO**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler

VITÓRIA  
2018

**RAMON GALIMBERTI**

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA  
RESOLVER PROBLEMAS DE HELMHOLTZ USANDO FUNÇÕES DE  
INTERPOLAÇÃO DE BASE RADIAL SEM REGULARIZAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof<sup>o</sup>. Dr<sup>o</sup>. Carlos Friedrich Loeffler Neto

## FICHA CATALOGRÁFICA

Galimberti, Ramon

Formulação do Método dos Elementos de Contorno para resolver problemas de Helmholtz usando funções de interpolação de base radial sem regularização.

Páginas 91 f.:il.

Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro tecnológico,  
Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Vitória,  
2018.

Orientação: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

1.Método dos Elementos de Contorno 2. Funções de Base Radial  
3. Problema de Helmholtz 4.MECID sem Regularização

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA  
RESOLVER PROBLEMAS DE HELMHOLTZ USANDO FUNÇÕES DE  
INTERPOLAÇÃO DE BASE RADIAL SEM REGULARIZAÇÃO**

**RAMON GALIMBERTI**

COMISSÃO EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador**  
Universidade Federal do Espírito Santo – DEM/UFES

---

**Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara – Examinador Interno**  
Universidade Federal do Espírito Santo – DEM/UFES

---

**Prof. Dr. José Antônio Fontes Santiago – Examinador Externo**  
Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE/UFRJ

---

**Eng. Dr. André Bulcão – Examinador Externo**  
CENPES - PETROBRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como pré-requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Vitória (ES), 01 de Março de 2018.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço em primeiro lugar ao meu poderoso e bondoso Deus, por todo seu infinito suporte e amor, que me permitiu chegar até aqui. Agradeço intensamente a meus pais, Jose Brás Galimberti e Maria Jose G. Galimberti que não só me acompanharam por toda essa jornada, mas que me fortaleceram e apoiaram a enfrentar meus maiores desafios que, no qual, sem eles não seria possível. Agradeço em especial à minha esposa, Thielly Strelow M. Galimberti, que esteve comigo durante toda essa jornada demonstrando paciência, empatia e amor em todos os momentos que precisei.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto, pelo qual não seria possível completar esse trabalho sem a ajuda, paciência e colaboração, e que não cessou em me auxiliar em todas as vezes que precisei.

Agradeço aos meus parceiros que se transformaram em bons amigos nessa caminhada, Hercules Barcelos, pelo seu espírito de alegria e pelas boas piadas, mas principalmente por seu suporte pleno em todos os momentos em que precisei e, ao João Paulo, que foi sem dúvidas um grande apoio nessa jornada, compartilhando experiências e aprendizados, não medindo esforços para meu sucesso.

Enfim, minha imensa gratidão à todos que conheci e pude contribuir e receber ajuda no PPGEM, e à CAPES pelo suporte durante esta jornada.

*“Pensar Grande e Viver Pequeno”*

*Pe. Léo*

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é propor uma nova formulação para o Método dos Elementos de Contorno denominada aqui como MECID-2 (Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta sem Regularização), que faz uso das funções de base radial para aproximar integrais de domínio, mas que possui uma estratégia de solução diferente do modelo apresentado na formulação já validada com êxito, a MECID Regularizada. Foram propostos cinco problemas governados pela Equação de Helmholtz para a validação desta formulação em que os resultados da MECID-2 foram comparados com a MECID Regularizada, tomando como parâmetro a solução analítica do problema, quando houver, ou a solução aproximada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Outro parâmetro importante avaliado nos resultados é a importância do refinamento da malha de contorno e da quantidade de pontos internos inseridos no domínio. São geradas curvas de desempenho através do cálculo do erro médio percentual para cada malha, demonstrando a convergência e a precisão de cada método.

**PALAVRAS-CHAVE:** Método dos Elementos de Contorno, Funções Radiais, Problemas de Campo Escalar, Problemas de Helmholtz.

## **ABSTRACT**

The objective of this work is to propose a new formulation for the Boundary Element Method named here with MECID-2 (Direct Interpolation Boundary Elements Method without Regularization), which uses the radial basis functions to interpolate domain integrals, but which has a different solution strategy of the model presented in the formulation already successfully validated named as MECID Regularized. Five problems governed by the Helmholtz Equation for the validation of this formulation were solved in which the results of the MECID-2 will be compared with the MECID Regularized, taking as parameter the analytical solution of the problem, if any, or the approximate solution by the Finite Element Method (FEM). Another important parameter evaluated in the results is the mesh refinement importance on the boundaries and the number of internal points inserted in the domain. Performance curves are generated by calculating the mean percentage error for each mesh, demonstrating the convergence and precision of each method..

**KEYWORDS:** Boundary Element Method, Radial Functions, Scalar Fields Problems, Helmholtz Equation.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Esquema para a solução de um problema físico. ....	17
Figura 3.1: Representação do domínio bidimensional. ....	29
Figura 6.1: Características geométricas e condições de contorno para o Problema01: Barra elástica carregada. ....	49
Figura 6.2: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear com uma malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos. ....	50
Figura 6.3: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malhas de 320 elementos de contorno e 324 pontos internos.....	51
Figura 6.4: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malhas de 320 elementos de contorno e 576 pontos internos.....	51
Figura 6.5: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malhas de 160, 320 e 320 elementos de contorno e, respectivamente, 484, 324 e 576 pontos internos. ....	52
Figura 6.6: Características geométricas e condições de contorno para o Problema02: Membrana carregada. ....	53
Figura 6.7: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84 elementos de contorno e 484 pontos internos. ....	54
Figura 6.8: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos. ....	55
Figura 6.9: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 324 pontos internos. ....	55

Figura 6.10: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 576 pontos internos. ....	55
Figura 6.11: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malhas de 84, 84, 160, 160, 320, 320 elementos de contorno e, respectivamente, 144, 84, 144, 484, 324 e 576 pontos internos.....	56
Figura 6.12: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 03: Membrana circular carregada.....	57
Figura 6.13: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 384 elementos de contorno e 311 pontos internos. ....	58
Figura 6.14: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 384 elementos de contorno e 721 pontos internos. ....	59
Figura 6.15: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malhas de 384, 320 e 384 elementos de contorno e, respectivamente, 311, 721 e 721 pontos internos. ....	59
Figura 6.16: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 04.....	60
Figura 6.17: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84 elementos de contorno e 144 pontos internos. ....	62
Figura 6.18: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84 elementos de contorno e 484 pontos internos. ....	62
Figura 6.19: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 160 elementos de contorno e 144 pontos internos. ....	63
Figura 6.20: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos. ....	63

Figura 6.21: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 324 pontos internos. ....	64
Figura 6.22: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 576 pontos internos. ....	64
Figura 6.23: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 84 elementos de contorno e 144 e 484 pontos internos. ....	65
Figura 6.24: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 160 elementos de contorno e 144 e 484 pontos internos. ....	65
Figura 6.25: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 320 elementos de contorno e 324 e 576 pontos internos. ....	65
Figura 6.26: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 84 e 160 elementos de contorno e 144 pontos internos. ....	66
Figura 6.27: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 84 e 160 elementos de contorno e 484 pontos internos. ....	66
Figura 6.28: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84, 160 e 320 elementos de contorno, respectivamente e, 144, 144 e 576 pontos internos. ....	67
Figura 6.29: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 05. ....	68
Figura 6.30: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 134 elementos de contorno e 81 pontos internos. ....	69
Figura 6.31: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 134 elementos de contorno e 353 pontos internos. ....	69

Figura 6.32: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 134 elementos de contorno e 754 pontos internos. ....	69
Figura 6.33: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 518 elementos de contorno e 754 pontos internos. ....	70
Figura 6.34: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malha com 134 elementos de contorno e, respectivamente, 81, 353 e 754 pontos internos. ....	71
Figura 6.35: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID com elementos de interpolação linear, malha com 134, 262 e 518 elementos de contorno e 754 pontos internos. ....	71
Figura 0.1: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 04. ....	83
Figura 9.1: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 144 pontos internos. ....	89
Figura 9.2: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 324 pontos internos. ....	89
Figura 9.3: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 484 pontos internos. ....	90
Figura 9.4: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 576 pontos internos. ....	90
Figura 9.5: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 3 com 311 pontos internos. ....	91
Figura 9.6: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 3 com 721 pontos internos. ....	91
Figura 9.7: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 5 com 81 pontos internos. ....	92
Figura 9.8: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 5 com 353 pontos internos. ....	92
Figura 9.9: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 5 com 754 pontos internos. ....	93

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MECDR – Método de Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

MEF – Método dos Elementos Finitos

MECID – Método de Elementos de Contorno com integração Direta com Regularização

MECID-2 – Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta sem Regularização

LD – Lado Direito

LE – Lado Esquerdo

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	16
1.1	COMENTÁRIOS PRELIMINARES .....	16
1.2	OBJETIVO .....	18
1.3	METODOLOGIA.....	18
1.4	RESUMO BIBLIOGRÁFICO.....	20
2	EQUAÇÃO DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADO .....	23
2.1	INTRODUÇÃO.....	23
2.2	CASOS PARTICULARES.....	24
2.3	A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ.....	27
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	29
3.1	INTRODUÇÃO.....	29
3.2	FORMA INTEGRAL INVERSA ASSOCIADA À EQUAÇÃO DE LAPLACE 30	
4	MEC COM INTEGRAÇÃO DIRETA - FORMULAÇÃO MECID.....	34
4.1	INTRODUÇÃO.....	34
4.2	FORMULAÇÃO MECID REGULARIZADA APLICADA A PROBLEMAS DE HELMOLTZ .....	35
5	FORMULAÇÃO PROPOSTA .....	42
5.1	INTRODUÇÃO.....	42
5.2	EQUACIONAMENTO .....	42
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....	48
6.1	INTRODUÇÃO.....	48
6.2	PROBLEMA 01 .....	49
6.3	PROBLEMA 02 .....	52
6.4	PROBLEMA 03 .....	57
6.5	PROBLEMA 04 .....	60
6.6	PROBLEMA 05 .....	67

7 CONCLUSÕES .....	73
8 REFERÊNCIAS.....	75
ANEXO 1 – CÁLCULO DA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO PRIMITIVA .....	78
ANEXO 2 – CÁLCULO DA DERIVADA DIRECIONAL DA FUNÇÃO DE GALERKIN.....	81
ANEXO 3 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA 04.....	83
ANEXO 4 – MALHAS DE PONTOS INTERNOS.....	89
DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS INTERNOS NOS PROBLEMAS 1, 2 E 4 ..	89
DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS INTERNOS NO PROBLEMA 3 .....	91
DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS INTERNOS NO PROBLEMA 5 .....	92

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 COMENTÁRIOS PRELIMINARES

O avanço tecnológico tem sido fundamental para a evolução humana em todos os sentidos na saúde, educação, segurança e demais áreas. A grande capacidade dos cientistas se manterem buscando novas descobertas é o que permite esse estágio de desenvolvimento atual, impensado há algumas décadas atrás, desde um celular inteligente até a substituição de membros no corpo humano, automação de grandes processos industriais e monitorização de partes do universo.

Um novo desafio é proposto a cada dia pela comunidade científica e pelo próprio meio, seja ele industrial ou não, para que se possa desenvolver ainda mais, como se tem feito por séculos em todas as áreas.

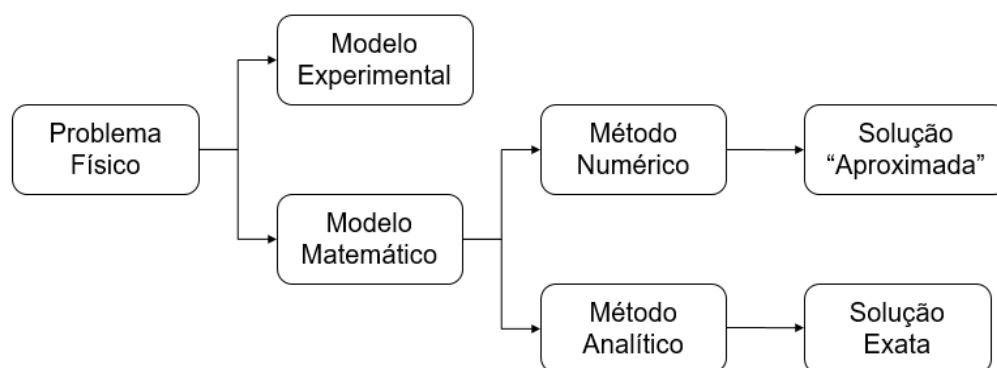
Muitos destes avanços atuais citados requerem vasta criatividade e tecnologia de qualidade para que possam ser desenvolvidas as melhores soluções possíveis. A engenharia está cada vez mais capacitada para lidar com esses desafios e modelar a realidade, trazendo-a para um campo de estudo controlado onde se podem encontrar soluções ótimas para muitos casos que estão sendo apresentados.

Alguns desses problemas são complexos e dificilmente poderiam ser resolvidos de forma experimental ou analítica, por isso, a utilização de métodos numéricos é cada vez mais importante, pois eles são um recurso poderoso que viabilizam essa evolução e, com isso, os processos que poderiam levar um tempo custoso experimentalmente ou dispendioso analiticamente para serem resolvidos são manipulados pelos métodos numéricos. Na realidade, diante do arrojo dos problemas da engenharia atual, os métodos numéricos suplantados hoje são desenvolvidos com muita qualidade e precisão cada vez mais aceitável para aplicação em projetos de engenharia.

Diante da variedade de metodologias científicas apresentadas pela Física Matemática, que gera modelos e ferramentas de solução aos problemas de engenharia, na figura 1 é apresentado um esquema que explicita as formas clássicas de solução de um problema.



Figura 1.1: Esquema para a solução de um problema físico.



Se o desenvolvimento e a utilização dos métodos numéricos estão cada vez maiores nas últimas décadas, deve-se isso graças ao avanço dos computadores e da tecnologia dos processadores que são capazes de calcular milhares de dados por segundo. Com isso, é possível desenvolver e testar métodos ainda mais robustos para resolver os problemas com maior elegância, eficiência, e se preparar para os desafios futuros.

Dentre os principais métodos numéricos existentes, atualmente se destacam:

- Método dos Elementos Finitos (MEF)
- Método das Diferenças Finitas (MDF)
- Método dos Volumes Finitos (MVF)
- Método dos Elementos de Contorno (MEC)

Os métodos numéricos citados são baseados na ideia de discretização (Brebbia, 1978) e, existem ainda os métodos sem malha que não foram mencionados acima. Os métodos citados consistem em transformar um domínio contínuo em um domínio discreto com um determinado número de pontos, a fim de que nestes pontos possam ser calculadas as variáveis de interesse. Essa discretização pode acontecer no domínio ou no contorno e, dos métodos acima, apenas o MEC se restringe a discretizar apenas o contorno, reduzindo o problema em uma dimensão (Brebbia et. al., 1984), isso faz com que exista um número menor de variáveis de entrada e matrizes menores a serem resolvidas. Apesar disso, as matrizes geradas pelo sistema final de equações lineares do MEC não são simétricas, o que pode fazer o método ser mais custoso em grandes aplicações.

O MEC é uma técnica que surgiu em meados da década de 70, e está em pleno desenvolvimento atualmente, por causa de sua capacidade de lidar com diversos

problemas físicos, possuir uma boa precisão em comparação aos demais métodos citados e permitir uma entrada de dados mais simples.

Neste contexto de franco desenvolvimento e busca de melhorias em todos os métodos numéricos mais usuais, uma formulação alternativa para o MEC é proposta neste trabalho com o intuito de contribuir para sua robustez e eficácia.

## 1.2 OBJETIVO

Desenvolver um modelo matemático alternativo de solução para o Método dos Elementos de Contorno voltado para solução de problemas escalares governados pela Equação de Helmholtz. O modelo proposto se baseia numa formulação que já teve sua eficiência comprovada, o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta (MECID) Regularizado. A versão aqui desenvolvida emprega igualmente funções de base radial para aproximação do núcleo da integral de domínio que representa a inércia do sistema; contudo, não utiliza a técnica de regularização. Elimina-se a singularidade referente à coincidência entre os pontos fonte e campo, pontos típicos do processo de discretização do MEC, de uma forma alternativa, recorrendo para uma solução fundamental mais elaborada, composta por duas funções auxiliares.

Valida-se a eficiência desta técnica comparando-a com a MECID Regularizada na solução de problemas que possuem solução analítica quando houver ou com a solução numérica dada pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

Em síntese, busca-se validar uma nova alternativa de solução que seja mais eficiente e que possa dar maior aplicabilidade do MEC, atraindo assim maior interesse da comunidade científica e industrial.

## 1.3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho parte da integração da equação diferencial parcial que governa o problema de Helmholtz utilizando funções auxiliares para esse processo, conforme será abordado em capítulo posterior. Através do uso de regras matemáticas, obtém-se a forma integral inversa para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno, conforme será apresentado.

A discretização do contorno será feita com elementos lineares de mesmo tamanho e nós duplos nas quinas, onde existe a dualidade de vetores normais. A distribuição dos pontos fonte internos no domínio é feita à partir de um software denominado “malhador”, do próprio autor, onde os pontos internos são gerados, sem um parâmetro de malha definido, realizando-se a formação de um sistema algébrico de equações apresentado na forma de matriz.

Os problemas governados pela equação de Helmholtz aqui resolvidos consistem em problemas de resposta, em que o sistema é resolvido numa varredura para diferentes frequências de excitação, obtendo-se uma gama de respostas que será analisada.

Os problemas teste serão resolvidos tanto com a nova formulação proposta neste trabalho quanto com o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta (MECID) Regularizado, para melhor apreciação de desempenho. Conforme exposto, as respostas serão comparadas com a solução analítica, quando houver.

Para cada frequência calculada, também foi analisada a influência do refinamento da malha no contorno, aumentando a quantidade de pontos discretizados no contorno e avaliando o resultado obtido. Outra análise realizada foi referente à influência da nuvem de pontos internos, entrando com uma quantidade de pontos menor e outra mais densa e avaliando a resposta encontrada.

Com o objetivo exclusivamente de validar a eficiência do novo método proposto, foram resolvidos cinco problemas de simples solução e com geometria simplificada, onde as soluções analíticas são conhecidas. A qualidade da resposta será dada pelo erro médio em relação à solução analítica.

Ressalta-se que também as soluções analíticas aqui utilizadas foram desenvolvidas como parte deste trabalho, pois embora passíveis de serem resolvidas semi analiticamente, através de séries de funções harmônicas, elas não se encontravam disponíveis na literatura especializada.

A fim de realizar uma comparação justa, as mesmas malhas utilizadas para resolver os problemas de Helmholtz pela nova formulação proposta também foram utilizadas na MECID com Regularização. Como o erro não é uniforme, tomou-se como medida do erro a média aritmética de todos os pontos amostrais, onde a diferença do erro foi calculada em relação ao valor analítico encontrado naquele ponto discreto, dividido pelo módulo do valor máximo analítico encontrado em todos os pontos

amostrados. Adota-se essa medida para normalizar a medida do erro pois, quando a solução analítica tende a zero o resultado do erro se ampliaria naquele ponto.

#### 1.4 RESUMO BIBLIOGRÁFICO

De acordo com Katsikadelis (2002), o começo da formulação direta do MEC pode ser considerado nos três trabalhos de Jaswon(1963), Symm (1963) e Jaswon & Ponter (1963) para problemas potenciais estáticos, e no trabalho de Rizzo (1967), para elastostática.

O Método dos Elementos de Contorno ganhou força e começou a se destacar à partir do ano de 1978, após a publicação do livro de Brebbia *“The Boundary Element Method for Engineers”* (BREBBIA, 1978). Desde esse período o MEC se tornou uma atraente área de pesquisa e muitos trabalhos foram publicados e sintetizados em livros importantes, como os trabalhos de Brebbia, et al. (1984), *“Introducion to Boundary Elements”* de Hartmann (1989), *“The Boundary Element Method in Engineering”* de Becker (1992), *“The Boundary Element Methods in Engineering”* de Banerjee (1994) entre outros.

O MEC tem ótimo desempenho nas aplicações em que os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são auto-adjuntos (Brebbia et al., 1984). Nestes casos, é possível eliminar todas as integrais de domínio. Assim, um importante desafio foi o desenvolvimento de formulações para resolver problemas em que o MEC não consegue transformar todas as integrais de domínio em integrais apenas de contorno. Dentre essas iniciativas, destaca-se a formulação da Dupla Reciprocidade (Nardini & Brebbia, 1983), apresentada por Partridge et al (1992), que empregam funções de base radial. Com tais funções é possível transformar as integrais de domínio para o contorno através de uma combinação linear de um produto de novas funções.

O uso de funções de base radial (FBRs) é um dos métodos mais modernos e bem sucedidos para simular problemas de interpolação (Buhmann, 2003). Encontram respaldo matemático eficiente, sobretudo quando trata de aproximar dados esparsos em várias dimensões, substituindo com vantagem métodos clássicos de interpolação. Muitas classes dessas funções já foram utilizadas para interpolação com sucesso e também resolvendo equações diferenciais parciais, especialmente com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

No contexto do MEC, aplicações similares às do MEF têm sido feitas com o intuito de encontrar uma melhor aproximação para muitos problemas, pois elas servem como ferramenta auxiliar para superar muitos problemas associados a expressões integrais que envolvem operadores não adjuntos (Partridge, 1992), permitindo a simulação de casos transientes, problemas de valor característico e problemas caracterizados por termos fonte. Porém, o emprego de funções radiais nesse contexto não é tão simples como no caso da interpolação. Alguns desafios são encontrados quanto a formulação da Dupla Reciprocidade (MECDR), como imprecisões numéricas nos casos em que muitos pólos internos são necessários para representar propriedades de domínio como a inércia, por exemplo, e isso resulta em problemas de mau condicionamento matricial e também em imprecisões numéricas no processamento dos esquemas incrementais de avanço no tempo, que comumente exigem matrizes de grande dimensão.

O MEC possui formulações clássicas que usam soluções fundamentais dependentes da frequência para resolver problemas de resposta. Ele compreende uma formulação integral onde é empregada uma função auxiliar com características especiais. Essa função é caracterizada por ser a solução fundamental de um problema correlato. A precisão do método é obtida por essa solução atender aos requisitos básicos de uma boa função de ponderação. Diferente da nova formulação proposta aqui neste trabalho, as formulações mais clássicas do MEC usam a solução correlata ao próprio problema que se deseja resolver. Considerando a equação de Helmholtz, que será trabalhada aqui, esta solução já é conhecida e depende da frequência de excitação, e é dada através de funções especiais, expressas em funções de séries, onde a solução fundamental correlata que governa o problema de Helmholtz é dada por uma função de Bessel Modificada de segunda espécie e ordem zero (Dominguez, 1993). Ela também pode ser dada em termos da função de Hankel, onde deve ser considerada a relação entre a função de Bessel modificada e a função de Hankel (Abramowitz & Stegun, 1964), conhecida como função de Bessel de terceira espécie. As formulações clássicas possuem uma dificuldade maior de resolução, por trabalhar justamente com a solução fundamental do problema correlato que se deseja resolver.

Uma técnica proposta para lidar com essas dificuldades foi apresentada por Loeffler et al. (2015a), o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta. Essa técnica utiliza integração direta para resolver o termo integral de inércia na

equação de Helmholtz. O método foi aplicado com sucesso em problemas de Poisson (Loeffler et al., 2015c) e também foi aplicado por Barcelos (2014), em problemas de Poisson e Helmholtz e, foi aplicado por Pereira (2016), em problemas de Helmholtz. Utiliza-se um processo de aproximação com funções de base radial similar ao método da dupla reciprocidade, porém, é mais simples, geral e robusto, não sendo necessária a construção de duas matrizes auxiliares, porém, aumenta a importância dos polos internos.

O Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta é adequado para resolver problemas com equações diferenciais parciais em que os operadores são não adjuntos (Brebbia, 1984) ou em casos onde a dedução da solução fundamental (Ramachandran, 1994) é muito difícil. Porém, como o núcleo inteiro é interpolado, incluindo a solução fundamental, ocorre coincidência entre os pontos fonte e os pontos campo, produzindo singularidade. Para evitar esse problema, os pontos fonte e pontos campo devem ser diferentes, o que necessitaria de mais uma entrada de nuvens de pontos. Esse problema foi resolvido por Loeffler e Mansur (2017) partindo de um conceito de regularização de Haddamard, tendo êxito na sua aplicação, conforme também resultados apresentados por Frossard (2016).

Visando minimizar os efeitos produzidos pelo procedimento de regularização, sobretudo em modelagens em que a discretização é menos refinada, há expectativa de que o procedimento aqui mostrado se mostre eficaz.

Espera-se ainda que o desenvolvimento da MECID amplie a capacidade de solução do MEC abarcando com maior precisão uma variedade ainda maior de problemas como, problemas lineares e não lineares, de resposta dinâmica, no domínio da acústica e da elasticidade, bem como placas e outras estruturas sujeitas a carregamentos dependentes do tempo, como os problemas de propagação de ondas e problemas sísmicos.

## 2 EQUAÇÃO DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADO

### 2.1 INTRODUÇÃO

Os problemas de campo escalar são problemas físicos associados à teoria de campo ou potencial (Loeffler, 1988), cujo objetivo é integrar problemas presentes na natureza segundo um mesmo enfoque matemático (Moon, 1971).

Para cada um dos pontos contidos no domínio físico em estudo é associado um valor potencial ou fluxo de potencial. Os potenciais podem representar diversas grandezas como temperatura, pressão, deslocamento, entre outros e os fluxos potenciais podem representar campo elétrico, campo gravitacional, campo térmico, entre outros. Por determinar uma única quantidade em cada ponto do espaço, eles são denominados problemas de campo escalar (Kreyszig, 1968).

A teoria de campo aborda uma vasta gama de problemas físicos presentes na natureza. Conforme Brebbia, C. A. & Ferrante (1975), é apresentado abaixo uma lista de problemas inseridos na ideia de campo escalar:

- Proteção catódica;
- Condução de calor;
- Escoamento potencial;
- Fluxo através de meios porosos;
- Condução elétrica;
- Difusão de massa.

Os problemas típicos de mecânica dos sólidos, de representação mais simples, podem estar associados nesta categoria, a saber:

- Torção uniforme de barras prismáticas na zona elástica;
- Deflexão de membranas;
- Escoamento de lubrificantes em mancais de deslizamento;
- Propagação de ondas acústicas em sólidos.

## 2.2 CASOS PARTICULARES

Conforme exposto por Loeffler (1992), os problemas físicos que se enquadram na Teoria de Campo Escalar são regidos por uma equação diferencial que pode ser oriunda da seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \lambda_3 u + p \quad (2.1)$$

A equação (2.1) é conhecida como Equação de Campo Escalar Generalizada, onde  $u$  é o potencial,  $k$  são propriedades físicas do sistema,  $p$  é uma fonte e  $\lambda$  são as constantes definidas.

Considerando problemas bidimensionais e que o meio seja homogêneo e isotrópico, a Equação de Campo Escalar Generalizada (equação 2.1) toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \lambda_3 u + p \quad (2.2)$$

Assumindo algumas particularidades, pode-se observar equações importantes que governam vários problemas. O primeiro caso particular ocorre quando todos os coeficientes são nulos e o termo fonte “p” é diferente de zero, ou seja, não há variação temporal e o termo reativo se anula, isto é:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ p \neq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

A equação (2.2) pode ser escrita como:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = p \quad (2.4)$$

A equação acima é chamada de Equação de Poisson e o termo descrito “p” é conhecido como fonte, sorvedouro e/ou forças atuando no interior do domínio.



O segundo caso particular ocorre quando “p” é igual a zero, ou seja, não há forças externas atuando no interior do domínio; porém,  $\lambda_1$  é diferente de zero, fazendo com que exista um termo com variação temporal de segunda ordem, com as seguintes condições:

$$\begin{cases} \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ p = 0 \\ \lambda_1 \neq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

A equação (2.2) pode ser escrita como:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_1 \ddot{u} \quad (2.6)$$

A equação acima é chamada de Equação da Onda e governa problemas em que ocorram processos rápidos de transmissão de energia, como propagação de ondas de dilatação em meios elásticos, importante na análise de problemas de eletromagnetismo e acústica.

O terceiro caso particular ocorre quando “p” é igual a zero; porém,  $\lambda_2$  é diferente de zero, fazendo com que exista um termo com variação temporal de primeira ordem, com as seguintes condições:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = 0 \\ p = 0 \\ \lambda_2 \neq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

A equação (2.2) pode ser escrita como:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_2 \dot{u} \quad (2.8)$$

A equação acima é chamada de Equação do Calor Transiente e governa problemas em que ocorram processos lentos de transmissão de calor por condução.

O quarto caso particular ocorre quando “p” é igual a zero; porém,  $\lambda_3$  é diferente de zero, fazendo com que exista um termo na equação conhecido como reativo, com as seguintes condições:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ p = 0 \\ \lambda_3 \neq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

A equação (2.2) pode ser escrita como:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_3 u \quad (2.10)$$

A equação acima é chamada de Equação do Helmholtz e pode representar um problema de autovalor quando, especificadas condições de contorno naturais homogêneas, se procuram todas as configurações auto-equilibradas possíveis do potencial (Hadley, 1972).

Essa equação também pode representar um caso particular da Equação da Onda, em que se busca determinar o movimento produzido no sistema por uma excitação variável, mas cuja frequência é conhecida e dada por  $\lambda$ .

Os problemas governados pela Equação de Helmholtz podem ser divididos em três grupos; problemas diretos, problemas de autovalor e problemas inversos.

Nos problemas de autovalor, buscam-se encontrar todos os valores das frequências naturais, denominadas  $\omega_n$ , capazes de gerar as já mencionadas configurações auto-equilibradas no sistema.

Nos problemas diretos, objetiva-se determinar as configurações de equilíbrio do potencial  $u(X)$  em função de um conjunto de condições de contorno conhecidas. É o caso abordado neste trabalho.

Nos problemas inversos, determinam-se propriedades do meio perante o conhecimento das excitações de contorno e da resposta do sistema.

O quinto caso particular, ocorre quando “p” é igual a zero, e todas as constantes também tem o valor nulo, ou seja, não há variação temporal e o termo reativo também é nulo, com as seguintes condições:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ p = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

A equação (2.2) pode ser escrita como:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (2.12)$$

A equação acima é chamada Equação de Laplace, apesar de parecer simples, ela é importante para representar vários problemas estacionários e sua solução fundamental (Brebbia, 1978) é utilizada como uma estratégia para resolver o lado esquerdo da equação de formulações como a MECDR, apresentada por Nardini & Brebbia (1983), e a MECID, proposta por Loeffler (et al., 2015b), que resolvem problemas de Helmholtz, conforme será abordado nos capítulos seguintes.

### 2.3 A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Pode-se deduzir a Equação de Helmholtz como um caso particular da Equação da Onda Acústica, conforme (GAUL, KÖGL e WAGNER, 2013) e escrita em notação indicial, tem-se:

$$U_{,ii}(X,t) = \frac{1}{k^2} \ddot{U}(X,t) \quad (2.13)$$

onde  $k$  é a velocidade de propagação da onda acústica, dada por:

$$k^2 = \frac{E}{\rho} \quad (2.14)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\rho$  é a densidade.

Na equação 2.13,  $U(X,t)$  é a resposta espacial do sistema para qualquer excitação e em qualquer tempo, pode significar pressão ou o tensor dilatação num meio acústico (BUTKOV, 1988).

Na análise vibracional as configurações de equilíbrio associado às frequências naturais são buscadas. Pode-se admitir que o movimento, como a soma de harmônicos:

$$U(X, t) = u(X)e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

Derivando a equação 2.15 duas vezes, em relação ao tempo:

$$\ddot{U}(X, t) = -\omega^2 u(X)e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

Derivando a equação 2.15 duas vezes, em relação ao espaço:

$$U_{,ii}(X, t) = u_{,ii}(X)e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

Substituindo as equações 2.16 e 2.17 na equação 2.13, tem-se:

$$u_{,ii}(X) = -\frac{1}{k^2} \omega^2 u(x) \quad (2.18)$$

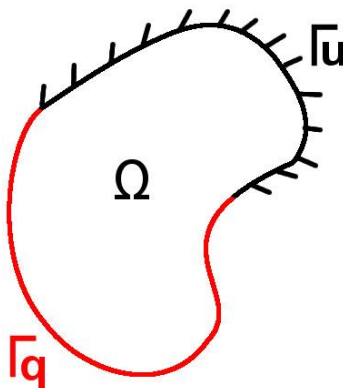
Neste trabalho, objetiva-se determinar as configurações de equilíbrio do potencial  $u(X)$  em função de um conjunto de condições de contorno conhecidas.

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno é uma ferramenta poderosa e eficiente. Conforme apresentado na introdução, dos métodos numéricos citados o MEC é o único que realiza a discretização apenas no contorno do domínio. Na figura 3.1 representa-se um domínio bidimensional de um problema bem posto.

Figura 3.1: Representação do domínio bidimensional.



Um problema é dito bem posto se para uma dada equação diferencial de governo existem condições do contorno conhecidas que permitam sua adequada solução. Essas condições de contorno podem-se apresentar de três formas diferentes nos problemas em que a equação de governo é de segunda ordem. Primeira forma, apenas os valores da variável básica podem ser prescritos, condições essas conhecidas como condições essenciais ou de Dirichlet; segunda forma, pode ocorrer que em certas partes do contorno os valores da derivada da variável básica sejam conhecidos, situação em que tais condições são chamadas naturais ou de Neumann. Terceira forma, ocorrer ainda do contorno se apresentar com condições de contorno em termos de uma derivada, expressa como função da variável básica e na sua derivada simultaneamente, conhecida como condição de Robin.

Na figura 3.1, apresentada acima, o contorno é composto por duas partes conhecidas. No contorno  $\Gamma_u$  se prescreve a variável básica, condição de Dirichlet, e no contorno  $\Gamma_q$  se prescreve a derivada da variável básica, condição de Neumann.

O MEC se caracteriza por uma formulação integral forte que, com o uso de artifícios matemáticos, é possível se manipular essa expressão para se chegar à forma integral inversa, onde existe a possibilidade de se aplicar o Teorema da Divergência e levar as integrais ao contorno do domínio.

### 3.2 FORMA INTEGRAL INVERSA ASSOCIADA À EQUAÇÃO DE LAPLACE

Os problemas físicos estacionários e simples, que estão inseridos no grupo de Equações de Campo Escalar, são representados pela equação de Laplace, definida por:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (3.1)$$

Supondo-se que exista homogeneidade e que o meio seja isotrópico, e atribuindo valor unitário para a variável  $k$ , essa expressão pode ser definida, por simplicidade, na forma de notação indicial por:

$$u_{,ii} = 0 \quad (3.2)$$

Trabalhando a equação 3.2, o próximo passo do MEC é utilizá-la em sua forma integral forte, usando o artifício matemático de uma função de ponderação, chamada de solução fundamental, conforme a equação 3.3.

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

onde  $\Omega$  é o domínio do problema.

A definição das funções de ponderação, aqui descrita como  $u^*(\xi; X)$ , correspondem à solução do problema de campo escalar estacionário, governado pela equação de Poisson. Assim, a função  $u^*(\xi; X)$ , conhecida como solução fundamental, é a solução em um domínio infinito da equação (3.2), apresentada a seguir conforme Brebbia (1978):

$$u_{,ii}^*(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (3.4)$$

O termo  $\Delta(\xi; X)$  é a função Delta de Dirac, que representa uma fonte pontual em  $X = \xi$ . A expressão que representa a função  $u^*(\xi; X)$ , bem como sua derivada  $q^*(\xi; X)$ , para problemas bidimensionais, conforme Brebbia (1978) é dada por:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad (3.5)$$

E sua derivada direcional:

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3.6)$$

Sendo que  $r(\xi; X)$  significa a distância euclidiana entre os pontos chamados fonte  $\xi$  e o ponto campo  $X$ . Voltando-se à equação 3.3, que se encontra na forma integral forte, e integrando-se por partes pela primeira vez, encontra-se a forma integral fraca, conforme a equação 3.7:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (3.7)$$

Aplica-se a integração por partes novamente, ao segundo termo do lado direito da equação 3.7, e chega-se à forma integral inversa, conforme equação 3.8:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega \quad (3.8)$$

A forma inversa é importante para o MEC porque pode-se aplicar o Teorema da Divergência de Gauss sobre a equação 3.8 para levá-la ao contorno  $\Gamma$ . O resultado é apresentado na equação 3.9.

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u u_{,i} n_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega \quad (3.9)$$

Visando a simplificação da equação 3.8, adota-se como:

$$u_{,i} n_i = q \quad (3.10)$$

$$u_{,i}^* n_i = q^* \quad (3.11)$$

O termo “q” representa o fluxo e o termo “q\*” representa o fluxo fundamental da função de ponderação  $u^*$ , expresso na equação 3.5. A equação 3.9 pode ser expressa na forma:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma + \int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

Na equação 3.12 observa-se que o último termo ainda está expresso na forma de uma integral de domínio. Utilizando a propriedade da função Delta de Dirac é possível levá-la ao contorno da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = \int_{\Omega} u(X) \Delta(\xi; X) d\Omega \quad (3.13)$$

Assim, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} u u_{,ii}^* d\Omega = -c(\xi) u(\xi) \quad (3.14)$$

Conforme Brebbia (1978), a função  $c(\xi)$  é uma função de ponto e pode apresentar diferentes valores de acordo com sua localização no domínio. Os valores que essa função pode assumir, considerando o contorno suave, são:

$$c(\xi) = 1 \text{ se o ponto } \xi \text{ está dentro do domínio} \quad (3.15)$$



$$c(\xi) = \frac{1}{2} \text{ se o ponto } \xi \text{ está sobre o contorno (contorno suave)} \quad (3.16)$$

$$c(\xi) = 0 \text{ se o ponto } \xi \text{ está fora do domínio} \quad (3.17)$$

Para problemas que envolvam cantos (curvas não suaves),  $c(\xi)$  terá seu valor calculado conforme a equação 3.18:

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ onde alfa é dado em radianos.} \quad (3.18)$$

Posto isso, a expressão final expressa-se na forma:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

Apresentando este sistema na forma matricial tem-se:

$$[H](U) = [G](Q) \quad (3.20)$$

Onde U e Q são os vetores de potencial e fluxo prescritos, contendo também os valores a serem calculados, e G e H as matrizes oriundas das integrais de função de ponderação para o potencial e fluxos respectivamente.

## 4 MEC COM INTEGRAÇÃO DIRETA - FORMULAÇÃO MECID

### 4.1 INTRODUÇÃO

A técnica denominada MECID (Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta) foi desenvolvida para resolver o termo integral de domínio, que normalmente representa fonte, inércia, sorvedouro, entre outras ações de campo. Utilizando um procedimento de aproximação com funções de base radiais, relativamente parecido com o MECDR, porém mais simples, robusto e geral. O MECID já foi utilizado com sucesso em problemas de Poisson (Loeffler et al., 2015c).

A formulação MECID apresentada por Loeffler (2015a) parte do princípio da utilização de funções de base radial para aproximar o termo de inércia da integral de domínio, para que se possa transformá-lo para uma integral de contorno e seja resolvível pelo MEC.

O MEC apresenta bom desempenho em aplicações em que o operador que caracteriza a equação é auto-adjunto (BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984). Porém, nem todos os problemas representam-se dessa forma. O uso de funções de base radial tem se mostrado um dos recursos mais eficazes, não apenas com o MEC, mas em outros métodos numéricos, como o MEF (BELYTSCSKO, et al. 1996).

As funções de base radial foram aplicadas com sucesso em uma conhecida formulação do MEC denominada Dupla Reciprocidade (MECDR). A integral de domínio resultante da operacionalização matemática desses termos não-homogêneos é transformada em integrais de contorno equivalentes pelo uso de funções auxiliares especiais que são devidamente aproximadas pelo uso de funções de base radial de suporte global.

Porém, a MECDR não é uma simples técnica de aproximação e apresenta problemas nos casos em que muitos polos internos são utilizados para representar propriedades do domínio, como a inércia, o que resulta em um mal condicionamento matricial e imprecisões numéricas (Partridge et al, 1992).

A seguir, apresenta-se a formulação MECID Regularizada aplicada em problemas governados pela Equação de Helmholtz, que serão tratados neste trabalho.

## 4.2 FORMULAÇÃO MECID REGULARIZADA APLICADA A PROBLEMAS DE HELMOLTZ

Por conveniência, a equação 3.26 que apresenta a Equação de Helmholtz, apresentada no capítulo 2, é repetida a seguir:

$$u_{,ii}(X) = -\frac{1}{k^2} \omega^2 u(X) \quad (4.1)$$

De acordo com os princípios usuais de dedução do MEC, utiliza-se primeiramente a forma integral forte da Equação de Helmholtz para, posteriormente, encontrar-se a forma inversa da integral. A seguir, apresenta-se a forma da integral forte do problema de Helmholtz, considerando uma função de ponderação  $u^*$ :

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = -\frac{\omega^2}{k^2} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \quad (4.2)$$

A função  $u^*$  representa uma função de ponderação que corresponde à solução do problema de campo escalar estacionário, governado pela equação de Poisson. Assim, a função  $u^*(\xi; X)$ , conhecida como solução fundamental, é a solução em um domínio infinito da equação (3.2). A solução fundamental aqui empregada  $u^*(\xi; X)$ , utiliza uma estratégia igual à empregada para problemas governados pela Equação de Laplace, conforme será mostrado.

O Lado Esquerdo (LE) da equação 3.2 é idêntico com o termo que representa o LE da Equação de Laplace e, para a técnica da formulação da MECID, utiliza-se dessa estratégia de solução por ser mais simples e possuir uma precisão aceitável para problemas de engenharia, conforme resultados obtidos em trabalhos anteriores apresentados. Então, fazendo uso do termo do LE semelhante da equação de Laplace, resolvido no capítulo três, a equação 4.2 pode ser reescrita, no Lado Esquerdo, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& k^2 \left[ c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \right] \\
& = \omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.3}$$

A discretização da equação 4.3 de acordo com os procedimentos usuais do MEC se faz mediante a aproximação do contorno contínuo por elementos, que possuem nós funcionais que representam a distribuição do campo de variáveis e conformação geométrica do corpo. No caso de elementos lineares estes nós estão situados nas extremidades, impondo uma variação linear dos potenciais  $u(X)$  e suas derivadas normais  $q(X)$  em toda a extensão do elemento. Contudo, para geração de um sistema resolvível de equações a partir da discretização é necessário realizar-se uma varredura ao longo de todos os elementos de contorno, tomando-se diferentes pontos fonte  $\xi$  em quantidade igual a quanto forem os nós funcionais arbitrados no processo de discretização.

Na implantação desse procedimento pode-se inferir que, ao se posicionar os pontos fonte  $\xi$  em coincidência com todos os nós funcionais, ocorrerá uma singularidade no núcleo da integral de domínio situada no lado direito da Eq. 4.3. A fim de evitar a singularidade na MECID se fazia inicialmente a adoção de duas nuvens de pontos, ou seja, uma nuvem de pontos fonte e uma nuvem de pontos campo distinta. Porém, resolveu esse problema posteriormente (LOEFFLER, 2017) partindo de um princípio de regularização similar ao proposto por Hadammard:

$$\begin{aligned}
& k^2 \left[ c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma - \int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma \right] \\
& = \omega^2 \left[ \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega \right] + \omega^2 \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por simplificação, aproximam-se os dois primeiros termos do Lado Direto (LD), da forma:

$$\omega^2 \left[ \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega - \int_{\Omega} u(\xi)u^*(\xi; X)d\Omega \right] \approx \omega^2 \int_{\Omega} u(X)u^*(\xi; X)d\Omega \tag{4.5}$$

Trata-se o terceiro termo do LD da equação 4.4 em uma próxima etapa. Na integral de domínio apresentada anteriormente, pode-se levá-la ao contorno através de manipulações matemáticas propostas na MECID. Primeiramente substitui-se o núcleo da integral por uma combinação linear de funções arbitrárias, ponderadas por coeficientes a determinar:

$$u(X)u^*(\xi; X) = \int_{\Omega}^{\xi} \alpha^j F^j(X; X^j) \quad (4.4)$$

Onde  $\int_{\Omega}^{\xi} \alpha^j$  é uma constante que depende do ponto fonte ( $\xi$ ) e dos pontos interpolantes ( $X^j$ ) e  $F^j(X; X^j)$  é uma função de interpolação que pertence à classe das funções radiais. Nestas, seu argumento é formado pela distância euclidiana, dado por:

$$r(X^e; X^j) = \sqrt{(x_1^j - x_1^e)^2 + (x_2^j - x_2^e)^2} \quad (4.5)$$

Vê-se que os valores dessas funções dependem de dois pontos – chamados pontos base e pontos de interpolação. Esses são tomados em coincidência com os pontos nodais ou nós funcionais, por conveniência.

Ao se analisar a equação 4.4 pode-se propor artifícios matemáticos que permitam levar a integral de domínio ao contorno. A proposta é se definir uma função  $\Psi_{,ii}^j$  que seja uma primitiva da função  $F^j(X; X^j)$ , tal como ocorre na formulação com Dupla Reciprocidade (Partridge, 1992):

$$\int_{\Omega}^{\xi} \alpha^j F^j(X; X^j) d\Omega = \int_{\Omega}^{\xi} \alpha^j \Psi_{,ii}^j(X; X^j) d\Omega \quad (4.6)$$

Aplica-se o Teorema da Divergência ao termo do lado direito da igualdade, e leva-se a integral de domínio para o contorno:

$$\int_{\Omega}^{\xi} \alpha^j \Psi_{,ii}^j(X; X^j) d\Omega = \int_{\Gamma}^{\xi} \alpha^j \Psi_{,i}^j n_i(X; X^j) d\Gamma \quad (4.7)$$

Para simplificar-se a equação, admite-se que:

$$\Psi_{,i}^j n_i(X; X^j) = \eta^j(X; X^j) \quad (4.8)$$

Logo, a expressão completa da equação 4.6 pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega}^{\xi} \alpha^j F^j(X; X^j) d\Omega = \int_{\Gamma}^{\xi} \alpha^j \eta^j(X; X^j) d\Gamma \quad (4.9)$$

Substituindo na equação 4.3 que governa o problema de Helmholtz, tem-se:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = \omega^2 \int_{\Gamma}^{\xi} \alpha^j \eta^j(X; X^j) d\Gamma + \omega^2 \int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega \quad (4.10)$$

A função de base radial  $F^j(X; X^j)$  utilizada nesse trabalho é a função conhecida como função radial de placa fina (thin plate radial basis function), utilizada em outros trabalhos como Pereira (2016) e Barcelos (2014):

$$F^j(X; X^j) = r^2(X; X^j) \ln r(X; X^j) \quad (4.11)$$

O cálculo da função primitiva  $\Psi$  e de sua derivada multiplicada pela normal  $\Psi_{,i}^j n_i$  é mostrada no ANEXO I. Os valores dessas funções, que dependem de dois pontos – chamados pontos base e pontos de interpolação – são apresentados abaixo, omitindo-se os argumentos por simplicidade:

$$\Psi_{,i}^j n_i = \frac{r^4}{32} + \frac{r^4 \ln r}{16} \quad (4.12)$$

$$\frac{d\Psi_{,i}^j n_i}{dr} = \frac{r^3}{16} (4 \ln r - 1) \quad (4.13)$$

Ignorando, por conveniência, o segundo termo do LD da equação 4.10, escreve-se a equação matricialmente na forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ \mathbf{H}_{ic} & \mathbf{I}_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_i \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{cc} & \mathbf{0}_{ci} \\ \mathbf{G}_{ic} & \mathbf{0}_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix} \right\} = \omega^2 \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^n \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \dots \\ \mathbf{N}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \dots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Cada coeficiente  $\mathbf{A}_\xi$  é dado explicitamente por:

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^\xi\alpha^1 \\ \dots \\ {}^\xi\alpha^m \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

O termo  ${}^\xi\alpha$  pode ser calculado usando a equação de interpolação básica:

$${}^\xi\alpha = [\mathbf{F}]^{-1} [{}^\xi\Lambda] \mathbf{F} \alpha = [\mathbf{F}]^{-1} [{}^\xi\Lambda] \mathbf{u} \quad (4.16)$$

Expandindo os coeficientes  $\mathbf{A}_\xi$ , temos:

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \dots & \mathbf{N}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ F_{n1} & \dots & F_{nm} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} {}^\xi\Lambda^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {}^\xi\Lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^\xi\Lambda^1 u_\xi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {}^\xi\Lambda^n u_\xi \end{bmatrix} \right\} \quad (4.17)$$

Pode-se fazer, por conveniência, uma simplificação na seguinte forma:

$$\mathbf{A}_\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \dots & \mathbf{S}_n \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} {}^\xi\Lambda^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {}^\xi\Lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \dots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^\xi\Lambda^1 u_\xi & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & {}^\xi\Lambda^n u_\xi \end{bmatrix} \right\} \quad (4.18)$$

A subtração que se apresenta na equação 4.18 é responsável por eliminar a singularidade.

O último termo restante no LD na equação 4.10 deve ser operacionalizado agora. Retira-se primeiramente o  $u(\xi)$  da integral, pois seu valor já é conhecido neste ponto, tem-se:

$$\int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} u^*(\xi; X) d\Omega \quad (4.19)$$

Embora seja dado em termos de uma integral de domínio, sua estrutura permite reescrevê-lo em termos de um integral de contorno utilizando o conceito do Tensor de Galerkin (KYTHE, 1995).

O Tensor de Galerkin equivale a uma primitiva da solução fundamental:

$$u^*(\xi; X) = G_{,ii}^*(\xi; X) \quad (4.20)$$

Substituindo-o na equação (4.19):

$$\int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = u(\xi) \int_{\Omega} G_{,ii}^*(\xi; X) d\Omega \quad (4.21)$$

Com base na equação anterior, aplica-se o Teorema de Gauss para transformar a integral de domínio numa integral de contorno.

$$\int_{\Omega} u(\xi) u^*(\xi; X) d\Omega = u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i(\xi; X) d\Gamma \quad (4.22)$$

A função  $G_{,i}^* n_i(\xi; X)$ , que possui o cálculo apresentado no ANEXO II, é dada por:

$$G_{,i}^* n_i(\xi; X) = \frac{1}{4} P^X = \frac{1}{4} \{0.5 - \ln r(\xi; X)\} r_i n_i \quad (4.23)$$

Reescrevendo a equação completa:



$$\begin{aligned}
c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = \\
\omega^2 \int_{\Gamma} \xi \alpha^j \eta^j (X; X^j) d\Gamma + \omega^2 u(\xi) \int_{\Gamma} G_{,i}^* n_i(\xi; X) d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Todos os termos da equação anterior estão na forma de integrais de contorno, como se objetiva no MEC. Escreve-se a expressão como um todo na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} (A_1 - Z_1) \\ \dots \\ (A_n - Z_n) \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Ou ainda, por simplicidade, pode-se escrever o último termo da matriz como sendo uma matriz de massa do sistema:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ H_{n1} & \dots & H_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

Onde a matriz M representa o vetor A subtraindo o vetor Z em cada ponto calculado, colocando-se em evidência o vetor u, que é o potencial. Essa matriz já está multiplicada pelo quadrado da frequência,  $\omega^2$ .

## 5 FORMULAÇÃO PROPOSTA

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se uma nova formulação MECID para resolver problemas governados pela Equação de Helmholtz, sem empregar o procedimento de regularização. Apenas por conveniência, doravante no lugar do quadrado da frequência de excitação usa-se a constante  $\lambda$ . Propõe-se uma nova função auxiliar  $b^*(\xi; X)$  para que se possa integrar essa equação e levá-la de uma integral de domínio na forma forte para uma integral de contorno na forma inversa, conforme os procedimentos típicos do MEC. A função auxiliar é apresentada a seguir:

$$b^*(\xi, X) = u^*(\xi, X) - \lambda G^*(\xi, X) \quad (5.1)$$

A função auxiliar  $b^*$  proposta consiste da solução fundamental  $u^*$ , que é a solução fundamental de um problema correlato aos problemas governados pela Equação de Laplace e  $G^*$  é o Tensor de Galerkin. Então:

$$u^*(\xi, X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi, X) \quad (5.2)$$

$$G^*(\xi, X) = \frac{1}{8\pi} [r^2(\xi, X) - \ln r(\xi, X)] \quad (5.3)$$

### 5.2 EQUACIONAMENTO

Aplicando a função auxiliar dos dois lados da Equação de Helmholtz e realizando a integração, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} (u^* - \lambda G^*) d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} u (u^* - \lambda G^*) d\Omega \quad (5.4)$$

Expande-se a equação anterior para se desenvolver os termos conhecidos.

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii} G^* d\Omega = -\lambda \int_{\Omega} uu^* d\Omega + \lambda^2 \int_{\Omega} uG^* d\Omega \quad (5.5)$$

Ao observar-se a equação 5.5, pode-se notar que o primeiro termo do LE é semelhante ao termo desenvolvido na Equação de Laplace, pois  $u^*$  foi escolhido como a solução fundamental correlata ao problema de Laplace. Para resolver o primeiro termo do LE, utiliza-se a mesma estratégia de solução abordada no capítulo três, tem-se que:

$$\begin{aligned} -c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} u_{,ii} G^* d\Omega = \\ -\lambda \int_{\Omega} uu^* d\Omega + \lambda^2 \int_{\Omega} uG^* d\Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

Observando o quarto termo do LE da equação 5.6, que ainda está como uma integral de domínio, pode-se trabalhá-lo através da aplicação da integração por partes, de forma que, integrando a primeira vez, tem-se:

$$\lambda \int_{\Omega} u_{,ii} G^* d\Omega = \lambda \left[ \int_{\Omega} (u_{,i} G^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u_{,i} G^*_{,i}) d\Omega \right] \quad (5.7)$$

Pode-se ainda integrá-lo por partes mais uma vez:

$$\lambda \int_{\Omega} u_{,ii} G^* d\Omega = \lambda \left[ \int_{\Omega} (u_{,i} G^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (u G^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} (u G^*_{,ii}) d\Omega \right] \quad (5.8)$$

Aplica-se o Teorema da Divergência para levar o primeiro e o segundo termo após a igualdade para o contorno, conforme:

$$\lambda \int_{\Omega} u_{,ii} G^* d\Omega = \lambda \left[ \int_{\Gamma} (u_{,i} G^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u G^*_{,i}) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u G^*_{,ii}) d\Omega \right] \quad (5.9)$$

Ainda pode-se fazer uma última modificação, considerando que a derivada segunda do tensor de Galerkin  $G^*$  é igual a solução fundamental  $u^*$ , tem-se que:

$$G_{,ii}^*(\xi, X) = u^*(\xi, X) \quad (5.10)$$

Logo:

$$\lambda \int_{\Omega} u_{,ii} G^* d\Omega = \lambda \left[ \int_{\Gamma} (u_{,i} G^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u G_{,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (uu^*) d\Omega \right] \quad (5.11)$$

Substituindo a equação 5.11, na equação principal 5.6, tem-se:

$$\begin{aligned} -c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma - \lambda \left[ \int_{\Gamma} (u_{,i} G^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u G_{,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (uu^*) d\Omega \right] = \\ -\lambda \int_{\Omega} uu^* d\Omega + \lambda^2 \int_{\Omega} uG^* d\Omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

Duas novas funções foram introduzidas, ou seja:

$$u_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) = q^*(\xi; \mathbf{X}) = \left[ \frac{-1}{2\pi r(\xi; \mathbf{X})} \right] r_{,i}(\xi; \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) \quad (5.13)$$

$$G_{,i}^*(\xi; \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) = S^*(\xi; \mathbf{X}) = \left[ \frac{2 \ln r(\xi; \mathbf{X}) - 1}{8\pi} \right] r_{,i}(\xi; \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) \quad (5.14)$$

Expandindo a equação 5.12 e, por conveniência, invertendo o sinal, tem-se:

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma} (u_{,i} G^*) n_i d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} (u G_{,i}^*) n_i d\Gamma + \lambda \int_{\Omega} (uu^*) d\Omega = \\ \lambda \int_{\Omega} uu^* d\Omega - \lambda^2 \int_{\Omega} uG^* d\Omega \end{aligned} \quad (5.15)$$

Observa-se que o último termo do LE da equação 5.15 é igual ao primeiro termo do LD, portanto, anulam-se mutuamente. A equação completa pode ser escrita da forma:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma} (u_i G^*) n_i d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma} (u G_i^*) n_i d\Gamma =$$

$$\lambda^2 \int_{\Omega} u G^* d\Omega$$
(5.16)

Todos os termos do LE da equação estão de acordo com a metodologia de solução do MEC, com as integrais sendo realizadas ao longo do contorno. A integral de domínio restante do LD da equação pode ser resolvida através de uma aproximação do seu núcleo, fazendo-se:

$$u(\mathbf{X})G^*(\xi; \mathbf{X}) = \alpha^j F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$$
(5.17)

Conforme mostrado na equação 5.17, faz-se o uso de uma estratégia semelhante à utilizada na MECID Regularizada contida na equação 4.6, admitindo-se uma  $F^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})$  que é uma função de base radial e que possui uma função primitiva associada, definida aqui como  $\Psi_{,ii}^j$ . Porém, aqui, a integral no LE da equação 5.17 é formada pelo tensor de Galerkin enquanto na equação 4.6 a variável básica era multiplicada pela solução fundamental  $u^*$ . A mesma estratégia de solução usada anteriormente é aplicada aqui e o resultado final é mostrado na equação 5.18:

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{X})G^*(\xi; \mathbf{X})d\Omega(\mathbf{X}) = \alpha^i \int_{\Omega} F^i(X^i; X)d\Omega(\mathbf{X}) =$$

$$\alpha^j \int_{\Omega} \Psi_{,ii}^j(X)d\Omega(\mathbf{X}) = \alpha^j \int_{\Gamma} \Psi_{,i}^j(X)n_i d\Gamma(\mathbf{X}) = \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X)d\Gamma(\mathbf{X})$$
(5.18)

Onde:

$$\eta^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X}) = \Psi_{,i}^j(\mathbf{X}^j; \mathbf{X})n_i$$
(5.19)

Como  $\Psi_{,ii}^j$  é conhecido,  $\eta^j$  pode ser facilmente calculado, conforme o Anexo I, tem-se:

$$\eta^j(X^j; X) = \Psi_{,i}^j(X^j; X)n_i = \frac{r^2}{16} [4 \ln r(X^j; X) - 1] r_i n_i \quad (5.20)$$

É necessário calcular os valores dos coeficientes  ${}^\xi \alpha^j$ , dados por:

$${}^\xi \alpha^j = F^j(X^j; X)^{-1} G^*(\xi; X) u(X) \quad (5.21)$$

Escrevendo a Equação 5.21 na forma matricial para um  $\xi$  genérico:

$${}^\xi \alpha^j = [F^j]^{-1} [\Lambda^*](u) \quad (5.22)$$

$$\begin{bmatrix} {}^\xi \alpha^1 \\ \dots \\ {}^\xi \alpha^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1(X^1; X^1) & \dots & F^n(X^n; X^1) \\ \dots & \dots & \dots \\ F^1(X^1; X^n) & \dots & F^n(X^n; X^n) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.23)$$

$$\begin{bmatrix} u^*(\xi^1; X^1) & 0 & 0 \\ 0 & u^*(\xi^1; X^2) & 0 \\ 0 & 0 & u^*(\xi^1; X^3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Substitui-se a equação 5.21 na equação 5.18.

$$\lambda^2 \int_{\Omega} u G^* d\Omega = \lambda^{2\xi} \alpha^j N^j \quad (5.24)$$

Logo:

$$\lambda^{2\xi} \alpha^j N^j = \lambda^{2\xi} * \begin{bmatrix} N^1 & \dots & N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^\xi \alpha^1 \\ \dots \\ {}^\xi \alpha^n \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Expandindo o vetor alfa, temos:

$$\lambda^2 \mathbf{M}u = \lambda^2 \begin{bmatrix} N^1 & \dots & N^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^1(X^1; X^1) & \dots & F^n(X^n; X^1) \\ \dots & \dots & \dots \\ F^1(X^1; X^n) & \dots & F^n(X^n; X^n) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.26)$$

$$\begin{bmatrix} u^*(\xi^1; X^1) & 0 & 0 \\ 0 & u^*(\xi^1; X^2) & 0 \\ 0 & 0 & u^*(\xi^1; X^3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Fazendo referência aos termos na forma matricial, onde agora todos os termos foram calculados e são conhecidos, ela pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H}u - \mathbf{G}q + \lambda \mathbf{W}u - \lambda \mathbf{S}q = \lambda^2 \mathbf{M}u \quad (5.27)$$

## 6 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 6.1 INTRODUÇÃO

A implementação dos algoritmos responsáveis pela solução numérica, tanto da nova formulação proposta quanto da MECID Regularizada, foram realizadas em linguagem de programação FORTRAN.

Os problemas apresentados aqui possuem geometria simplificada, pois o objetivo maior é a validação do método proposto; portanto, as soluções analíticas são conhecidas, com exceção do problema cinco, que possui uma geometria mais elaborada e foi resolvido e comparado com o Método dos Elementos Finitos (MEF).

As soluções analíticas utilizadas neste trabalho foram desenvolvidas como parte do mesmo, pois não se encontravam na literatura especializada. Foram tomadas dimensões unitárias por conveniência. A frequência foi variada de modo a testar diferentes condições.

A formulação MECID Regularizada já demonstrou que a densidade da nuvem de pontos internos interpolantes é muito importante na qualidade dos seus resultados. Sendo assim, avaliou-se a nova formulação proposta quanto à variação da quantidade de pontos internos, em relação às diferentes malhas de contorno. As malhas utilizadas nas duas formulações são iguais. Foram considerados nós duplos nos vértices e elementos de interpolação linear.

Buscando realizar uma comparação justa, como o erro não é uniforme, tomou-se como medida do erro a média aritmética de todos os pontos amostrais, onde a diferença do erro foi calculada em relação ao valor analítico encontrado naquele ponto discreto, conforme a Equação 6.1.

$$\text{Erro} = \sum_{i=1}^n \frac{u_{\text{ap}}(i) - u_{\text{an}}(i)}{|u_{\text{Man}}|} * 100 \quad (6.1)$$

Onde  $u_{\text{ap}}(i)$  representa o valor do potencial numérico calculado no ponto  $i$ ,  $u_{\text{an}}(i)$  representa o valor do potencial analítico no ponto  $i$  e  $|u_{\text{Man}}|$  é o maior valor do potencial analítico calculado em módulo e  $n$  representa o número total de potenciais calculados. Para todos os problemas foram considerados os pontos  $i$  do contorno, exceto



no problema 03, onde foram considerados no cálculo do erro apenas os pontos internos, pois o contorno foi totalmente prescrito.

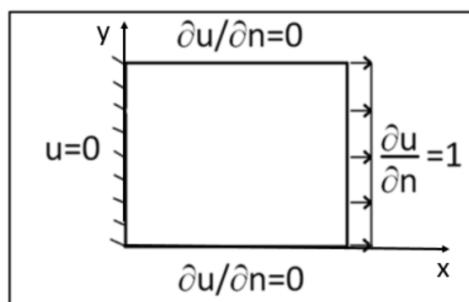
## 6.2 PROBLEMA 01

O Problema 01 é caracterizado pela solução de um problema bidimensional, representado por uma barra elástica engastada, governado pela equação 6.2:

$$k^2 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = -\omega^2 u \quad (6.2)$$

A geometria do problema e as condições de contorno prescritas são mostradas na Figura 6.1.

Figura 6.1: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 01.



As condições de contorno deste problema são:

$$\begin{cases} u(0, x_2) = 0 \\ u'(x_1, 0) = 0 \\ u'(1, x_2) = 1 \\ u'(x_1, 1) = 0 \end{cases}$$

Devido à simetria geométrica, este caso pode ser modelado como um problema unidimensional. Considerando  $k$  como unitário, a solução analítica para este problema é dada pela equação 6.3:

$$u(x) = \frac{\sin(\omega x)}{\omega \cos(\omega)} \quad (6.3)$$

O objetivo é resolver esse problema numericamente com várias frequências diferentes. As frequências utilizadas para a simulação variam de 1.0 até 20.0 com intervalo de 0.5.

A restrição do uso de frequências do problema 01 ocorre para  $\cos(\omega) \neq 0$ , ou seja, as frequências devem ser diferentes de  $\omega = n\pi/2$ , sendo  $n$  um número inteiro ímpar. Quando a frequência de excitação utilizada na simulação está muito próxima à frequência natural do problema, a solução analítica tende ao infinito e espera-se uma resposta quase singular do método numérico, obtendo picos de erros.

Os resultados da simulação do problema 01 para diferentes malhas de contorno, e para diferentes nuvens de pontos internos, são apresentados a seguir:

Figura 6.2: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear com uma malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos.

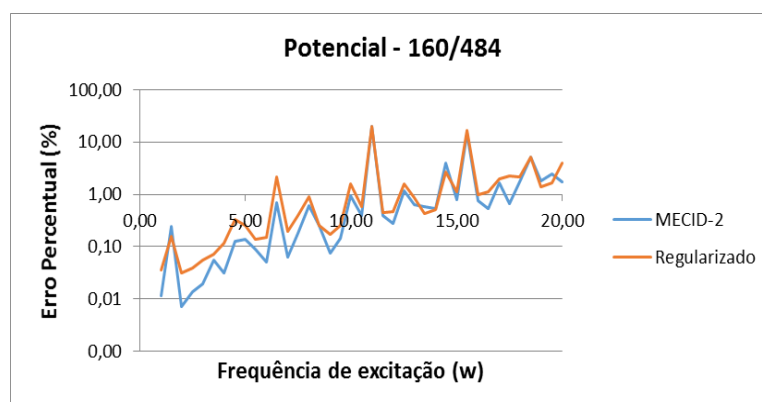


Figura 6.3: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malhas de 320 elementos de contorno e 324 pontos internos.

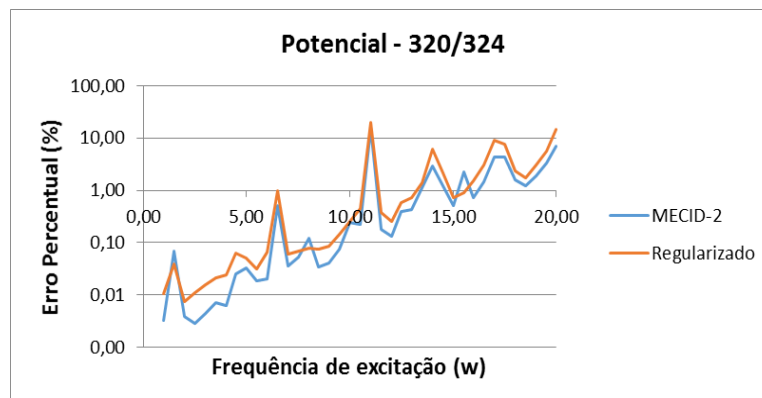
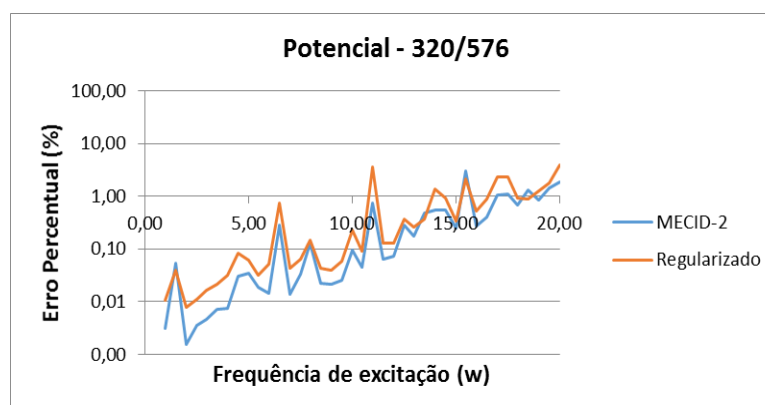


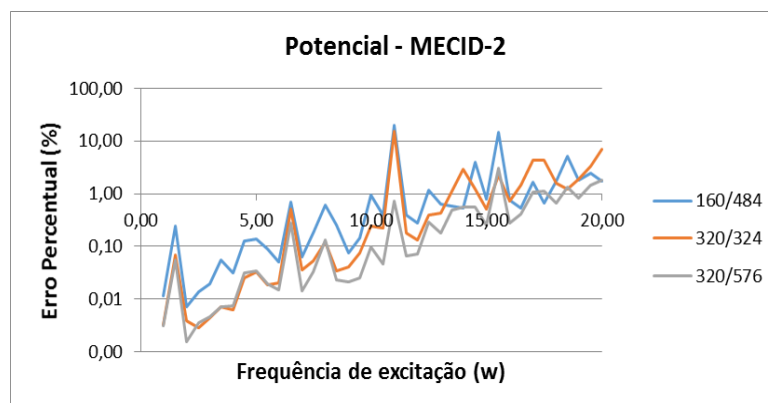
Figura 6.4: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malhas de 320 elementos de contorno e 576 pontos internos.



Observa-se que em todas as simulações o desempenho da MECID-2 foi melhor que o resultado da MECID Regularizada. Os erros caíram tanto quando se refinou a malha de contorno quanto se empregou um maior número de pontos interpolantes no interior, conforme se pode inferir pela comparação das figuras anteriores.

Na figura 6.5 mostram-se apenas as soluções da MECID-2, com o objetivo de comparar a influência do refinamento da malha sobre os resultados obtidos.

Figura 6.5: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica carregada pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malhas de 160, 320 e 320 elementos de contorno e, respectivamente, 484, 324 e 576 pontos internos.



Na figura 6.5 pode-se observar mais facilmente que, o refinamento da malha do contorno na MECID-2 gerou melhores resultados, pois o resultado da malha com 320 elementos foi melhor do que o resultado da malha com 160 elementos, mesmo considerando uma nuvem de pontos inferior. Pelo menos neste exemplo, o refinamento de contorno foi relativamente mais importante do que o refinamento interno, mas nem sempre esse comportamento é observado, pois há outros fatores envolvidos.

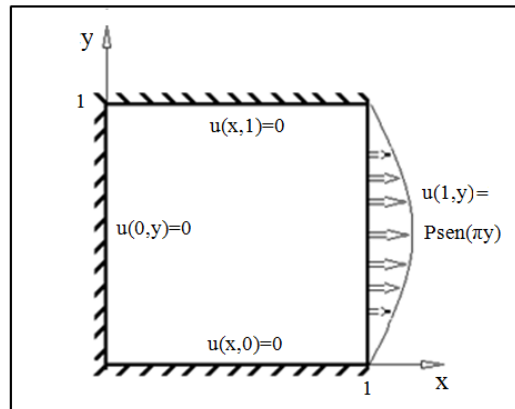
Porém, a importância da nuvem de pontos internos não é pouco significativa. Pode-se notar que a malha com 320 elementos e 576 pontos internos tem um desempenho melhor do que a malha com 320 elementos e 324 pontos internos, validando a importância dos pontos interpolantes no interior.

Percebe-se ainda que para valores de frequências cada vez mais elevadas o desempenho dos resultados, em relação ao tamanho das malhas usadas, ficam cada vez mais próximos. A razão disto é que o erro tende a ficar mais elevado para frequências maiores pois, conforme mostrado na formulação, a matriz de massa é dada por uma aproximação na qual é multiplicada pelo quadrado da frequência, aumentando sua influência sobre o resultado final. Mesmo as malhas mais refinadas não mais conseguem captar com precisão os valores das frequências mais altas.

### 6.3 PROBLEMA 02

No Problema 02, um problema bidimensional é resolvido. Apenas condições de contorno essenciais são prescritas, conforme indicado na Figura 6.6.

Figura 6.6: Características geométricas e condições de contorno para o Problema02: Membrana carregada.



A equação de governo para este problema é dada por:

$$k^2 \left[ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = -\omega^2 u(x, y) \quad (6.4)$$

As condições de contorno do problema 02 são:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(1, y) = P \text{sen}(\pi y) \\ u(x, 1) = 0 \end{cases}$$

A solução analítica do Problema 02 obtida pelo método de separação de variáveis, assumindo k e P com valor unitário, é dada pela equação 6.5:

$$u(x, y) = \frac{\sin(x\sqrt{\omega^2 - \pi^2}) \sin(\pi y)}{\sin(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (6.5)$$

O objetivo é resolver esse problema numericamente com várias frequências diferentes. Como a função seno não pode ter argumentos imaginários,  $\omega^2 \geq \pi^2$ , as frequências utilizadas para a simulação do problema 02 se iniciam com valor 4.0 variando até 20.0, com intervalo de 0.5. Com exceção para as frequências de 16.00 e

19.00 que foram substituídas respectivamente por 15.90 e 18.90 devido à proximidade com as frequências naturais calculadas.

A complexidade numérica deste caso é significativamente superior ao problema anterior devido às características das condições de contorno, que são todas prescritas na variável básica, condições essenciais, causando um enrijecimento do sistema, fazendo com que o número de frequências naturais captadas seja superior.

As frequências naturais para esse problema são calculadas pela equação 6.5:

$$\omega = \sqrt{(n^2 + 1)}\pi^2 \quad (6.6)$$

As primeiras seis frequências naturais deste problema são: 4,44; 7,02; 9,93; 12,95; 16,02; 19,11.

Os resultados das simulações do problema 02 são apresentados a seguir:

Figura 6.7: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84 elementos de contorno e 484 pontos internos.

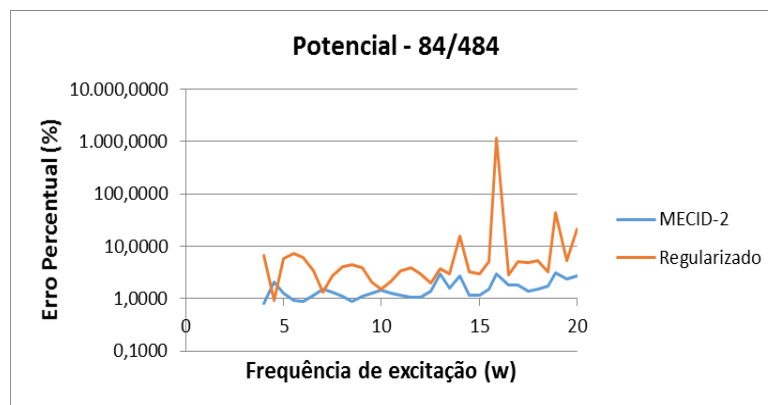


Figura 6.8: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos.

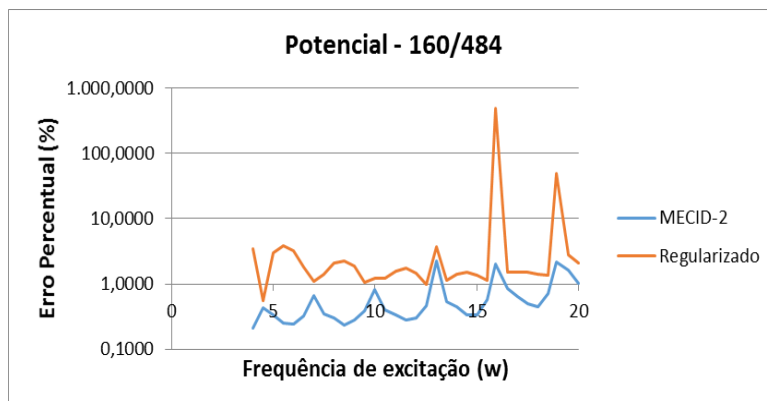


Figura 6.9: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 324 pontos internos.

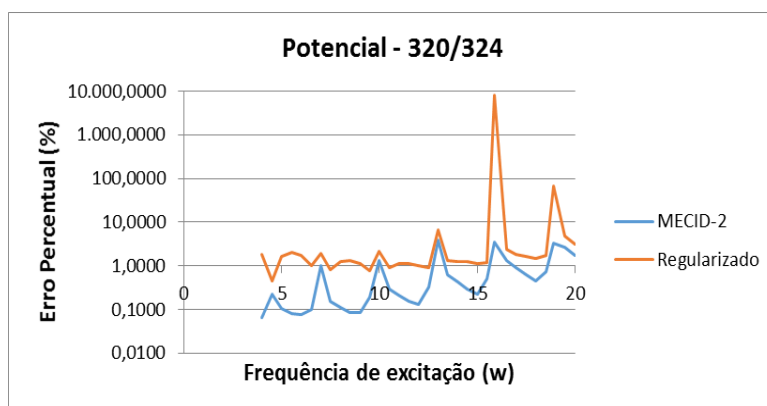
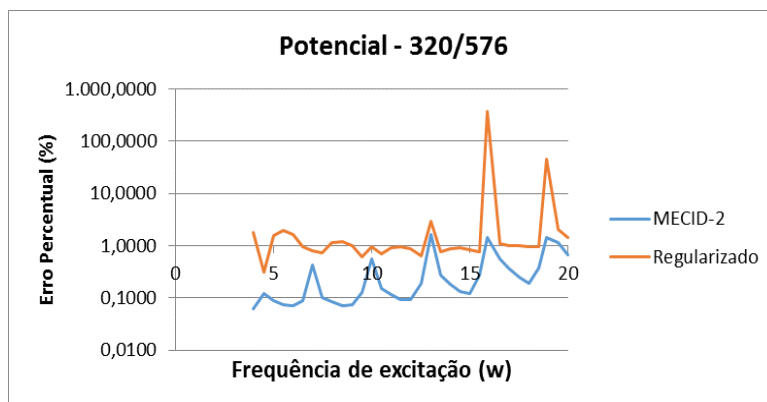


Figura 6.10: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 576 pontos internos.

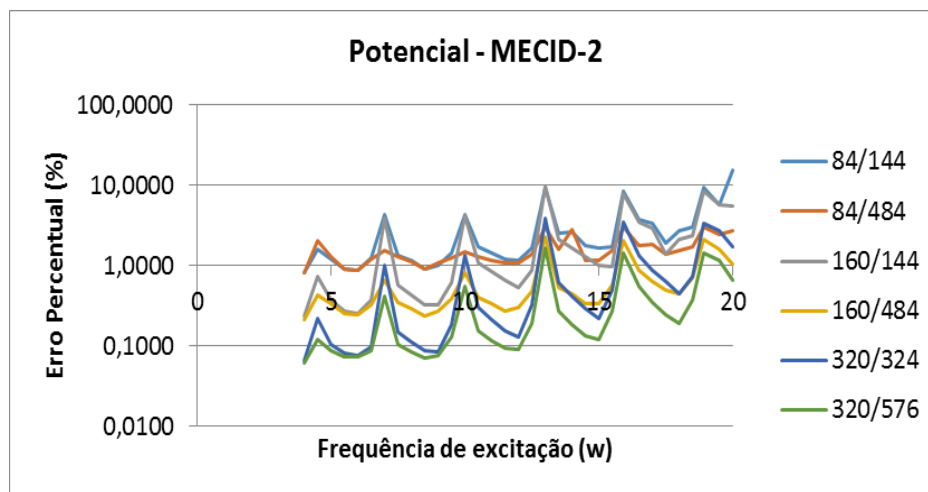


Observa-se que tal como no primeiro exemplo, o desempenho da MECID-2 foi melhor que o resultado da MECID Regularizada em todas as situações. O erro cometido foi reduzido em ambas as formulações quando a malha foi refinada e a quantidade de pontos interpolantes no interior foi ampliada.

Um ponto importante a se notar foi o aparecimento de um pico de erro no resultado numérico para a frequência calculada de 15.90 e 18.90. Isso se deve ao fato de estarem muito próximas da frequência natural de 16.02 e 19.11. Como citado anteriormente, a proximidade com a frequência natural tende a levar o resultado do erro ao infinito.

Na figura 6.11 mostram-se apenas as soluções da MECID-2, com o objetivo de comparar a influência do refinamento da malha e a influência dos pontos internos sobre os resultados obtidos.

Figura 6.11: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malhas de 84, 84, 160, 160, 320, 320 elementos de contorno e, respectivamente, 144, 84, 144, 484, 324 e 576 pontos internos.



Observa-se que o refinamento da malha de contorno e o incremento dos pontos internos gerou melhores resultados. O resultado da malha mais refinada com 320 elementos no contorno e com maior número de pontos internos, 576 pontos internos, foi o melhor resultado obtido nesse exemplo.

Comparando a malha de 84 elementos no contorno com a malha com 160 elementos no contorno, é possível afirmar que o refinamento da malha produziu melhores resultados, para uma mesma quantidade de pontos internos. Quanto à variação na quantidade de pontos internos, é possível notar que nas três malhas utilizadas o



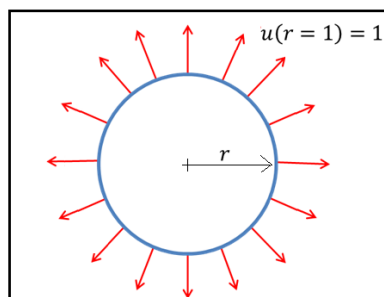
refinamento dos pontos internos produziu melhores resultados e, em alguns pontos, a malha com menor refinamento no contorno e maior refinamento interno produziu melhores resultados do que uma malha mais refinada no contorno. É o caso da comparação da malha com 160 elementos no contorno e 484 pontos internos com a malha de 320 elementos no contorno e 324 pontos internos, que demonstrou, em algumas frequências, um desempenho relativamente melhor.

Mesmo considerando uma nuvem de pontos internos inferior, na malha com 320 elementos de contorno e 324 pontos internos comparado com a malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos, o fator do refinamento de contorno permanece com maior destaque do que o refinamento interno.

#### 6.4 PROBLEMA 03

O Problema 03 é apresentado na figura 6.12 e foi proposto por Zhu e Zhang (2007), onde somente o potencial no contorno foi prescrito.

Figura 6.12: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 03: Membrana circular carregada.



A geometria do contorno é um círculo unitário com centro na origem do sistema de coordenadas. Todas as constantes são tomadas como unitárias. A solução analítica para este problema é composta por funções de Bessel dada pela equação 6.6:

$$u = \frac{J_0(\omega r)}{J_0(\omega)} \quad (6.7)$$

A condição de contorno deste problema é:

$$\{u(r=1)=1$$

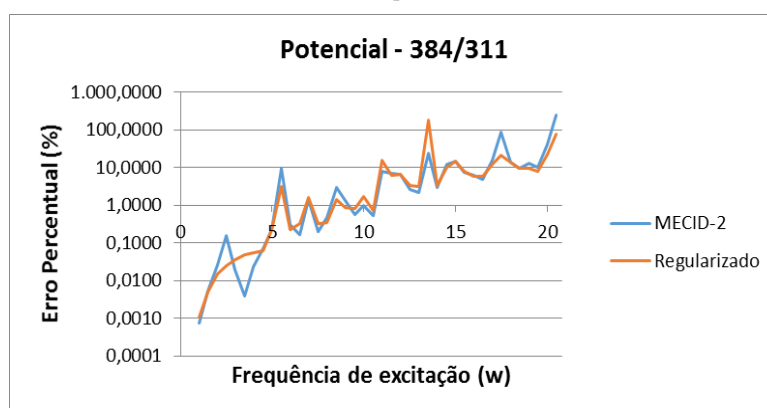
A equação 6.7 é composta pela equação de Bessel de primeira espécie e ordem zero e, quando essa função tender a zero a equação 6.6 tende ao infinito, nesse ponto se encontram as primeiras frequências naturais do sistema, que são: 2,41; 5,52; 8,65; 11,79; 14,93.

O objetivo é resolver esse problema numericamente com várias frequências diferentes iniciando-se por 1.0 variando-se até a frequência número 20.0, com intervalo de 0.5.

Como todo o contorno é prescrito pela condição essencial, o cálculo do erro será realizado levando em consideração o valor do potencial nos pontos internos. Para malhas com menor refinamento esperam-se erros maiores, devido à geometria do problema ser aproximada por elementos lineares. Por esse motivo, utilizou-se uma malha de contorno com quantidades maiores de elementos do que nos exemplos anteriores e avaliou-se o resultado quanto à variação da quantidade de pontos internos. A distribuição dos pontos internos foi realizada através de um malhador do próprio autor, considerando uma uniformidade em sua distribuição no domínio circular.

Os resultados da simulação do problema 03 são apresentados a seguir:

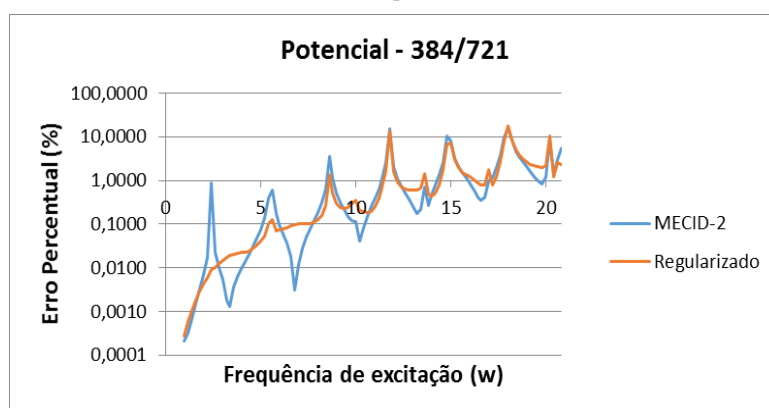
Figura 6.13: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 384 elementos de contorno e 311 pontos internos.



Observa-se na primeira simulação com 384 elementos no contorno e 311 pontos internos que a formulação MECID regularizada apresentou um perfil de erro menor e mais regular em todo o espectro examinado. Quando se implementou um aumento na

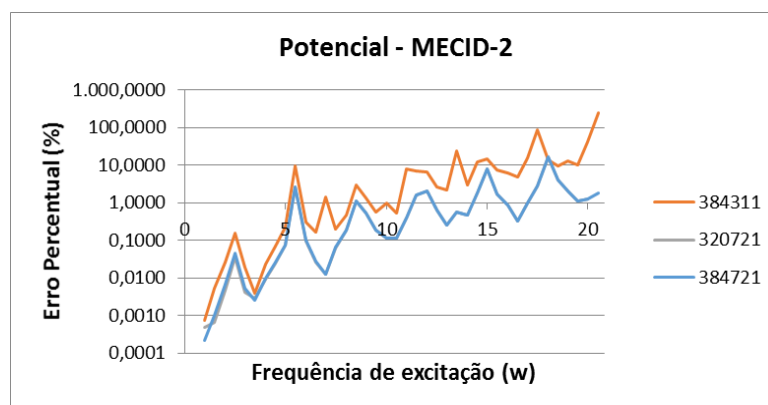
quantidade de pontos internos, figura 6.14, para o mesmo refinamento no contorno os resultados da formulação proposta melhoraram bastante. Há grande diferença nos valores de erro para a faixa de menores frequências e tudo indica que a MECID regularizada não está captando os picos de erro no entorno das frequências naturais. De alguma forma, o fato do contorno ser constituído de segmentos angulosos – pois não são usados nós duplos nos elementos de contorno - afetou de modo distinto as formulações examinadas.

Figura 6.14: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECID-2 e pelo Método Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 384 elementos de contorno e 721 pontos internos.



A seguir, na figura 6.15, é apresentado o resultado da comparação apenas com a nova formulação MECID-2, com o objetivo de comparar a influência do refinamento da malha e a influência dos pontos internos sobre os resultados obtidos.

Figura 6.15: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malhas de 384, 320 e 384 elementos de contorno e, respectivamente, 311, 721 e 721 pontos internos.

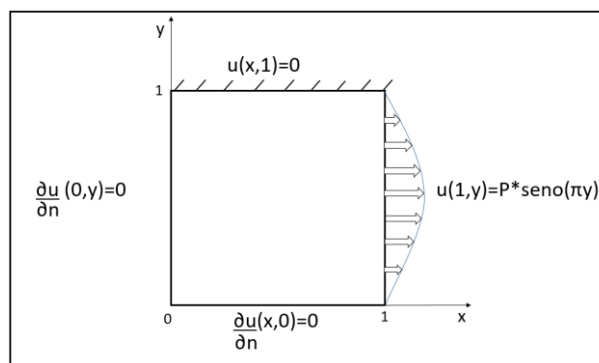


Observa-se que a malha mais robusta com maior quantidade de pontos internos foi a que gerou melhores resultados. Ressalta-se novamente a importância da quantidade da nuvem interna de pontos para uma melhor qualidade final do resultado. Nos exemplos mostrados até aqui, uma maior quantidade de pontos internos sempre favoreceu na geração de melhores resultados.

## 6.5 PROBLEMA 04

Mais um problema bidimensional é resolvido, em que condições de contorno essenciais e naturais são prescritas, conforme indicado na Figura 6.16.

Figura 6.16: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 04.



A equação de governo para este problema é dada por:

$$k^2 \left[ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = -\omega^2 u(x, y) \quad (6.8)$$

As condições de contorno do problema 04 são:

$$\begin{cases} u'(0, x_2) = 0 \\ u'(x_1, 0) = 0 \\ u(1, x_2) = P \text{sen}(\pi y) \\ u(x_1, 1) = 0 \end{cases}$$

A solução analítica do Problema 04 obtida pelo método de separação de variáveis (vide Anexo III), assumindo  $k$ ,  $L$  (lado do quadrado) e  $P$  com valor unitário, é dada pela equação 6.8:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\sin(\pi y) \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}} x(i)\right)}{\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}}\right)} \right] \quad (6.9)$$

O objetivo é resolver esse problema numericamente com várias frequências diferentes. Respeitando-se as condições da equação 6.9, o valor de “ $n$ ” deve ser ímpar para que o  $\cos(\beta L) = 0$ , foram adotadas as frequências à partir de 3.00 para que o núcleo da raiz da equação 6.9 seja sempre positivo. Buscando sempre evitar ressonância, as frequências utilizadas para a simulação do problema iniciam-se em 3,00 variando até 20.00, com intervalo de 0.5.

Os resultados da simulação do problema 04 são apresentados a seguir:

Primeiramente, a simulação com 84 elementos no contorno e 144 pontos internos, apresentado na figura 6.17. O desempenho da MECID-2 apresentou melhores resultados em comparação com a formulação MECID Regularizada. Esse resultado foi ainda melhor, quando a quantidade de pontos internos foi aumentada de 144 para 484 pontos, mantendo a mesma quantidade de elementos do contorno, conforme foi apresentado na figura 6.18. Conforme esperado, os erros se reduziram bastante com a introdução de maior número de pontos internos interpolantes.

Figura 6.17: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84 elementos de contorno e 144 pontos internos.

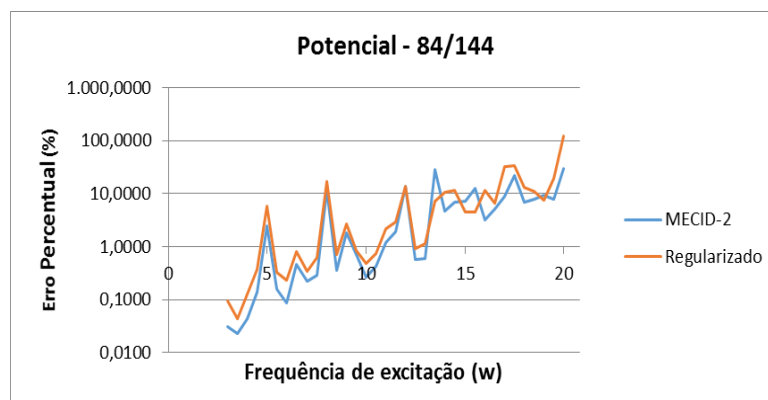
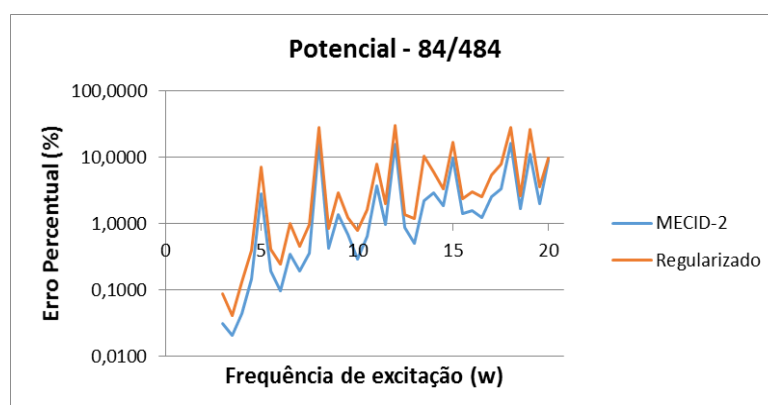


Figura 6.18: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84 elementos de contorno e 484 pontos internos.



Esse mesmo comportamento se repete para a malha com 160 elementos no contorno. Na figura 6.19, o resultado da MECID-2 é melhor que a MECID Regularizada e, na figura 6.20, quando a nuvens de pontos internos é aumentada para 484 pontos, a MECID-2 amplia seu desempenho em relação a outra formulação.

Figura 6.19: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 160 elementos de contorno e 144 pontos internos.

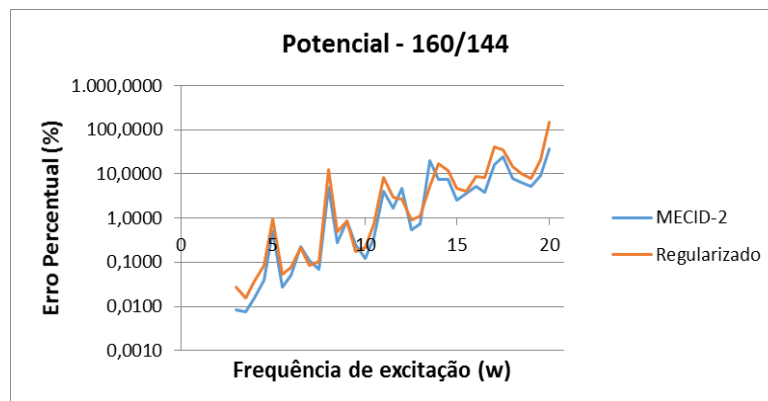
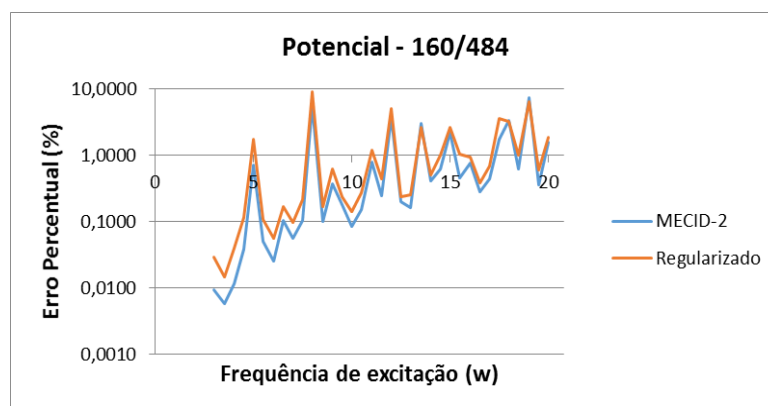


Figura 6.20: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 160 elementos de contorno e 484 pontos internos.



Apresenta-se nas figuras 6.21 e 6.22 uma malha mais robusta no contorno, com 320 elementos. No primeiro caso, figura 6.21, a malha possui uma nuvem de 324 pontos internos. O resultado comparativo demonstrou que as curvas de erro estão bem próximas, apesar da média da MECID-2 ser um pouco melhor em comparação com a MECID Regularizada. No último caso, figura 6.22, a malha possui 576 pontos internos e teve resultados comparativos semelhantes ao apresentado na figura 6.21. A curva de erro ficou próxima nas duas formulações; mas, na média, a nova formulação permanece com resultado superior. Demonstra-se, nos casos simulados neste problema, que a nova formulação é superior ou de mesma robustez que a formulação MECID Regularizada. Vale ressaltar que a malha mais robusta apresenta erros máximos na faixa de 3%.

Figura 6.21: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 324 pontos internos.

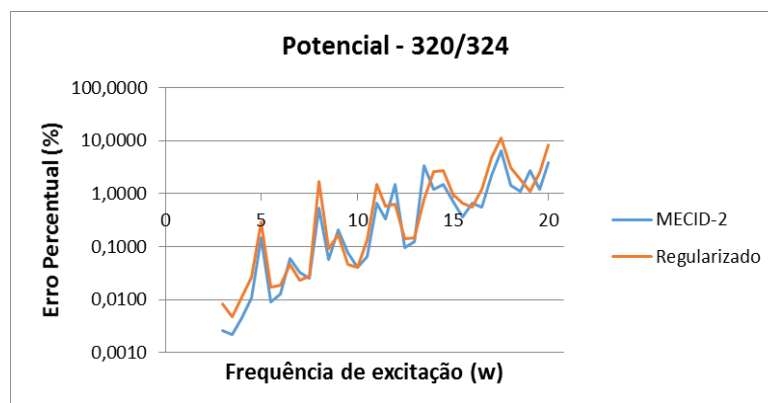
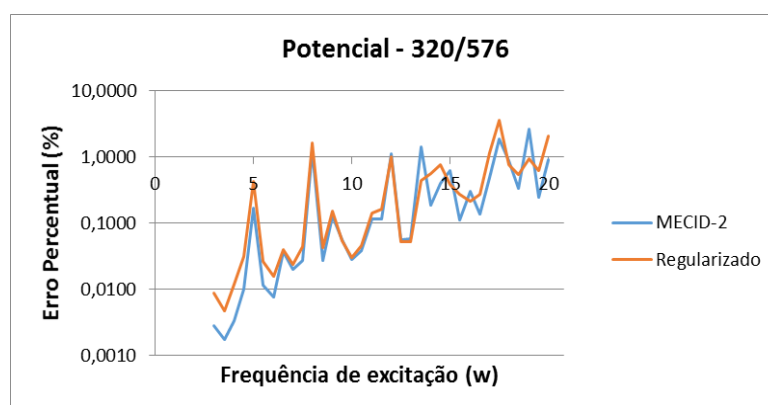


Figura 6.22: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 320 elementos de contorno e 576 pontos internos.



A seguir, é apresentado o resultado da comparação apenas com a nova formulação MECID-2, com o objetivo de comparar a influência do refinamento da malha e a influência dos pontos internos sobre os resultados obtidos. Nas figuras 6.23, 6.24 e 6.25 o objetivo é avaliar a influência no refinamento dos pontos internos.



Figura 6.23: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 84 elementos de contorno e 144 e 484 pontos internos.

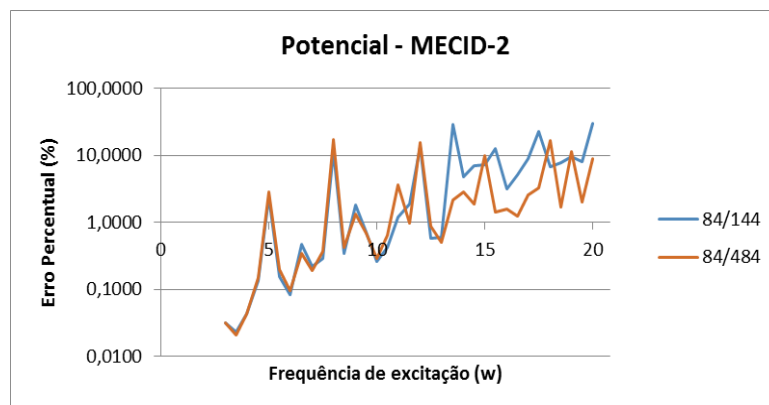


Figura 6.24: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 160 elementos de contorno e 144 e 484 pontos internos.

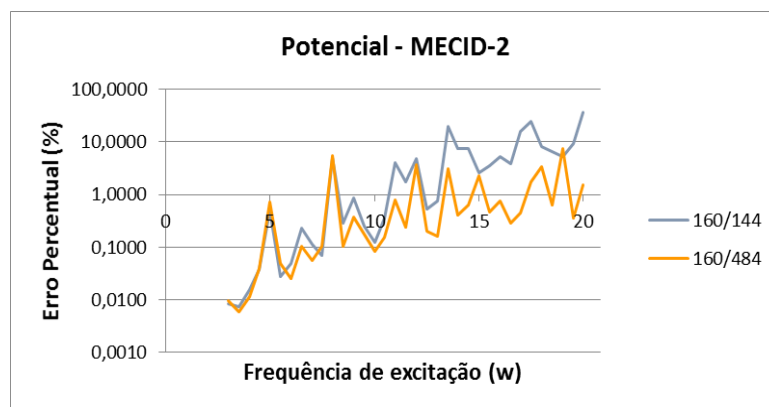
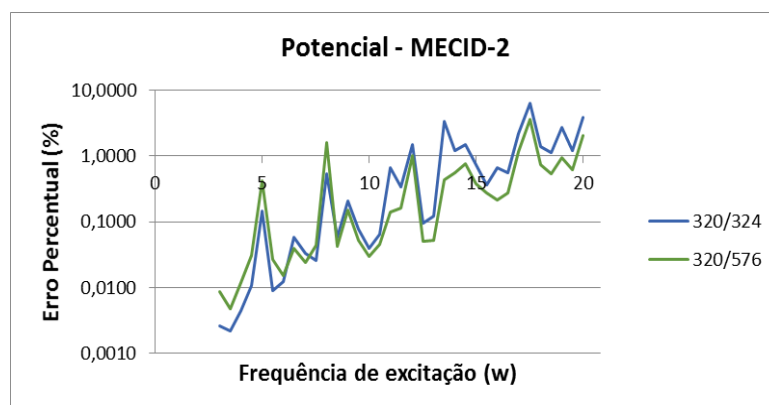


Figura 6.25: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 320 elementos de contorno e 324 e 576 pontos internos.



Para cada figura apresentada acima se manteve a quantidade de elementos do contorno e variou-se a quantidade de pontos internos, visando avaliar sua influência. Nos três resultados que seguem, se pôde perceber que aumentar o refinamento produz

resultados melhores, especialmente para frequências mais altas. Isso reafirma a importância dos pontos internos na geração de bons resultados. No terceiro caso, para as primeiras frequências, houve uma diminuição da precisão do resultado com a malha com mais pontos interpolantes internos. Não se pode concluir precisamente a causa desse comportamento; contudo, em se tratando de funções radiais, a disposição dos pontos no interior costuma causar alguns problemas localizados, como a quebra de monotonicidade na curva de erro, por exemplo.

À seguir realiza-se uma análise da nova formulação relativamente à variação na mudança da quantidade de elementos no contorno. Considera-se a mesma quantidade de pontos internos e se varia a quantidade de elementos no contorno.

Figura 6.26: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 84 e 160 elementos de contorno e 144 pontos internos.

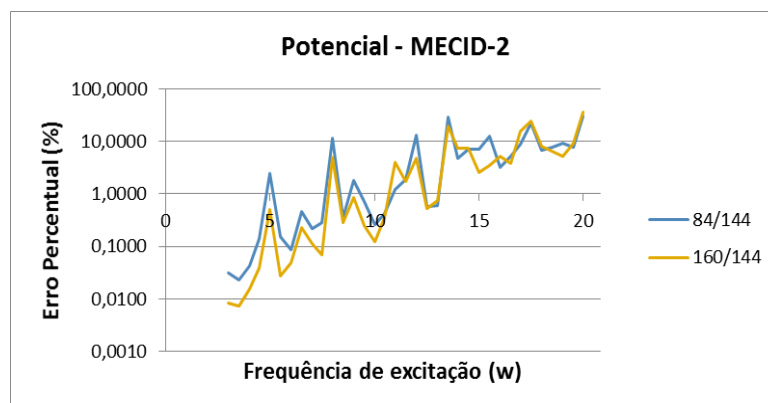
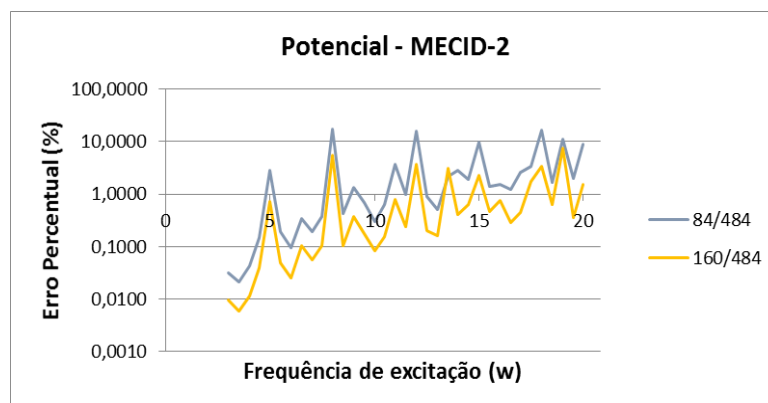


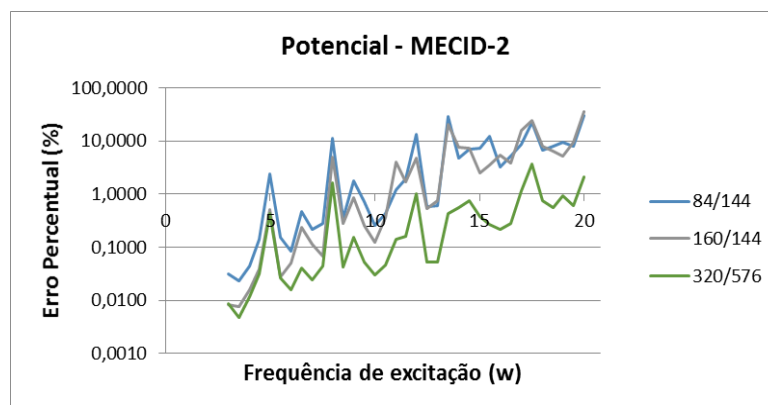
Figura 6.27: Erro médio ponderado no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, para as malhas com 84 e 160 elementos de contorno e 484 pontos internos.



No resultado das figuras 6.26 e 6.27, como esperado, nota-se que o refinamento do contorno, mantendo a quantidade de pontos internos, produz melhores resultados.

À seguir, na figura 6.28, são mostrados os resultados das três malhas empregadas nesse problema para ampliar a discussão desses resultados apresentados até aqui.

Figura 6.28: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 04 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 84, 160 e 320 elementos de contorno, respectivamente e, 144, 144 e 576 pontos internos.

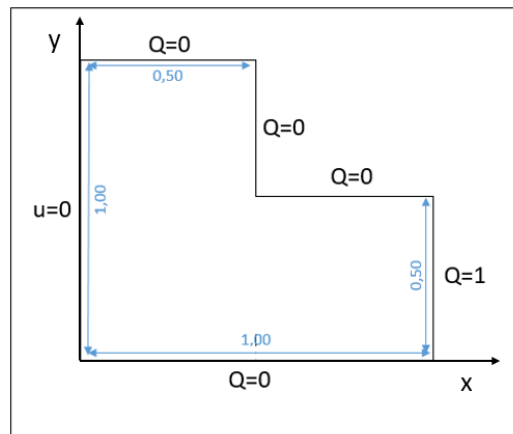


Observa-se que o refinamento da malha de contorno e o incremento da quantidade de pontos internos gerou melhores resultados. O resultado da malha mais refinada com 320 elementos no contorno e com maior número de pontos internos, 576 pontos internos, foi o melhor resultado obtido nesse exemplo.

## 6.6 PROBLEMA 05

No Problema 05 é resolvido um problema bidimensional com uma geometria um pouco mais elaborada, visando observar ainda mais a capacidade da nova formulação. A reentrância existente nesse caso faz com que o cálculo das frequências naturais fique bem mais difícil. As condições de contorno estão prescritas, conforme indicado na Figura 6.29.

Figura 6.29: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 05.



A equação de governo para este problema é dada por:

$$k^2 \left[ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = -\omega^2 u(x, y) \quad (6.10)$$

As condições de contorno deste problema são:

$$\begin{cases} u(0, x_2) = 0 \\ u'(x_1, 0) = 0 \\ u'(1, x_2) = 1 \\ u'(x_1, 0.5) = 0 \\ u'(0.5, x_2) = 0 \\ u'(x_1, 1) = 0 \end{cases}$$

A solução do Problema 05 foi comparada com o Método dos Elementos Finitos. O problema foi resolvido através do MEF utilizando uma malha estruturada construída à partir do software GMesh com 12.288 elementos triangulares e 6.273 nós totais, sendo 98 nós no contorno (prescritos), assumindo  $k$  com valor unitário. O Resultado do MEF foi obtido à partir de um algoritmo implementado pelo próprio autor através do software Matlab, versão estudantil R2014a. O resultado foi comparado com as formulações analisadas neste trabalho.

O objetivo é resolver esse problema numericamente com várias frequências diferentes. As frequências utilizadas para a simulação do problema 05 se iniciam em 3.00 até 20.00, com um incremento de 0.5.

Os resultados da simulação do problema 05 são apresentados a seguir:

Figura 6.30: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 134 elementos de contorno e 81 pontos internos.

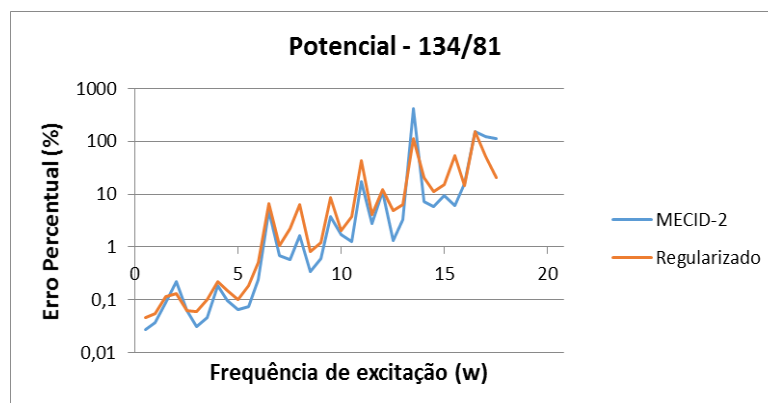


Figura 6.31: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 134 elementos de contorno e 353 pontos internos.

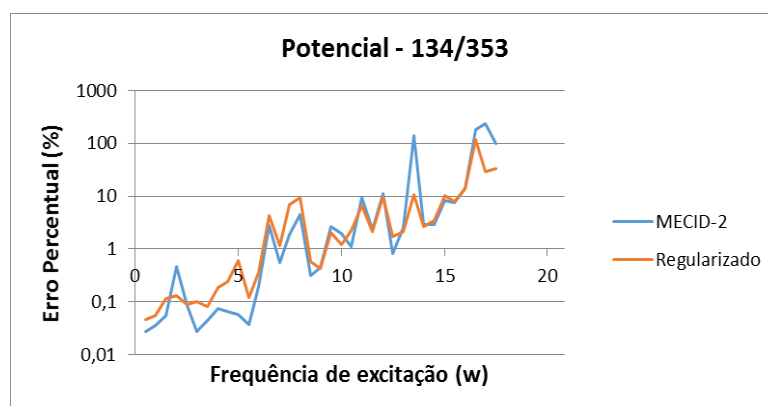
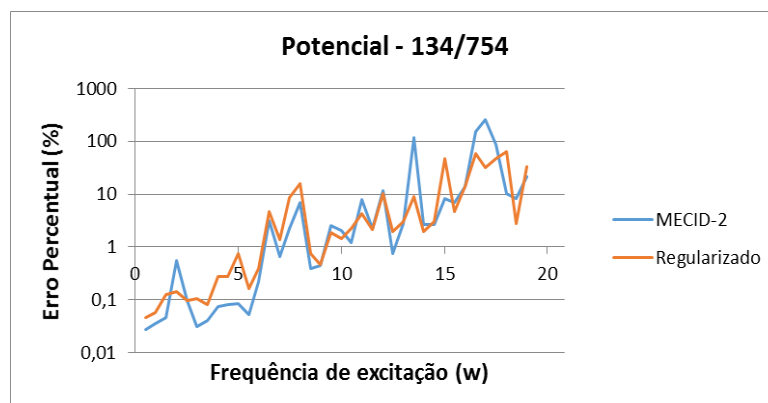


Figura 6.32: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 134 elementos de contorno e 754 pontos internos.

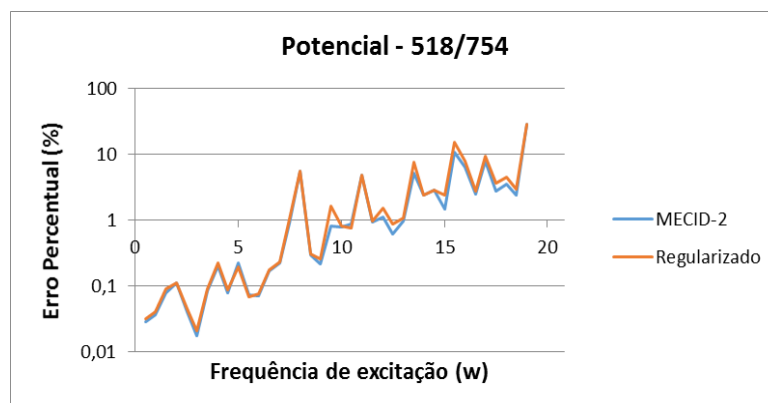


Observa-se que na primeira simulação com 134 elementos no contorno e 81 pontos internos, apresentado na figura 6.30, o desempenho da MECID-2 apresentou

melhores resultados em comparação com a formulação MECID Regularizada. Esse resultado se repete para todas as outras malhas simuladas neste exemplo. Na figura 6.31 pode-se perceber que existe um pico maior de erro para a nova formulação MECID-2 comparada com a MECID Regularizada, na frequência de 13,50. Esse fator é devido à proximidade com uma frequência natural do sistema.

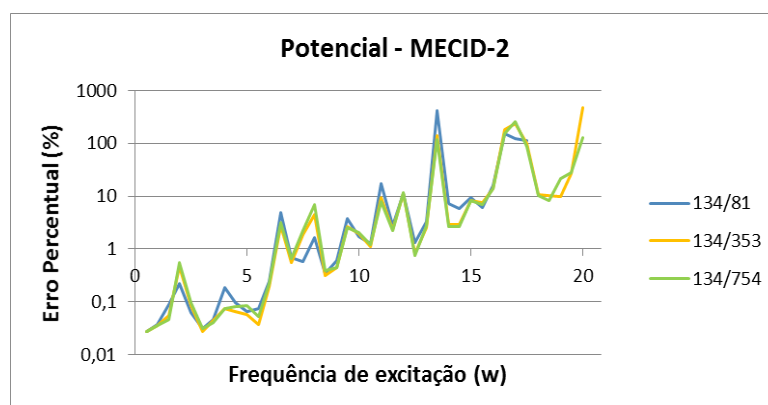
Na figura 6.33 é comparado o desempenho das duas formulações para uma malha bastante refinada no contorno e com maior número de pontos internos. Comparativamente às simulações anteriores percebe-se que o refinamento do contorno fez os erros caírem significativamente, ficando numa faixa próxima de 10%. Deve-se levar em conta que a dificuldade numérica deste problema.

Figura 6.33: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 e pelo MECID Regularizado com elementos de interpolação linear, malha de 518 elementos de contorno e 754 pontos internos.



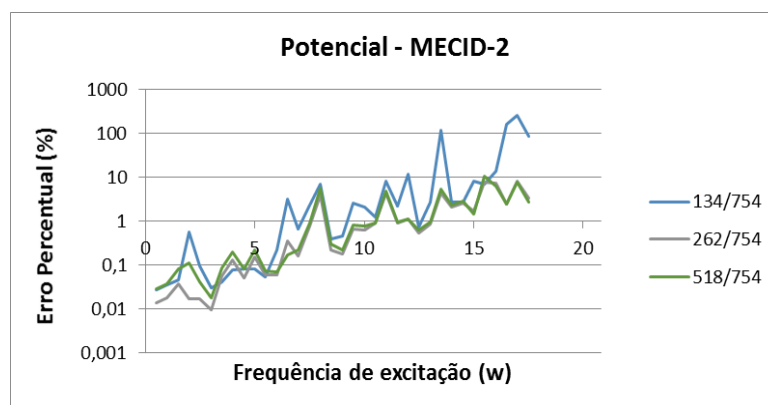
A seguir, é apresentado o resultado da comparação apenas com a nova formulação MECID-2, com o objetivo de comparar a influência do refinamento da malha e a influência dos pontos internos sobre os resultados obtidos. Nas figuras seguintes o objetivo é avaliar a influência no refinamento dos pontos internos.

Figura 6.34: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID-2 com elementos de interpolação linear, malha com 134 elementos de contorno e, respectivamente, 81, 353 e 754 pontos internos.



Ao analisar a figura 6.34, pode-se observar que as três malhas possuem 134 elementos no contorno e somente os pontos internos foram incrementados. Os resultados não foram tão satisfatórios quanto os esperados. Considerando o refinamento interno, os resultados ficaram muito próximos, apesar da média do erro da malha 134/754 permanecer um pouco superior.

Figura 6.35: Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema 05 pelo MECID com elementos de interpolação linear, malha com 134, 262 e 518 elementos de contorno e 754 pontos internos.



Na figura 6.35, é variada a quantidade de elementos de contorno das malhas e mantido a quantidade de 754 pontos internos. O melhor resultado médio foi alcançado para a malha com 518 elementos de contorno embora o resultado usando-se 262 elementos de contorno tenha ficado bem próximo e oferecido resultados melhores para as primeiras frequências. Isto se deve provavelmente ao posicionamento dos pontos interpolantes no interior com relação aos pontos de contorno, que também atuam na

interpolação. Contudo, neste problema pode-se perceber que o aumento dos elementos de contorno foi mais importante do que o aumento de pontos internos.



## 7 CONCLUSÕES

À partir dos resultados obtidos nas simulações com a nova formulação MECID-2 e a formulação MECID Regularizada, comparando-as com a solução analítica, exceto no problema 5 que foi comparado com a solução pelo MEF, nos cinco problemas apresentados neste trabalho, é possível concluir que a formulação proposta foi superior. É natural que no ponto em que há o encontro ou proximidade da frequência de excitação com uma frequência natural do sistema ocorram picos de erros maiores nas respostas daqueles pontos. Em muitos momentos a MECID-2 foi menos suscetível a picos decorrentes das proximidades de frequências naturais, como a MECID Regularizada apresentou nos gráficos, o que pode caracterizar uma maior sensibilidade do método proposto.

Assim como a MECID Regularizada, a MECID-2 apresentou erros mais elevados para frequências mais altas e, também, apresentou picos de erros. O erro crescente para as frequências mais altas pode ser explicado pela estrutura matemática de ambas as formulações, em que a matriz de inércia é multiplicada pelo quadrado da frequência de excitação. Em alguns casos os picos de erros maiores em frequências mais altas se deve ao fato do espaçamento entre as frequências naturais no sistema se reduzir para intervalos mais altos. Em alguns casos, imprecisões na conformação geométrica do problema afetam modos naturais transversais ou espúrios relativamente ao modelo desejado.

A quantidade de pontos internos da malha representa um fator importante na qualidade do resultado final. Um incremento na quantidade dos pontos internos, na maioria das vezes, gera um resultado de maior qualidade, reduzindo o valor do erro calculado. É possível que isso não aconteça em todos os casos, como parece ter ocorrido na malha de 134 elementos no problema cinco. O refinamento da malha de contorno, através do aumento do número de elementos de contorno, também gerou resultados melhores em todos os problemas, com a redução do respectivo erro.

No problema 02, a MECID Regularizada se manteve com um média de erro na ordem de  $10^0$ , enquanto a nova formulação teve uma média de erro da ordem de  $10^{-1}$ .

Um fator interessante a se verificar em trabalhos futuros é a relação entre a quantidade de pontos internos inseridos na malha e o valor da frequência de excitação

de entrada, buscando uma parametrização nesses dados, que não foi analisado neste trabalho, visando melhorar a qualidade dos resultados.

A formulação MECID-2 demonstrou possuir robustez e flexibilidade para resolver problemas governados pela Equação de Helmholtz através de um procedimento de varredura. Ao evitar o procedimento de regularização, o modelo proposto resultou mais preciso, de acordo com os resultados aqui expostos. Em razão disso, deveria ainda ser utilizada em outros trabalhos para resolver novos problemas e ampliar sua gama de aplicações. Todavia, a forma final do sistema matricial (vide equação 5.32) precisa ser melhor examinada, de forma que se possa resolver problemas de cálculo de autovalores e também de resposta dinâmica através de esquemas de avanço no tempo.

## 8 REFERÊNCIAS

- Abramowitz, M. & Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publ, 1964.
- Barcelos, H. M., *Comparação de Desempenho entre a formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz*. Vitória(ES): Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica UFES, 2014.
- Banerjee, P.K. *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, London, 1994.
- Becker, A.A. *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, New York, 1992.
- BELYTSCHKO, T., Y. KRONGAUZ, D. ORGAN, M FLEMING, e P. Krysl. "Meshless methods: an overview and recent developments." *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996: 3-47.
- Brebbia, C. A., *The Boundary Element method for Engineers*. London: Pentech Press., 1978.
- Brebbia, C. A. & Ferrante, A. J. *The Finite Element Technique*. Porto Alegre: URGs, 1975.
- Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*, First Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- Buhmann, M. D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, first ed., Cambridge University Press, New York, USA, 2003.
- BUTKOV, Eugene. *Física matemática*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.
- Dominguez, J., *Boundary Elements In Dynamics*. Sevilla: Computational Mechanics Publications, 1993.
- Frossard, A. L. *Avaliação do Desempenho de Técnicas para Melhoria da Formulação MECID em Problemas de Autovalor*. Vitória(ES): Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica UFES, 2016.
- GAUL, L., M. KÖGL, e M. WAGNER. *Boundary element methods for engineers and scientists: an introductory course with advanced topics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- Hadley, G., *Linear Algebra*. s.l.:Addison Wesley Publishing Company, 1972.

- Hartmann, F. *Introduction to Boundary Elements*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- Jaswon, M. A., *Integral Equation Methods in Potential Theory*. I. s.l.:Proc. Roy. Soc. Ser A., 1963.
- Jaswon, M. A. & Ponter, A. R., *An Integral Equation Solution of the Torsion Problem*. s.l.:Proc. Roy. Soc. Ser A., 1963.
- Katsikadelis, J. T., *Boundary Elements: Theory and Applications*. London: Elsevier Science, 2002.
- Kythe, P. K. *An Introduction to Boundary Element Methods*. Boca Raton: CRC Press, 1995.
- Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*. s.l.:John Wiley & Sons, 1968.
- Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., Mansur, W.J., Bulcão, A. *Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015a, Vol. 61, pp. 218-225.
- Loeffler, C. F., Pereira, P. V. M., Lara, L. O. C. & Mansur, W. J., *Comparação da Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Solução Fundamental Dependente da Frequência e Formulação com Integração Direta de Funções Radiais na Solução do Problema de Helmholtz*, 2015b.
- Loeffler, C. F., Cruz, A. L., & Bulcão, A. *Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2015c, vol. 50, pp. 97-108.
- Loeffler, C. F., Mansur, W.J., *A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem*. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2017, Vol. 74, pp. 14-18.
- Loeffler, C. F., *Modelos Mecânicos Derivados da Equação de Campo Escalar Generalizada*. *Revista Militar de Ciência e Tecnologia*, v. IX, p. 24-38, 1992.
- Loeffler, C. F. *Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar*. Rio de Janeiro(RJ): Tese D. Sc. em Engenharia Civil UFRJ, 1988.
- MOON, P.; SPENCER, D. E. *Field Theory for Engineers*: Springer, New Jersey, 1971.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. *Transient Dynamic Analysis by the Boundary Element Method*. In: C.A. Brebbia, editor. *Proceedings of BEM V*. p. 719-30, 1983.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A. & Wrobel, L. C., *The Dual Reciprocity, Boundary Element method*. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992.

Pereira, P. V. M., *Comparação entre duas formulações do Método dos Elementos de Contorno: a que faz Integração Direta e a que usa Solução Fundamental Dependente da Frequência em Problemas Bidimensionais Governados pela Equação de Helmholtz*. Vitória(ES): Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica UFES, 2016.

Ramachandran, P. A. *Boundary Element Methods in Transport Phenomena*, first ed., Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science, London, UK, 1994.

Rizzo, F.J. *An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol.25, pp.83-95, 1967.

Symm, G. T., *Integral Equation Methods in Potential Theory*. II. s.l.:Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1963.

Zhu, S. P. & Zhang, Y., *A Comparative Study of the Direct Boundary Element Method and the Dual Reciprocity Boundary Element Method in Solving the Helmholtz Equation*. s.l.:ANZIAM J., 2007.

## ANEXO 1 – CÁLCULO DA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO PRIMITIVA

Nesse trabalho foi utilizado funções primitivas  $\psi(Xi;X)$  obtidas a partir das funções radiais  $F(Xi;X)$ . Aqui será demonstrada a dedução de como essas funções primitivas foram encontradas. Sendo que  $F(Xi;X)$  e  $\psi(Xi;X)$  possuem as seguinte relação:

$$F^j(X^j;X) = \Psi_{,ii}^j(X^j;X) \quad (\text{A.1})$$

Como essas são funções radiais é necessário definir o laplaciano para coordenadas polares:

$$\Psi_{,ii}^j(X^j;X) = \frac{\partial^2 \Psi(X^j;X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(X^j;X)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi(X^j;X)}{\partial \theta^2} \quad (\text{A.2})$$

Considerando que as funções trabalhadas aqui não possuem variação em  $\theta$ :

$$\Psi_{,ii}^j(X^j;X) = \frac{d^2 \Psi(X^j;X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi(X^j;X)}{dr} = F^j(X^j;X) \quad (\text{A.2})$$

A função utilizada neste trabalho é de placa fina, mostrada abaixo:

$$F^j(X^j;X) = r^2(X^j;X) \ln r(X^j;X) \quad (\text{A.3})$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{d^2 \Psi(X^j;X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi(X^j;X)}{dr} = r^2(X^j;X) \ln r(X^j;X) \quad (\text{A.4})$$

Reescrevendo:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\Psi(X^j; X)}{dr} \right) = r^3 (X^j; X) \ln r (X^j; X) \quad (\text{A.5})$$

Integrando-se os dois lados da igualdade e, por conveniência, reescrevendo por simplicidade, tem-se:

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^4}{16r} (4 \ln r - 1) + \frac{A}{r} \quad (\text{A.6})$$

Considerando  $A = 0$ , pois  $\psi$  pode ser escolhida como a função mais simples dentre as possibilidades.

$$\frac{d\Psi}{dr} = \frac{r^4}{16r} (4 \ln r - 1) \quad (\text{A.7})$$

Integrando mais uma vez, tem-se:

$$\Psi = -\frac{r^4}{32} + \frac{r^4 \ln r}{16} \quad (\text{A.8})$$

A função  $\eta$  é definida como sendo:

$$\eta^j(X^j; X) = \Psi_{,i}^j(X^j; X) n_i \quad (\text{A.9})$$

Por simplicidade, tem-se que:

$$\eta^j = \frac{\partial \Psi^j}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} n_i \quad (\text{A.10})$$

Logo:

$$\eta^j = \frac{\partial \Psi^j}{\partial r} r_{,i} n_i \quad (\text{A.11})$$

Onde:

$$r_i = \frac{r_i}{r} \quad (\text{A.12})$$

Substituindo na equação A.11:

$$\eta^j = \frac{r^2}{16} (4 \ln r - 1) r_i n_i \quad (\text{A.13})$$



## ANEXO 2 – CÁLCULO DA DERIVADA DIRECIONAL DA FUNÇÃO DE GALERKIN

Nesse trabalho foi utilizado a função de Galekin  $G(\xi; X)$  obtida a partir da solução fundamental. Aqui será demonstrada a dedução de como essa função foi encontrada. Sendo que a função de Galekin e a solução fundamental do problema correlato possuem a seguinte relação:

$$G_{,ii}^*(\xi; X) = u^*(\xi; X) \quad (\text{B.1})$$

A solução fundamental é conhecida:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{\ln r(\xi; X)}{2\pi} \quad (\text{B.2})$$

Como essas são funções radiais é necessário definir o laplaciano para coordenadas polares:

$$G_{,ii}^*(\xi^j; X) = \frac{\partial^2 G^*(\xi^j; X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G^*(\xi^j; X)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G^*(\xi^j; X)}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.3})$$

Considerando que as funções trabalhadas aqui não possuem variação em  $\theta$ :

$$G_{,ii}^*(\xi^j; X) = \frac{d^2 G^*(\xi^j; X)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG^*(\xi^j; X)}{dr} = -\frac{\ln r(\xi^j; X)}{2\pi} \quad (\text{B.4})$$

Reorganizando a equação B.4:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dG^*(\xi^j; X)}{dr} \right) = -r \frac{\ln r(\xi^j; X)}{2\pi} \quad (\text{B.5})$$

Integrando os dois lados da equação B.5:

$$\frac{dG^*(\xi; X)}{dr} = -\frac{r}{8\pi}(2\ln r(\xi; X) - 1) \quad (\text{B.6})$$

Integrando novamente a equação B:

$$G^*(\xi; X) = -\frac{r^2}{8\pi}(\ln r(\xi; X) - 1) \quad (\text{B.7})$$

Calculando a derivada direcional da função de Galerkin:

$$G^*(\xi; X)_{,i} n_i = \frac{\partial G^*(\xi; X)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} n_i \quad (\text{B.8})$$

Sabe-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (\text{B.9})$$

Substituindo a equação B.6 e B.9 na equação B.8:

$$G^*(\xi; X)_{,i} n_i = -\frac{r}{4\pi}(\ln r(\xi; X) - 0.5) \frac{r_i}{r} n_i \quad (\text{B.10})$$

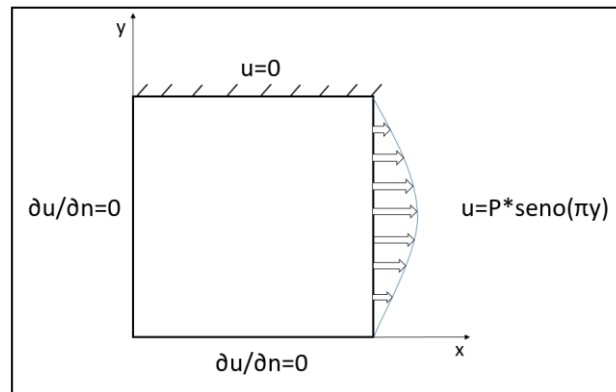
Simplificando a equação B.10, a derivada direcional de Galerkin por ser expressa em sua expressão final:

$$G^*(\xi; X)_{,i} n_i = -\frac{1}{4\pi}(\ln r(\xi; X) - 0.5) r_i n_i \quad (\text{B.11})$$

### ANEXO 3 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA 04

Um problema bidimensional é resolvido, em que as condições de contorno essenciais e naturais são prescritas, conforme indicado na Figura 6.16.

Figura 0.1: Características geométricas e condições de contorno para o Problema 04.



A equação de governo para este problema é dada por:

$$k^2 \left[ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] = -\omega^2 u(x, y) \quad (\text{C.1})$$

As condições de contorno do problema 02 são:

$$\begin{cases} u'(0, x_2) = 0 \\ u'(x_1, 0) = 0 \\ u(1, x_2) = P \text{sen}(\pi y) \\ u(x_1, 1) = 0 \end{cases}$$

A solução analítica do Problema 04 é obtida pelo método de separação de variáveis, assumindo  $k$ ,  $L$  (lado do quadrado) e  $P$  com valor unitário, tem-se:

$$X''(x)Y(y) + Y''(y)X(x) = -\omega^2 X(x)Y(y) \quad (\text{C.2})$$

Onde a solução deste problema é dada pela expressão:

$$u(x, y) = \sum X(x)Y(y) \quad (\text{C.3})$$

Reorganizando-se a equação C.2, pode-se escrevê-la na forma:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\omega^2 \quad (\text{C.4})$$

O termo  $\omega$  é uma constante, que pode ser substituído pela soma de outras duas constantes, da forma:

$$\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (\text{C.5})$$

Substituindo a equação anterior, tem-se:

$$X''(x) = -\alpha^2 X(x) \quad (\text{C.6})$$

$$Y''(y) = -\beta^2 Y(y) \quad (\text{C.7})$$

Resolvendo a equação C.6, obtêm-se:

$$\lambda_{1,2} = \pm\alpha_i \quad (\text{C.8})$$

A solução na coordenada x é dada na forma:

$$X(x) = A_n \cos(\alpha x) + B_n \text{sen}(\alpha x) \quad (\text{C.9})$$

Resolvendo a equação C.7, obtêm-se:

$$\lambda_{3,4} = \pm\beta_i \quad (\text{C.10})$$

A solução na coordenada y é dada na forma:

$$Y(y) = C_n \cos(\beta y) + D_n \sin(\beta y) \quad (\text{C.11})$$

Utilizando as equações C.9 e C.11, pode-se encontrar suas derivadas para se resolver a equação principal C.3. Derivando primeiramente a equação C.9 em relação a  $x$ , tem-se:

$$X'(x) = -\alpha A_n \sin(\alpha x) + \alpha B_n \cos(\alpha x) \quad (\text{C.12})$$

Das condições de contorno, tem-se que:

$$X'(0) = 0 \quad (\text{C.13})$$

Portanto:

$$B_n = 0 \quad (\text{C.14})$$

Substituindo a equação anterior na equação C.9:

$$X(x) = A_n \cos(\alpha x) \quad (\text{C.15})$$

Agora, deriva-se a equação C.11:

$$Y'(y) = -\beta C_n \sin(\beta y) + \beta D_n \cos(\beta y) \quad (\text{C.16})$$

Da primeira condição de contorno em relação a derivada de  $y$ , tem-se que:

$$Y'(0) = 0 \quad (\text{C.17})$$

Portanto:

$$D_n = 0 \quad (\text{C.18})$$

Substitui-se a equação anterior na equação C.11:

$$Y(y) = C_n \cos(\beta y) \quad (\text{C.19})$$

Da segunda condição de contorno, tem-se:

$$Y(L) = 0 \quad (\text{C.20})$$

Substituindo a equação C.20 na equação C.19:

$$Y(L) = C_n \cos(\beta L) = 0 \quad (\text{C.21})$$

Para evitar a solução trivial, a constante  $C_n$  não pode ser nula:

$$C_n \neq 0 \quad (\text{C.22})$$

Logo:

$$\cos(\beta L) = 0 \quad (\text{C.23})$$

Para que a equação C.23 seja verdadeira, a constante  $\beta$  deve ser calculada:

$$\beta = \frac{n\pi}{2L} \quad (\text{C.24})$$

Considerando  $L$  como unitário, substituindo a equação C.24 e C.19, a equação C.11 pode ser escrita na forma completa:

$$Y(y) = C_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \quad (\text{C.25})$$

Substituindo a equação C.25 e C.15 na equação principal, tem-se:

$$u(x, y) = \sum A_n \cos(\alpha x) C_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \quad (\text{C.26})$$

E, neste problema, pode-se considerar que:

$$E_n = A_n C_n \quad (\text{C.27})$$

Logo, a equação C.26 pode ser escrita como:

$$u(x, y) = \sum E_n \cos(\alpha x) \cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \quad (\text{C.28})$$

Porém, o valor da constante alfa é conhecido e dado por:

$$\alpha = \sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}} \quad (\text{C.29})$$

Substituindo C.29 na equação C.28:

$$u(x, y) = \sum E_n \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}} x\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \quad (\text{C.30})$$

O valor da constante  $E_n$  pode ser calculado considerando a última condição de contorno, sabe-se que:

$$u(L, y) = P \operatorname{sen}(\pi L) = \sum_{i=1}^n \left[ E_n \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}} L\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2}\right) \right] \quad (\text{C.31})$$

Logo, a expressão final é dada por:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\sin(\pi y) \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}} x\right)}{\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n^2 \pi^2}{4}}\right)} \right] \quad (\text{C.32})$$



## 9 ANEXO 4 – MALHAS DE PONTOS INTERNOS

Neste capítulo são apresentadas como foram realizadas as distribuições dos pontos internos para as malhas utilizadas nos 5 problemas.

### 9.1 DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS INTERNOS NOS PROBLEMAS 1, 2 E 4

Figura 9.1: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 144 pontos internos.

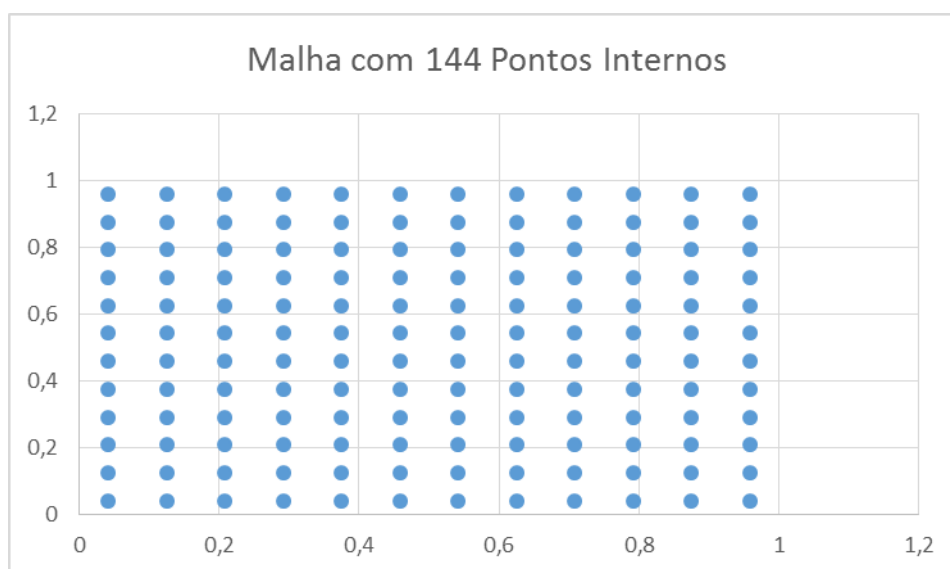


Figura 9.2: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 324 pontos internos.

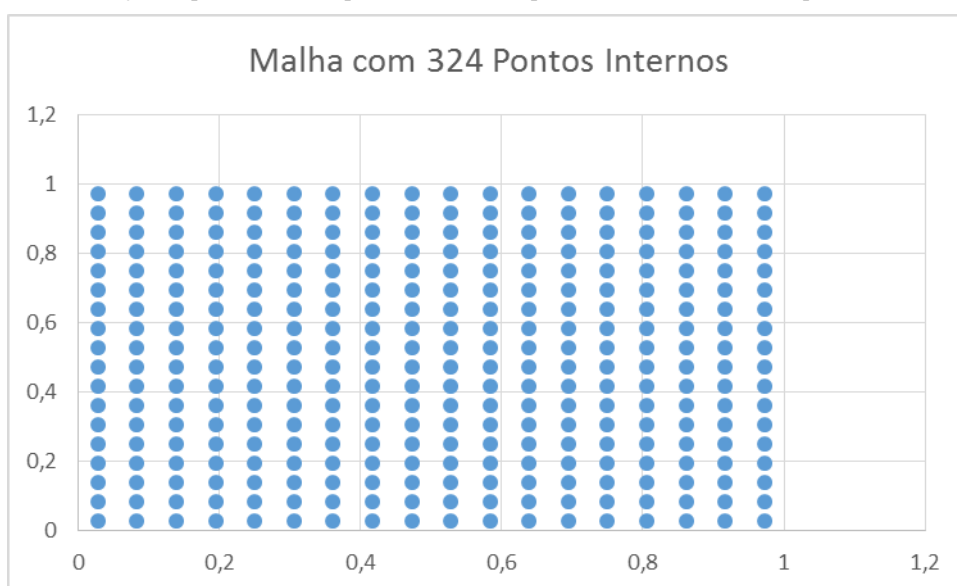


Figura 9.3: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 484 pontos internos.

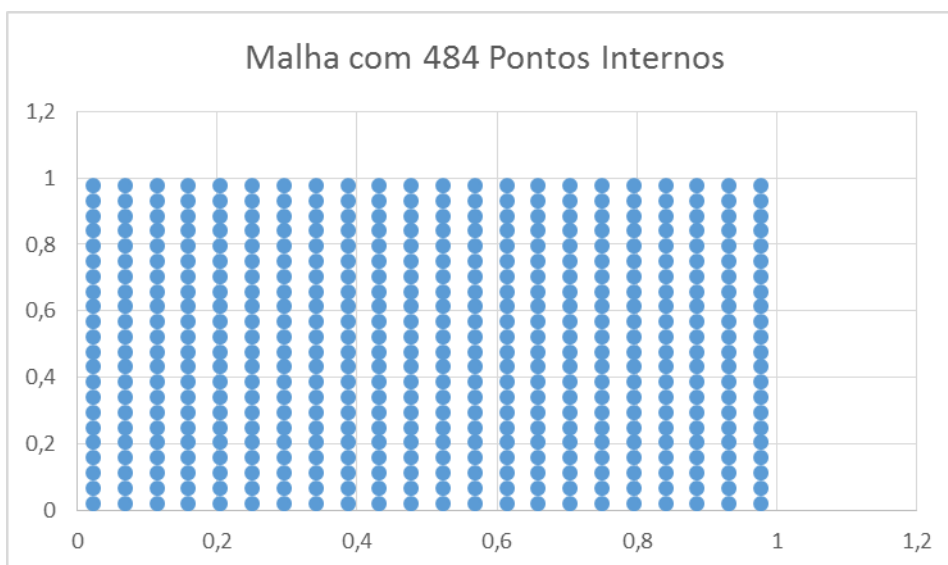
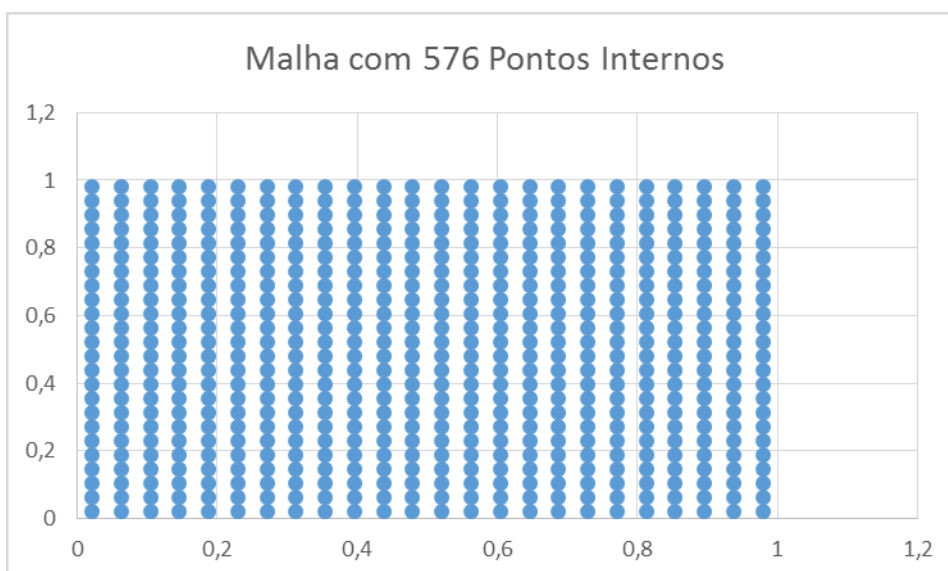


Figura 9.4: Distribuição de pontos internos para as malhas dos problemas 1, 2 e 4 com 576 pontos internos.



## 9.2 DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS INTERNOS NO PROBLEMA 3

Figura 9.5: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 3 com 311 pontos internos.

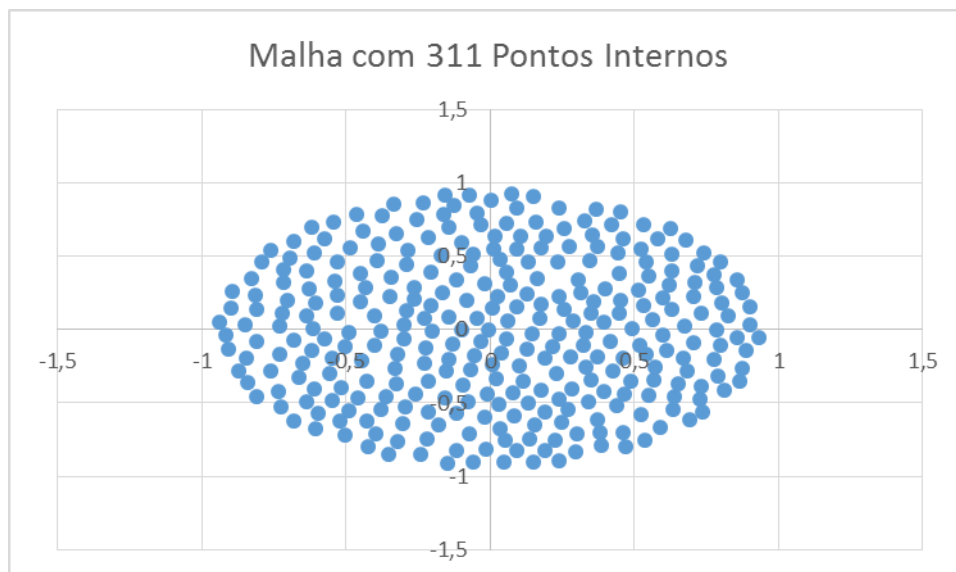
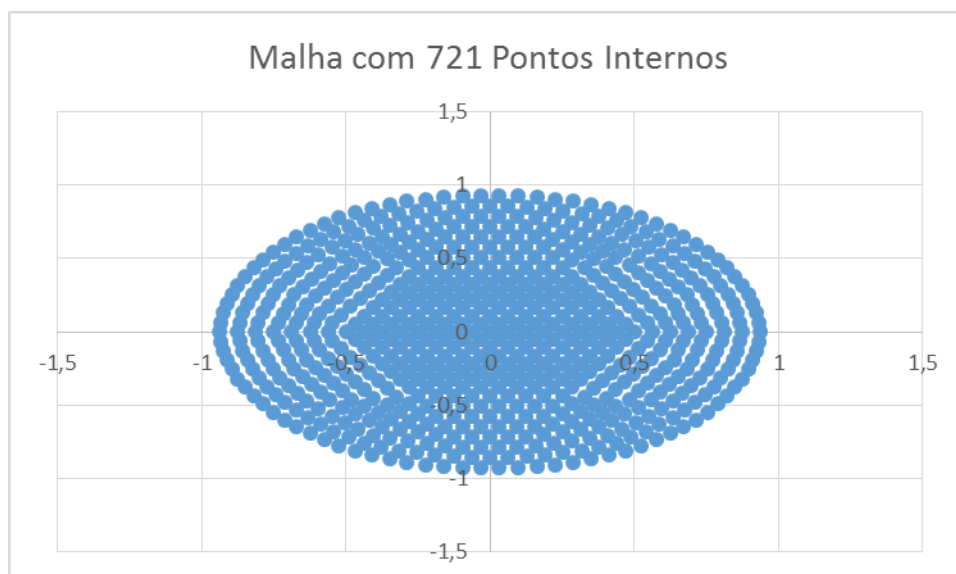


Figura 9.6: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 3 com 721 pontos internos.



## 9.3 DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS INTERNOS NO PROBLEMA 5

Figura 9.7: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 5 com 81 pontos internos.

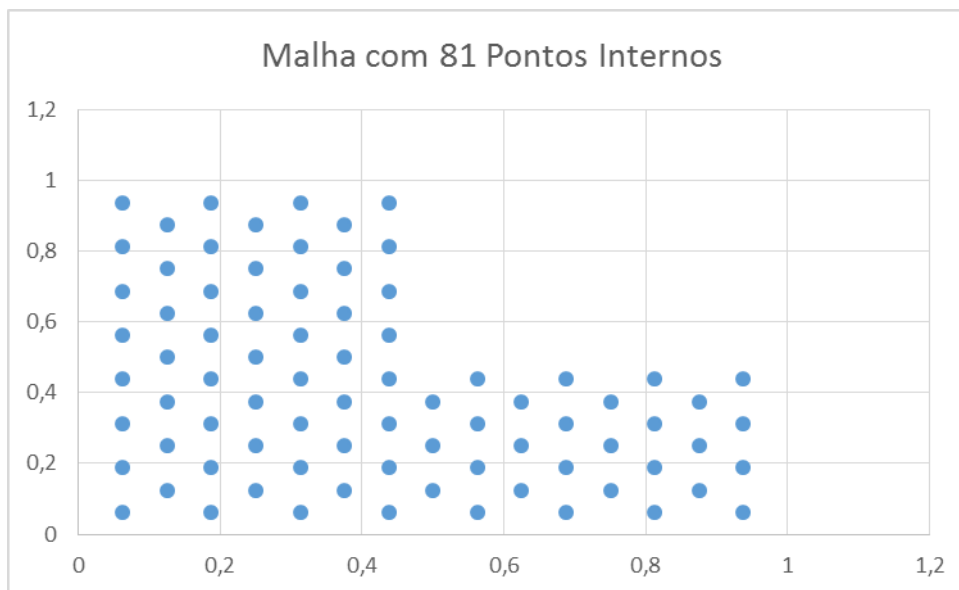


Figura 9.8: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 5 com 353 pontos internos.

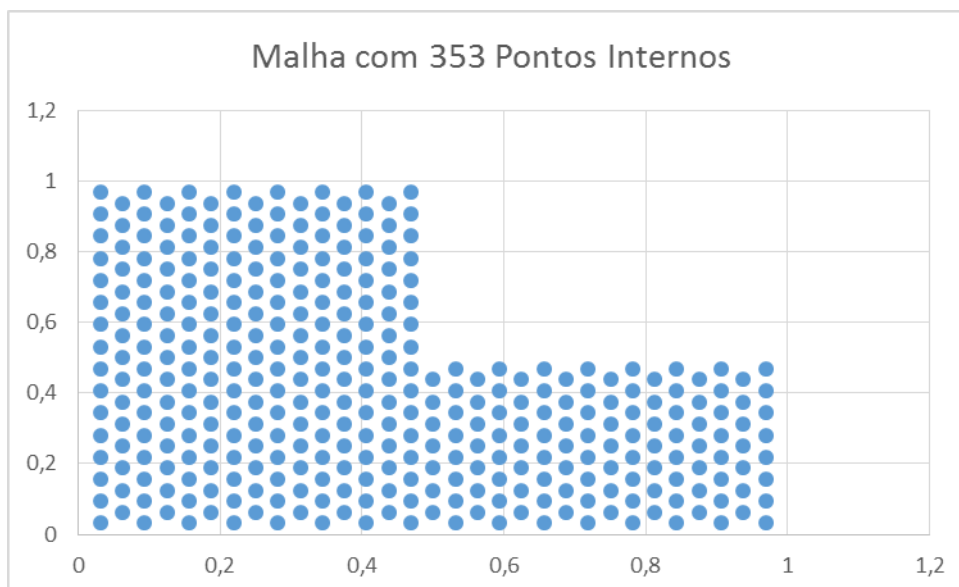


Figura 9.9: Distribuição de pontos internos para as malhas do problema 5 com 754 pontos internos.

