UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

JAILSON BERTOLI JÚNIOR

JUROS POR DENTRO E A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

VITÓRIA
2018

JAILSON BERTOLI JÚNIOR

JUROS POR DENTRO E A MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

VITÓRIA
2018

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

B546j Bertoli Júnior, Jailson, 1989-
Juros por dentro e a matemática financeira no ensino médio / Jailson Bertoli Júnior. – 2018.
72 f. : il.

Orientador: Florêncio Ferreira Guimarães Filho.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Juros. 2. Matemática financeira. 3. Ensino médio. 4. Matemática - Estudo e ensino. I. Guimarães Filho, Florêncio Ferreira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

Elaborado por Perla Rodrigues Lôbo – CRB-6 ES-527/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Juros Por Dentro e a Matemática Financeira no Ensino Médio"

Jailson Bertoli Júnior

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 22/05/2018 por:

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Orientador - UFES

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Membro Interno - UFES

Prof. Dr. Mehran Sabeti
Membro Externo – UFV

Profº Florêncio F. Guimarães Filho
Coordenador Acadêmico Local
PROFMAT-UFES
MAT. SIAPE Nº 002979802

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela vida.

Aos meus pais, Jailson Bertoli e Maria Zenaide, por terem me proporcionado, com muita luta, os estudos, um dos grandes bem da vida. Aos meus irmãos, Thiago e Thiara, pelo companheirismo, conversas e incentivo.

À minha esposa, Lorena Penalva, que contribuiu com a formatação e a revisão do trabalho. E ao meu filho Theo, que mesmo na barriga, já me fez “correr contra o tempo”.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Florêncio Guimarães, pelas orientações precisas e pela ajuda na escolha do tema.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, em especial ao corpo docente do PROFMAT, que me deram base para chegar até aqui.

Ao Instituto Federal do Pará, Campus Marabá Rural, pelo apoio ao estudo e pelo aprendizado constante.

Aos meus alunos, que me ensinam diariamente e por quem me dediquei para fazer o melhor.

Aos meus amigos, em especial, Euzébio, o companheiro de estudos do mestrado.

RESUMO

Esta dissertação é um estudo que envolve a Matemática Financeira, dando destaque aos sistemas de financiamento e dos Juros por Dentro, assuntos importantes para o ensino da Matemática, porém pouco explorado ao longo do Ensino Médio nas escolas do Brasil. O objetivo do trabalho é fornecer um material que sirva de auxilio para o professor do ensino básico, no que tange ao desenvolvimento de suas aulas que envolvam os temas da Matemática Financeira, como os sistemas de juros simples e compostos, bem como os sistemas de financiamento SAC e PRICE. Ademais, analisamos como são taxados os encargos dos impostos na conta de luz, no cálculo do ICMS e no sistema de precificação denominado MARKUP, evidenciando o sistema de juros por dentro, tema pouco conhecido até mesmo por estudantes da área. Esta análise é importante não apenas para o ensino da Matemática em si, mas também como informação para a população em geral, já que trata-se de um tema que está inserido no cotidiano das pessoas. Para a elaboração dessa pesquisa, foram consultadas contas de luz da cidade de Vila Velha – ES e a cartilha fornecida pela ANEEL, que orienta como deve ser feito o cálculo do valor da conta de luz. Percebemos, ao longo do estudo, que o modo de cálculo por dentro eleva drasticamente o valor pago pelo consumidor, seja da conta de luz ou de algum produto do mercado.

Palavras-chave: Juros simples e compostos; juros por dentro; Matemática Financeira; Conta de Luz.

ABSTRACT

This dissertation is a study that involves Financial Mathematics, emphasizing the financing systems and the Interest for Inside, important subjects for the teaching of Mathematics, but little explored throughout the High School in the schools of Brazil. The objective of this work is to provide a material that will help the elementary school teacher in the development of his classes that involve the subjects of Financial Mathematics, such as simple and compound interest systems, as well as financing systems SAC and PRICE. In addition, we analyze how taxes are charged on the electricity bill, the calculation of the ICMS and the pricing system called MARKUP, evidencing the system of interest inside, subject little known even by students of the area. This analysis is important not only for the teaching of Mathematics itself, but also as information for the population in general, since it is a topic that is inserted in the daily life of the people. For the elaboration of this research, energy accounts of the city of Vila Velha – ES and the booklet provided by ANEEL, were consulted, which guides how to calculate the value of the energy bill. Throughout the study, we have noticed that the calculation method drastically increases the amount paid by the consumer, be it the energy bill or some product on the market.

Keywords: Simple and compound interest; inside interest; Financial math; Electricity bill.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho é um estudo sobre Juros por Dentro e suas aplicações e como isso afeta o consumidor brasileiro. Um tema muito presente no mercado, porém pouco explorado, até mesmo entre alunos do curso de matemática. Os Juros por Dentro, em sua forma de cálculo, que incide sobre o montante da operação, aparecem no cálculo do valor da conta de luz, na forma como incidem alguns impostos, como, por exemplo, o IMPOSTO SOBRE CIRCULAÇÃO DE MERCADORIAS E PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS – ICMS, abordado no capítulo 5, além disso, em um método bastante utilizado de formulação de preço, chamado de Mark-up. O trabalho aborda ainda como os assuntos aqui tratados se relacionam com temas de matemática estudados no Ensino Médio.

A ideia de realizar um trabalho dessa natureza surgiu a partir das minhas próprias inquietações, enquanto professor do Ensino Médio. Em conversas com profissionais da área, percebemos que o currículo do ensino médio não apresenta tópicos da matemática financeira de forma a realmente capacitar os alunos a resolverem problemas encontrados no dia a dia, limitando-se, quando se trata de matemática financeira, ao ensino de juros simples e compostos, e, em casos mais críticos, apenas juros simples. Sabendo disso, resolvemos elaborar um material que contemplasse os tópicos iniciais de matemática financeira, mas que são suficientes para compreender e resolver problemas do cotidiano, de forma prática e contextualizada.

No segundo capítulo, fizemos um breve relato sobre a história dos juros, o qual é uma contextualização para o ensino de matemática, para que o professor possa utilizá-lo como uma forma de introdução da sua aula e, assim, despertar o interesse dos alunos pelo tema. Já no terceiro capítulo, seguindo a ideia introdutória, foram tratados os tópicos de juros simples e compostos, com exemplos de aplicações práticas, com o objetivo de apresentar formas para o professor exemplificar a maneira como esses temas se relacionam com a realidade.

O quarto capítulo traz uma análise de dois dos principais sistemas de financiamentos utilizados no mercado financeiro, o Sistema De Amortização Constante – SAC e o Sistema de Prestações Constantes – SPC, e como são determinadas suas principais equações. Esse capítulo tem como objetivo fornecer os conhecimentos necessários para que o professor leve esses assuntos para a sala de aula e possa relacioná-los com os demais conteúdos de matemática. No quinto capítulo, é feito um estudo sobre o que são os juros por dentro, e algumas situações em que ele aparece, bem como os efeitos de sua forma de cálculo. O objetivo, nesse momento, é evidenciar temas de matemática básica presentes no mercado, que são importantes, mas que não são abordados no ensino básico.

Por fim, no sexto capítulo, mostramos alguns exemplos de como os assuntos abordados neste trabalho podem ser relacionados ou servirem de contextualização e/ou problematização para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos estudados ao longo do Ensino Médio. A intenção é fornecer ao professor alguns caminhos que podem contribuir para tornar suas aulas mais atrativas e, ao mesmo tempo, proporcionar aos estudantes conhecimentos relevantes para o exercício da cidadania.

2 BREVE HISTÓRICO DOS JUROS

A ideia de juros é tão antiga quanto à concepção de comércio, sendo ambas intimamente ligadas. As civilizações mais antigas tiravam seu sustento basicamente da natureza, e a comunicação entre os povos quase não ocorria. Com o passar do tempo e o desenvolvimento das sociedades, as civilizações passaram a ter um maior contato e assim começaram a ocorrer as primeiras trocas de mercadorias entre os povos. Com isso, temos a primeira forma de comércio, como coloca Ifrah (1997):

> O primeiro tipo de troca comercial foi o *escambo*, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto sem a intervenção de uma "moeda" no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade. (p.145)

Assim, as trocas de mercadorias eram feitas sem preocupação com a equivalência entre elas. O escambo apresentava um grande inconveniente por nem sempre haver uma concordância entre a vontade do comprador e a do vendedor. Assim, com o desenvolvimento das civilizações e de seus produtos, houve a necessidade de se estabelecerem padrões mais estáveis de avaliações e de equivalências, com unidades chamadas de "moeda-mercadoria" ou "padrões fixos".

Na Grécia Pré-Helênica, o padrão fixo adotado foi o boi. Esse apresentava vantagens por sua reprodução, fácil locomoção e no seu emprego nas atividades da época. Outros padrões utilizados foram os colares de pérolas ou conchas pelas comunidades das Ilhas do Pacífico. Já no Império Romano, a moeda de troca utilizada era o sal, daí a origem do termo salário hoje em dia utilizado. Na América Central pré-colombiana, os maias usavam algodão, cacau, cerâmicas; os astecas, pedaços de tecido, semente de cacau, "a verdadeira pequena moeda com seu múltiplo, o *xiquipilli*, saco contendo ou supondo-se conter 8.000 grãos" (IFRAH, 1997, p. 146-147). No Egito faraônico, o padrão de avaliação eram metais, como cobre, bronze, prata e ouro, divididos inicialmente em pepitas e palhetas. A avaliação também era feita sob a forma de lingotes ou anéis, cujo valor era definido por seu peso. Chifres e dentes de animais, conchas, carapaças de tartarugas, couros e peles eram padrões utilizados na China, entre os séculos XVI e XI a.C.

Vemos o escambo como o precursor de um vasto sistema econômico. A partir do desenvolvimento do comércio e a adoção em larga escala dos metais como moeda de troca padrão, as operações financeiras passaram a ser regidas por um “preço justo” e não mais por uma conveniência dos agentes. As primeiras moedas com as características semelhantes às atuais, que são: peso e tamanho definido, a impressão de um selo oficial a qual lhe atribuía o valor, onde somente a autoridade podia fazê-lo, surgem no século VII a.C, como coloca IFRAH:

> A invenção desse sistema ideal de troca comercial, segundo opinião da maioria dos especialistas, foi atribuída a Grécia da Ásia (ou Ásia Menor). E à Lídia, no século VII antes da era cristã. Em razão das múltiplas vantagens que comportava, seu uso teria se espalhado rapidamente pela Gréia, Fenícia, Roma e entre inúmeros outros povos, inclusive na China. (IFRAH, 1997, p. 152)

Nos próximos séculos, temos um rápido e grande crescimento do comércio, surgindo assim no auge de seu desenvolvimento a figura do marcador, assim, iniciando o comércio do próprio dinheiro que era basicamente, na época, ouro e prata. Com as relações entre os países mais frequentes, aumentou a necessidade de se estabelecer uma proporção entre as moedas utilizadas por cada um. Com isso, cria-se a primeira forma de equivalência, hoje conhecida como taxa de câmbio, entre as moedas de diferentes países, o chamado “padrão-ouro”. Nessa equivalência, o valor da moeda de cada país era calculado de acordo com a quantidade de ouro acumulada de cada país. Essa prática perdurou até o início do século XX.

Vendo uma boa oportunidade para os negócios, algumas pessoas se dedicaram ao acúmulo de riquezas para terem na atividade de troca de moedas uma fonte de renda. Assim, surgem os “cambistas”. Esses, além da atividade de guarda e troca do dinheiro, também concediam empréstimos que, ao final do período combinado, eram pagos com um acréscimo pelo serviço prestado. Nesse processo, percebe-se que os cambistas recebiam uma remuneração sobre o dinheiro emprestado, o que é basicamente a definição de juros como conhecemos.

3 JUROS

O que são juros? Imaginemos uma situação em que José, um comerciante, empreste um dinheiro a outro comerciante, digamos R$ 10.000,00, para que fosse devolvido daí um mês. Durante esse período, o comerciante que emprestou a quantia ficará sem um poder de compra de R$ 10.000,00, ou ainda, esse dinheiro, investido em sua poupança, poderia lhe render algum lucro. Dessa forma, mesmo que rigorosamente após o término de um mês a divida seja quitada, José sairia no prejuízo. Então, por que emprestar? Caso as coisas fossem assim, os bancos não fariam empréstimos, pois não teriam retorno algum. Para que isso não ocorra, José empresta sua quantia de R$ 10.000,00, mas, ao final de um mês, além da devolução dessa quantia, o comerciante deveria pagar também R$ 500,00 pelo serviço (o empréstimo). Poderíamos entender essa quantia como um aluguel do dinheiro de José. Essa ideia de aluguel do dinheiro é um dos principais conceitos de juros.

O juro é um dos principais elementos presentes nas operações da Matemática Financeira. Vemos, no exemplo acima, a operação de empréstimo, sendo a operação mais básica no âmbito de Matemática Financeira. Assim, colocando de uma maneira geral, a situação ilustrada no parágrafo anterior, temos o seguinte: uma pessoa dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por certo período de tempo. Após esse período, ele recebe seu dinheiro de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma $C + J$ é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$, que é a taxa de crescimento do capital, é sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros. Os juros de uma operação podem ser capitalizados segundo dois regimes: simples ou compostos.

3.1 JUROS SIMPLES

Neste regime de capitalização, a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial. Dessa forma, os juros devidos em cada período são iguais. Adicionando-se ao capital inicial somente ao final da operação financeira. A partir de um exemplo, vamos mostrar como são calculados os juros e o montante no regime de juros simples.

Exemplo 3.1.1: Um capital é aplicado a juros simples, durante 5 meses. Qual será o montante gerado por essa operação, sabendo que sobre ele incide uma taxa de 15% ao mês?

Solução: Como se trata do regime de juros simples, temos que a taxa mensal de 15% incidirá sempre sobre o capital inicial (também chamado de principal) de R$ 1.000,00. A partir da relação $i = \frac{J}{C}$, chegamos à $J = C \cdot i$. Com isso, o valor dos juros gerados em cada um dos 5 períodos será de:

Mês (Período)	Cálculo $J = C \cdot i$	J_k (juros do período k)
1	$1.000,00 \cdot 0,15$	$J_1 = 150$
2	$1.000,00 \cdot 0,15$	$J_2 = 150$
3	$1.000,00 \cdot 0,15$	$J_3 = 150$
4	$1.000,00 \cdot 0,15$	$J_4 = 150$
5	$1.000,00 \cdot 0,15$	$J_5 = 150$

Tabela 3.1

O valor dos juros ao final da operação será dado pela somatória dos juros de cada um dos 5 períodos. Assim:

$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5$ Mas:

$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = C.i$ Então:

$J = \underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i}_{\text{5 períodos}}$ Fatorando-se a expressão:

$J = C \cdot i \cdot 5$

Substituindo os valores:

$J = 1000 \times 0,15.5 = 750,00$

O número 5, fator multiplicativo do termo $C \cdot i$, faz referência a quantidade de períodos de incidência da taxa de juros. Desse modo, poderíamos generalizar a quantidade de períodos para n e, assim, obter uma equação geral para o cálculo de juros simples:

$$J = C \cdot i \cdot n \tag{3.1}$$

onde: J é o total de juros da operação financeira.

C é o capital inicial.
i é a taxa de juros, em sua forma unitária.
n é o tempo decorrido (períodos).

Vemos a importância de se inserir, de modo oportuno, o rigor matemático, quando sua apresentação não apresentar dificuldades ou elementos que dificultem ainda mais o aprendizado do aluno. Feito isso, o aluno terá pequenas amostras de ferramentas matemáticas que auxiliam no seu desenvolvimento enquanto ciência. Para tal, mostraremos a validade da equação 3.1, através do Princípio da Indução Finita (PIF).

Exemplo 3.1.2: Seja um empréstimo tomado a juros simples, por n períodos de tempo a uma taxa de $i\%$ na mesma unidade de tempo. Mostremos que o total de juros J devido na operação é $J(n) = C \cdot i \cdot n$.

Solução: No caso $n = 0$ não teríamos operação. Assim, temos que $n \in \mathbb{N}$, onde $n \geq 1$.
Princípio da Indução Finita (PIF):
Seja $P(n)$ uma propriedade descrita em termos de números naturais n. Suponhamos que:
a) $P(1)$ é válida.
b) se $P(n)$ vale então $P(n+1)$ também vale.
Nesse caso, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.
Seja $P(n)$: $J(n) = C \cdot i \cdot n$.
Se $n = 1$, a taxa incidirá apenas uma vez sobre o capital inicial C e o total de juros será de $C \cdot i$. Assim:

$$J(1) = C \cdot i = C \cdot i \cdot 1$$

Portanto, $P(1)$ é válida.

Suponhamos $P(n)$ seja válida para um certo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que vale também para $n + 1$, ou seja, que $P(n+1)$ é válida.

Sendo a propriedade válida para n, concluímos que o total de juros gerados, após n períodos, a uma taxa de juros de i é $C \cdot i \cdot n$. Como o juro devido em cada período de incidência é constante, para termos o total de juros em $n + 1$ períodos basta adicionarmos uma parcela $C \cdot i$ ao valor de $C \cdot i \cdot n$ (que é o total de juros gerados após n períodos), assim:

$$J(n+1) = C \cdot i \cdot n + C \cdot i$$

$$J(n+1) = C \cdot i \cdot (n+1),$$

E, logo, $P(n+1)$ é válida.

Então, pelo PIF, a propriedade $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $J(n) = C \cdot i \cdot n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Na equação 3.1, deve-se utilizar a taxa de juros i em sua forma unitária. Caso a taxa de juros for expressa na forma percentual, ela deverá ser reduzida a sua forma decimal antes de prosseguirem os cálculos. A taxa de juros i e o tempo n deverão estar expressos na mesma unidade de tempo. Ou seja, se a taxa de juros for expressa ao ano ("aa"), o tempo n deverá estar expresso em anos, se a taxa de juros for expressa ao mês ("am") o tempo n deverá estar expresso em meses e assim por diante.

Exemplo 3.1.3: Qual é o valor dos juros que um capital de R$ 1.200,00 rende se aplicado no regime de juros simples, com uma taxa de 2% am, durante 6 meses?

Solução: Transformando a taxa de juros para sua forma unitária: $i = 2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$.

Dados do problema: $C = 1200{,}00$, $i = 0{,}02, n = 6$.

Pela equação 3.1, temos:

$$J = 1200{,}00 \times 0{,}02.6 = 144.$$

Portanto, os juros gerados ao final de 6 meses são de R$ 144,00.

Exemplo 3.1.4: Thiago adquiriu um empréstimo de R$ 3.000,00 a juros simples com uma taxa de 2,5% ao mês. Se o montante da dívida ficou em R$ 3.750,00, qual foi o tempo, em meses, até o pagamento da dívida?

Solução: dados do problema: $C = 3.000{,}00,\ i = 2{,}5\% = 0{,}025, M = 3.750{,}00$.

Assim, pela equação 3.1, temos que:

$J = 3.000{,}00 \times 0{,}025.n$ Sabemos que

$M = C + J$, ou seja, $J = M - C$. Assim:

$J = 3.750{,}00 - 3.000{,}00 = 750{,}00$ Retornando a equação inicial:

$$750{,}00 = 3.000{,}00 \times 0{,}025 \cdot n$$

$$750{,}00 = 75 \cdot n$$

$$n = \frac{750{,}00}{75}$$

$$n = 10$$

Concluímos que Thiago precisou de 10 meses para quitar sua dívida.

Exemplo 3.1.5: Um capital de R$ 12250,00 é aplicado a juros simples durante 2 anos, sob uma taxa de juros de 5% ao mês. Determine o valor do montante gerado, findado os 2 anos.

Solução: A taxa de juros e o período devem estar na mesma unidade de tempo, veremos mais adiante que o mais simples é transformar os períodos.

Dados do problema: $C = 12250$, $i = 5\% = 0{,}05$, $n = 2$ anos $= 24$ meses.

Para chegar ao montante, vamos calcular a quantidade de juros que serão agregadas ao capital inicial ao final da operação. Pela equação 3.1, temos:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = 12250 \times 0{,}05 \times 24$$

$$J = 14700$$

Como vimos na introdução deste capítulo, o montante é dado pela soma $C + J$, onde C é o capital inicial e J é o valor dos juros da operação. Assim, temos:

$$M = C + J$$

$$M = 12250 + 14700$$

$$M = 26950$$

Portanto, o montante gerada pelo capital após 2 anos é de R$ 26.950,00.

O montante, conforme definido anteriormente, é o resultado da capitalização da operação, isto é, representa o capital originário acrescido do juro devido na operação:

$M = C + J$ como $J = C \cdot i \cdot n$, temos:

$$M = C + C \cdot i \cdot n$$

$$M = C \cdot (1 + i.n) \tag{3.2}$$

A equação acima nos permite calcular diretamente o montante, conhecidos o capital inicial C, a taxa de juros i e a quantidade n de períodos da operação.

Exemplo 3.1.6: Um empréstimo de R$ 2.000,00 deverá ser pago ao final de 4 anos. A taxa de juros convencionada foi de 10% aa. Qual o valor do montante gerado ao final dessa operação?

Solução: dados do problema: $C = 2000, i = 10\% = 0{,}01, n = 4$.

Pela equação 3.2, temos:

$$M = C \cdot (1 + i.n)$$
$$M = 2000 \cdot (1 + 0{,}1 \times 4)$$
$$M = 2000 \cdot (1 + 0{,}4)$$
$$M = 2000 \cdot (1{,}4) = 2800$$

Portanto, o montante gerado será de R$ 2.800,00.

O exemplo 3.1.6 poderia ser resolvido aplicando-se diretamente a equação 3.2, tirando assim a necessidade do cálculo dos juros em meio à resolução do problema. A solução ficaria da seguinte maneira:

$$M = C \cdot (1 + i.n)$$
$$M = 12250 \cdot (1 + 0{,}05 \times 24)$$
$$M = 12250 \cdot (1 + 1.2)$$
$$M = 12250 \cdot (2{,}2) = 26950$$

Assim, chegando ao mesmo valor de R$ 26.950,00 para o montante.

3.1.1 TAXAS DE JUROS PROPORCIONAIS NO REGIME SIMPLES

Definição: duas taxas de juros i_1 e i_2 relativas aos períodos n_1 e n_2 são proporcionais quando observarem a relação de proporcionalidade:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

sendo que n_1 e n_2 devem estar expressos em uma mesma unidade de tempo.

Uma maneira mais imediata para se tratar taxas proporcionais: tome-se um período de tempo "*n*" para o qual está definida uma taxa de juros i_n e subdivida-o em "*k*" subperíodos; qual a taxa de juros proporcional a i_n para esse subperíodo *k*? Basta dividir a taxa i_n pelo número de períodos *k* contidos em *n*:

$$i_k = i_n \cdot \frac{1}{k}$$

Analogamente, se quisermos encontrar a taxa de juros i_n, definida no período n, proporcional à taxa de juros i_k, a qual está definida no subperíodo *k*, onde n é subdividido em "*k*" subperíodos; basta multiplicar a taxa i_k pelo número de períodos k contidos em n:

$$i_n = i_k \cdot k \qquad (3.3)$$

De uma maneira simples, Taxa Proporcional é aquela encontrada pela divisão da taxa original pela quantidade de períodos existentes, iguais ao da taxa desejada, dentro do período da taxa original. Existem 12 meses dentro de um ano. Então, para obtermos uma taxa mensal proporcional, dividimos a taxa anual por 12, linearmente. Por exemplo, a taxa de juros de 24% ao ano é proporcional à taxa de juros de 2% ao mês. Para chegarmos a esse valor, fizemos o seguinte cálculo: em um ano temos 12 períodos de mensais, assim dividimos a taxa anual de 24% por 12, obtendo então uma taxa mensal de 2%. Para encontrar a taxa anual proporcional a uma taxa mensal de 5%, dividiríamos a taxa mensal por $\frac{1}{12}$, pois esta é a quantidade de períodos de ano dentro de um mês. Porém, como pela equação 3.3 podemos multiplicar a taxa mensal por 12, para encontrarmos a taxa anual proporcional. Assim, 5% ao mês é proporcional a $5\%.12 = 60\%$ ao ano. Veja alguns exemplos de conversão de taxas proporcionais:

Nota: Ao longo do trabalho usaremos as seguintes siglas para representar os períodos de incidência das taxas de juros:

Período	Sigla
ao mês	a.m.
ao trimestre	a.t.
ao quadrimestre	a.q.
ao semestre	a.s.
ao ano	a.a.

Tabela 3.2

12% a.a. é proporcional a 1% a.m., pois $12\% \div 12 = 1\%$.

10% a.s. é proporcional a 20% a.a., pois $10\% \,.\, 2 = 20\%$.

6% a.t. é proporcional a 24% a.a., pois $6\% \,.\, 4 = 24\%$.

36% a.a. é proporcional a 12% a.q., pois $36\% \div 3 = 12\%$.

Exemplo 3.1.7: Um capital aplicado a juros simples durante 5 meses, sob taxa de juros de 15% ao ano, gerou um montante de R$ 31.875,00. Determine o valor do capital aplicado.

Solução: dados do problema: $i = 15\%$ a.a., $n = 5$, $M = 31875$.

Cálculo da taxa de juros mensal proporcional:

15% a.a. significa $15\% \div 12 = 1{,}25\%$ ao mês.

Pela equação 3.2, temos:

$$31875 = C \cdot (1 + 0{,}0125 \times 5)$$

$$31875 = C \cdot (1 + 0{,}0625)$$

$$31875 = C \cdot (1{,}0625)$$

$$C = \frac{31.875{,}00}{1{,}0625}$$

$$C = 30000$$

Portanto, o capital aplicado é de R$ 30.000,00.

3.1.2 TAXA DE JUROS EQUIVALENTES NO REGIME SIMPLES

Definição: duas taxas i_1 e i_2 são ditas equivalentes quando, ao serem aplicadas ao mesmo capital, pelo mesmo tempo, gerarem o mesmo montante.

Exemplo 3.1.8: Verifique se 1% a.m. e 12% a.a. são taxas equivalentes.

Solução: Para que as taxas acima sejam equivalentes, elas devem sobre o mesmo capital, em um mesmo período, gerar montantes iguais. Assim, vamos comparar os montantes gerados sobre um capital de, por exemplo, R$ 10.000,00 por ambas as taxas.

i) o montante gerado por um capital de R$ 10.000,00 em 12 meses a 1% a.m. será, pela equação 3.2, de:

dados: $C = 10000, i = 1\%\ \text{a.m.} = 0{,}01,\ n = 12$

$$M = C \cdot (1 + i.n)$$

$$M = 10000 \cdot (1 + 0{,}01 \times 12)$$

$$M = 10000 \times 1{,}12$$

$$M = 12000$$

ii) o montante gerado por um capital de R$ 10.000,00 em 1 ano com taxa de 12% a.a. será, pela equação 3.2, de:

Dados: $C = 10000, i = 12\%\ \text{a.a.} = 0{,}12, n = 1\ ano$

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$M = 10000 \cdot (1 + 0{,}12 \times 1)$$

$$M = 10000 \times 1{,}12$$

$$M = 12000$$

Os montantes gerados nas duas situações propostas são iguais, o que mostra que as taxas de juros de 1% a.m. e de 12% a.a. são taxas equivalentes, em regime de juros simples. Podemos concluir que, no regime de capitalização simples (ou no regime de juros simples), taxas proporcionais são também equivalentes.

3.2 JUROS COMPOSTOS

Imagine que sobre um empréstimo de R$ 100,00 será cobrada uma taxa de juros de 10% ao mês. Assim, ao final do primeiro mês o montante da dívida será de $100 + 0{,}1 \times 10 = 110$ reais. A partir da ideia de que juro é uma remuneração do dinheiro, caso o empréstimo se estenda por mais um mês, a taxa de juros incidirá sobre a quantia devida, que agora é de R$ 110,00, pois esse é o valor que esteve emprestado durante todo o segundo mês. Desse modo, o montante da dívida ao final do segundo mês será de $110 + 0{,}1 \times 110 = 121$ reais. Analogamente, os juros ao final do terceiro mês serão calculados sobre o montante da dívida ao final do segundo mês, gerando um montante de $121 + 0{,}1 \times 121 = 133{,}1$ reais. Esses juros, assim calculados, são chamados de juros compostos. De um modo geral, no sistema de juros compostos, a taxa de juros incide sobre o montante do período imediatamente anterior.

Assim, podemos chegar a uma equação para calcularmos o montante M, gerado por um capital inicial (ou principal) C, aplicado a uma taxa de juros i ao período, após n períodos.

Após o primeiro período, temos o montante $M_1 = C + C \cdot i = C \cdot (1 + i)$. Com isso, o montante referente ao segundo período M_2 será calculado sobre o montante M_1, referente ao primeiro período. Veja a sequência:

$$M_1 = C + C \cdot i$$
$$M_1 = C \cdot (1 + i)$$
$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = C \cdot (1 + i) + C(1 + i) \cdot i = C(1 + i) \cdot (1 + i)$$
$$M_2 = C \cdot (1 + i)^2$$
$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = C \cdot (1 + i)^2 + C(1 + i)^2 \cdot i = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i)$$
$$M_3 = C \cdot (1 + i)^3$$

Portanto, a cada período de tempo o capital inicial C sofre uma multiplicação por $(1 + i)$. Após n períodos de tempo, o principal será multiplicado n

vezes pelo fator $(1+i)$, ou seja, será multiplicado por $(1+i)^n$. Logo, no regime de juros compostos de taxa i, um capital C gerará, após n períodos de tempo, um montante M, dado por:

$$M = C \cdot (1+i)^n \tag{3.4}$$

Exemplo 3.2.1: Aplicando hoje na caderneta de poupança a quantia de R$ 20.000,00, qual será o montante gerado ao final de 4 anos, sabendo que a rentabilidade mensal é de 0,5%?

Solução: dados do problema: $C = 20000, i = 0{,}5\% = 0{,}005, n = 4$ anos $= 48$ meses.

$$M = 20000 \cdot (1 + 0{,}005)^{48}$$
$$M = 20000 \cdot (1{,}005)^{48}$$
$$M \approx 20000 \times 1{,}2704$$
$$M \approx 25408$$

Assim, um principal de R$ 20.000,00, aplicado no regime de juros compostos a uma taxa de juros de 0,5% a.m., gerará um montante, após 48 meses, de R$ 25.408,00.

Para o regime de juros compostos, aconselha-se adequar a unidade de tempo do período à taxa, pois como veremos mais adiante não é direta a transformação de taxas no sistema de juros compostos.

Exemplo 3.2.2: Um investimento de R$ 750,00 retirado gera, após 3 meses, um montante R$ 1.000,00. A que taxa mensal de juros rendeu esse investimento?

Solução: dados do problema: $C = 750, n = 3$ meses, $M = 1000$.

Pela equação 3.4, temos:

$$M = C \cdot (1+i)^n$$
$$1000 = 750 \cdot (1+i)^3$$
$$(1+i)^3 = \frac{1000}{750}$$
$$(1+i) = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

$$i = 1{,}1006 - 1 = 0{,}1006$$
$$i = 10{,}06\% \text{ ao mês}$$

Exemplo 3.2.3: Uma loja oferece um produto cujo valor à vista é de R$ 240,00. Esse produto pode ser comprado à prazo, em duas parcelas, sendo uma de entrada, no ato da compra, no valor de R$ 90,00, e outra dois meses após a compra, no valor de R$ 162,24, no sistema de juros compostos. Qual é a taxa mensal de juros cobrada na compra a prazo desse produto?

Solução: Os juros serão cobrados sobre o capital devido a loja que é de $240{,}00 - 90{,}00 = 150{,}00$. Portanto, queremos encontrar a que taxa de juros i, mensal, a que um capital de R$ 150,00 deve ser submetido, para que, ao final de 2 meses, gere um montante de R$ 162,24.

Dados: $C = 150, n = 2$ meses, $M = 162{,}24$.

$$162{,}24 = 150 \cdot (1 + i)^2$$
$$(1 + i) = \sqrt{\frac{162{,}24}{150}}$$
$$i \approx 1{,}04 - 1 = 0{,}04$$
$$i \approx 4\% \text{ ao mês}$$

Portanto, a taxa de juros presente na compra é de aproximadamente 4% a.m.

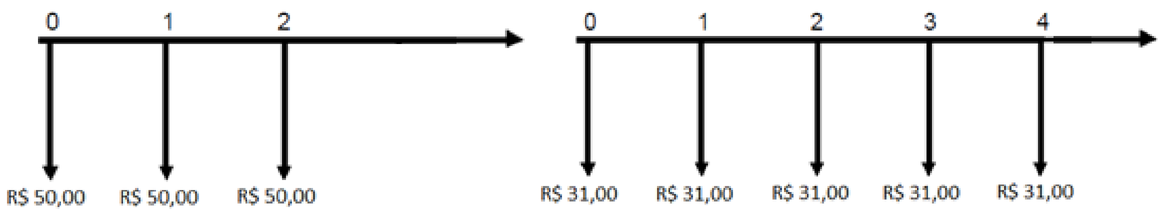
Um dos principais pontos no estudo da Matemática Financeira é a ideia do valor do dinheiro no tempo. Um dos objetivos da inserção da Matemática Financeira no Ensino Médio é fazer com que os alunos percebam a ligação direta entre tempo e dinheiro. Essa percepção se torna uma importante ferramenta no dia a dia, pois, através dela, os estudantes se tornam aptos para a tomada de decisões perante as várias situações que nos são colocadas. Assim, munidos das habilidades de determinar quantias equivalentes observadas em períodos distintos e a de deslocar quantias para uma mesma data, poderão fazer escolhas conscientes, como por exemplo, entre uma compra à vista ou à prazo.

Nesse sentido, podemos interpretar a equação $M = C \cdot (1 + i)^n$ da seguinte maneira: uma quantia, hoje igual a C, transformar-se-á, depois de n períodos de tempo, em uma quantia de $C \cdot (1 + i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, à $F = A \cdot (1+i)^n$. Essa é a equação fundamental da equivalência entre capitais no tempo:

- Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$.
- Para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$.

Exemplo 3.2.4: Para a obtenção de um liquidificador, uma loja oferece duas formas de pagamento: uma parcela de entrada mais duas, para 30 e 60 dias, todas no valor de R$ 50,00, ou uma parcela de entrada mais quatro, para 30, 60, 90 e 120 dias, todas no valor de R$ 31,00. Uma pessoa decide comprar esse liquidificador. Se o dinheiro vale 5% ao mês para ela, qual é a melhor opção de compra?

Solução: Para ilustrar essa solução, serão utilizadas tabelas de fluxo de caixa, onde setas para baixo representam débitos (saída de quantias) e setas para cima representam créditos (entrada de quantias). Abaixo estão os fluxos de caixa que representam a compra em 3 prestações (esquerda) e em 5 prestações (direita).



A análise do valor das duas séries de pagamentos deve ser feita em um mesmo período. Escolheremos, por exemplo, o período 2 (segundo mês). Com isso, devemos determinar os valores futuros das duas parcelas de R$ 50,00, a paga no ato da compra e a paga após 1 mês. E, em relação à compra em cinco prestações, transportaremos para um valor futuro as duas primeiras parcelas, e traremos para o período 2 as duas últimas parcelas. Chamemos de V_1 o valor da série, no 2º mês, cujas prestações são de R$ 50,00 e de V_2 o valor da série, no 2º mês, cujas prestações são de R$ 31,00. Lembrando que a taxa de rendimento é de 5% a.m., temos:

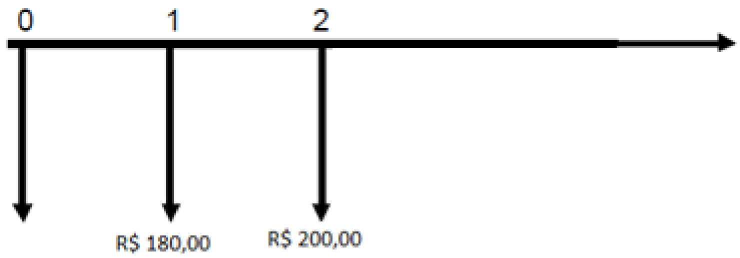
$$V_1 = 50 \cdot (1+0{,}05)^2 + 50 \cdot (1+0{,}05) + 50 = 157{,}63$$

$$V_2 = 31 \cdot (1+0{,}05)^2 + 31 \cdot (1+0{,}05) + 31 + \frac{31}{(1+0{,}05)} + \frac{31}{(1+0{,}05)^2} = 155{,}37$$

Portanto, como $V_1 > V_2$, a melhor forma de pagamento é a dividida em cinco prestações.

Exemplo 3.2.5: Lúcia comprou um exaustor, pagando R$ 180,00, um mês após a compra, e R$ 200,00, dois meses após a compra. Se os juros são de 2,5% a.m., qual é o preço à vista do produto?

Solução: Devemos deslocar no tempo as duas parcelas, para assim, soma-las e determinar o preço à vista do exaustor. Observe o fluxo de caixa de Lúcia:



Desse modo, o valor V do produto na compra à vista será de:

$$V = \frac{180}{(1+0{,}025)} + \frac{200}{(1+0{,}025)^2}$$

$$V \approx 175{,}61 + 190{,}36 = 365{,}97$$

Portanto, o valor na compra à vista do exaustor é de aproximadamente R$ 365,97.

Notemos que R$ 175,61 é a quantia equivalente, após um único período de tempo, a quantia de R$ 180,00, nas condições impostas pelo problema. Em outras palavras, isso significa que ter hoje R$ 175,61 é o mesmo que ter daqui a um mês a quantia de R$ 180,00, com o dinheiro valendo 2,5% a.m.

3.2.1 TAXAS PROPORCIONAIS E EQUIVALENTES NO REGIME COMPOSTO

No regime de juros simples, as taxas de juros proporcionais são também equivalentes, como vimos. Porém, no regime de juros compostos isso não acontece. Vamos mostrar isso com um exemplo:

Exemplo 3.2.6: Qual é o montante gerado, no regime de juros compostos, por um capital de R$ 1000,00 aplicado por 12 meses a uma taxa de juros de 24% a.a.?

Solução: o tempo e a taxa de juros devem estar na mesma unidade de tempo. Com isso, temos duas opções: 1: transformar o tempo para ano, ou 2: transformar a taxa de a.a. para a.m.

Opção 1: dados: $C = 1000, i = 24\%\ \text{a.a.} = 0{,}24, n = 12$ meses $= 1$ ano.

Pela equação 3.4, temos:

$$M_1 = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M_1 = 1000 \cdot (1 + 0{,}24)^1$$

$$M_1 = 1000 \times 1{,}24 = 1240{,}00$$

Opção 2: a taxa de juros de 24% a.a. é proporcional a $24\% \div 12 = 2\%\ \text{a.m.}$

Dados do problema: $C = 1000,\ i = 2\%\ \text{a.m.} = 0{,}02,\ n = 12$ meses.

$$M_2 = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M_2 = 1000 \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$$

$$M_2 = 1000 \cdot (1{,}02)^{12}$$

$$M_2 = 1000 \times 1{,}2682 = 1268{,}20$$

Vemos que os montantes M_1 e M_2 gerados pelos caminhos propostos são diferentes. Isso mostra que as taxas de juros proporcionais de 2% a.m. e de 24% a.a., apesar de serem proporcionais, não são equivalentes, pois geram montantes diferentes em tempos iguais.

Pela definição, sejam i e I duas taxas de juros equivalentes e, C um capital aplicado durante um determinado período de tempo. O capital sofrerá n capitalizações durante o período se aplicado à taxa i, e sofrerá, ao final do período, apenas uma capitalização se aplicado à taxa I. Como as taxas são equivalentes o montante gerado por elas será o mesmo, assim, pela equação 3.4, temos:

$$C \cdot (1 + I)^1 = C \cdot (1 + i)^n$$

$$1 + I = (1 + i)^n \tag{3.5}$$

Exemplo 3.2.7: Verônica investe seu dinheiro a 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investido o capital de Verônica?

Solução: Como a capitalização é mensal, o dinheiro de Verônica está, na realidade, investido a $i = 6\% \div 12 = 0{,}5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que $1 + I = (1 + 0{,}005)^{12}$. Daí, $I = 1{,}005^{12} - 1 \approx 0{,}0617 = 6{,}17\%$ ao ano.

A (falsa) taxa de 6% ao ano é dita nominal. A taxa (verdadeira) de 6,17% ao ano é dita taxa efetiva.

Exemplo 3.2.8: Determine as taxas efetivas equivalentes a:

a) 24% ao ano, com capitalização mensal.
b) 22% ao ano, com capitalização trimestral.
c) i ao ano, com capitalização k vezes ao ano.

Solução:

a) 24% ao ano com capitalização mensal significa $24\% \div 12 = 2\%$ ao mês. A taxa anual equivalente a 2% ao mês é I tal que

$$(1+I)^1 = (1+0{,}02)^{12}$$
$$I = 1{,}02^{12} - 1$$
$$I \approx 1{,}2682 - 1 = 0{,}2682 = 26{,}82\% \text{ ao ano.}$$

b) 22% ao ano com capitalização trimestral significa $22\% \div 4 = 5{,}5\%$ ao mês. A taxa anual equivalente a 5,5% ao mês é I tal que

$$(1+I)^1 = (1+0{,}055)^4$$
$$I = 1{,}055^4 - 1$$
$$I = 1{,}2388 - 1 \approx 0{,}2388 = 23{,}88\% \text{ ao ano.}$$

c) i ao ano com capitalização k vezes ao ano significa $\frac{i}{k}$ por período de capitalização. A taxa anual I equivalente a i é tal que:

$$(1+I)^1 = (1+\frac{i}{k})^k$$
$$I = (1+\frac{i}{k})^k - 1$$

Muitas propagandas, tais como venda de carros, venda de imóveis e empréstimos anunciam taxas proporcionais como se fossem equivalentes, um péssimo hábito, pois induz o leigo ao erro. Nesse aspecto, vemos a grande importância de se inserir de modo efetivo e consolidador conteúdos de Matemática financeira na grade curricular do ensino médio.

4 PRINCIPAIS SISTEMAS DE FINANCIAMENTOS IMOBILIÁRIOS

Neste capítulo, nosso objetivo é apresentar o principal tipo de financiamento imobiliário, explorando as formas de cobrança ao longo do tempo, pensando em professores que trabalhem com turmas de Ensino Médio. Consideramos importante fazer tal abordagem para que o aluno tenha acesso a esses conhecimentos, para que futuramente possa tomar decisões conscientes e racionais. Sabemos também, que o grande público não compreende e, muitas vezes, não possui acesso a esse tipo de discussão, que é de suma importância para vida enquanto trabalhador. Em geral, as empresas, bancos e outras instituições utilizam-se de linguagens muito técnicas e específicas da matemática financeira, que dificultam a compreensão do consumidor. Nesse sentido, este tópico dá ferramentas para alunos terem o primeiro contato com o assunto, assim como para professores planejarem suas aulas.

Para consumidores de baixa renda, o Sistema Financeiro de Habitação é o mais utilizado entre os sistemas de financiamento. Nele, há duas maneiras recorrentes de se estabelecerem as parcelas do financiamento, são elas: o sistema de amortização constante – SAC e o Sistema de Amortização Francês, também conhecido como Tabela Price. A seguir, analisaremos cada uma delas utilizando os conhecimentos adquiridos ao longo do Ensino Médio. Antes, porém, vamos entender alguns conceitos comuns aos dois tipos de pagamentos.

A Prestação ou Parcela é a quantia, na maioria das vezes, mensal paga ao longo do financiamento. Ela é composta por dois valores: o valor de amortização e o valor dos juros, ambos do mesmo período. O juro é o aluguel do dinheiro, como já vimos, e é cobrado sobre o saldo devedor, ou seja, pelo que ainda falta a ser pago da dívida.

A amortização é a parte da prestação que vai efetivamente para o abatimento da dívida. Vamos utilizar um exemplo para fixar o entendimento sobre a amortização.

Exemplo 4.1: Lorena faz um empréstimo de R$ 2000,00 em um banco. Suponha que a definição do valor de cada parcela fique a cargo do cliente, contando que o empréstimo seja quitado em 3 parcelas mensais, com a primeira para 30 dias. O banco cobrará um taxa de juros de 10% ao mês. Assim, Lorena quita seu empréstimo com um pagamento de R$ 700,00 no primeiro mês, R$ 1000,00 no segundo e R$ 715,00. Determine o valor da amortização em cada uma das parcelas.

Solução: Ao final do primeiro mês o valor da dívida é de 2000 reais mais a quantia de juros que são 10% de $2000 = 200$ reais. Com isso, da primeira parcela, 200 reais serão apenas para cobrir os juros do período, fazendo com que o abatimento da divida no primeiro mês seja de $700 - 200 = 500$ reais. Este é o valor da amortização contido na primeira parcela. A partir daí, utilizaremos as tabela abaixo para discriminar os valores das outras duas amortizações.

1º Mês	Valor da dívida no início do período: 2000 Juros do período: 10% de $2000 = 200$ Valor da dívida ao final do período: 2200 Valor da parcela: 700 **Amortização**: $700 - 200 = 500$ Saldo Devedor: $2200 - 700 = 1500$
2º Mês	Valor da dívida no início do período: 1500 Juros do período: 10% de $1500 = 150$ Valor da dívida ao final do período: 1650 Valor da parcela: 1000 **Amortização**: $1000 - 150 = 850$ Saldo Devedor: $1650 - 1000 = 650$
3º Mês	Valor da dívida no início do período: 650 Juros do período: 10% de $650 = 65$ Valor da dívida ao final do período: $650 + 65 = 715$ Valor da parcela: 715 **Amortização**: $715 - 65 = 650$ Saldo Devedor: $715 - 715 = 0$

Logo, os valores das amortizações são de R$ 500,00 no primeiro mês, R$ 850,00 no segundo e R$ 650 no segundo, que somados resultam em R$ 2000,00, que é o valor da dívida quando o empréstimo foi tomado.

4.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE – SAC

Nesse sistema as parcelas do financiamento são decrescentes, pois a amortização é constante, fazendo com que os juros sejam cada vez menores a cada período, consequentemente diminuindo o valor das parcelas. Esse é o modelo mais utilizado no mercado imobiliário. Um dos motivos para que seja um dos mais utilizados é o de que as parcelas são cada vez menores, assim, diminuindo bastante a possibilidade de inadimplência do consumidor.

Como o próprio nome já diz, no SAC a amortização é constante e é obtida dividindo-se o capital inicial (ou, valor do empréstimo) pelo número de parcelas do financiamento. Os juros incidem sobre os saldos devedores dos períodos imediatamente anteriores. Cada parcela (ou prestação) do financiamento é composta pela quantia de amortização mais os juros do período. Para fixar as ideias desse modelo de financiamento, vamos a um exemplo prático:

Exemplo 4.1.1: Determine o valor das parcelas de um financiamento de R$ 3.000,00, pago em 3 prestações mensais no modelo SAC, sabendo que os juros são de 10% ao mês.

Solução: Primeiramente, vamos determinar os valores de amortização de cada mês:

$$\text{Amortização} = \frac{\text{Valor do empréstimo}}{\text{total de períodos}}$$

Assim, cada amortização será de $\frac{3000}{3}$ = 1000. Para facilitar a compreensão do cálculo de cada uma das parcelas utilizaremos uma tabela.

1º Mês	Dívida atual: 3000 Juros do período: 10% de 3000 = 300 Montante da dívida: 3000 + 300 = 3300 Amortização: 1000 Parcela do mês: 1000 + 300 = 1300 Saldo devedor: 3300 – 1300 = 2000
2º Mês	Dívida atual: 2000 Juros do período: 10% de 2000 = 200 Montante da dívida: 2000 + 200 = 2200 Amortização: 1000 Parcela do mês: 1000 + 200 = 1200 Saldo devedor: 2200 – 1200 = 1000

3º Mês	Dívida atual: 1000 Juros do período: 10% de 1000 = 100 Montante da dívida: 1000 + 100 = 1100 Amortização: 1000 Parcela do mês: 1000 + 100 = 1100 Saldo devedor: 1100 – 1100 = 0

Tabela 4.1

Assim, as parcelas do financiamento são R$ 1.300,00 no primeiro mês, R$ 1.200,00 no segundo e R$ 1.100,00 no terceiro. No exemplo acima, podemos entender que a dívida atual é o mesmo que o saldo devedor do início do período. Ou ainda, a dívida atual é o saldo devedor do período passado, que no caso do primeiro mês é o próprio capital inicial, ou seja, o valor do empréstimo (ou financiamento).

A tabela foi útil e suficiente para a resolução do problema anterior, mas na prática, os financiamentos possuem muitas prestações, e muitas vezes estamos interessados em saber os valores de uma ou mais prestações em específico, ao longo do financiamento. Nosso objetivo agora é encontrar uma equação que forneça o valor de uma parcela específica do financiamento. Para isso, vamos encontrar algumas equações a partir das ideias fixadas pelo sistema SAC e pelo exemplo anterior.

Suponhamos que será feito um financiamento, a uma taxa de juros i, de uma quantia C no modelo SAC, o qual terá n períodos. Chamaremos de P_k o valor da $k-ésima$ parcela do financiamento, de A o valor da amortização, de J_k os juros devidos no período k e de i a taxa de juros ao período efetiva. Até então podemos concluir que,

$$P_k = A + J_k, \text{com } k = 1, 2, \dots, n \qquad (4.1)$$

Para um melhor entendimento do processo, utilizaremos SD_k para representar o saldo devedor após o pagamento da parcela P_k. Com o auxílio da tabela 4.1, constatamos que o saldo devedor SD_k é dado pela diferença entre o capital inicial C e a quantidade de amortizações pagas até o período em questão, ou seja, k amortizações. Com isso, temos:

$SD_k = C - k \cdot A$. Como $A = \frac{C}{n}$, segue que

$SD_k = C - k \cdot \frac{C}{n}$ e por evidência, temos

$$SD_k = C \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right) \tag{4.2}$$

Lembrando que os juros incidem sobre o saldo devedor do período anterior, podemos escrever:

$J_k = i \cdot SD_{k-1}$. A partir da equação 4.2, temos:

$SD_{k-1} = C \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$ e portanto

$$J_k = i \cdot C \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$J_k = i \cdot C \cdot \frac{n-k+1}{n} \tag{4.3}$$

Substituindo 4.3 em 4.1, e lembrando que $A = \frac{C}{n}$, chegamos à:

$$P_k = A + J_k$$

$$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C \cdot \frac{n-k+1}{n} \tag{4.4}$$

Concluímos nosso objetivo com a equação 4.4, pois ela nos permite determinar uma parcela específica de um financiamento.

O montante M_k da divida em um período é dado pelo saldo devedor do período imediatamente anterior, acrescido dos juros sobre ele. Desse modo, ele pode ser expresso por:

$$M_k = SD_{k-1} + i.SD_{k-1}$$

$M_k = (1 + i) \cdot SD_{k-1}$, como $SD_{k-1} = C \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$, segue que

$$M_k = (1 + i) \cdot C \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \tag{4.5}$$

Para fixar o exposto até agora, resolveremos um exemplo.

Exemplo 4.1.2: Manoel contraiu um empréstimo no valor de R$ 1.000,00, a serem pagos em 4 parcelas, a uma taxa de juros de 10% am. O modelo adotado para a quitação da divida é o SAC, sendo a primeira parcela paga um mês após o empréstimo ser contraído. Determine o valor de cada uma das parcelas que Manoel pagará.

Solução: Os dados do problema são: $C = 1000$, $i = 0{,}1$ e $n = 4$. Como a amortização é obtida dividindo-se o capital inicial (ou, valor do empréstimo) pelo número de parcelas do financiamento, segue que $A = \frac{C}{n} = \frac{1000}{4} = 250$.

A partir da equação 4.4, temos:

$$P_1 = \frac{1000}{4} + 0{,}1 \times 1000 \cdot \frac{4-1+1}{4}$$

$$P_1 = 250 + 100 \times 1 = 350.$$

$$P_2 = \frac{1000}{4} + 0{,}1 \times 1000 \cdot \frac{4-2+1}{4}$$

$$P_2 = 250 + 100 \times 0{,}75 = 325.$$

$$P_3 = \frac{1000}{4} + 0{,}1 \times 1000 \cdot \frac{4-3+1}{4}$$

$$P_3 = 250 + 100 \times 0{,}5 = 300.$$

$$P_4 = \frac{1000}{4} + 0{,}1 \times 1000 \cdot \frac{4-4+1}{4}$$

$$P_4 = 250 + 100 \times 0{,}25 = 275.$$

Portanto, as parcelas são de R$ 350,00 no primeiro mês, R$ 325,00 no segundo, R$ 300,00 no terceiro e R$ 275,00 no quarto.

Exemplo 4.1.3: Ao financiar sua casa, Maria optou pelo modelo de financiamento conhecido como SAC. O valor do imóvel é de R$ 225.000,00. O valor financiado foi dividido em 120 prestações mensais, com a primeira parcela para um mês após o fechamento do negócio. Após uma exaustiva negociação, Maria conseguiu que sobre seu financiamento fosse fixada uma taxa de juros nominal anual de 9%. Por questões de planejamento, Maria precisa saber qual será o valor da septuagésima parcela de seu financiamento. Determine o valor desejado por Maria.

Solução: Os dados apresentados no problema são: $C = 225000$, $n = 120$, $i = \frac{9}{12} = 0{,}75\%\ \mathrm{a.m.}$ Queremos encontrar a septuagésima parcela, ou seja, P_{70}. Para solucionar o problema, basta utilizar a equação 4.4:

$$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

$$P_{70} = \frac{225000}{120} + 0{,}0075 \times 225000 \cdot \frac{120-70+1}{120}$$

$$P_{70} = 1875 + 1687{,}5 \cdot \frac{51}{120}$$

$$P_{70} = 1875 + 717{,}19 = 2592{,}19$$

Portanto, o valor da parcela procurada por Maria é de R$ 2.592,19.

Exemplo 4.1.4: Qual o valor da segunda prestação referente a um empréstimo de R$ 5.000,00, para ser financiado, no sistema SAC, em 10 pagamentos mensais e sucessivos a uma taxa de juros de 12% aa, com a primeira prestação para 3 meses?

Solução: Dados do problema: Valor do empréstimo: R$ 5.000,00, $i = \frac{12}{12} = 1\% \text{ a. m.}$, $n = 10$. Aqui tem que se perceber que o capital inicial, para montar nosso sistema SC, não será 5000 reais, pois a primeira parcela só será paga ao final do terceiro mês. Durante esse período os juros serão acumulados, e não haverá nenhum abatimento. Assim, recorremos à fórmula de juros compostos, mostrada na equação 3.4 para encontrarmos o ponto de partida do financiamento:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Como o primeiro pagamento ocorre no terceiro mês, é como se o montante da dívida ao final do segundo mês fosse o capital inicial C, no modelo que apresentamos até agora. O montante da dívida ao final do segundo mês é de:

$$M = 5000 \cdot (1 + 0{,}01)^2$$

$$M = 5100{,}50$$

Agora, devemos encontrar a segunda prestação de um financiamento de R$ 5.100,50, dividido em 10 parcelas. Usando a equação 4.4, temos:

$$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

$$P_2 = \frac{5100{,}5}{10} + 0{,}01 \times 5100{,}5 \cdot \frac{10-2+1}{10}$$

$$P_2 = 510{,}05 + 45{,}90 = 555{,}95.$$

Portanto, o valor da segunda prestação será de R$ 555,95.

4.2 TABELA PRICE

A Tabela Price, ou Sistema de Amortização Francês, é um SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE (SPC), com duas condições pré-estabelecidas: as parcelas do financiamento são, obrigatoriamente, mensais e a taxa de juros adotada é anual e nominal, sendo necessária a conversão por proporcionalidade. No SPC, as prestações, como o próprio nome sugere, são iguais. As parcelas (ou prestações) são compostas pela amortização e os juros, ambos do período em questão. Os juros diminuem ao longo do período e o valor da amortização aumenta. Vamos mostrar como se calcula os valores das prestações nesse sistema de financiamento, a partir de um exemplo, para depois analisarmos o caso geral.

Exemplo 4.2.1: Uma geladeira é vendida, pelo pagamento à vista, por R$ 1200,00. Caso o consumidor queira parcelar o eletrodoméstico, será cobrada uma taxa de juros no valor de 24% aa. Considerando que uma pessoa comprou a geladeira em 12 prestações iguais, pagando a primeira parcela um mês após a compra, calcule o valor das parcelas utilizando o sistema Price.

Solução: Um dos principais pontos da matemática financeira é a de deslocar quantias no tempo. A partir disso, vamos calcular o valor de cada uma das parcelas na data da compra e, em seguida, vamos somá-los. Essa soma deverá ser igual ao valor da compra, R$ 1.200,00. Para voltar uma quantia no tempo em k períodos, basta dividi-la por $(1+i),^{k}$onde i é a taxa de juros ao período. Portanto, devemos dividir a primeira prestação por $(1+0{,}02)$, a segunda por $(1+0{,}02)^2$, e assim sucessivamente até a 12ª prestação. Com isso, chegamos à equação:

$$\frac{P}{(1+0{,}02)^1}+\frac{P}{(1+0{,}02)^2}+\cdots+\frac{P}{(1+0{,}02)^{12}}=1200$$

Por evidenciação, temos:

$$P\cdot\left(\frac{1}{(1{,}02)^1}+\frac{1}{(1{,}02)^2}+\cdots+\frac{1}{(1{,}02)^{12}}\right)=1200$$

$$P\cdot\frac{1{,}02^{11}+1{,}02^{10}+\cdots+1{,}02+1}{(1{,}02)^{12}}=1200$$

Pelo fato de que $\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$, segue que:

$$P\cdot\frac{\frac{1{,}02^{12}-1}{1{,}02-1}}{(1{,}02)^{12}}=1200$$

$$P\cdot\frac{1{,}02^{12}-1}{(1{,}02)^{12}.(1{,}02-1)}=1200$$

$$P=1200\cdot\frac{(1{,}02)^{12}.(1{,}02-1)}{1{,}02^{12}-1} \qquad (4.6)$$

Com o auxílio de uma calculadora, chegamos à:

$$P\approx 1200\times 0{,}09456=113{,}47$$

Portanto, o valor de cada uma das prestações será de R$ 113,47.

Suponhamos que será feito um financiamento, a uma taxa de juros i, de uma quantia C no modelo SPC, o qual terá n períodos. Chamaremos de P_k o valor da $k-ésima$ parcela do financiamento, de A_k e J_k, respectivamente, o valor da amortização e os juros devidos, ambos no período k e de i a taxa de juros ao período efetiva. Nesse sistema temos também que:

$$P_k = A_k + J_k, \text{com } k = 1, 2, \dots, n$$

Porém, podemos definir a equação geral para o cálculo da parcela do financiamento SPC a partir da equação 4.5, substituindo 1,02 por $(1 + i)$, 12 por n e 1200 por C:

$$P = C \cdot \frac{(1 + i)^n \cdot ((1 + i) - 1)}{(1 + i)^n - 1}$$

$$P = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \qquad (4.7)$$

Exemplo 4.2.2: Um empréstimo de R$ 2.000,00 será financiado no modelo Price, em 5 prestações mensais, sucessivas, com a primeira parcela para 30 dias. A taxa de juros cobrada será de 60% a.a. Construa uma tabela que mostre os valores das parcelas, dos saldos devedores, das amortizações e dos juros, em cada período.

Solução: Dados: $C = 2000$, $i = \frac{60}{12} = 5\% \text{ a.m.} = 0{,}05$, $n = 5$. De acordo com a equação 4.6 o valor de cada parcela será de:

$$P = C \cdot \frac{(1 + i)^n \cdot i}{(1 + i)^n - 1}$$

$$P = 2000 \times \frac{(1 + 0{,}05)^5 \cdot 0{,}05}{(1 + 0{,}05)^5 - 1}$$

$$P \approx 2000 \times 0{,}230975 \approx 461{,}95$$

Os juros são obtidos aplicando-se a taxa sobre o saldo devedor do período imediatamente anterior, ou seja, $J_k = i \cdot (SD_{k-1})$, onde k é o período e SD_{k-1} é o saldo devedor do período $k - 1$, com $k = 1, 2, \dots, n$, sendo que SD_0 representa o saldo devedor no momento de aquisição do empréstimo, ou seja, é o próprio valor do empréstimo. Assim,

$$J_1 = 0{,}05 \cdot (SD_0)$$

$$J_1 = 0{,}05 \cdot (2000) = 100$$

A partir desses dados: $C = 2000$, $i = 0{,}05$, $P = 461{,}95$ e $J_1 = 100$ podemos construir a tabela.

Mês	Prestação	Dívida (Início do mês)	Juros $J_k = i \cdot (SD_{k-1})$	Amortização $A_k = P - J_k$	Saldo Devedor $SD_k = SD_{k-1} - A_k$
1	461,95	2000,00	100,00	361,95	1638,05
2	461,95	1638,05	81,90	380,05	1258,00
3	461,95	1258,00	62,90	399,05	858,95
4	461,95	858,95	42,95	419,00	439,95
5	461,95	439,95	22,00	439,95	0,00

Tabela 4.2

Assim, construímos uma tabela que mostra os valores solicitados em cada um dos períodos. Agora, vamos determinar uma equação que forneça os valores das amortizações em cada período. Vimos que:

$A_k = P - J_k$, como $J_k = i \cdot (SD_{k-1})$, e segue que

$A_k = P - i \cdot (SD_{k-1})$. Mas, $SD_{k-1} = SD_k + A_k$, então

$$A_k = P - i \cdot (SD_k + A_k)$$

$$A_k = P - i \cdot SD_k - i \cdot A_k$$

$$A_k + i \cdot A_k = P - i \cdot SD_k,$$

Como $P = A_1 + J_1 = A_2 + J_2 = \cdots = A_k + J_k$, podemos fazer $P = A_{k+1} + J_{k+1}$, e assim:

$A_k + i \cdot A_k = A_{k+1} + J_{k+1} - i \cdot SD_k$. Dado que $J_{k+1} = i \cdot (SD_k)$, chegamos a

$$A_k + i \cdot A_k = A_{k+1} + J_{k+1} - J_{k+1}$$

$$(1 + i) \cdot A_k = A_{k+1}$$

Portanto, cada amortização pode ser obtida multiplicando-se a amortização do período imediatamente anterior por $(1 + i)$. Dessa maneira, vemos que as amortizações formam uma progressão geométrica (PG) de razão $(1 + i)$. A partir do termo geral da PG, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, chegamos à:

$$A_k = A_1 \cdot (1 + i)^{k-1} \quad (4.8)$$

Dado que $A_1 = P - J_1$, onde $J_1 = i \cdot (SD_0)$, lembrando que SD_0 refere-se ao valor financiado, ou seja, $SD_0 = C$, concluímos que:

$$A_1 = P - J_1$$

$$A_1 = P - i \cdot C \quad (4.9)$$

Portanto, substituindo as equações 4.6 e 4.8 em 4.7, chegamos a:

$$A_k = \left(C \cdot i \left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right) - i \cdot C\right) \cdot (1+i)^{k-1}$$

$$A_k = C \cdot i \left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - 1\right) \cdot (1+i)^{k-1}$$

$$A_k = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^n + 1}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{k-1}$$

$$A_k = C \cdot i \cdot \frac{1}{(1+i)^n - 1} \cdot (1+i)^{k-1}$$

$$A_k = C \cdot i \ \cdot \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \qquad (4.10)$$

A equação 4.10 nos permite calcular a amortização em qualquer um dos períodos sem a necessidade de construção de uma tabela.

A equação que fornece os juros cobrados em cada período decorre diretamente da diferença:

$J_k = P - A_k$, substituindo as equações 4.6 e 4.9, temos

$$J_k = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$J_k = C \cdot i \left(\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}\right)$$

$$J_k = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \qquad (4.11)$$

Vamos determinar a equação que fornece o Saldo Devedor SD_k, do período k. Sabemos que $J_k = i \cdot (SD_{k-1})$, assim:

$$SD_{k-1} = \frac{J_k}{i}$$

A equação 4.10 nos leva a

$$SD_{k-1} = \frac{C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}}{i}, \text{logo}$$

$$SD_{k-1} = C \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}$$

Como $SD_k = SD_{k-1} - A_k$, segue pela equação imediatamente anterior e pela equação 4.9, que

$$SD_k = C \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} - C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$SD_k = C \cdot \left(\frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} - \frac{i \cdot (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1} \right)$$

$$SD_k = C \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^{k-1} - i \cdot (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$SD_k = C \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i) \cdot (1+i)^{k-1}}{(1+i)^n - 1}$$

$$SD_k = C \cdot \frac{(1+i)^n - (1+i)^k}{(1+i)^n - 1} \qquad (4.12)$$

Por fim, temos as ferramentas necessárias para resolvermos os problemas envolvendo o sistema Price de financiamento.

Exemplo 4.2.3: Por um financiamento, uma pessoa paga uma prestação de R$ 1 460,22, que serão pagas durante 24 meses. O financiamento foi efetuado de acordo com o sistema Price, utilizando taxa de juros mensal de 1%. Com base nessas informações, calcule o valor financiado.

Solução: Dados do problema: $P = 1\,460{,}22$, $n = 24$, $i = 0{,}01$. Queremos encontrar o capital inicial da operação C. Para isso, basta utilizarmos a equação 4.6:

$$P = C \cdot i \cdot \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$1\,460{,}22 = C \cdot 0{,}01 \cdot \frac{(1+0{,}01)^{24}}{(1+0{,}01)^{24} - 1}$$

Com o auxílio de uma calculadora chegamos à:

$$1\,460{,}22 = C \cdot 0{,}01 \cdot \frac{(1+0{,}01)^{24}}{(1+0{,}01)^{24} - 1}$$

$$1\,460{,}22 \approx C \cdot 0{,}04707$$

$$C = \frac{1\,460{,}22}{0{,}04707} \approx 31022{,}31$$

Portanto, o capital financiado foi de aproximadamente R$ 31022,31.

Exemplo 4.2.4: Uma concessionária oferece um veículo seminovo a um cliente. Não podendo arcar com a compra à vista, ele decide pela compra à prazo, em 10 parcelas, com a primeira parcela para um mês. O sistema de financiamento acordado será o de Amortização Francês (Tabela Price). Determine o valor do veículo à vista, sabendo que os valores da sexta e sétima amortizações, são, respectivamente, R$ 1.411,65 e R$ 1.439,88.

Solução: Dados do problema: $A_6 = 1411{,}65$, $A_7 = 1439{,}88$ e $n = 10$. Sabemos que as amortizações no sistema Price formam uma PG de razão $(1 + i)$, dessa maneira, temos que:

$$A_7 = (1 + i) \cdot A_6$$

$$(1 + i) = \frac{1439{,}88}{1411{,}65}$$

$$1 + i \approx 1{,}02$$

$$i = 0{,}02$$

Assim, concluímos que a taxa de juros que incide no financiamento é de aproximadamente 2% am. Agora, basta utilizarmos a equação 4.9 para chegarmos ao valor de C.

$$A_k = C \cdot i \cdot \frac{(1 + i)^{k-1}}{(1 + i)^n - 1}$$

$$A_6 = C \cdot 0{,}02 \cdot \frac{(1 + 0{,}02)^{6-1}}{(1 + 0{,}02)^{10} - 1}$$

$$1411{,}65 \approx C \cdot 0{,}100831$$

$$C \approx 14000$$

Portanto, o valor do carro à vista é de aproximadamente R$ 14.000,00.

5 JUROS POR DENTRO

Até então, foram apresentados os sistemas de juros normalmente estudados no Ensino Médio. Outro sistema de juros, pouco conhecido pela sociedade, mas muito presente no dia a dia é o de juros por dentro. Ele aparece na conta de luz, no cálculo do IMPOSTO SOBRE CIRCULAÇÃO DE MERCADORIAS E PRESTAÇÃO DE SERVIÇO-ICMS e nos empréstimos bancários.

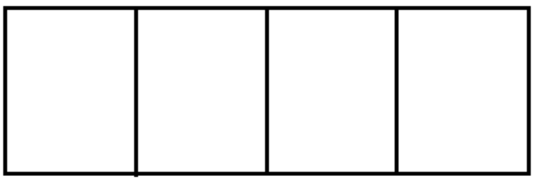
No regime de juros por dentro, a taxa de juros incide sobre o montante gerado, e não sobre o capital inicial. Ou seja, a base de cálculo no regime de juros por dentro é o próprio montante da operação.

5.1 ANÁLISE DE JUROS POR DENTRO A PARTIR DE BARRAS

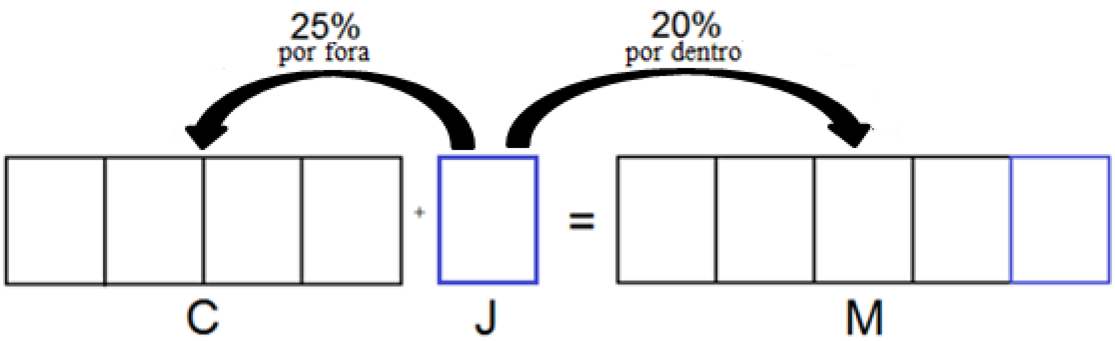
Uma maneira didática de olharmos para os juros “por dentro” é a partir da utilização de barras, pois nos permite de uma maneira simples, observar, ao mesmo tempo, um aumento calculado no regime de juros por dentro e por fora.

Vamos representar um aumento de 20% no regime de juros por dentro de determinada quantia C, J representará os Juros da operação e M o montante:

Dividiremos a barra em 4 partes iguais.



Agora, acrescentamos a ela uma parte igual a cada uma das partes que a compõem.



Dessa maneira, a barra resultante estará dividida em 5 partes iguais. A parte acrescida (em azul) é uma das 5 partes iguais da barra resultante e, portanto representa $\frac{1}{5}$ do todo, ou seja, 20% da barra resultante (ou montante). Este caso é a representação do acréscimo de 20% por dentro.

Por outro lado, a parte em azul representa $\frac{1}{4}$ da quantia inicial, ou seja, 25% dela, que é a porcentagem de aumento ocorrido no exemplo, caso o cálculo fosse "por fora".

Note que um aumento de 20% calculados "por dentro" equivale a um aumento de 25% calculado "por fora". Tal fato será explorado no próximo tópico.

5.2 MONTANTE NO REGIME DE JUROS POR DENTRO

A ideia básica de juros por dentro é o de que a taxa de juros incide sobre o montante da operação, e não sobre o capital, como acontece nos sistemas de juros simples e compostos, sistemas estes que são denominados como juros por fora.

Exemplo 5.2.1: Uma quantia de R$ 1000,00 sofre um acréscimo de 20%. Determine os montantes M_1 e M_2 gerados, ao final da operação, de modo que para M_1 o acréscimo seja calculado por fora e para M_2, por dentro.

Solução: O montante M_1 será de:

$$M_1 = 1000 + 0{,}2 \times 1000$$

$$M_1 = 1000 + 200$$

$$M_1 = 1200$$

No regime de juros por dentro, a quantia J de juros obtida representará 20% do montante gerado. Sabemos que $M_2 = C + J$, como J é 20% de M_2, então $J = 0{,}2M_2$, assim, temos:

$$M_2 = C + 0{,}2M_2$$

$$M_2 - 0{,}2M_2 = C$$

$$M_2 = \frac{C}{1 - 0{,}2}$$

Como $C = 1000$,

$$M_2 = \frac{1000}{0,8} = 1250$$

Portanto, $M_1 = 1200$ e $M_2 = 1250$.

No sistema de juros por dentro, o montante gerado por determinada quantia C, a uma taxa de juros i, em um único período de tempo é de:

$$M = C + J$$

Como $J = i \cdot M$ segue que

$$M = C + iM$$

$$M - iM = C$$

$$M \cdot (1 - i) = C$$

$$M = \frac{1}{(1-i)} \cdot C$$

Exemplo 5.2.2: Calcule o montante M gerado por um acréscimo de 25%, no regime de juros por dentro, sobre uma quantia de R$ 100,00. A seguir, monte o esquema do aumento, a partir de barras, como no tópico 5.1.

Solução: O montante M será de:

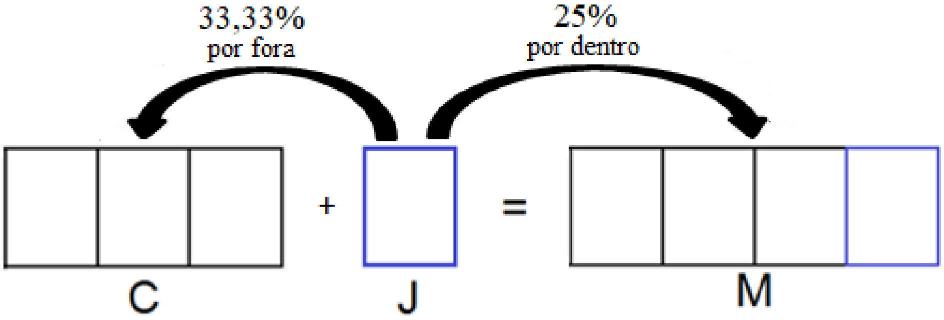
$$M = \frac{1}{(1-i)} \cdot C$$

$$M = \frac{1}{(1-0,25)} \cdot 100$$

$$M = \frac{1}{(0,75)} \cdot 100 \approx 133,33$$

Assim, o montante gerado é de aproximadamente R$ 133,33.

Para o esquema, dividiremos a barra em 3 partes iguais e, em seguida, acrescentaremos a ela uma parte igual a cada uma das partes que a compõem.



Com isso, a barra que representa o montante M está dividida em 4 partes iguais. A parte acrescida (em azul) representa $\frac{1}{4}$ do todo, ou seja, 25% da barra resultante. Este caso é a representação do acréscimo de 25% por dentro. Observa-se que, um aumento de 25% calculado “por dentro” equivale a um aumento de, aproximadamente, 33,33% calculado “por fora”.

Exemplo 5.2.3: Um banco oferece empréstimos a uma taxa de 10% ao mês, de modo que os juros são cobrados no momento da aquisição do empréstimo. Por exemplo, uma pessoa contrata, por um período de um mês, um empréstimo no valor de R$ 2000,00. Nessas condições, no momento da contratação, são abatidos 10% $\times 2000 = 200$ reais, referentes aos juros antecipados. Assim, a pessoa leva para casa $2000 - 200 = 1800$ reais e se compromete a pagar R$ 2000,00 ao final do período. Mostre que o sistema de cobrança de juros antecipados adotado pelo banco equivale a praticar o regime de juros por dentro.

Solução: Tomaremos por base o exemplo apresentado no enunciado. A pessoa pagará 2000 reais ao final da operação, ou seja, podemos entender esse valor como o montante da dívida a ser pago. A taxa de 10% do banco foi aplicada sobre os 2000 reais, ou seja, sobre o montante. Ora, essa é a ideia básica de juros por dentro, em que a taxa de juros incide sobre o montante da operação. Agora, basta verificar que, no sistema de juros por dentro, um capital de 1800 reais (valor disponibilizado para a pessoa), aplicado a uma taxa de 10% ao mês, gera um montante de 2000 reais, ao final de um mês. De fato:

$$M = \frac{1}{(1-i)} \cdot C$$

$$M = \frac{1}{(1-0{,}10)} \cdot 1800$$

$$M = \frac{1}{(0{,}9)} \cdot 1800 = 2000{,}00$$

Portando, cobrar juros antecipados equivale a praticar o regime de juros por dentro, relativos a um mesmo período.

5.3 EQUIVALÊNCIA DAS TAXAS DE JUROS POR DENTRO E POR FORA

No exemplo 5.2.1 vimos que juro J cobrado é de $M - C = 1250 - 1000 = 250$ reais. Olhando para o valor inicial, notamos que a quantia de juro representa $\frac{250}{1000} = 0{,}25 = 25\%$ do capital. Nesse exemplo, vimos que uma taxa de juros de 20%, no regime de juros por dentro, equivale a uma taxa de juros de 25% no sistema de juros por fora, como observado, também, no tópico 5.1.

De um modo geral, seja um montante M gerado pela aplicação de um capital C, a uma taxa de juros por dentro i, durante um único período de tempo. Sabemos que a porcentagem de juros indicada na taxa incidirá sobre o montante, dessa forma o juro J será de $i.M$. Assim, temos que:

$$J = i \cdot M$$

mas $M = C + J$, então

$$J = i \cdot (C + J)$$

$$J - i \cdot J = i \cdot C$$

$$J(1 - i) = i \cdot C$$

$$J = \frac{i}{1 - i} \cdot C$$

Portanto, uma taxa de juros i no regime de juros por dentro equivale a uma taxa de juros $\frac{i}{1-i}$ no regime de juros por fora.

Para uma mesma taxa de juros i, aplicada sobre o mesmo capital C, o valores dos juros obtidos pelos sistemas por fora e por dentro são, respectivamente, $i \cdot C$ e $\frac{i}{1-i} \cdot C$.

A tabela abaixo apresenta algumas equivalências entre essas taxas:

TABELA DE EQUIVALÊNCIA	
JUROS POR DENTRO	JUROS POR FORA
5%	$\frac{0{,}05}{1-0{,}05}$ = 0,0526 = 5,26%
10%	$\frac{0{,}1}{1-0{,}1}$ = 0,1111 = 11,11%
20%	$\frac{0{,}2}{1-0{,}2}$ = 0,25 = 25%

30%	$\frac{0,3}{1-0,3}$ = 0,4286 = 42,86%
50%	$\frac{0,5}{1-0,5}$ = 1 = 100%
75%	$\frac{0,75}{1-0,75}$ = 3 = 300%

Tabela 5.3.1

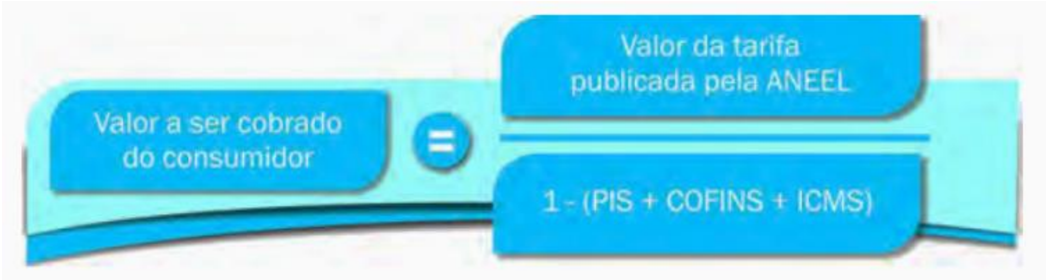
Analisando a tabela, notamos que a diferença entre as taxas cresce rapidamente. Uma quantia de 50% cobrados do modo “por dentro” significa um aumento de 100% do valor inicial.

5.4 JUROS POR DENTRO NA CONTA DE LUZ

Quando pagamos a conta de luz, além do consumo, arcamos também com as expensas referentes aos impostos, são eles: o Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços (ICMS) que incide sobre a movimentação de mercadorias em geral, o que inclui produtos dos mais variados segmentos, como eletrodomésticos, alimentos, cosméticos e sobre serviços de transporte interestadual e intermunicipal e de comunicação. Sua regulamentação é de competência dos Estados e do Distrito Federal; os Programas de Integração Social e de Formação do Patrimônio do Servidor Público (PIS, ou PIS/PASEP) cujo objetivo é a captação de recursos para o pagamento do seguro-desemprego, abono e participação na receita dos órgãos e entidades para os trabalhadores públicos e privados, sendo o PIS destinado aos funcionários de empresas privadas, administrado pela Caixa Econômica Federal, e o PASEP destinado aos servidores públicos, administrado pelo Banco do Brasil e, por fim a Contribuição para Financiamento da Seguridade Social (COFINS), que tem como objetivo arrecadar recursos principalmente para a área da saúde.

5.4.1 CÁLCULO DO VALOR DA CONTA DE LUZ

A ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica) fornece uma cartilha que explica o porquê e a importância da tarifa de energia para a manutenção do sistema elétrico brasileiro, e também o modo como são calculados tais impostos sobre a tarifa. Veja o esquema ilustrado na página 26 da Cartilha “Por Dentro da Conta de Luz”:



A alíquota do ICMS varia de acordo com cada estado, sendo que no Espírito Santo ela é de 25%. As alíquotas do PIS e CONFINS giram em torno de 1% e 7%, respectivamente.

Exemplo 5.4.1: Vamos analisar o cálculo do valor cobrado em uma conta de luz, do estado do Espírito Santo, região metropolitana. Veja a fatura a seguir:

EDP ESPIRITO SANTO DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA S.A.
Praça Costa Pereira, 210 - 3° andar - Centro - Vitória/ES
CEP: 29010-080 - Internet: www.edp.com.br
CNPJ: 28.152.650/0001-71 INSCR. EST. 080.250.16-5
Emissão Aut. pelo Reg. Esp. REOA N.010/2016. Processo N.73491268

Nota Fiscal/Conta de Energia Elétrica: 001.060.779

Cliente / Local de Consumo

[redacted]

CNPJ/CPF: [redacted]

[redacted] SANTA MONICA / VILA VELHA - ES

Roteiro de Leitura: B45VV36A00057

Instalação	Conta do Mês
[redacted]	**Janeiro/2017**
Data de Vencimento	**Valor Total a Pagar (R$)**
07/02/2017	**118,23**

Atendimento EDP
0800 721 0707
RESERVADO AO FISCO
94B9.19F4.ACCE.37AD.1350.8969.38D4.02A7

SEGUNDA VIA DE CONTA EMITIDA ELETRONICAMENTE VIA INTERNET SEM FINS FISCAIS

Demonstrativo de Valores

Descrição	**Quantidade**	**Tarifa**		**Total R$**
		Tarifa		
Descrição	**Quantidade**	**x (TUSD + TE)**		**= Total R$**
Fornecimento de energia elétrica				106,35
Consumo	161 KWH	(0,22126000 + 0,23361000)	73,23	
Tributos	**Base Cálculo**	**Alíquota**		
PIS	106,35 x	1,09% =	1,16	
COFINS	106,35 x	5,05% =	5,37	
ICMS	106,35 x	25,00% =	26,59	
Contribuição de Ilum. Pública				11,88

O valor total da conta é de R$ 118,23, composto basicamente pelo consumo, impostos e taxa de iluminação pública. Esta taxa não fará parte dos cálculos, pois sobre ela não incidem os impostos. Além disso, a taxa de iluminação pública, que nesse caso é de R$ 11,88, é cobrada em cota única e, seu valor independe do consumo presente na conta de luz.

Dessa maneira, estamos interessados em verificar os cálculos que nos levam ao valor de R$ 106,35 (118,23 – 11,88).

As taxas dos impostos PIS, COFINS e ICMS são, respectivamente, de 1,09%, 5,05% e 25%. O consumo foi de R$ 73,23. Segundo a cartilha temos que:

$$Valor\ a\ pagar = \frac{73{,}23}{1-(0{,}0109+0{,}0505+0{,}25)} = \frac{73{,}23}{0{,}6886} \approx 106{,}346.$$

Com isso, procedendo como a cartilha orienta chegamos ao valor constante na conta de luz. Nota-se que as expensas apenas com impostos chegam à 106,35 – 73,23 = R$ 33,12.

5.4.2 COMPARAÇÃO DO VALOR DA CONTA DE LUZ A PARTIR DA FORMA DE CÁLCULO

Sem conhecimento da cartilha fornecida pela ANEEL, uma pessoa poderia prosseguir com seus cálculos para conferir os valores da sua conta de luz, utilizando os princípios de juros por fora, que são os mais comuns e usuais. Assim, ela chegaria aos seguintes resultados:

Consumo	Impostos 1,09% + 5,05% + 25,00%	Total
73,23	31,14% de 73,23 = 22,80	R$ 96,03

Notamos que a diferença gerada pela escolha do regime de juros, por si só, gera um aumento de R$ 106,35 – R$ 96,03 = R$ 10,32 na conta de luz.

Mesmo que o cálculo dos impostos seja no regime de juros por dentro, poderíamos, ao contrário do que orienta a cartilha, converter as alíquotas, uma a uma, para prosseguirmos com os cálculos. Veja a tabela:

CALCULO de EQUIVALENCIA das ALÍQUOTAS		
	POR DENTRO	POR FORA

PIS	1,09%	$\frac{0{,}0109}{1-0{,}0109}$ = 0,0110 = 1,10%
COFINS	5,05%	$\frac{0{,}0505}{1-0{,}0505}$ = 0,0532 = 5,32%
ICMS	25%	$\frac{0{,}25}{1-0{,}25}$ = 0,3334 = 33,34%

Com isso, os impostos sobre o consumo seriam de 39,76%. Isso gera uma quantia de impostos de $0{,}3976.73{,}23 \approx R\$\,29{,}12$.

A diferença entre os valores dos impostos obtidos somando ou não as alíquotas antes de "convertê-las" é de $\text{R\$}\,33{,}12 - \text{R\$}\,29{,}12 = R\$\,4{,}00$. Esse valor parece pouco, mas se estivéssemos falando do consumo médio mensal o impacto anual seria de R$ 48,00. Ainda assim, tal valor não causa inquietação ou um impacto no contribuinte.

Agora, analisando a partir de uma visão mais geral, os números começariam a causar surpresa aos cidadãos. De acordo com o Anuário Estatístico de Energia Elétrica 2016, fornecido pela Empresa de Pesquisa Energética – EPE, no ano de 2015 o Espírito Santo possuía 1.217.576 residências consumidoras de energia elétrica e, nesse ano, o consumo residencial anual, foi de 2391 GWh. A partir desses dados, o consumo médio anual por residência, dado que $1\ \text{GWh} = 10^6 \text{KWh}$, é de $2391 \times 10^6\ \text{KWh} \div 1217576 \approx 1963{,}74\ \text{KWh}$. Prosseguindo, o consumo médio mensal por residência é de $1963{,}74\ \text{KWh} \div 12 \approx 163{,}64\ \text{KWh}$. De posse desses dados, vamos calcular o valor médio mensal da conta de luz de uma residência no estado do Espirito Santo.

Dados: valores médios das alíquotas no ano de 2015: PIS = 1%, COFINS = 4,1% e ICMS = 25%.

Tarifa = CONSUMO × (TUSD + TE)

Tarifa = 163,64 × (0,45487) = R$ 74,43

OBS: Tarifa de Energia (TE) e Tarifa de Uso do Sistema de Distribuição (TUSD). A primeira destina-se aos custos com a geração de energia elétrica, a segunda aos custos com o transporte de energia (linhas de transmissão e distribuição).

Convertendo as alíquotas individualmente:

Impostos	Por dentro	Por fora
PIS	1%	$\frac{0,01}{1-0,01} \approx 0,0101 = 1,01\%$
COFINS	4,1%	$\frac{0,041}{1-0,041} \approx 0,0427 = 4,27\%$
ICMS	25%	$\frac{0,25}{1-0,25} \approx 0,3333 = 33,33\%$
Soma	30,1%	$\frac{0,301}{1-0,301} \approx 0,431 = 43,1\%$

TABELA 5.4.2

Se somássemos as percentagens por fora, das alíquotas, após serem convertidas uma a uma, teríamos um total de:

PIS + COFINS + ICMS = SOMA DAS ALÍQUOTAS

1,01% + 4,27% + 33,33% = 38,61%

Assim, o total de impostos seria de $38,61\%$ de R$ $74,43 \cong$ R$$28,74$.

Convertendo a soma das alíquotas (como orienta a cartilha da ANEEL), pela tabela 5.4.2, temos um total de 43,1% de juros por fora, assim, o total de impostos será de 43,1% de R$ 74,43 = R$ 32,08.

A diferença entre os valores dos impostos é de R$ $32,08 -$ R$ $28,74 =$ R$ $3,34$. Essa é a diferença média mensal para uma residência. Anualmente, teríamos, por residência, 12 x R$ 3,34 = R$ 40,08. Olhando para o estado do Espírito Santo, em que, no ano de 2015, eram 1.217.576 unidades residenciais consumidoras de energia, teríamos anualmente, em média, 1.217.576 x R$ 40,08 = R$ 48.800.446,08. Essa é a diferença média de receita do Estado no ano de 2015, proveniente apenas da forma de cálculo dos impostos. Ressaltando que esse valor é referente apenas ao Espírito Santo, analisando apenas o setor residencial, não foram analisados os dados do setor industrial, comercial, rural e do serviço público.

5.4.3 ESCOLHA DO MOMENTO DE CONVERSÃO DAS TAXAS DE JUROS

De acordo com o tópico 5.4.1, a tarifa, de R$ 73,23, foi multiplicada por $\frac{1}{0{,}6886} = 1{,}4522$, tal operação significa aumentar o valor em 45,22%. As taxas (PIS, COFINS e ICMS) “convertidas” de “por dentro” para “por fora” uma a uma somam um total de 39,76%, mas para o cálculo na conta de luz somam-se as taxas para depois “converte-las”. Tal método faz com que as taxas tenham um impacto ainda maior sobre o valor final. Vamos a um resumo do valor dos impostos de acordo com o método de incidência das taxas de impostos:

1) “por fora”, somando ou não as alíquotas antes do cálculo: R$ 22,80.
2) “por dentro”, “convertendo” as alíquotas uma a uma: R$ 29,12.
3) “por dentro”, “convertendo” a soma das alíquotas: R$ 33,12.

A diferença entre os valores dos itens “2” e “3” se dá pelo fato de que a relação de equivalências de taxas nos sistemas “por fora” e “por dentro” não é linear. Agora, aceitando esse fato, que os impostos são calculados “por dentro”, por qual razão se escolhe o método do item “3” ao invés do item “2”, para o faturamento na conta de luz? Temos uma certeza: o impacto no valor da conta é maior. Vamos mostrar isso.

Seja uma função real $f : [0,1) \to \mathbb{R}_+$, que associa a cada taxa de juros “por dentro” i sua taxa de juros “por fora” $f(i)$ equivalente. De acordo com a tabela 5.3.1, temos:

$$f(i) = \frac{i}{1-i},$$

Sejam dois números reais $i_1, i_2 \in [0,1)$. Vamos mostrar que:

$$f(i_1 + i_2) \geq f(i_1) + f(i_2)$$

De fato, $f(i_1) = \frac{i_1}{1-i_1} < \frac{i_1}{1-(i_1+i_2)}$

$$f(i_2) = \frac{i_2}{1-i_2} < \frac{i_2}{1-(i_1+i_2)}$$

Pois, os denominadores $(1 - i_1)$ e $(1 - i_2)$ são maiores que $1 - (i_1 + i_2)$. Somando as inequações chegamos a

$$f(i_1) + f(i_2) < \frac{i_1 + i_2}{1 - (i_1 + i_2)} = f(i_1 + i_2)$$

Portanto, a desigualdade $f(i_1 + i_2) > f(i_1) + f(i_2)$ é verdadeira.

5.4.4 O MÉTODO É MAIS ONEROSO PARA O CONSUMIDOR

O regime de juros por dentro é o utilizado pela ANEEL para estabelecer os valores dos impostos na conta de luz. Sobre tal fato, temos uma certeza, a adoção do regime de juros por dentro sempre acarretará um acréscimo maior do que o regime por fora. Vejamos:

Com base em um capital inicial C, a uma taxa de juros i, o fator de aumento no sistema de juros por fora é de $(1+i)$, já nos juros por dentro, como apresentado no item 5.2, esse fator é de $\frac{1}{1-i}$. Para provar o fato apresentado acima basta mostrar que:

$$\frac{1}{1-i} > (1+i), \forall i \in R_+$$

Para ver isto, observe que $i > 0$ implica em $1 - i^2 < 1$

Logo $(1+i) \cdot (1-i) < 1$

Dividindo por $1 + i > 0$ obtemos:

$$(1+i) < \frac{1}{(1-i)}$$

Com isso, para uma taxa de juros $i \in [0,1)$ escolhida, o cálculo com base no sistema de juros por dentro provocará um acréscimo maior do que o gerado pelos juros por fora.

Para termos uma ideia do quanto maior é o impacto dos juros por dentro em relação aos juros por fora, dependendo da taxa em questão, vamos determinar a diferença entre os respectivos fatores de aumento. Podemos enxergar o fator $\frac{1}{1-i}$ (por dentro) como a soma de uma progressão geométrica infinita de razão $i \in [0,1)$, cujo primeiro termo é 1, assim:

$$\frac{1}{(1-i)} = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-i)} - (1+i) = i^2 + i^3 + \cdots$$

Vemos que, a diferença entre os fatores de aumento, por dentro e por fora, é a soma $i^2 + i^3 + \cdots$. Em se tratando de valores, a diferença entre os sistemas de juros seria de $(i^2 + i^3 + \cdots) \cdot C$.

Dessa maneira, enquanto pagamos $i \cdot C$ de juros, no regime por fora, pagamos $i \cdot C$ mais $i^2 \cdot C + i^3 \cdot C + \cdots$, no regime por dentro.

Voltando a equação:

$$\frac{1}{(1-i)} = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots$$

Podemos escrever:

$$\frac{1}{(1-i)} = 1 + I, \text{ onde } I = i + i^2 + i^3 + \cdots .$$

Concluímos que, um fator de aumento $(1 + i)$ por fora, equivale a um fator de aumento $(1 + I)$, por dentro, com $I = i + i^2 + i^3 + \cdots$.

5.5 IMPOSTO SOBRE CIRCULAÇÃO DE MERCADORIAS E PRESTAÇÃO DE SERVIÇOS – ICMS

5.5.1 BASES LEGAIS PARA O ICMS

A Constituição Federal (CF) de 1988 estabelece em seu Art. 145 a competência de quem pode criar os impostos:

> A União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios poderão instituir os seguintes tributos:
> I - impostos;
> II - taxas, em razão do exercício do poder de polícia ou pela utilização, efetiva ou potencial, de serviços públicos específicos e divisíveis, prestados ao contribuinte ou postos a sua disposição;
> III - contribuição de melhoria, decorrente de obras públicas.

E, em seu Art. 146 trás que:

> Cabe à lei complementar:
> I - ...
> II - ...
> III - estabelecer normas gerais em matéria de legislação tributária, especialmente sobre:
> a) definição de tributos e de suas espécies, bem como, em relação aos impostos discriminados nesta Constituição, a dos respectivos fatos geradores, bases de cálculo e contribuintes;
> b) ...
> c) ...
> d) ...

O imposto sobre circulação de mercadorias e prestação de serviços – ICMS tem seu cálculo "por dentro" não só na conta de luz, como vimos, mas também em todos os lugares onde aparece, pois, esse modo de cálculo é estabelecido pela Lei Complementar 87/96 em seu artigo 13, onde estabelece em seu §1º que:

> Integra a base de cálculo do imposto, inclusive na hipótese do inciso V do caput deste artigo:

I – o montante do próprio imposto, constituindo o respectivo destaque mera indicação para fins de controle. (Lei Complementar 87/96 – Art 13)
II – ...

Portanto, cabe à Lei Complementar ditar as normas de incidência e bases de cálculo, como vemos na alínea "a" do inciso "III" do Art. 146 da CF de 88. Com base nisso, a Lei Complementar 87/96, já citada e, em consonância com a Constituição Federal, prevê que, para o ICMS, "integra a base de cálculo do imposto: o montante do próprio imposto, constituindo o respectivo destaque mera indicação para fins de controle". Por isso, legalmente a maneira de cálculo "por dentro" do ICMS está amparada.

Outro questionamento que poderíamos fazer é sobre o que mostra o artigo 19 da LC-87/96:

Art. 19 - O imposto é não-cumulativo, compensando-se o que for devido em cada operação relativa à circulação de mercadorias ou prestação de serviços de transporte interestadual e intermunicipal e de comunicação com o montante cobrado nas anteriores pelo mesmo ou por outro Estado.

Nele, vemos que o imposto é não cumulativo, ou seja, se outrora fora tributado, tal fato será abatido nas próximas etapas. Aqui, podemos entender que a intenção do legislador era de que o imposto não incidisse sobre ele mesmo, ou seja, que não ocorresse bitributação. Mas, como o imposto é cobrado "por dentro", a alíquota do imposto incide sobre seu montante, ou seja, sobre ele mesmo. Embora estejamos olhando apenas para uma operação, e não considerando duas ou mais, ainda assim ocorre uma espécie de acumulação instantânea do imposto sobre o próprio imposto.

5.5.2 CONSEQUÊNCIA DO MODO DE CÁLCULO DO ICMS

O modo de cálculo "por dentro" do IMCS não provoca apenas um aumento direto no valor dos produtos, pois, além do valor da própria mercadoria, integram também sua base de cálculo: valor de frete, de seguro, dentre outras coisas que são cobradas ao destinatário. Assim, todos esses valores tornam o impacto do ICMS ainda maior.

Além disso, outros impostos podem compor a base de cálculo do ICMS. Como, por exemplo, o Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), que integrará a base de cálculo quando a operação não for realizada entre contribuintes, o objeto da operação for produto não destinado à industrialização ou à comercialização e a operação não configurar fato gerador de ambos os impostos.

O IPI é um tributo federal previsto na Constituição Federal no artigo 153. Ele foi alterado pela Lei nº 7.798/89 e é regulamentado pelo DECRETO Nº 7.212, de 15 de junho de 2010. Suas alíquotas que incidem sobre cada tipo de mercadoria estão presentes na Tabela de Incidência do Imposto sobre Produtos Industrializados – TIPI, que geralmente variam de zero a 30%.

Para os exemplos a seguir, consideraremos a alíquota do IPI de 20%, seu cálculo é feito "por fora" e incide sobre o valor da operação de saída do produto.

Exemplo 5.5.1: Determine o valor final de saída de uma mercadoria cujo total de custos para disponibilização para venda, já com a margem de lucro, seja de R$ 1.000,00, supondo que haja apenas a incidência do IPI e do ICMS, com alíquotas de 20% e 18%, respectivamente, para o caso em que o IPI não faça parte da base de cálculo do ICMS.

Solução: Neste caso, devemos aplicar o ICMS sobre o valor de R$ 1.000,00, lembrando que o cálculo é feito "por dentro":

Valor do ICMS = $\frac{0,18}{1-0,18} \cdot 1000 = 0,2195 \cdot 1000 = 219,50.$

Valor do produto com o ICMS é de R$ 1.219,50.

Agora, aplicamos o IPI:

$$20\% \text{ de } 1219,50 \; = \; 0,2 \times 1219,50 = 243,90$$

Assim, o preço final de saída será de R$ 1.463,40, com a seguinte configuração:

Valor inicial	1000,00
Valor do ICMS	219,50
Valor do IPI	243,90
Valor final	1463,40

Exemplo 5.5.2: Resolva o Exemplo 5.5.1, agora com o IPI fazendo parte da base de cálculo do ICMS.

Solução: Chamaremos de V_i o valor inicial da operação, V_f o valor final da operação, V_{ICMS} o valor do ICMS cobrado e V_{IPI} o valor do IPI cobrado na operação. Vemos, pelo exemplo anterior, que o valor final é composto pela soma do valor inicial mais os valores dos impostos:

$V_f = V_i + V_{ICMS} + V_{IPI}$. Como $V_i = 1000$,

$V_f = 1000 + V_{ICMS} + V_{IPI}$ (5.1)

O ICMS será 18% do valor final, pois agora tanto o valor inicial quanto o valor do IPI farão parte da sua base de cálculo, assim:

$V_{ICMS} = 0{,}18 \cdot V_f$ (5.2)

O IPI, como vimos no exemplo anterior, é calculado sobre o valor da mercadoria com o ICMS embutido, ou seja, é calculado sobre o valor inicial acrescido do valor do ICMS, então:

$V_{IPI} = 20\%$ de $(V_i + V_{ICMS})$

$V_{IPI} = 0{,}2 \cdot (1000 + V_{ICMS})$, como $V_{ICMS} = 0{,}18 \cdot V_f$, então

$V_{IPI} = 0{,}2 \cdot (1000 + 0{,}18 \,.\, V_f)$ (5.3)

Substituindo as equações 5.2 e 5.3 em 5.1, temos:

$$V_f = 1000 + 0{,}18 \cdot V_f + 0{,}2 \cdot (1000 + 0{,}18 \,.\, V_f)$$

$$V_f - 0{,}18 \cdot V_f - 0{,}036 \cdot V_f = 1000 + 200$$

$$0{,}784 \cdot V_f = 1200$$

$$V_f = \frac{1200}{0{,}784} = 1530{,}61$$

Portanto, o valor final da operação será de R$ 1.530,61, sendo:

Valor inicial	=	1000,00
Valor do ICMS	18% de 1530,61	275,51
Valor do IPI	20% de 1275,51	255,10
Valor final	=	1530,61

Vale ressaltar que o impacto do ICMS, no primeiro exemplo, onde o IPI não fazia parte da sua Base de Cálculo, foi de 21,95%, já no segundo, de 27,55%.

Exemplo 5.5.3: Determine, a partir de um caso geral, as equações que nos permitam calcular as quantias referentes ao ICMS e IPI, quando este faz parte da base de cálculo daquele, com base no valor inicial.

Solução: Sejam: V_i o valor inicial da operação, V_f o valor final da operação, V_{ICMS} o valor do ICMS cobrado e V_{IPI} o valor do IPI cobrado na operação. As alíquotas do ICMS e IPI serão x e y, respectivamente, ambas na forma decimal.

Pelo exemplo anterior, temos:

$$V_f = V_i + V_{ICMS} + V_{IPI}$$

Como $V_{ICMS} = x \cdot V_f$ e $V_{IPI} = y \cdot (V_i + V_{ICMS}) = y \cdot (V_i + \ x \cdot V_f)$, temos que

$$V_f = V_i + x \cdot V_f + y \cdot (V_i + \ x \,.V_f)$$

$$V_f - x \cdot V_f - x \cdot y \cdot V_f = V_i + y \cdot V_i$$

$$V_f(1 - x - x \cdot y) = (1 + y)V_i$$

$$V_f = \frac{(1+y)}{(1-x-x\cdot y)} \cdot V_i$$

e, como $\frac{V_{ICMS}}{x} = V_f$, chegamos a

$$\frac{V_{ICMS}}{x} = \frac{(1 + y)}{(1 - x - x \cdot y)} \cdot V_i$$

$$V_{ICMS} = \frac{x\cdot(1+y)}{(1-x-x.y)} \,.V_i \ (5.4)$$

Agora, vamos determinar o valor referente ao IPI:

Como $V_{IPI} = y \cdot (V_i + V_{ICMS})$ e $V_{ICMS} = \frac{x\cdot(1+y)}{(1-x-x\cdot y)} \cdot V_i$ temos

$$V_{IPI} = y \cdot \left(V_i + \frac{x \cdot (1 + y)}{(1 - x - x \cdot y)} \ \cdot V_i\right)$$

$$V_{IPI} = y \cdot \left[\left(1 + \frac{x\cdot(1+y)}{(1-x-x\cdot y)}\right) \cdot \ V_i\right]$$

$V_{IPI} = \left(y + \frac{x\cdot y\cdot(1+y)}{(1-x-x.y)}\right) \cdot \ V_i$ simplificando os termos em parênteses, chegamos a

$$V_{IPI} = \frac{y}{1-x-x.y} \cdot V_i \ (5.5)$$

Assim, chegamos às equações 5.4 e 5.5 que nos permitem obter os valores cobrados de ICMS e IPI, respectivamente, a partir do valor inicial da mercadoria.

Com isso, podemos montar a seguinte tabela:

Valor inicial	V_i
Valor do ICMS	$\frac{x \cdot (1 + y)}{(1 - x - x \cdot y)} \,.V_i$
Valor do IPI	$\frac{y}{1 - x - x \cdot y} .V_i$

Valor final	$\dfrac{(1+y)}{(1-x-x\cdot y)}\,.V_i$

5.6 MARKUP MULTIPLICADOR

Markup é um dos sistemas mais utilizados para precificação de produtos. Esse método permite o controle do preço de venda, por meio de um "indicador" ou "índice" que, aplicado sobre o custo de um produto, determina o preço de venda e comercialização. O objetivo principal desse sistema é o de encontrar um preço que cubra todas as despesas referentes ao produto e ainda forneça o lucro desejado.

Tal índice é determinado da seguinte maneira:

$\frac{100}{100-(\%\ de\ encargos)}$ ou $\frac{1}{1-(\%\ de\ encargos/100)}$ "% de encargos", nesse caso, faz referência a todas as porcentagens que incidirão sobre o valor inicial do produto, como todas as despesas a serem consideradas, impostos, lucro da empresa, etc.

Exemplo 5.6.1: Suponha que uma empresa queira vender um produto, cujo custo de fabricação seja de R$ 1.000,00. Após um levantamento, totalizaram 15% como o total de custos gerados pelo produto até a venda. Sobre ele, incorrerão os impostos de PIS, COFINS e ICMS com taxas de 1,6%, 7,5% e 18%, respectivamente. A empresa deseja um lucro de 10% com as vendas. Através do sistema de precificação Markup, determine o preço de venda do produto.

Solução: Vamos somar todos os encargos que serão adicionados ao preço de custo do produto:

CUSTOS	15%
PIS	1,5%
COFINS	7,5%
ICMS	18%
LUCRO	10%
TOTAL	52%

Assim, o Markup multiplicador será de:

$$\frac{1}{1-(0{,}52)} = 2{,}0833$$

Por fim, teremos que o preço de venda do produto será de:

$$2{,}0833 \times 1000{,}00 = R\$\ 2083{,}30$$

Sendo:

Custo do PRODUTO	=	R$ 1000,00
CUSTOS	15% de 2083,30	R$ 312,49
PIS	1,5% de 2083,30	R$ 31,25
COFINS	7,5% de 2083,30	R$ 156,24
ICMS	18% de 2083,30	R$ 374,99
LUCRO	10% de 2083,30	R$ 208,33
Preço de VENDA	=	R$ 2083,30

Através do fator multiplicativo do Markup, determinamos qual a porcentagem de aumento do preço de um produto em relação ao seu custo. Pois, multiplicar por 2,0833 significa aumentar o valor em 1,0833 . 100 = 108,33%.

O procedimento para se chegar ao Markup multiplicador equivale ao cálculo "por dentro" da porcentagem que representa o somatório percentual de tudo que deve ser considerado na formação do preço de um produto. No exemplo 4.3.1 vimos que essa porcentagem foi de 52%. Temos que 52% "por dentro" equivalem a $\frac{0{,}52}{1-0{,}52}$ = 1,0833 = 108,33% por fora.

5.7 A CURVA DO CÁLCULO POR DENTRO

Neste tópico vamos mostrar que, sobre certa quantia, uma pequena variação percentual, quando se trata de juros "por dentro", pode causar uma grande variação do valor final.

A questão é que, em muitos casos, há a necessidade da soma dos valores percentuais, para depois aplicar o método de cálculo dos juros "por dentro", como no caso do Markup, abordado no item 5.3.

Para questões de exemplo, vamos explorar esse item a partir do Markup, que é um fator que impacta diretamente no nosso dia a dia, pois mexe com nosso bolso.

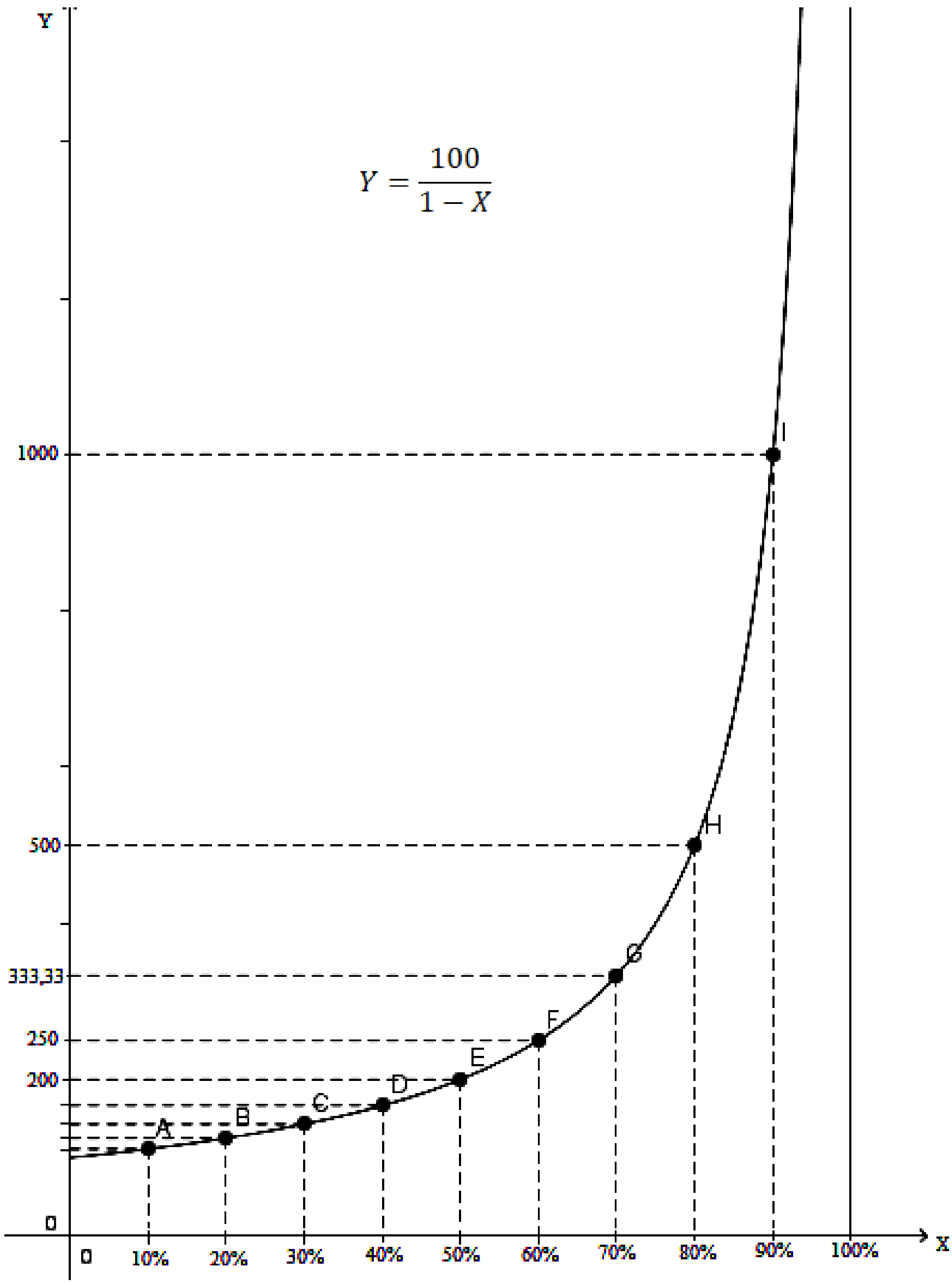
Exemplo 5.7.1: Determine, a partir do método Markup, o preço de venda de um produto, cujo valor inicial é R$ 100,00, nas empresas A e B, onde os totais percentuais de todos os encargos referentes ao produto foram de 50% e 60%, respectivamente.

Solução: Vimos no tópico anterior que a "fórmula" do Markup é $\frac{1}{1-(\%\ de\ encargos/100)}\ .\ (\text{valor inicial do produto})$. Assim os preços de venda, serão:

- Na empresa A: $\frac{100}{1-(0{,}50)} = 200$ reais.
- Na empresa B: $\frac{100}{1-(0{,}60)} = 250$ reais.

Neste exemplo, constata-se que uma diferença de apenas 10% nos valores percentuais causa um aumento de R$ 50,00, que significa sobre o valor inicial do produto um aumento de 50%.

Isso deve-se ao fato de que, quanto mais o percentual a ser calculado "por dentro" aproxima-se de 1, ou seja, 100%, mais rapidamente crescerá o valor final. Observe a curva a seguir, que mostra a variação do preço de venda de um produto, cujo valor inicial é de R$ 100,00 em função das porcentagens utilizadas no cálculo Markup, a partir de 50%.



No exemplo 5.7.1 vimos que a diferença entre os preços de venda das empresas A e B foi de R$50,00, isso por conta de uma variação de 10% sobre suas porcentagens de encargos. Pelo gráfico anterior, vemos que essa mesma variação de 10%, caso os encargos das empresas fossem de 60% e 70%, levaria a uma diferença no preço de venda de R$ 83,33 (R$ 333,33 – R$ 250).

Vale ressaltar, que a reta $x = 100\%$ é assíntota vertical do gráfico da função, pois quando os encargos se aproximam de 100%, a expressão $\frac{100}{1-(\%\ de\ encargos/100)}$ tende ao infinito.

Fica evidente que, quando falamos de “juros por dentro”, mais especificamente do cálculo “por dentro” de determinado percentual, caso ele por si só seja alto, até mesmo uma pequena variação impacta de forma drástica o valor final. Nessa perspectiva, quando nos é anunciado que o governo aumentará um imposto ou taxa, mesmo em 2%, isto está longe do encarecimento, seja lá qual for o item em questão, ser de apenas 2%.

6 APLICAÇÕES EM SALA DE AULA

O objetivo deste tópico é mostrar de uma maneira simplificada, mas que dê margem para um aprofundamento e/ou expansão, como os temas abordados neste trabalho podem ser inseridos em diferentes momentos como base, contextualização e/ou problematização para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos estudados ao longo do Ensino Médio.

6.1 TAXAS DE JUROS EQUIVALENTES E LOGARITMOS

O estudo dos logaritmos ocorre, geralmente, durante o primeiro ano do Ensino Médio, podendo, também, acontecer no segundo ano do Ensino Médio, dependendo do currículo da instituição. Ao utilizarmos o tema "taxas de juros equivalentes" como contextualização para o ensino de logaritmos, estamos ao mesmo tempo despertando o interesse do aluno e dando sentido ao seu estudo. Somado a isso, estaremos dando base para os estudantes não caírem em armadilhas presentes em muitas propagandas que apresentam taxas proporcionais como se fossem equivalentes, e proporcionaríamos ferramentas para que eles, futuramente, decidam racionalmente sobre um investimento ou outro. A seguir, um exemplo que relaciona os dois temas.

Exemplo 6.1: A cada quantos meses uma taxa de juros de 20% deverá ser capitalizada para que ela seja equivalente a uma taxa mensal de 2%?

Solução: Duas taxas são equivalentes se ao final do mesmo período produzirem montantes iguais. Seja t o número de capitalizações da taxa de 2% que corresponde a uma única capitalização da taxa de 20%. Pela equação de equivalência de taxas estudada no capítulo 3, temos:

$$(1 + I)^1 = (1 + i)^t$$

$$(1 + 0{,}2)^1 = (1 + 0{,}02)^t$$

$1{,}2 = 1{,}02^t$ aplicando-se logaritmo decimal em ambos os membros da equação, temos

$$\log 1{,}2 = \log 1{,}02^t$$

$$\log 1{,}2 = t \log 1{,}02$$

$$t = \frac{\log 1{,}2}{\log 1{,}02}$$

$t \approx 9$ meses.

Portanto, a taxa de 20% deverá ser aplicada, aproximadamente, a cada 9 meses para que seja equivalente a uma taxa de 2% ao mês.

6.2 SISTEMAS DE FINANCIAMENTO E PROGRESSÃO ARITMÉTICA

O estudo do Sistema de Amortização Constante – SAC nos oferece uma excelente contextualização para se estudar Progressões Aritméticas (PA), esta presente na grade curricular do 1º ano do Ensino Médio. Muitas vezes, no ensino regular, quando há uma problematização como base de abordagem para o ensino de PA, gira em torno de Juros Simples. Ao utilizar a temática aqui abordada como gancho para o ensino de progressões, estamos dando ao aluno a oportunidade de expandir seus conhecimentos no que tange a matemática financeira, e também ferramentas uteis para, futuramente, exercer seu papel de cidadão.

Podemos perceber pela tabela 4.1 que as parcelas, no sistema SAC, formam uma PA decrescente. Com isso, podemos estabelecer uma relação entre a equação do termo geral de uma PA: $a_n = a_1 + (n-1).r$, com a equação 4.4.

$$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

$$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C - i \cdot C \cdot \frac{k-1}{n}$$

$P_k = \frac{C}{n} + i \cdot C + (k-1) \cdot \frac{-i.C}{n}$. Como $P_1 = \frac{C}{n} + i \cdot C$, temos

$$P_k = P_1 + (k-1) \cdot \frac{-i.C}{n}$$

Desse modo, a razão da PA formada pelas parcelas do financiamento é $\frac{-i \cdot C}{n}$. Concluímos, a partir disso, que a razão da PA pode ser obtida multiplicando-se a taxa de juros, do financiamento, pelo valor de amortização.

A partir dessa perspectiva, os alunos poderiam resolver problemas envolvendo SAC utilizando apenas PA, sem a necessidade de vários termos e fórmulas que geralmente estão presentes em apostilas de Matemática Financeira.

Exemplo 6.2.1: Um empréstimo de R$ 30.000,00 deve ser devolvido de acordo com o sistema de amortizações constantes em 60 prestações mensais a taxa de juros de 1% ao mês. Determine o valor da prestação de número 38 e o valor dos juros cobrados nessa prestação.

Solução: Nesse caso, temos que encontrar o 38º termo de uma PA com 60 termos. Vamos calcular o primeiro termo e a razão dessa PA.

O primeiro termo (primeira parcela) será a amortização de $\frac{30000}{60} = 500$, mais os juros de 1% sobre o valor do empréstimo, assim:

$$a_1 = 500 + 0{,}01 \times 30000 = 800$$

A razão de decrescimento será a taxa de juros aplicada sobre a amortização, portanto:

$$r = 0{,}01 \times 500 = 5$$

Agora basta calcular o termo a_{38}:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

$$a_{38} = 800 + (38-1) \cdot (-5)$$

$$a_{38} = 800 + (-185) = 615$$

Portanto, o valor da trigésima oitava parcela será de R$ 615,00. Para calcularmos os juros cobrados nessa parcela, basta subtrairmos o valor dela pelo valor da amortização. Assim, os juros cobrados na 38º parcela são de $615 - 500 = 115$ reais.

6.3 JUROS POR DENTRO E FUNÇÕES

Em tópicos anteriores, analisamos situações em que os juros por dentro estavam presentes, como por exemplo: na conta de luz, em impostos e na formação de preços. A escolha desse tema para a contextualização da aula é muito relevante, pois trazemos à tona elementos que fazem parte do cotidiano dos alunos. O professor pode pedir a seus alunos que levem a conta de luz de suas casas para a aula.

Podemos utilizar juros por dentro como contextualização para revisar e/ou aperfeiçoar o estudo de funções. Este conteúdo inicia-se no 1º ano do Ensino Médio e é retomado no 3º ano. Como exemplo mais específico, que será abordado aqui, no estudo de domínio, imagem e injetividade de funções.

No tópico 5.5, vimos que a taxa do ICMS é calculada por dentro. Isso faz com que uma taxa anunciada de, por exemplo, 20% tenha um impacto real de 25%, ou seja, 20% "por dentro" equivale a 25% "por fora". No tópico 5.3, mostramos que uma taxa de juros i no regime de juros por dentro equivale a uma taxa de juros $\frac{i}{1-i}$ no regime de juros por fora.

Exemplo 6.3.1: Seja a função real f que associa a cada taxa de juros "por dentro" i, sua taxa de juros "por fora" $f(i)$ equivalente, ou seja, $f(i) = \frac{i}{1-i}$. Determine os conjuntos domínio, contradomínio e imagem dessa função.

Solução: O domínio da função, caso não houvesse uma contextualização, seria o conjunto dos números que tornam o denominador $(1 - i)$ da fração não nulo. Porém, em nosso contexto, a quantia J de juros é obtida aplicando-se a taxa de juros i sobre o montante M. Daí, caso $i = 1{,}2$ (taxa de juros por dentro de 120%), por exemplo, chegaríamos à $J = 1{,}2.M$, ou seja, que $J > M$, o que é uma contradição, pois $M = C + J > J$.

Portanto, como também não há taxa de juros negativa, o domínio da função é o conjunto $D(f) = \{\, i \in R \;/\; 0 \leq i < 1\}$. O Contradomínio é $\mathbb{R}_+$ e o conjunto imagem é o intervalo $[0, \infty)$.

Exemplo 6.3.2: Mostre que a função real $f : [0,1) \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(i) = \frac{i}{1-i}$, é injetiva.

Solução: Uma função é injetiva quando elementos distintos do domínio implicam em imagens distintas, isso é o mesmo que: se $f(i_1) = f(i_2)$, então $i_1 = i_2$. De fato:

$f(i_1) = \frac{i_1}{1-i_1}$ e $f(i_2) = \frac{i_2}{1-i_2}$,

Se $f(i_1) = f(i_2)$, então

$$\frac{i_1}{1 - i_1} = \frac{i_2}{1 - i_2}$$

$$i_1(1 - i_2) = i_2(1 - i_1)$$

$$i_1 = i_2$$

Portanto, a função é injetiva.

6.4 TABELA PRICE, JUROS COMPOSTOS E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

O ensino de juros compostos pode ocorrer em qualquer uma das séries do Ensino Médio, dependendo da organização curricular da instituição. Já o estudo de progressões ocorre, via de regra, no 1º ano do Ensino Médio. Para evitar uma aula monótona, sem a devida contextualização, temos como saída relacionar o tema Juros Compostos com o Sistema de Prestações Constantes – SPC (ou Tabela Price). De fato, o SPC é um dos sistemas de financiamento mais utilizados no mercado, mas também é muito usado em compras a prazo do dia a dia. Isso faz com que ele seja um tema interessante e convidativo para os alunos, ou seja, excelente para servir de base para a aula envolvendo juros compostos.

Para a introdução de juros compostos, podemos utilizar uma situação real de compra à prazo, como mostra a tabela 4.2:

Mês	Prestação	Dívida (Início do mês)	Juros $J_k = i.(SD_{k-1})$	Amortização $A_k = P - J_k$	Saldo Devedor $SD_k = SD_{k-1} - A_k$
1	461,95	2000,00	100,00	361,95	1638,05
2	461,95	1638,05	81,90	380,05	1258,00
3	461,95	1258,00	62,90	399,05	858,95
4	461,95	858,95	42,95	419,00	439,95
5	461,95	439,95	22,00	439,95	0,00

A tabela mostra uma compra de R$ 2000,00, divida em 5 parcelas iguais, com uma taxa de juros de 5% ao mês. Dessa maneira, podemos mostrar de forma não abstrata a essência dos juros compostos, que é a ideia dos famosos "juros sobre juros". Pois, analisando a tabela percebe-se que os juros diminuem. Assim, os estudantes fixariam a ideia de que no regime composto a base de cálculo da taxa de juros é o valor da dívida no inicio do período (ou mês, no nosso exemplo) em questão. E, concluiriam que os juros diminuem pelo fato da dívida diminuir com o passar do tempo.

Outro ponto positivo do exemplo acima é que ele se diferencia da maioria dos encontrados nos livros didáticos, em que um capital é adquirido/emprestado, depois é retirado (ou pago) ao final de certo período, sem que nada ocorra durante o processo.

Mesmo em se tratando de caderneta de poupança, é pouco provável, pois é comum aplicarmos ou retirarmos dinheiro de nossas poupanças ao longo do ano.

Depois, podemos aplicar os conhecimentos de progressões geométricas para estabelecermos a "fórmula" para se calcular o montante de uma operação no regime de juros compostos, como demonstrada no tópico 3.2 deste trabalho.

Por fim, uma aplicação prática para a somatória de uma PG é no cálculo das parcelas fixas do SPC. Após ter sido trabalhado com os alunos a ideia de juros compostos, e também como transportar quantias no tempo, podemos resolver o exemplo a seguir utilizando a fórmula da somatória da PG muito comum no Ensino Médio:

Exemplo 6.4.1: Uma geladeira é vendida, pelo pagamento à vista, por R$ 1200,00. Caso o consumidor queira parcelar o eletrodoméstico, será cobrada uma taxa de juros no valor de 2% ao mês. Considerando que uma pessoa comprou a geladeira em 12 prestações iguais, com a primeira parcela para um mês, calcule o valor das parcelas utilizando o sistema Price.

Solução: A solução segue o mesmo caminho apresentado no exemplo 3.2.1. Um dos principais pontos da Matemática Financeira é a de deslocar quantias no tempo. A partir disso, vamos calcular o valor de cada uma das parcelas na data da compra e, em seguida vamos somá-los. Essa soma deverá ser igual ao valor da compra, R$ 1.200,00. Para voltar uma quantia no tempo em k períodos, basta dividi-la por $(1+i)^k$, onde i é a taxa de juros ao período. Portanto, devemos dividir a primeira prestação por $(1+0{,}02)$, a segunda por $(1+0{,}02)^2$, e assim sucessivamente até a 12ª prestação. Com isso, chegamos à equação:

$$\frac{P}{(1+0{,}02)^1}+\frac{P}{(1+0{,}02)^2}+\cdots+\frac{P}{(1+0{,}02)^{12}}=1200$$

Por evidenciação, temos:

$$P\cdot\left(\frac{1}{(1{,}02)^1}+\frac{1}{(1{,}02)^2}+\cdots+\frac{1}{(1{,}02)^{12}}\right)=1200$$

A partir desse ponto, mostramos aos estudantes que temos, dentro dos parênteses, uma PG de razão $\frac{1}{1{,}02}$, cujo primeiro termo é $\frac{1}{1{,}02}$. Com isso, podemos aplicar a "fórmula" da somatória da PG $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$, onde q é a razão da PG e n é o número de termos. Teríamos, então:

$$P \cdot \frac{\frac{1}{1{,}02} \cdot \left(\left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{12} - 1\right)}{\frac{1}{1{,}02} - 1} = 1200$$

$$P \cdot \frac{\frac{1}{1{,}02^{13}} - \frac{1}{1{,}02}}{\frac{1}{1{,}02} - 1} = 1200$$

Com o auxílio de uma calculadora, os alunos encontrariam:

$$P \cdot\ 10{,}5753 \approx 1200$$

$$P = \frac{1200}{10{,}5753} \approx 113{,}47$$

Portanto, o valor de cada prestação será de aproximadamente R$ 113,47.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os principais objetivos do trabalho foram: evidenciar a importância do ensino de Matemática Financeira no Ensino Médio; estabelecer, com uma linguagem simples e acessível, como funcionam dois dos principais sistemas de financiamento no mercado atual; analisar como os juros por dentro ocorrem e afetam nossas vidas, tornando-se uma excelente ferramenta de contextualização para as aulas; e mostrar, de uma maneira sucinta, caminhos para a inserção de tópicos da Matemática Financeira no currículo do Ensino Médio.

No que tange à importância da Matemática Financeira, na leitura deste trabalho, percebe-se, a partir dos vários elementos abordados e analisados, como se faz necessária uma atenção especial para esse ramo da Matemática, pois muito provavelmente, futuramente, nossos alunos irão adquirir imóveis, carros, ou algum tipo de compra em que, normalmente, necessita-se de um financiamento. Isso faz com que os conhecimentos estudados no capítulo 4 sejam importantes para que o aluno tenha uma mínima noção para decidir racionalmente entre as opções que lhe são impostas. Os temas analisados no capítulo 5, mais especificamente relativos à análise da conta de luz, são de muito ajuda para a fiscalização das tarifas cobradas, de modo que, percebendo algum erro, que o sistema não detecte, o contribuinte possa procurar seus direitos. Assim, de um modo geral, acredita-se que esse objetivo foi alcançado.

Nas análises onde ocorrem os juros por dentro, constata-se, no tópico 5.4.2, como podem ser grandes os impactos financeiros do regime de juros por dentro. No tópico citado, estimou-se que a diferença média de receita do Estado do Espírito Santo, no ano de 2015, proveniente apenas da forma de cálculo dos impostos seria de R$ 48.800.446,08. Depois, analisamos o impacto do ICMS, por sua base de cálculo ser seu próprio montante, o que nos leva à ideia de juros por dentro. Percebe-se, ao final, como isso pode onerar o valor final das mercadorias, inclusive na formação do seu preço de venda, este abordado no tópico 5.6. Portanto, fica clara a importância e a relação que esses assuntos têm com a vida das pessoas, e como podem influenciá-las, seja no momento em que exercem seu papel de consumidor ou decidem abrir uma empresa, onde terão que lidar não só com a formação dos preços de seus produtos, como também terão que lidar com o pagamento de vários tributos.

A partir do capítulo 6, inseriu-se uma base para servir de apoio e fomento para o professor de Matemática do Ensino Médio, inserir a Matemática Financeira em suas aulas de forma a capacitar o aluno a usar suas habilidades, quando for necessário. Para tanto, fez-se a relação dos assuntos estudados ao longo do trabalho com vários temas do currículo matemático do Ensino Médio, tais como: funções, progressões aritméticas e geométricas e logaritmos. Somado a isso, durante todo o trabalho primou-se por se utilizar uma linguagem que se aproximasse à presente nos livros didáticos atuais, e também priorizou-se a utilização de Matemática básica durante os cálculos presentes nos capítulos anteriores. Isso, com o intuito de favorecer o entendimento tanto dos professores quanto dos alunos. Assim, acredita-se que o objetivo de proporcionar caminhos para a inserção de tópicos da Matemática Financeira no currículo do Ensino Médio foi concretizado.

Durante o percurso da pesquisa, encontramos diversos desafios. Um deles foi o de como tratar de uma maneira interessante um assunto (no caso, juros) já tão explorado. A saída foi lidar com juros por dentro, tema que aqui foi exposto na vertente de aplicações práticas. Porém, esse tema é bastante rico, podendo, futuramente, ser abordado de uma maneira mais completa, como, por exemplo, no estudo sobre gráfico, quando tratamos juros por dentro como uma função, e como este se relaciona com a parte algébrica, e também em relação à assíntota vertical e seu significado. Outro desafio apareceu na análise de como os juros por dentro se relacionam com a incidência, ou melhor, forma de cálculo do ICMS, onde foi necessária uma leitura sobre a legislação que rege tal imposto. São muitas as situações em que o imposto citado pode ou não ser cobrado, o que entra e o que não entra em sua base de cálculo. Esta última situação engloba também outros impostos. Isso faz com que esse tema possa ser muito mais explorado, como, por exemplo, relativamente ao que ocorre com tais impostos quando entram na base de cálculo do ICMS o que acarreta, indiretamente, ao incidirem sobre seus próprios montantes, o que causaria ainda maior oneração para os contribuintes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Constituição, 1988.

BRASIL. Lei Complementar nº 87, de 13 de setembro de 1996.

BRASIL. Decreto nº 7.212, de 15 de junho de 2010.

BRASIL. Lei nº 7.798, de 10 de julho de 1989.

Eves, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Faro, C. *Fundamentos de matemática financeira*, 1ª ed., Ed. Atlas, SP: 2006.

HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. Matemática Financeira. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. Temas e Problemas. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

Puccini, Ernesto Coutinho. Matemática financeira e análise de investimentos. 2.ed. Florianópolis: Departamento de Ciências da Administração / UFSC; [Brasília]: CAPES: UAB: 2012.

Puccini, A. L. *Matemática financeira objetiva e aplicada*, 7ª ed. Ed. Atlas, SP: 2006.

ROBERT, Jozsef. A origem do dinheiro. 2. ed. São Paulo: Global, 1989.

Schneider, Ido José. Matemática Financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas. 2008. Dissertação de Mestrado em Educação, Universidade de Passo Fundo. Orientação Neiva Ignês Grando.

REZENDE, José Flavio Bomtempo. Como elaborar o preço de venda. Vera Helena Lopes, Marly Aparecida Menezes Simões, Any Myuki Wakabayashi, Adriana Athouguia Sabioni. Belo Horizonte: SEBRAE / MG, 2010.