Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Semigrupos e o Teorema de Gorenstein para Singularidades de Curvas Algébricas Planas

Andréa Maria Silva Lannes

Orientador: Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer

Setembro/2013

Agradecimentos

Agradeço à Deus que me ensina a ser protagonista da minha vida, aos matemáticos que se dispõem a fazer as coisas terem sentido, ao professor Valmecir que aceitou me orientar, me ensinando a ter humildade e perseverança. Aos meus pais e ao meu irmão que me incentiva com seu amor incomensurável. Agradeço ao meu noivo por ter a boa vontade de me entender todo esse período. À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo central desta dissertação é apresentar o Teorema de Gorenstein para singularidades de curvas algébricas planas. Consideramos os dois casos: primeiramente o caso local onde a singularidade da curva tem apenas um ramo e depois o caso em que a singularidade tem vários ramos. O caso local é quando a equação local é dada por uma série irredutível em $k[[X,Y]]$ e o caso semi-local é quando a equação local é dada por um produto de séries irredutíveis não associadas duas a duas. Uma equação local dada por uma tal série de potências f é chamada curva plana algebróide. Associados a uma curva plana algebróide estão o seu anel local $\mathcal{O} = \mathcal{O}(f)$, o fecho inteiro $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}$ em seu anel total de frações e o ideal condutor de $\tilde{\mathcal{O}}$ em $\mathcal{O}$. Podemos dizer que estes dados codificam as informações algébrico/geométricas da curva algebróide (f). O Teorema de Gorenstein, demonstrado por D. Gorenstein em [Go] afirma que em ambos os casos (local e semi-local), a codimensão (como k-espaços vetoriais) do ideal condutor no anel $\mathcal{O}$ é igual à codimensão do anel $\mathcal{O}$ em $\tilde{\mathcal{O}}$. Isto nos fornece uma certa simetria que é refletida no semigrupo associado à curva algebróide (f). Assim estudamos também esta simetria de semigrupos dos naturais e a relacionamos com a simetria do anel $\mathcal{O}$ no caso local.

Abstract

The main goal of this dissertation is to present the Gorenstein Theorem for plane curve singularities. We consider two cases: firstly the local case when the singularity has only one branch and after the semilocal case when the singularity has several branches. In the local case the local equation is given by an irreducible series of $k[[X,Y]]$ and in the semilocal case it is given by a finite product of irreducible series wich are not pairwise associated. A local equation given by such a power series f is called an algebroid plane curve. The following are objects associated to an algebroid plane curve: The local ring $\mathcal{O} = \mathcal{O}(f)$, its integral closure $\tilde{\mathcal{O}}$ of $\mathcal{O}$ in its full ring of fractions and the conductor ideal of $\tilde{\mathcal{O}}$ in $\mathcal{O}$. We may say that these data encode all the algebraic / geometric informations of the algebroid plane curve (f). Gorenstein Theorem, that was proved in [Go] by D. Gorenstein states that, in both cases (local or semi-local), the codimension (as k-vector spaces) of the conductor ideal in the ring $\mathcal{O}$ is equal to the codimension of the ring $\mathcal{O}$ in the ring $\tilde{\mathcal{O}}$. This provides us with a certain symmetry which is reflected in the semigroup associated to the algebroid plane curve (f). Thus, we also study the symmetry of semigroups of the natural numbers and relate them to the symmetry of the ring $\mathcal{O}$ in the local case.

.

Sumário

.

Introdução

Seja C uma curva plana algébrica projetiva irredutível sobre um corpo k algebricamente fechado (de característica arbitrária). Seja P um ponto de C. Após uma eventual mudança projetiva de coordenadas podemos supor que P seja a origem de um sistema afim de coordenadas, isto é, $P = (0, 0)$. Seja $f \in k[X, Y]$ um polinômio (irredutível) que define uma equação afim para C. Estamos interessados em estudar propriedades locais no caso em que P seja um ponto singular de C. Uma forma de fazer isto é considerar o polinômio f no anel de séries formais $k[[X, Y]]$. Observe que, mesmo sendo f um polinômio irredutível, ao considerá-lo no anel das séries formais, ele pode se fatorar. Os fatores irredutíveis de f em $k[[X, Y]]$ correspondem aos ramos da curva C em P. Neste contexto, a *curva algebróide plana* associada à série $f \in k[[X, Y]]$ é a classe de equivalência, que denotamos por (f), obtida pela relação de equivalência em $k[[X, Y]]$ definida da maneira seguinte: Dadas duas séries f e g em $k[[X, Y]]$, diz-se que $f \backsim g$ se existem um elemento inversível $u \in k[[X, Y]]$ e um k-automorfismo de k-álgebras $\Phi : k[[X, Y]] \rightarrow k[[X, Y]]$ tais que $\Phi(g) = u \cdot f$. O *anel local da curva algebróide plana* (f) é

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(f) = \frac{k[[X, Y]]}{\langle f \rangle} = k[[x, y]]$$

onde estamos denotando por x e y as classes residuais de X e Y módulo o ideal $\langle f \rangle$ gerado por f em $k[[X, Y]]$.

O objetivo central deste trabalho é apresentar o Teorema de Gorenstein para singularidades de curvas algébricas planas que passamos a descrever. Há dois casos a serem considerados. Primeiramente o caso local que é quando a curva C tem apenas um ramo em P. Isto significa que f é irredutível em $k[[X, Y]]$. O outro é o caso semilocal quando C tem vários ramos em P. Neste caso, f é redutível em $k[[X, Y]]$ e os seus fatores irredutíveis correspondem aos ramos de C em P. Seja no caso local ou no caso semilocal, vamos denotar por K o anel total de frações de $\mathcal{O}$ (no caso local, como $\mathcal{O}$ é um domínio, temos que K é um corpo) e por $\tilde{\mathcal{O}}$ o fecho inteiro de $\mathcal{O}$ (em K). Seja $\mathcal{C}$ o ideal condutor de $\tilde{\mathcal{O}}$ em $\mathcal{O}$, a saber,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{O}},\mathcal{O}} = \{g \in \mathcal{O} \mid g \cdot \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}\}$$

O condutor $\mathcal{C}$ é um ideal tanto de $\mathcal{O}$ quanto de $\tilde{\mathcal{O}}$. Na verdade, $\mathcal{C}$ é o "maior"ideal de $\mathcal{O}$ que também é ideal de $\tilde{\mathcal{O}}$. Assim temos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$. O Teorema de Gorenstein afirma que:

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}.$$

Naturalmente esta igualdade é equivalente à igualdade:

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{C}} = 2\ dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}, \text{ ou ainda, } dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{C}} = 2\ dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}$$

Este teorema nos fornece uma simetria entre as dimensões dos quocientes envolvidos. No caso de um ramo, isto está fortemente ligado a simetria do semigrupo de valores associado a curva algebróide (f) que é definido por:

$$S(f) = \{I(f,g) \mid g \in K[[X,Y]] \setminus (f)\}$$

onde $I(f,g)$ denota a multiplicidade de interseção de (f) com (g).

No primeiro capítulo daremos algumas definições e notações básicas que servirão de pré-requisitos para a leitura da dissertação e também têm a intenção de torná-la o mais auto-suficiente possível.

No segundo capítulo vamos estudar os semigrupos dos números naturais de uma forma geral com vistas a relacionar com os semigrupos que surgem como semigrupos associados a curvas planas irredutíveis algebróides. A simetria de tais semigrupos e os resultados relativos às Apéry-sequências são assuntos relevantes neste contexto.

No terceiro capítulo vamos estudar a simetria dos semigrupos dos naturais e relacionar isto com as Apéry-sequências. O teorema principal deste capítulo é o teorema 6 devido a G. Angermuller ([An]) e A. Azevedo ([Az]) que fornece uma base conveniente do $k[[x]]$-módulo $\mathcal{O}$ para lidar com Apéry seqüências. Um dos objetivos do capítulo é mostar que o semigrupo associado a uma curva plana irredutível algebróide é simétrico. Os exemplos de semigrupos gerados por dois geradores são feitos aqui para motivar resultados no caso geral.

No quarto e último capítulo vamos fazer a demonstração do teorema de Gorenstein, tanto no caso local quanto no caso semilocal. A demonstração no caso semilocal é consequência do caso local. Por isto a maior parte da teoria desenvolvida ao longo da dissertação é dedicada ao caso local. Para a demonstração do Teorema de Gorenstein no caso semilocal seguimos a prova apresentada na tese de doutorado de A. Garcia ([Ga]).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo inicial apresentamos alguns conceitos e resultados básicos sobre propriedades locais de curvas algébricas necessários para o desenvolvimento do tema tratado na dissertação. Ao longo do trabalho, vamos denotar por k um corpo algebricamente fechado. Os resultados apresentados neste capítulo estão, essencialmente, no texto *Irreducible Plane Curve Singularities* de A. Hefez ([He]).

1.1 O Anel das Séries Formais

Nosso foco neste trabalho são pontos singulares de curvas algébricas planas, portanto vamos considerar essencialmente o anel de séries formais sobre k em duas indeterminadas X e Y que denotamos por $k[[X,Y]]$. Assim, uma série formal é um objeto da forma:

$$f = f(X,Y) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(X,Y) = f_0(X,Y) + f_1(X,Y) + \cdots$$

onde cada $f_i(X,Y)$ é um polinômio homogênio de grau i em X e Y, com coeficientes em k. É fácil verificar que f é inversível em $K[[X,Y]]$ se e somente se, $f_0 \neq 0$. O anel das séries formais é um domínio fatorial cujo único ideal maximal é $\mathcal{M} = \langle X,Y \rangle$, portanto é um domínio local. No caso em que a série f é não nula, na expressão dada acima, existe um menor inteiro m tal que $f_m \neq 0$. Tal inteiro é chamado de *multiplicidade* de f, denotado por $mult(f)$, e o polinômio f_m correspondente é chamado a *forma inicial* de f. Se f é a série nula então não existe um tal número inteiro, portanto, ela não tem uma forma inicial e, neste caso, dizemos que a sua multiplicidade é ∞.

Dizemos que uma série $f = f(X,Y)$ é *regular de ordem* m em relação à indeterminada Y se Y^m é a maior potência de Y que divide $f(0,Y)$. Uma definição análoga pode ser feita em relação à indeterminada X. Quando f é regular de ordem $m = mult(f)$ em relação Y diremos simplesmente que f é *regular* em Y. Neste caso, temos que $mult(f) = mult(f(0,Y))$.

O teorema seguinte nos garante que o anel das séries formais é "quase"um domínio euclidiano. Trata-se do teorema de divisão que foi provado por Stickelberger em 1887. Muitas propriedades do anel $k[[X,Y]]$ seguem do teorema da divisão incluindo o teorema de preparação de Weierstrass.

Teorema 1 *(Teorema da Divisão) Seja f uma série formal em $k[[X,Y]]$ regular de ordem m em Y. Dado $g \in k[[X,Y]]$ existem $q \in k[[X,Y]]$ e $r \in k[[X]][Y]$, com $r = 0$ ou $gr_Y(r) < m$, unicamente determinados por f e g, tais que*

$$g = qf + r.$$

Utilizando o teorema da divisão é fácil obter o teorema de preparação de Weierstrass que nos garante que, a menos de multiplicação por inversível, toda série em $k[[X,Y]]$ pode ser vista como um polinômio numa das indeterminadas com coeficientes no anel das séries formais na outra indeterminada.

Teorema 2 *(Teorema de Preparação de Weierstrass) Seja $f = f(X,Y)$ uma série formal em $k[[X,Y]]$ de multiplicidade m e regular em Y. Então existe um inversível $u = u(X,Y) \in k[[X,Y]]$ e elementos $a_1, \ldots, a_m \in k[[X]]$, com $mult(a_i) \geq i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$, unicamente determinados por f, tais que*

$$f(X,Y) = u(X,Y)[Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(X)Y + a_m(X)].$$

Uma série escrita na forma acima é chamada *polinômio de Weierstrass* (em relação à indeterminada Y).

1.2 Curvas Planas Algebróides e anel local

Para estudar as propriedades locais de uma curva plana algébrica dada por um polinômio $f(X,Y) \in k[X,Y]$ o consideramos como um elemento de $K[[X,Y]]$. De uma maneira mais geral, é conveniente fazer a definição seguinte:

Definição 1 *Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série não nula e não inversível. A curva plana algebróide definida por f é a classe de equivalência da relação de equivalência seguinte:*

$$f \approx g \text{ se, e somente se, existe um inversível } u \in k[[X,Y]] \text{ tal que } g = u \cdot f.$$

Assim, se denotamos por (f) a classe de equivalência de f, temos que

$$(f) = \{u \cdot f \ ; \ u \text{ é um inversível em } k[[X,Y]]\}.$$

Utilizando o Teorema de Preparação de Weierstrass é possível mostrar que o anel das séries formais $k[[X,Y]]$ é um domínio de fatoração única. Dizemos que a curva plana algebróide (f) é *irredutível* se a série f for irredutível em $k[[X,Y]]$. No caso em que f é um polinômio que define uma curva algébrica C, as curvas planas algebróides correspondentes aos fatores irredutíveis de f em $k[[X,Y]]$ serão denominadas *ramos* de C (em $P = (0,0)$). Dizemos que duas curvas planas algebróides são equivalentes, e escrevemos $(f) \sim (g)$, se existe um k-automorfismo ϕ de $k[[X,Y]]$ tal que $(\phi(f)) = (g)$.

Não é difícil mostrar que o anel das séries formais $k[[X,Y]]$ é um domínio local cujo ideal maximal é $\mathcal{M} = \langle X,Y \rangle$ gerado por X e Y. Seja $f \in \mathcal{M}$ um elemento nesse ideal maximal. Definimos o *anel de coordenadas* da curva algebróide (f) como sendo a k-álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{k[[X,Y]]}{\langle f \rangle}.$$

Vamos denotar respectivamente por x e y as classes residuais módulo $\langle f \rangle$ das indeterminadas X e Y em $\mathcal{O}_f$. Então podemos escrever o anel de coordenadas $\mathcal{O}_f = k[[x,y]]$, além disso, ele também é um anel local cujo ideal maximal é $\mathcal{M}_f = \langle x,y \rangle$. Quando f é irredutível $\mathcal{O}_f$ é um domínio. Se (f)e (g) são duas curvas planas algebróides é possível verificar que

$$(f) \sim (g) \ \text{ se, e somente se, } \mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g.$$

Seja (f) uma curva plana algebróide. Escreva $f = f_m + f_{m+1} + \cdots$ com f_m um polinômio homogêneo não nulo de grau m, isto é, m é a multiplicidade de (f). A curva plana definida por f_m é denominado *cone tangente* de (f). Naturalmente, sendo k um corpo algebricamente fechado, sabemos que f_m sempre se fatora em m fatores lineares. Cada um desses fatores lineares define uma reta no plano afim k^2. Cada uma dessas retas é denominada uma *reta tangente* de (f).
Uma condição necessária importante para a irredutibilidade de uma série formal de potências é dada pelo lema seguinte denominado Lema da Unitangência.

Lema 1 *(Unitangência) Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série irredutível de multiplicidade m tal que $f(0,0) = 0$. Então a forma inicial de f tem a seguinte expressão*

$$f_m = (aX + bY)^m$$

onde $a, b \in k$ não são nulos simultaneamente.

1.3 Teoria de Intersecção em $k[[X,Y]]$

Há uma teoria de intersecção no anel das séries formais $k[[X,Y]]$ que permite expressar numericamente a ordem ou o grau de contato entre duas curvas planas algebróides.

Definição 2 *Dadas duas séries $f, g \in k[[X,Y]]$ não nulas, a multiplicidade de intersecção ou índice de interseção de f e g é o número inteiro não negativo ou ∞*

$$I(f,g) = dim_k \frac{k[[X,Y]]}{\langle f, g\rangle}.$$

Naturalmente esta definição de multiplicidade de intersecção de séries de potências pode ser extendida para as curvas algebróides. Além disso, é fácil verificar que f e g são relativamente primos se, e somente se, $I(f,g) < \infty$. Por esta razão incluimos o infinito na definição. Se uma curva algebróide tem multiplicidade um dizemos que ela é *regular*. Dizemos que (f) e (g) são *transversais* se $mult(f) = mult(g) = 1$ e suas tangentes são distintas. O teorema abaixo nos fornece as propriedades básicas da multiplicidade de intersecção.

Teorema 3 *Sejam $f, g, h \in k[[X,Y]] \setminus \{0\}$, $\phi : k[[X,Y]] \to k[[X,Y]]$ um k-automorfismo e u, v elementos inversíveis em $k[[X,Y]]$. A multiplicidade de interseção tem as seguintes propriedades:*

1. *$I(f,g) < \infty$ se, e somente se, f e g são relativamente primos em $k[[X,Y]]$.*
2. *$I(f,g) = I(g,f)$.*
3. *$I(\phi(f), \phi(g)) = I(uf, vg) = I(f,g)$.*
4. *$I(f, gh) = I(f,g) + I(f,h)$.*
5. *$I(f,g) = 1$ se e somente se (f) e (g) são transversais*
6. *$I(f, g - hf) = I(f,g)$.*

Como observado acima, naturalmente estas propriedades valem para a multiplicidade de intersecção de duas curvas planas algebróides. O teorema acima enumera as propriedades que a multiplicidade de intersecção definida anteriormente tem. Por outro lado, é possível mostrar que estas propriedades caracterizam a multiplicidade de intersecção de duas curvas planas algebróides. Portanto este teorema pode ser interpretado como definição axiomática da multiplicidade de intersecção.

Uma maneira alternativa de computar a multiplicidade de intersecção de duas curvas algebróides é através da resultante. Sejam (f) e (g) curvas algebróides que se anulam em $(0,0)$. Depois de uma eventual mudança de coordenadas podemos supor que ambos são polinômios de Weierstrass na indeterminada Y. A multiplicidade de intersecção de (f) com (g) é dada por

$$I(f,g) = mult(R_Y(f,g)).$$

Aqui, $R_Y(f,g)$ é a resultante dos polinômios f e g na indeterminada Y com coeficientes no anel das séries formais $k[[X]]$.

1.4 Valorizações

Seja C uma curva algébrica plana irredutível sobre um corpo k (algebricamente fechado). Vamos denotar por $K = k(C)$ o seu corpo de funções com corpo de constantes k. Então K é um corpo de funções algébricas em um variável que é comumente denotado por $K|k$. A teoria das valorizações desempenha um papel fundamental no estudo de tais corpos de funções. Mais geralmente, um *corpo de funções algébricas $F|k$ de uma variável sobre k* é uma extensão F de k tal que, F é um extensão finita de $k(x)$ para algum elemento transcendente $x \in F$ sobre k. O exemplo mais simples de um corpo de funções algébricas de uma variável é o *corpo das funções racionais $F = k(x)$* para alguma transcendente $x \in F$ sobre k. Um *anel de valorização* do corpo de funções $F|k$ é um subanel $\vartheta \subset F$ de F com as propriedades:

1. $k \subset \vartheta \subset F$ mas $k \neq \vartheta \neq F$;

2. Para todo $z \in F$, $z \in \vartheta$ ou $z^{-1} \in \vartheta$.

As propriedades básicas dos anéis de valorização de um corpo de funções algébricas estão listadas na proposição seguinte.

Proposição 1 *Seja ϑ um anel de valorização de um corpo de funções $F|k$, onde k é algebricamente fechado. Então*

(1) ϑ é um anel local cujo ideal maximal é o conjunto $\mathcal{M}$ dos elementos não inversíveis de ϑ;

(2) Se $x \in F$ é não nulo então $x \in \mathcal{M} \iff x^{-1} \notin \vartheta$;

(3) $k \subset \vartheta$ e $k \cap \mathcal{M} = \{0\}$.

(4) $\mathcal{M}$ é um ideal principal.

(5) Se $\mathcal{M} = t\vartheta$ então todo $z \in F$ não nulo possui uma única representação da forma $z = t^n \cdot u$ para algum $n \in \mathbb{Z}$ e algum inversível $u \in \vartheta$.

(6) ϑ é um domínio principal. Mais precisamente, se $\mathcal{M} = t\vartheta$ e I é um ideal não nulo de ϑ então $I = t^n\vartheta$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Definição 3 *Seja $F|k$ um corpo de funções. Uma valorização discreta normalizada de $F|k$ é uma função $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ que goza das seguintes propriedades:*

(1) $v(x) = \infty \iff x = 0$;

(2) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ para todos $x, y \in F$;

(3) $v(x + y) \geq min\{v(x), v(y)\}$ para todos $x, y \in F$;

(4) Existe $t \in F$ tal que $v(t) = 1$;

(5) Se $a \in k$ é não nulo então $v(a) = 0$.

Um elemento $t \in F$ que satisfaz a condição (4) da definição acima é chamado de uniformizante local em v.

Proposição 2 *Seja $F|k$ um corpo de funções onde k é algebricamente fechado. Seja v uma valorização de $F|k$ e t uma uniformizante local em v. Então, para cada $f \in F \setminus \{0\}$ existe uma única série formal de Laurent*

$$\sum_{n=m_f}^{\infty} c_n t^n, \quad onde \ m_f = v(f) \ e \ c_{m_f} \neq 0$$

tal que

$$v\left(f - \sum_{n=m_f}^{j} c_n t^n\right) > j, \quad \textit{para cada } j \in \mathbb{Z} \ \textit{e} \ j \geq m_f.$$

Em particular, podemos ver F imerso no corpo das séries formais de Laurent em t sobre k, isto é, $F \subset k((t))$

As valorizações v de $F|k$ se prolongam naturalmente a uma valorização de $k((t))$, a saber, para cada $f \in k((t))$, defina

$$v(f) = ord_t(f) := \text{ menor expoente da série de Laurent em } t.$$

A imersão $F \subset k((t))$ e a definição acima naturalmente independem da uniformizante local t em v, pois, se π é uma outra uniformizante local em v, isto é, $v(\pi) = 1$ então,

$$\pi = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \quad \text{onde } \ a_i \in k \ \text{ para todo } \ t \geq 1 \ \text{ e } \ a_1 \neq 0.$$

Logo, $k((t)) = k((\pi))$. Portanto $k((t))$ só depende de F e v.
O corpo $k((t))$ pode ser interpretado como um completamento de F utilizando a seguinte norma: para cada $f \in k((t))$ coloque

$$|f|_v := 2^{-v(f)}$$

É fácil de se verificar que valem as seguintes propriedades:

(1) $|f|_v \geq 0$ para todo $f \in k((t))$.

(2) $|f|_v = 0 \iff f = 0$.

(3) $|f \cdot g|_v = |f|_v \cdot |g|_v$ para todos $f, g \in k((t))$.

(4) $|f + g|_v \leq max(|f|_v, |g|_v) \leq |f|_v + |g|_v$ para todos $f, g \in k((t))$.

Isto mostra que $|\cdot|_v$ é uma norma em F.

.

Capítulo 2

O semigrupo numérico S(f)

Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série irredutível. Vamos denotar por (f) a curva algebróide irredutível correspondente e por $\langle f \rangle$ o ideal gerado por f no anel $k[[X,Y]]$. Para cada série não nula $g \in k[[X,Y]]$, vamos denotar por $I(f,g)$ a multiplicidade de intersecção de f com g. Suponhamos além disso que $g \notin \langle f \rangle$, o que significa que $I(f,g) \in \mathbb{N}$.

2.1 Semigrupo dos números Naturais com Condutor

O semigrupo dos naturais com condutor desempenham um papel fundamental na teoria de classificação topológica de singularidades de curvas algébricas planas. Nesta secção vamos apresentar as suas propriedades básicas.

Definição 4 *Um subconjunto $S \subset \mathbb{N}$ é um semigrupo de $\mathbb{N}$ se $0 \in S$ e S é fechado em relação à operação de adição, isto é, se $m, n \in S$ então $m+n \in S$.*

Dizemos que um semigrupo S dos números naturais é um *semigrupo com condutor* se existe um número $c \in S$, que será chamado *condutor de S*, tal que

1. $c - 1 \notin S$ e,
2. se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq c$ então $n \in S$.

Assim, o condutor de um semigrupo S é o menor número natural com a propriedade que, a partir dele, todos os números naturais estão em S. O próprio $\mathbb{N}$ é um semigrupo com condutor e o seu condutor é $c = 0$. Fixado um número natural $n \geq 2$, o conjunto $S = n\mathbb{N}$ dos múltiplos de n em $\mathbb{N}$

é um semigrupo que não tem condutor. Assim, por exemplo, o conjunto dos números naturais pares é um semigrupo sem condutor. Por outro lado, fixado um número natural $n \geq 2$ o conjunto $S = \{s \in \mathbb{N} \mid s \geq n\} \cup \{0\}$ é um semigrupo com condutor $c = n$.

Podemos caracterizar os semigrupos dos números naturais com condutor em termos do seu máximo divisor comum. Para isto, precisamos do lema seguinte.

Lema 2 *Seja $\{b_0, b_1, \ldots, b_t\}$ um conjunto finito de números inteiros positivos ordenado, a saber, $0 < b_0 < b_1 < \cdots < b_t$, tal que $MDC(b_0, b_1, \ldots, b_t) = 1$. Então, dado um número inteiro n, existem números inteiros $r_0, r_1, \ldots, r_t$ com $0 \leq r_j < b_0$ para $j = 1, 2, \ldots, t$ tais que*

$$n = r_0b_0 + r_1b_1 + \cdots + r_tb_t,$$

Demonstração: Como $MDC(b_0, b_1, \ldots, b_t) = 1$, existem números inteiros (não necessariamente positivos) $n_0, n_1, \ldots, n_t$ tais que

$$1 = n_0b_0 + n_1b_1 + \cdots + n_tb_t. \tag{2.1}$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (2.1) acima por n obtemos

$$n = nn_0b_0 + nn_1b_1 + \cdots + nn_tb_t \tag{2.2}$$

Para cada $j = 1, 2, \ldots, t$, divida nn_j por b_0 e escreva $nn_j = q_jb_0 + r_j$, onde $q_j, r_j \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r_j < b_0$ e substitua cada expressão desta na igualdade (2.2) para obter.

$$n = r_0b_0 + r_1b_1 + \cdots + r_tb_t,$$

onde $r_0 = nn_0 + q_1b_1 + \cdots + q_tb_t$. Isto demonstra o lema. $\square$

Proposição 3 *Seja S um semigrupo dos números naturais. Então S tem condutor se, e somente se, $MDC(S) = 1$.*

Demonstração: Naturalmente se S é um semigrupo com condutor então trivialmente o máximo divisor comum de seus elementos é igual a 1. Vamos então provar a recíproca, isto é, vamos supor que $MDC(S) = 1$. Então existe um subconjunto finito de S, digamos, $\{s_0, s_1, \ldots, s_t\}$ tal que $MDC(s_0, \ldots, s_t)=$ 1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $0 < s_0 < s_1 < \cdots < s_t$ e que $s_0 = min(S \setminus \{0\})$. Se $s_0 = 1$ então $S = \mathbb{N}$ e portanto o seu condutor é $c = 0$. Então podemos supor $s_0 > 1$. Considere $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > s_0s_1 + s_0s_2 + \cdots + s_0s_t.$$

Pelo lema acima, podemos escrever $n = r_0s_0 + r_1s_1 + \cdots + r_ts_t$, com $0 \leq r_j < s_0$ para cada $j = 1, 2, \ldots, t$. Temos então que

$$r_0s_0 + r_1s_1 + \cdots + r_ts_t > s_0s_1 + s_0s_2 + \cdots s_0s_t,$$

isto é,

$$r_0s_0 > s_1(s_0 - r_1) + s_2(s_0 - r_2) + \cdots + s_t(s_0 - r_t).$$

Como $s_0 - r_j > 0$ para todo $j = 1, 2, \ldots, t$ e $s_0 > 1$, temos necessariamente que $r_0 > 0$ e, portanto, $n \in S$. Isto mostra que todo número natural suficientemente grande está em S. Logo S é um semigrupo com condutor.

$\square$

Observação 1

Observe que o número $s_0s_1 + s_0s_2 + \cdots + s_0s_t$ que usamos na demonstração acima é uma cota superior para o condutor de S.

Observação 2

O conjunto $\{s_0, s_1, \ldots, s_t\}$ utilizado na prova da proposição acima não precisa ser um conjunto de geradores do semigrupo S. No entanto poderíamos tê-lo escolhido de forma que fosse. Em particular, se $S \neq \mathbb{N}$ então o conjunto seguinte é o menor sistema de geradores de S. Tome $s_0 = m = min(S \setminus \{0\})$. Para cada $j > 0$ defina

$$s_j = min(S \ \setminus \ \{s \in \mathbb{N} \mid s \in m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_{j-1}\mathbb{N}\})$$

se o conjunto $S \setminus \{s \in \mathbb{N} \mid s \in m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_{j-1}\mathbb{N}\}$ não for vazio. Como $MDC(S) = 1$, segue que existe um j_0 tal que o conjunto

$$S \setminus \{s \in \mathbb{N} \mid s \in m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_{j_0-1}\mathbb{N}\}$$

é vazio. Tome j_0 minimal em relação a esta condição. Então $t = j_0 - 1$. Assim, é fácil verificar que a sequência $m, s_1, \ldots, s_t$ tem as seguintes propriedades:

1. $m < s_1 < s_2 < \cdots < s_t$.

2. $MDC\{m, s_1, s_2, ..., s_t\} = 1$ e $S = m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_t\mathbb{N}$.

3. $m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_j\mathbb{N} \subsetneqq m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_j\mathbb{N} + s_{j+1}\mathbb{N}$ para cada $j = 1, 2, ..., t - 1$.

4. $MDC(m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_j\mathbb{N}) > MDC(m\mathbb{N} + s_1\mathbb{N} + \cdots + s_j\mathbb{N} + s_{j+1}\mathbb{N})$ para cada $j = 1, 2, ..., t - 1$.

Definição 5 *Seja S um semigrupo de $\mathbb{N}$. O conjunto de lacunas de S é o conjunto*

$$L = L(S) = \mathbb{N} \setminus S$$

Assim, um semigrupo com condutor tem um número finito de lacunas. Se c é o seu condutor, a sua maior lacuna é $c - 1$. Além disso, $S = \mathbb{N}$ se, e somente se, $L = \emptyset$. Se $S \neq \mathbb{N}$ então $1 \in L(S)$, isto é, 1 é uma lacuna de S.

2.2 Semigrupo de uma curva plana irredutível algebróide

O nosso interesse em estudar algumas propriedades dos semigrupos dos números naturais com condutor é para compreender os semigrupos associados a singularidades de curvas planas. Este é o caso quando a singularidade possui apenas um ramo.

Definição 6 *O semigrupo associado a uma curva plana irredutível algebróide (f) é o semigrupo de $\mathbb{N}$:*

$$S(f) = \{I(f, g) \mid g \in K[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\}$$

Observe que de fato $S(f)$ é um semigrupo, pois se $r, s \in S(f)$ então existem elementos $g, h \in K[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$ tais que $r = I(f, g)$ e $s = I(f, h)$ e portanto, $r + s = I(f, g) + I(f, h) = I(f, gh) \in S(f)$ pois $g \cdot h \in K[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$.
Vamos considerar aqui somente os semigrupos dos naturais com máximo divisor comum igual a 1.

Exemplo 1

Considere a série irredutível $f = Y^2 - X^n \in k[[X, Y]]$, onde $n \geq 3$ é ímpar. Para cada $g \in k[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$, o teorema de divisão de Weierstrass nos fornece $q, h \in k[[X, Y]]$ tais que:

$$g = q \cdot (Y^2 - X^n) + h \text{ com } gr_Y(h) \leq 1, \text{ pois } gr_Y(f) = 2.$$

Observe que como $g \notin \langle f \rangle$ então $h \neq 0$. Temos então,

$$h = a(X)Y + b(X) \text{ com } a(X), b(X) \in k[[X]].$$

Podemos calcular a multiplicidade de intersecção entre as curvas (f) e (g) ultilizando a resultante:

$$\begin{aligned} I(f,g) &= I(f,qf+h) = I(f,h) = I(Y^2 - X^n, a(X)Y + b(X)) \\ &= ord_X det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -X^n \\ a(X) & b(X) & 0 \\ 0 & a(X) & b(X) \end{pmatrix} \\ &= ord_X[b^2(X) - X^n a^2(X)] \end{aligned}$$

Escreva

$$a(X) = X^{\alpha}u(X) \text{ e } b(X) = X^{\beta}v(X) \text{ onde } u(0), v(0) \neq 0 \; e \; \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

Segue que

$$I(f,g) = ord_X[X^{2\beta}v^2(X) - X^{n+2\alpha}u^2(X)] = min\{2\beta, n+2\alpha\}$$

Como g é arbitrário em $k[[X,Y]] \setminus \langle f \rangle$, segue que α e β são arbitrários em $\mathbb{N}$. Portanto, $S(f) = \langle 2, n \rangle$ é o semigrupo gerado por 2 e n, e consiste de todos os números inteiros pares não negativos e todos os números inteiros ímpares a partir de n:

$$S(f) = \{0, 2, 4, 6, ..., n-1, n, n+1, ...\}.$$

O condutor de $S(f)$ é $c = n - 1$ e o conjunto das lacunas de $S(f)$ é

$$L(S(f)) = \{1, 3, 5, ..., n-2\}. \qquad \square$$

Observação 3

Pode-se verificar facilmente que todo polinômio irredutível de Weierstrass de grau 2 (em Y) de $k[[X,Y]]$, após uma eventual mudança de coordenadas e/ou eventual multiplicação por inversíveis, pode ser escrito sob a forma $Y^2 - u(X)X^n$ onde $n \geq 3$ é um inteiro ímpar e $u(X)$ é inversível em $k[[X]]$.

Observação 4

Dada uma curva irredutível algebróide $C = (f)$, sua multiplicidade pode ser expressa em termos do seu semigrupo de valores $S(f)$, a saber,

$$mult(f) = min\{m \in \mathbb{N} \mid m \in S(f) \setminus \{0\}\} = min(S(f) - \{0\}).$$

De fato, $S(f) = \{I(f,g) \mid g \in K[[X,Y]]\setminus(f)\}$ mas $I(f,g) \geq mult(f) \cdot mult(g)$ e vale a igualdade se, e somente se, f e g não tem tangentes comuns. Como f é irredutível, pelo lema da unitangência, (f) tem uma única tangente. Tome g uma reta pela origem distinta da tangente de f, então $mult(g) = 1$ e,

$$I(f,g) = mult(f) \cdot mult(g) = mult(f).$$

Temos assim um invariante geométrico, a multiplicidade de uma curva plana irredutível algebróide, caracterizado pelo semigrupo $S(f)$, que é um objeto aritmético/algébrico.

2.3 Semigrupos simétricos

Uma propriedade fundamental dos semigrupos associados a singularidades de curvas algébricas é a simetria que passamos a estudar a seguir. Esta propriedade, como veremos mais adiante, está ligada ao Teorema de Gorenstein que também vamos estabelecer no capítulo 4.

Definição 7 *Um semigrupo $S \subset \mathbb{N}$ com condutor c é simétrico se para cada $n \in \mathbb{Z}$ tem-se,*

$$n \in S \text{ se, e somente se, } c - 1 - n \notin S.$$

É fácil verificar que o semigrupo $S = \langle 2, n\rangle$ gerado por 2 e n do exemplo 1 é simétrico. De fato, $\alpha \in S$ se, e somente se $(n-1) - 1 - \alpha = n - 2 - \alpha \notin S$.

Proposição 4 *Seja $S \subset \mathbb{N}$ um semigrupo com condutor c. Então S é simétrico se, e somente se, a quantidade de lacunas de S é igual a quantidade de elementos de S no intervalo $[0, c-1]$. Neste caso, esta quantidade é igual à metade do condutor c. Em particular, o condutor c de um semigrupo simétrico é sempre um número par.*

Demonstração: Suponha que S seja um semigrupo simétrico. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : S \cap [0, c-1] & \to & \mathbb{N} \setminus S \\ n & \mapsto & c - 1 - n \end{array}$$

A aplicação φ está bem definida pois $n \in S$ se, e somente se, $c - 1 - n \notin S$, isto é, $c-1-n \in \mathbb{N}\setminus S$. Além disso, φ é injetiva pois se $c-1-n_1 = c-1-n_2$ então $n_1 = n_2$. Finalmente, φ é sobretiva pois, dado $z \in \mathbb{N} \setminus S$ então $z \notin S$. Portanto $c - 1 - z \in S$ e isto significa que $\varphi(c-1-z) = z \notin S$. Observe que

$$[0, c-1] = ([0, c-1] \cap S) \cup (\mathbb{N} \setminus S) \text{ (união disjunta).}$$

Como φ é uma bijeção, segue que a quantidade de lacunas de S, que é a cardinalidade de $\mathbb{N} \setminus S$, é igual a $\frac{c}{2}$. Reciprocamente, supondo que a quantidade de lacunas de S seja igual a quantidade de elementos de S no intervalo $[0, c-1]$, utilizando novamente a aplicação φ, é fácil concluir que S é simétrico.

□

Teorema 4 *Todo semigrupo dos números naturais gerado por dois elementos primos entre si é simétrico. Além disso, se m e n são estes geradores então o condutor deste semigrupo é $c = (m-1)(n-1)$*

Demonstração: Considere o semigrupo $S \subset \mathbb{N}$ gerado pelos números naturais m, n primos entre si. Podemos supor $2 \leq m < n$. Vamos primeiramente computar o condutor de S. Observe inicialmente que dado $\alpha \in \mathbb{Z}$, como m, n são primos entre si, pelo Lema 2 podemos escrever

$$\alpha = r_0 m + s_0 n, \text{ onde } r_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq s_0 \leq m-1.$$

Esta representação de α é única, pois se $r_0 m + s_0 n = r_0' m + s_0' n$ então $(r_0 - r_0')m = (s_0' - s_0)n$. Como m e n são primos entre si, segue que m divide $s_0' - s_0$. Mas $-m < s_0' - s_0 < m$ e portanto, $s_0' - s_0 = 0$, isto é, $s_0' = s_0$. Daí segue que $r_0 = r_0'$.

Além disso, temos que

$$\alpha \in S \text{ se, e somente se, } r_0 \geq 0.$$

De fato, se $r_0 \geq 0$ naturalmente temos que $\alpha \in S$. Reciprocamente, suponha que $\alpha \in S = \langle m, n \rangle$. Então existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $\alpha = rm + sn$. Por outro lado, utilizando a unicidade da representação de α descrita acima, podemos escrever $\alpha = r_0 m + s_0 n$, com $r_0 \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq s_0 < m$, e temos $rm + sn = r_0 m + s_0 n$. Segue que

$$(s - s_0)n = (r_0 - r)m \tag{2.3}$$

e como $MDC(m, n) = 1$, segue que m divide $s - s_0$, isto é, $s - s_0 = tm$ para algum $t \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$s_0 = s - tm. \tag{2.4}$$

Como $0 \leq s_0 < m$, esta última igualdade mostra que $t \geq 0$. Combinando as igualdades (2.3) e (2.4), obtemos $r_0 = r + tn$ e, portanto, $r_0 \geq 0$. Segue da expressão única dos elementos de S descrita acima que o maior número natural que não está em S é $-1 \cdot m + (m-1) \cdot n$. Portanto o condutor de S é

$$c = -1 \cdot m + (m-1) \cdot n + 1 = (m-1) \cdot n + (m-1) \cdot (-1) = (m-1)(n-1).$$

Vamos agora checar a simetria de S. Considere um número inteiro α e sua representação única sob a forma

$$\alpha = rm + sn, \text{ com } r \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq s \leq m-1.$$

Portanto, as seguintes equivalências seguem das observações e comentários anteriores:

$$\begin{aligned}
\alpha \in S &\Leftrightarrow r \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -r-1 < 0 \\
&\Leftrightarrow (-r-1)m + [(m-1)-s]n \notin S \\
&\Leftrightarrow (m-1)n - m + 1 - 1 - rm - sn \notin S \\
&\Leftrightarrow (m-1)(n-1) - 1 - \alpha \notin S \\
&\Leftrightarrow c - 1 - \alpha \notin S
\end{aligned}$$

Logo, S é simétrico e $c = (m-1)(n-1)$ é seu condutor.

$\square$

2.4 Apéry-sequências de semigrupos

As sequências de Apéry de um semigrupo dos números naturais foram introduzidas por Apéry em 1946 ([Ap]). Trata-se de um dos primeiros trabalhos sobre invariantes numéricos de singularidades de curvas algébricas planas. Posteriormente Azevedo ([Az]) e Angermuller ([An]) utilizaram estas sequências para relacionar o semigrupo associado a uma curva plana irredutível algebróide com a sua explosão. Isto é importante para as demonstrações utilizando processos indutivos.

Seja S um semigrupo com condutor e $p \in S \setminus \{0\}$. O *Apéry-conjunto* de

S em relação a p é o conjunto cujos elementos são definidos como segue:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_0 & = & 0 \\ \alpha_1 & = & min(S \setminus p\mathbb{N}) \\ & \vdots & \\ \alpha_j & = & min(S \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1} (\alpha_i + p\mathbb{N})) \\ & \vdots & \\ \alpha_{p-1} & = & min(S \setminus \bigcup_{i=0}^{p-2} (\alpha_i + p\mathbb{N})). \end{array}$$

A *Apéry-sequência* é o Apéry-conjunto ordenado e vamos denotá-la por

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{p-1}$$

Se em particular, $p = min(S \setminus \{0\})$ vamos dizer simplesmente que esta é a Apéry-sequência de S.

Exemplo 2

$$\begin{array}{rcl} \text{Seja } S = \langle 4, 15 \rangle & = & \{0, 4, 8, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 32, 34, \\ & & 35, 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, ...\} \end{array}$$

o semigrupo gerado por 4 e 15. A Apéry-sequência de S é $0, 15, 30, 45$. A Apéry-sequência de S em relação a 15 é $0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56$ e a Apéry-sequência de S em relação a 8 é $0, 4, 15, 19, 30, 34, 45, 49$.

Observação 5

Algumas vezes é conveniente pensar na Apéry-sequência de S em relação a $p \in S \setminus \{0\}$ como um conjunto ordenado:

$$\{min(S \cap \{n + p\mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\})\} = \{0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{p-1}\},$$

isto significa que cada elemento a_i da apéry sequência é o menor elemento de S em sua classe módulo p.

Observação 6

Seja S um semigrupo com condutor, $p \in S \setminus \{0\}$ e $0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de S em relação a p. Então vale:

1. $a_i \neq a_j$ mod p para $i \neq j$;

2. $S = \bigcup\limits_{j=0}^{p-1} (a_j + p\mathbb{N})$;

3. O condutor de S é $c = a_{p-1} - p + 1$.

Os ítens 1 e 2 acima são imediatos e para verificar o ítem 3 basta perceber que $a_{p-1} - p \notin S$ e é o maior número natural que não está em S.

Observação 7

Seja $S = \langle m, n \rangle$ o semigrupo gerado por m e n, números naturais primos entre si, e suponha $m < n$. Se $p = m$ ou $p = n$ então a Apéry-sequência de S em relação a p é uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 0 e cuja razão é a_1, isto é, $a_j = ja_1$ para cada $j = 0, 1, 2, ..., p-1$. Na verdade, nestes dois casos as três condições seguintes são equivalentes:

1. S é gerado por dois elementos.

2. $a_j = ja_1$ para cada $j = 0, 1, 2, ..., p-1$.

3. $S = \bigcup\limits_{i=0}^{p-1} (ia_1 + p\mathbb{N})$.

Vamos verificar que 1 implica 2. Podemos supor $p = m$ (o caso $p = n$ é análogo). Neste caso, $a_1 = min(S \setminus m\mathbb{N}) = n$. Observe que os números $0, n, 2n, ..., (m-1)n$ são distintos módulo m. Além disso, jn é o menor elemento de S em sua classe módulo m, para todo $j = 0, 1, 2, ..., m-1$. Portanto esta é a Apéry-sequência de S em relação a m. As demais implicações são imediatas.

Uma das características importantes das Apéry sequências é o fato que a simetria do semigrupo pode ser caracterizada por elas. Isto é o que mostra a proposição seguinte.

Proposição 5 *Seja S um semigrupo de $\mathbb{N}$ com condutor, p um elemento não nulo qualquer de S e $a_0 < a_1 < \cdots < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de S em relação a p. Então, S é simétrico se, e somente se, $a_i + a_{p-1-i} = a_{p-1}$ para todo $i = 1, 2, ..., p-1$.*

Demonstração: O condutor de S é dado por $c = a_{p-1} - p + 1$. Portanto, S é simétrico se, e somente se, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\alpha \in S \text{ se, e somente se, } a_{p-1} - p - \alpha \notin S.$$

Tomando $\alpha = a_i \in S$, temos que $a_{p-1} - p - a_i \notin S$. No entanto, este elemento está em alguma classe residual módulo p, isto é, existe um $j_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$ tal que $a_{p-1} - p - a_i = a_{j_i} + t_i p$ para algum $t_i < 0$. Na verdade vamos verificar que $t_i = -1$. De fato, supondo por contradição que $t_i < -1$. Então teríamos

$$a_{p-1} - a_i = a_{j_i} + t_i p + p = a_{j_i} + (t_i + 1)p \notin S.$$

Lembrando que $a_{p-1} = c + p - 1$ temos que $c + p - 1 - a_i \notin S$. Portanto, $c - 1 - (a_i - p) \notin S$. Admitindo que S é simétrico, $(a_i - p) \in S$, o que é uma contradição. Assim, $a_{p-1} - p - a_i = a_{j_i} - p$, isto é, $a_{p-1} - a_i = a_{j_i}$ para cada $i = 0, 1, ..., p-1$. Mas $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{p-1}$. Então

$$a_{p-1} - a_{j_0} < a_{p-1} - a_{j_1} < a_{p-1} - a_{j_2} < \cdots < a_{p-1} - a_{j_{p-1}},$$

o que nos fornece $a_{j_0} > a_{j_1} > a_{j_2} > \cdots > a_{j_{p-1}}$. Portanto, temos que $j_i = p - 1 - i$. Logo, $a_{p-1} = a_i + a_{p-1-i}$.
Reciprocamente, suponha que $a_i + a_{p-1-i} = a_{p-1}$ para todo $i = 1, 2, ..., p-1$. Considere $\alpha \in \mathbb{Z}$ e escreva $\alpha = a_i + tp$ para algum $t \in \mathbb{Z}$ e para algum $i \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$. Então,

$$\begin{aligned} c - 1 - \alpha &= a_{p-1} - p - a_i - tp \\ &= a_{p-1} - a_i - (t+1)p = a_{p-1-i} - (t+1)p \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \alpha \in S &\Leftrightarrow t \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow -(t+1) < 0 \\ &\Leftrightarrow c - 1 - \alpha \notin S. \end{aligned}$$

Isto mostra que S é simétrico.

$\square$

.

Capítulo 3

A simetria do semigrupo $S(f)$

Neste capítulo vamos mostrar que os semigrupos associados a curvas planas irredutíveis algebróides são simétricos utilizando as suas Apéry-sequências.

3.1 O anel local $\mathcal{O}(f)$

Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série formal irredutível de multiplicidade $m \geq 1$. Denotemos por

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(f) = \frac{k[[X,Y]]}{\langle f \rangle} = k[[x,y]]$$

o anel local associado à curva plana irredutível algebróide (f). Aqui estamos denotando por x e y as classes residuais de X e Y módulo o ideal $\langle f \rangle$ gerado por f em $k[[X,Y]]$. O anel $\mathcal{O}$ é de fato um anel local cujo único ideal maximal é $\mathcal{M} = \langle x, y \rangle$. Utilizando o teorema de preparação de Weierstrass, podemos supor que f seja um polinômio de Weierstrass de grau m, isto é,

$$f = f(X,Y) = Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(X)Y + a_m(X)$$

onde cada $a_i(X) \in k[[X]]$ é tal que $ord_X(a_i) \geq i$. Pelo teorema da divisão de Weierstrass temos que

$$\mathcal{O} = \frac{k[[X,Y]]}{\langle f \rangle} \cong \frac{k[[X]][Y]}{\langle f \rangle} \cong k[[x]][y].$$

Segue que,

$$\mathcal{O} \cong k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus ... \oplus k[[x]]y^{m-1}.$$

De fato, dado $h \in k[[X,Y]]$, o teorema da divisão de Weierstrass nos permite escrever,

$$h = qf + r,$$

onde $q \in k[[X,Y]]$, $r \in k[[X]][Y]$ com $r = 0$ ou $gr_Y(r) \leq m-1$. Assim podemos escrever, $r = r(X,Y) = r_0(X) + r_1(X)Y + \cdots + r_{m-1}(X)Y^{m-1}$ e, portanto,

$$\begin{aligned} h(x,y) = \overline{h(X,Y)} &= \overline{q(X,Y)f(X,Y)} + \overline{r(X,Y)} = \overline{r(X,Y)} = r(x,y) \\ &= r_0(x) + r_1(x)y + \cdots + r_{m-1}(x)y^{m-1}. \end{aligned}$$

Logo, $h = h(x,y) \in k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]y^{m-1}$. Daí podemos concluir que

$$\mathcal{O} \cong k[[x]][y] \cong k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]y^{m-1}.$$

A soma é direta pois $\{1, y, ..., y^{m-1}\}$ é linearmente independente sobre $k[[x]]$.

Vamos denotar por K o corpo de frações de $\mathcal{O} = k[[x]][y]$ e $\tilde{\mathcal{O}}$ o fecho inteiro de $\mathcal{O}$ (em K). Assim temos,

$$\begin{aligned} K = k((x,y)) &= k((x))(y) = k((x))[y] \\ &= k((x)) \oplus k((x))y \oplus \cdots \oplus k((x))y^{m-1}, \end{aligned}$$

uma vez que y é algébrico sobre $k((x))$ de grau m.

Observe que $K|k((x))$ é uma extensão finita de grau m. A valorização x-ádica de $k((x))$ (isto é, a valorização v de $k((x))$ tal que $v(x) = 1$) tem um único prolongamento a K, digamos ω, com índice de ramificação m. Sejam $\nu := m\omega$ e t uma variável uniformizante local em ν, isto é, $\nu(t) = 1$. Então,

$$K = k((t)) = k((x)) \oplus k((x))t \oplus \cdots \oplus k((x))t^{m-1}$$

Assim,

$$k[[t]] = k[[x]] \oplus k[[x]]t \oplus \cdots \oplus k[[x]]t^{m-1},$$

uma vez que

$$\omega(a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_{m-1}(x)t^{m-1}) = min_{0 \leq i \leq m-1}\{\omega(a_i(x)) + \tfrac{i}{m}\},$$

e vale a igualdade pois os valores $\omega(a_i(x)) + \dfrac{i}{m}$ são distintos.
Assim $\mathcal{O} = k[[x]][y]$ e além disso y é inteiro sobre $k[[x]]$ pois é raiz do polinômio de Weierstrass f com coeficientes em $k[[x]]$. Assim, $\tilde{\mathcal{O}}$ é também o fecho inteiro de $k[[x]]$ em K.

Afirmação 1

$$\tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$$

Demonstração: Como $k[[t]] = k[[x]] \oplus k[[x]]t \oplus \cdots \oplus k[[x]]t^{m-1}$ sabemos que a extensão $k[[x]] \mid k[t]]$ é inteira e $\tilde{\mathcal{O}}$ contém todos elementos que são inteiros sobre $k[[x]]$ então $k[[t]] \subset \tilde{\mathcal{O}}$ (Veja [Fu], proposição 3, página 14). Por outro lado, se $g \in \tilde{\mathcal{O}}$, então g é inteiro sobre $k[[x]]$, isto é, g é raiz de um polinômio mônico com coeficientes em $k[[x]]$, isto é, existem um inteiro positivo s e elementos $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{s-1}(x)$ em $k[[x]]$ tais que

$$g^s + a_{s-1}(x)g^{s-1} + \cdots + a_1(x)g + a_0(x) = 0.$$

Assim, $g^s = -(a_{s-1}(x)g^{s-1} + \cdots + a_1(x)g + a_0(x))$ e portanto,

$$\nu(g^s) = \nu(a_{s-1}(x)g^{s-1} + \cdots + a_1(x)g + a_0(x))$$

isto é,

$$\begin{array}{rcl} s\nu(g) & \geq & min\{\nu(a_{s-1}(x)) + (s-1)\nu(g), \ldots, \nu(a_1(x)) + \nu(g), \nu(a_0(x))\} \\ & \geq & min\{(s-1)\nu(g), \ldots, \nu(g), 0\} \end{array}$$

uma vez que $v(a_i(x)) \geq 0$ para todo $i = 0, 1, ..., s-1$. Segue que $\nu(g) \geq 0$ e, portanto $g \in k[[t]]$. Daí concluimos que $\tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$.

□

O diagrama seguinte ilustra a presente situação.

$$\begin{array}{ccc} K & = & k((x))[y] = k((t)) \\ | & & \\ \tilde{\mathcal{O}} & = & k[[t]] \\ | & \leftarrow & \text{inteira} \\ \mathcal{O} & = & k[[x]][y] \\ | & \leftarrow & \text{inteira} \\ k[[x]] & & \end{array}$$

Proposição 6 *Utilizando as notações anteriores, temos,*

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} < \infty$$

Demonstração: Basta observar que $\mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$ e tanto $\tilde{\mathcal{O}}$ quanto $\mathcal{O}$ são $k[[x]]$-módulos livres de posto m.

3.2 O Semigrupo de (f) e Valorizações

A ligação entre o semigrupo associado à curva irredutível algebróide (f) com a valorização ν de $\tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$ é feita pelo teorema seguinte.

Teorema 5 *Seja (f) uma curva algebróide irredutível e $g \in k[[X,Y]]$ uma série qualquer não nula. Seja ν a valorização discreta normalizada de $\tilde{\mathcal{O}}$. Então*

$$I(g,f) = \nu(\bar{g})$$

onde $\bar{g} = g + (f)$ é o resíduo de g módulo (f) em $\mathcal{O}$.

Demonstração: Vamos considerar a aplicação $\nu : \tilde{\mathcal{O}} = k[[t]] \to \mathbb{Z}$. Como $\bar{g} \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$, podemos escrever

$$\bar{g} = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots,$$

onde $a_j \in k, a_n \neq 0$. Então $\nu(\bar{g}) = \nu(a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} + \cdots) = n$ já que $\nu(t) = 1$. Segue que, $\bar{g} = t^n \cdot u$ onde u é inversível em $k[[t]]$, uma vez que $a_n \neq 0$. Portanto,

$$dim_k \left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}} \right) = dim_k \left(\frac{k[[t]]}{\bar{g}k[[t]]} \right) = dim_k \left(\frac{k[[t]]}{t^n k[[t]]} \right) = n = \nu(\bar{g}).$$

Por outro lado,

$$\frac{k[[X,Y]]}{\langle f,g \rangle} \cong \frac{\frac{k[[X,Y]]}{\langle f \rangle}}{\frac{\langle f,g \rangle}{\langle f \rangle}} \cong \frac{\mathcal{O}}{\langle g \rangle} \cong \frac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}}.$$

Como $I(f,g) = dim_k \frac{k[[X,Y]]}{\langle f,g \rangle}$, segue que $I(f,g) = dim_k \frac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}}$. Então, para mostrar que $I(f,g) = \nu(\bar{g})$ basta mostrar que

$$dim_k \frac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}} = dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}}.$$

Para isto, considere o diagrama seguinte,

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{O}} \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \dfrac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}} \arrow[r] & \dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}} \arrow[r] & C \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

onde as aplicações entre os anéis das duas linhas repetidas no diagrama são multiplicações por $\bar{g}, N$ e C são respectivamente o núcleo e o co-núcleo da aplicação entre os quocientes na última coluna do diagrama. Segue do Lema da Serpente (Veja [AM], proposição 2.10) que a seguinte sequência é exata:

$$0 \to N \to \frac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}} \to \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}} \to C \to 0.$$

Olhando para a última sequência vertical do diagrama e lembrando que $dim_k \dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} < \infty$, segue que $dimN + dim\dfrac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}} - dim\dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}} + dimC = 0$. Mas

$dim_k N = dim_k C$ e portanto, $dim_k \dfrac{\mathcal{O}}{\bar{g}\mathcal{O}} = dim_k \dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\bar{g}\tilde{\mathcal{O}}}$. Isto conclui a demonstração. $\square$

O teorema acima nos permite expressar o semigrupo da curva plana algebróide (f) em termos da valorização ν, a saber,

$$S(f) = \nu(\mathcal{O} - \{0\}).$$

3.3 $k[[x]]$-bases de $\mathcal{O}(f)$ & Apéry-sequências

Vamos motivar o próximo resultado através de um exemplo. Já caracterizamos os semigrupos que ocorrem como semigrupos associados a curvas planas irredutíveis algebróides de multiplicidade $m = 2$. Vamos agora caracterizar os semigrupos que ocorrem como semigrupos associados a uma curva plana irredutível de multiplicidade $m = p$ primo. Como vamos utilizar uma parametrização de Puiseux, neste exemplo vamos supor que a característica do corpo k seja zero. Após uma possível mudança de coordenadas e multiplicação por inversível podemos supor f um polinômio (irredutível) de Weierstrass, digamos,

$$f = f(X,Y) = Y^p + a_1(X)Y^{p-1} + \cdots + a_{p-1}(X)Y + a_p(X)$$

Novamente, por uma mudança (linear) de coordenadas, podemos eliminar o termo de grau $p-1$, e então $a_1(X) = 0$. Assim, se $y_1, y_2, ..., y_p$ são as raízes distintas de f (num fecho algébrico de $k((x))$) então:

$$a_1(X) = y_1 + y_2 + \cdots + y_p = 0$$

Neste caso podemos escrever $f(X,Y) = \prod (Y - y_j)$ e cada raíz pode ser expressa sob a forma:

$$y_j = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \zeta_j^{m_i} x^{\frac{m_i}{p}}$$

onde os ζ_j percorrem as raízes p-ésimas da unidade. Observe que

$$0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_p = \sum_{i=1}^{\infty} c_i[\zeta_1^{m_i} + \zeta_2^{m_i} + \cdots + \zeta_p^{m_i}]x^{\frac{m_i}{p}},$$

portanto, $c_i[\zeta_1^{m_i} + \zeta_2^{m_i} + \cdots + \zeta_p^{m_i}] = 0$ para todo $i \geq 1$. Assim, para cada i tal que $c_i \neq 0$ temos necessariamente que $\zeta_1^{m_i} + \zeta_2^{m_i} + \cdots + \zeta_p^{m_i} = 0$. Mas para cada is tal que o m_i é múltiplo de p, isto é, $m_i = \lambda_i p$ para algum $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, teremos $\zeta_j^{m_i} = (\zeta_j^p)^{\lambda_i} = 1^{\lambda_i} = 1$ para todo $j \in \{1, 2, ..., p\}$. Assim, se $c_i \neq 0$ então o expoente m_i correspondente não é múltiplo de p, ou seja, $MDC(p, m_i) = 1$.

Por outro lado, utilizando uma parametrização de Newton-Puiseux para (f) (veja [He], página 40), digamos,

$$\begin{cases} x &= x(t) = t^p \\ y &= y(t) = c_1 t^{m_1} + c_2 t^{m_2} + \cdots, \end{cases}$$

podemos calcular a multiplicidade de intersecção de (f) com uma curva algebróide (g) qualquer:

$$I(f, g) = \nu(\bar{g}) = ord_t(g(x(t), y(t))).$$

Utilizando o teorema da divisão de Weierstrass podemos supor g da seguinte forma:

$$g = g(X, Y) = b_0(X) + b_1(X)Y + \cdots + b_{p-1}(X)Y^{p-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \nu(\bar{g}) = ord_t(g(x, y)) \\ &= ord_t(b_0(x) + b_1(x)y + \cdots + b_{p-1}y^{p-1}) \\ &\geq min_{0 \leq i \leq p-1}\{ord_t(b_i(x) + iord_t(y)\}. \end{aligned}$$

Ora, sabemos que $ord_t(b_i(x)) + i \cdot ord_t(y) \neq ord_t(b_j(x)) + j \cdot ord_t(y)$ para todo $i \neq j$ então vale a igualdade:

$$\begin{aligned} I(f, g) &= min_{0 \leq i \leq p-1}\{ord_t(b_i(x) + iord_t(y)\} \\ &= min_{0 \leq i \leq p-1}\{\alpha_i \nu(x) + i\nu(y)\} \\ &= min_{0 \leq i \leq p-1}\{\alpha_i p + im_1\} \end{aligned}$$

Segue que $S(f) = \langle p, m_1 \rangle$, isto é, $S(f)$ é um semigrupo gerado por dois elementos (primos entre si). Em particular, é um semigrupo simétrico.

$\square$

Um olhar mais cuidadoso na argumentação acima nos revela que, na verdade

$$0 < \nu(y) < \nu(y^2) < \cdots < \nu(y^{p-1})$$

é a Apéry-sequência de $S(f)$. Isto foi importante (mesmo sem ter sido usado explicitamente) para o sucesso da argumentação, uma vez que os elementos da Apéry-sequência são distintos módulo p. Seria ótimo que, mesmo a multiplicidade m não sendo um número primo, quando tomássemos

$$\nu(1) = 0,\ \nu(y),\ \nu(y^2), \ldots,\ \nu(y^{m-1}),$$

estes valores nos fornecessem a Apéry-sequência de $S(f)$. Infelizmente isto nem sempre ocorre. No entanto, é possível fazer uma ligeira modificação na $k[[x]]$-base de $\mathcal{O}$, $\{1, y, y^2, \ldots, y^{m-1}\}$, de forma a obter esta propriedade. Este é o resultado do próximo teorema que foi obtido primeiramente no caso de característica zero por *A. Azevedo* em sua tese de doutorado ([Az]) e posteriormente para característica arbitrária por *G. Angermüller* ([An]).

Teorema 6 *(Angermuller e Azevedo) Sejam (f) uma curva plana irredutível algebróide, $\mathcal{O} = k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]y^{m-1}$ o seu anel local, $m = \nu(x)$ e*

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1}$$

a Apéry-sequência do semigrupo $S = S(f)$ em relação a m. Considere

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_{m-1}$$

a cadeia de submódulos de $\mathcal{O}$ definida por

$$M_i = k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]y^i.$$

Então,

(a) Para cada $i = 1, 2, ..., m-1$ existe um elemento $z_i \in y^i + M_{i-1}$ tal que $\nu(z_i) \notin \nu(M_{i-1})$.

(b) Definindo $z_0 = 1$ temos que

$$\mathcal{O} = k[[x]]z_0 \oplus k[[x]]z_1 \oplus k[[x]]z_2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]z_{m-1}.$$

(c) $\nu(z_i) + \nu(z_{j-i}) \leq \nu(z_j)$ para todos i,j tais que $0 \leq i \leq j \leq m-1$. Em particular,

$$0 = \nu(z_0) < \nu(z_1) < \nu(z_2) < \cdots < \nu(z_{m-1}).$$

(d) $\nu(z_i) = a_i$, *isto é,* $\nu(z_0) < \nu(z_1) < \nu(z_2) < \cdots < \nu(z_{m-1})$ *é a Apéry-sequência de S(f) em relação a m.*

Demonstração: (a) Suponhamos, por contradição, que para algum índice i, $1 \leq i \leq m-1$, e para todo $\alpha \in y^i + M_{i-1}$ se tenha $\nu(\alpha) \in \nu(M_{i-1})$. Vamos obter uma seqüência $x_n \in M_{i-1}$ da seguinte forma. Defina $x_0 = 0 \in M_{i-1}$. Suponha $x_n \in M_{i-1}$ já construído satisfazendo $\nu(y^i - x_n) \geq n$ e queremos construir $x_{n+1} \in M_{i-1}$ tal que $\nu(y^i - x_{n+1}) \geq n+1$. Como $y^i - x_n \in M_{i-1}$ então $\nu(y^i - x_n) \in \nu(M_{i-1})$. Isto significa que existe $\tilde{x}_n \in M_{i-1}$ tal que

$$\nu(y^i - x_n) = \nu(\tilde{x}_n) \geq n.$$

Denotando $\nu(\tilde{x}_n)$ por s_n temos que $s_n \geq n$. Escreva

$$\begin{array}{rcl} y^i - x_n & = & c_n t^{s_n} + c_{n+1} t^{s_n+1} + \cdots \\ & \text{e} & \\ \tilde{x}_n & = & d_n t^{s_n} + d_{n+1} t^{s_n+1} + \cdots \end{array}$$

com $c_r, d_r \in k$ para todo $r \geq n$, $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$. Multiplicando $\tilde{x}_n$ por $\dfrac{c_n}{d_n}$ e subtaindo o resultado de $y^i - x_n$ obtemos

$$y^i - x_n - \frac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n = (c_{n+1} - \frac{c_n}{d_n} d_{n+1}) t^{s_n+1} + \cdots,$$

e então

$$\nu(y^i - x_n - \frac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n) = \nu((c_{n+1} - \frac{c_n}{d_n} d_{n+1}) t^{s_n+1} + \cdots) \geq s_n + 1 \geq n+1.$$

Basta tomar $x_{n+1} = x_n + \dfrac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n$ e teremos, $\nu(y^i - x_{n+1}) \geq n+1$. Assim a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para y^i (na métrica induzida pela valorização ν). Mas, para todo n, $x_n \in M_{i-1}$, que é completo e portanto fechado e, sendo assim, necesariamente $y^i \in M_{i-1}$. Mas isto é uma contradição, uma vez que M_{i-1} só contem potências de y até $i-1$. Portanto, para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1$, deve existir $z_i \in y^i + M_{i-1}$ tal que $\nu(z_i) \notin \nu(M_{i-1})$.

(b) A prova aqui é imediata. Além disso, note que na verdade temos mais:

$$M_i = k[[x]]z_0 \oplus k[[x]]z_1 \oplus k[[x]]z_2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]z_i$$

Vamos verificar isto por indução em i. Já sabemos que

$$M_i = k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus \cdots \oplus k[[x]]y^i,$$

e pelo item anterior $z_i \in y^i + M_{i-1}$, ou seja, $z_i = y^i + m_{i-1}$ para algum $m_{i-1} \in M_{i-1}$. A igualdade é trivial para $i = 0$. Suponha então $i > 0$ e que $M_{i-1} = k[[x]]z_0 \oplus k[[x]]z_1 \oplus k[[x]]z_2 \oplus \cdots \oplus k[[x]]z_{i-1}$. Obtemos então

$$\begin{aligned} M_i &= M_{i-1} \oplus k[[x]]y^i \\ &= k[[x]]z_0 \oplus k[[x]]z_1 \oplus \cdots \oplus k[[x]]z_{i-1} \oplus k[[x]](z_i - m_{i-1}) \\ &= k[[x]]z_0 \oplus k[[x]]z_1 \oplus \cdots \oplus k[[x]]z_{i-1} \oplus k[[x]]z_i \end{aligned}$$

(c) Seja $s \in 1, 2, ..., m-1$, escreva $z_s = y^s + \xi_s$, com $\xi_s \in M_{i-1}$. Assim temos, para cada $0 \leq i \leq j \leq m-1$,

$$\begin{aligned} z_i z_{j-i} &= (y^i + \xi_i)(y^{j-i} + \xi_{j-i}) \\ &= y^j + y^i\xi_{j-i} + y^{j-i}\xi_i + \xi_i\xi_{j-i} \\ &= y^i\xi_{j-i} + y^{j-i}\xi_i + \xi_i\xi_{j-i} + y^j - \xi_j + \xi_j \\ &= \xi + z_j, \text{ onde } \xi \in M_{j-1}. \end{aligned}$$

Assim, $\xi = z_i z_{j-i} - z_j$. Logo, $\nu(\xi) \geq min\{\nu(z_i z_{j-i}), \nu(z_j)\}$.

• Se $min\{\nu(z_i z_{j-i}), \nu(z_j)\} = \nu(z_i z_{j-i})$ então, naturalmente,

$$\nu(z_i z_{j-i}) = \nu(z_i) + \nu(z_{j-i}) \leq \nu(z_j).$$

• Se, por outro lado, $min\{\nu(z_i z_{j-i}), \nu(z_j)\} = \nu(z_j)$ então, $\nu(\xi) \geq \nu(z_j)$. Afirmamos que $\nu(\xi) \neq \nu(z_j)$. De fato, pelo item (a) temos que $z_j \in y^j + M_{j-1}$ e $\nu(z_j) \notin \nu(M_{j-1})$. Mas $\xi \in M_{j-1}$ logo $\nu(\xi) \neq \nu(z_j)$. Assim,

$$\nu(z_i z_{j-i}) = \nu(z_i) + \nu(z_{j-i}) = \nu(z_j)$$

(d) Primeiramente observe que se $i \neq j$ então $\nu(z_i)$ não é congruente a $\nu(z_j)$ módulo m. De fato, suponha por contradição que, $\nu(z_i) \equiv \nu(z_j)\ mod\ m$ com $i \neq j$. Podemos supor $i < j$, então $\nu(z_j) = \nu(z_i) + \lambda m$ para algum $\lambda \in \mathbb{Z}$. Pelo item c) $\lambda \geq 0$. Logo

$$\nu(z_j) = \nu(z_i) + \lambda\nu(x) = \nu(z_i) + \nu(x^\lambda) = \nu(z_i \cdot x^\lambda) \in \nu(M_{j-1}).$$

Mas isto é uma contradição, pois $\nu(z_j) \notin \nu(M_{j-1})$. Além disso, temos que

$$\nu(\mathcal{O} - \{0\}) = \bigcup_{i=0}^{m-1} (\nu(z_j) + m\mathbb{N}).$$

De fato, trivialmente temos a inclusão

$$\bigcup_{i=0}^{m-1} (\nu(z_j) + m\mathbb{N}) \subset \nu(\mathcal{O} - \{0\}).$$

Reciprocamente, se $n \in \nu(\mathcal{O} - \{0\})$ então

$$n = \nu(a_0(x) + a_1(x)z_1 + \cdots + a_{m-1}(x)z_{m-1}) \text{ com } a_i(x) \in k[[x]].$$

Como os valores $\nu(a_i(x)z_i) = \nu(a_i(x)) + \nu(z_i)$ são todos distintos, segue que

$$n = min_{0 \leq i \leq m-1}\{\nu(a_i(x)) + \nu(z_i)\}.$$

Segue que $n \in \nu(z_j + m\mathbb{N})$ para algum $j \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$, o que mostra a outra inclusão. Portanto, $0 < \nu(z_1) < \nu(z_2) < \cdots < \nu(z_{m-1})$ é a Apéry-sequência de S em relação a m.

□

Note que não estamos supondo no teorema acima que o elemento x seja transversal a (f), isto é, não estamos supondo que m seja a multiplicidade de (f). No caso em que x seja um tal elemento transversal a (f), isto é, X não seja tangente a (f) em $(0, 0)$, então $m = \nu(x)$ é a multiplicidade de (f). Neste caso, o item *(d)* nos diz que $\nu(z_0) < \cdots < \nu(z_{m-1})$ é a Apéry-sequência do semigrupo $S(f)$.

Ainda no caso em que $m = \nu(x)$ é a multiplicidade de (f), a condição dada no item *(c)*: $\nu(z_i) + \nu(z_{j-i}) \leq \nu(z_j)$ foi denominda por A. Azevedo em [Az] a condição do semigrupo $S(f)$ crescer fortemente. Naturalmente, independentemente de um semigrupo S ser ou não o semigrupo associado a uma curva plana algebróide, podemos dizer que S *cresce fortemente* se sua Apéry-seqüência satisfaz esta condição, a saber,

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \text{ sempre que } 0 \leq i + j \leq m - 1.$$

Na verdade, A. Azevedo ([Az]), no caso de característica zero, e posteriormente G. Angermuller ([An]), no caso geral, mostraram que a condição de um semigrupo crescer fortemente é equivalente dizer que ele é semigrupo associado a uma curva plana irredutível algebróide.

3.4 Semigrupos e Explosões

Como antes, seja (f) uma curva irredutível algebróide de multiplicidade m. Após uma eventual mudança linear de coordenadas podemos supor que a tangente de (f) seja (Y) (em (0,0)) e que f seja um polinômio de Weierstrass.

Definição 8 *Nas condições colocadas acima, a explosão de (f) é a curva algebróide definida pela série em $k[[X,Z]]$:*

$$f^{(1)}(X,Z) = \frac{1}{X^m} f(X,XZ).$$

Assim, escrevendo $f = f(X,Y) = Y^m + a_1(x)Y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(X)Y + a_m(X)$, onde $ord_X(a_j(X)) > j$, a explosão de (f) é:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(X,Z) &= \tfrac{1}{X^m}[(XZ)^m + a_1(x)(XZ)^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(X)(XZ) + a_m(X)] \\ &= Z^m + a_1(X)\frac{Z^{m-1}}{X} + \cdots + a_{m-1}(X)\frac{Z}{X^{m-1}} + \frac{a_m(X)}{X^m} \\ &= Z^m + \tilde{a}_1(X)Z^{m-1} + \cdots + \tilde{a}_{m-1}(X)Z + \tilde{a}_m(X). \end{aligned}$$

Como f é irredutível é fácil verificar que $(f^{(1)})$ também é irredutível. De fato, suponha por contradição que $f^{(1)} = f^{(1)}(X,Z)$ seja redutível. Então existem $g(X,Z), h(X,Z)$, não inversíveis, tais que $f^{(1)}(X,Z) = g(X,Z)h(X,Z) = \dfrac{1}{X^m}f(X,XZ)$. Então $f(X,XZ) = X^m g(X,Z)h(X,Z)$ e logo,

$$f(X,Y) = X^m g\left(X,\frac{Y}{X}\right) h\left(X,\frac{Y}{X}\right) = X^r g\left(X,\frac{Y}{X}\right) X^s h\left(X,\frac{Y}{X}\right),$$

onde $r = gr_Y(g(X,Y))$, $s = gr_Y(h(X,Y))$ e $r+s=m$. Concluimos então que f é redutível.

Vamos denotar por $\mathcal{O}^{(1)}$ o anel local da curva algebróide irredutível $(f^{(1)})$, isto é, $\mathcal{O}^{(1)} = \dfrac{k[[X,Z]]}{(f^{(1)})}$. Temos a inclusão dos anéis locais:

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = \frac{k[[X,Y]]}{(f)} \quad &\to \quad \frac{k[[X,Z]]}{(f^{(1)})} = \mathcal{O}^{(1)} \\ h(X,Y) + fk[[X,Y]] \quad &\mapsto \quad h(X,XZ) + f^{(1)}k[[X,Z]] \end{aligned}$$

Naturalmente $\mathcal{O}^{(1)}$ está contido no corpo de frações de $\mathcal{O}$, que estamos denotando por K. Assim temos:

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}^{(1)} \subset K.$$

Se denotarmos por S e $S^{(1)}$ os semigrupos associados a (f) e $(f^{(1)})$ respectivamente então a mesma valorização ν de K nos fornece o semigrupo $S^{(1)} = \nu(\mathcal{O}^{(1)} - \{0\})$ e, além disso, $S \subset S^{(1)}$. Portanto,

$$c^{(1)} \leq c \text{ e } m^{(1)} \leq m$$

onde $c^{(1)}$ e $m^{(1)}$ são respectivamente o condutor de $\mathcal{O}^{(1)}$ e a multiplicidade de $(f^{(1)})$. Devido a esta inclusão dos anéis locais, se denotarmos as classes residuais módulo (f) de X e Y respectivamente por $x = X + f^{(1)}k[[X,Y]]$ e $y = Y + f^{(1)}k[[X,Y]]$, temos:

$$k[[x,y]] \subset k\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right] \subset k((x,y)) = k((x))[y]$$

Observe que o homomorfismo sobrejetor $h(X,Z) \mapsto h\left(x, \frac{y}{x}\right)$ de $k[[X,Z]]$ em $k\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right]$ tem como núcleo o ideal $f^{(1)}k[[X,Z]] \subset k[[X,Z]]$. De fato, se $d = gr(h(X,Y))$ e $h\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0$ então $x^d h\left(x, \frac{y}{x}\right) \in k[[x]][y] = \mathcal{O}$, isto é, $x^d h\left(x, \frac{y}{x}\right) = 0$ em $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}^{(1)}$, ou seja, $x^d h(x,z) = 0$ em $\mathcal{O}^{(1)}$. Assim, existe $g(X,Z) \in k[[X,Z]]$ tal que $X^d h(X,Z) = g(X,Z) \cdot f^{(1)}(X,Z)$. Como $f^{(1)}(X,Z)$ não é um divisor de X^d, temos que $h(X,Z)$ é um múltiplo de $f^{(1)}(X,Z)$ em $k[[X,Z]]$ e, portanto $h(x,z) = 0$ em $\mathcal{O}^{(1)}$, e isto mostra que $h(X,Z) \in f^{(1)}k[[X,Z]]$.

Portanto, temos

$$k\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right] \cong \frac{k[[X,Z]]}{(f^{(1)})} = \mathcal{O}^{(1)}.$$

3.5 Apéry-sequências e explosões

Uma pergunta natural é a seguinte. O que ocorre com a Apéry-sequência de $S(f)$ quando realizamos uma explosão? A resposta está no seguinte teorema.

Teorema 7 *Sejam (f) uma curva plana irredutível algebróide de multiplicidade m e $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1}$ a Apéry-sequência de $S = S(f)$. Seja ainda $a_0^{(1)} < a_1^{(1)} < a_2^{(1)} < \cdots < a_{m-1}^{(1)}$ a Apéry-sequência de $S^{(1)} = S(f^{(1)})$ em relação a m (m pode não ser a multiplicidade de $f^{(1)}$). Então,*

$$a_i^{(1)} = a_i - im \textit{ para todo } i \in \{0, 1, ..., m-1\}.$$

Demonstração: Para o caso em que $m = 1$ o resultado é trivial, $a_0^{(1)} = a_0$. Vamos então supor $m > 1$ e $\nu(x) = m$. Pelo teorema 6, existe $z_1 \in y + k[[x]]$ tal que $\nu(z_1) = a_1$. Escreva $y = z_1$ (então $\nu(y) = a_1$). Neste caso, já sabemos que

$$\mathcal{O}^{(1)} = k\left[\left[x, \frac{y}{x}\right]\right].$$

Assim, pelo teorema anterior, para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ temos,

$$M_i^{(1)} = k[[x]] + k[[x]]\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots + k[[x]]\left(\frac{y}{x}\right)^i$$

e existem elementos

$$z_i^{(1)} \in \left(\frac{y}{x}\right)^i + M_{i-1}^{(1)} \text{ com } \nu(z_i^{(1)}) = a_i^{(1)}.$$

Defina

$$z_i = x^i z_i^{(1)} \text{ ou seja } z_i^{(1)} = \frac{z_i}{x^i}$$

Então,

$$z_i \in y^i + k[[x]] + k[[x]]y + k[[x]]y^2 + \cdots + k[[x]]y^{i-1} = y^i + M_{i-1}.$$

Claramente temos que $\nu(z_i) = \nu(x^i z_i^{(1)}) = \nu(x^i) + \nu(z_i^{(1)}) = a_i^{(1)} + im$ e, portanto, $\nu(z_i)$ não é congruente a $\nu(z_j)$ módulo m se $i \neq j$. Queremos mostrar que $\nu(z_i) - im = a_i^{(1)} = a_i - im$. Para isto basta mostrar que $\nu(z_i) = a_i$ para cada $i \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$. Observe que $\nu(z_0) = 0 = a_0$. Vamos mostrar que se $\nu(z_j) = a_j$ para todo $j \in \{0, 1, 2, ..., i-1\}$ então $\nu(z_i) = a_i$. Pelo teorema 6 acima, basta verificar que $\nu(z_i) \notin \nu(M_{i-1})$. Suponha, por contradição, que

$$\nu(z_i) \in \nu(M_{i-1}) = \bigcup_{j=0}^{i-1} (a_j + m\mathbb{N}).$$

Então $\nu(z_i) = a_j + m\mathbb{N} = \nu(z_j) + m\mathbb{N}$ para algum $0 \leq j < i$ e, portanto, $\nu(z_j) \equiv \nu(z_i) \bmod m$, o que é um contradição.

$\square$

Corolário 1 *Com as mesmas notações anteriores, vale para os condutores de S e $S^{(1)}$:*

$$c^{(1)} = c - m(m-1)$$

Demonstração: Pela definição do condutor temos:

$$\begin{aligned} c^{(1)} &= a^{(1)}_{m-1} - m + 1 \\ &= a_{m-1} - (m-1)m - m + 1 \\ &= a_{m-1} - m + 1 - m(m-1) \\ &= c - m(m-1) \end{aligned}$$

□

Corolário 2 *Seja (f) uma curva plana irredutível algebróide. Então o semigrupo associado a (f) é um semigrupo simétrico.*

Capítulo 4

O Teorema de Gorenstein

4.1 O caso local do Teorema de Gorenstein

Inicialmente vamos fazer a ligação entre o ideal condutor associado ao anel local de uma curva plana irredutível algebróide e o condutor (numérico) do seu semigrupo.

Definição 9 *Sejam $R \subset R'$ anéis comutativos com unidade. O ideal condutor de R em R' é definido por*

$$\mathcal{C} = \{x \in R \mid xR' \subset R\}.$$

É imediato verificar que $\mathcal{C}$ é um ideal de R (e também de R'). Na verdade, $\mathcal{C}$ é o "maior" ideal de R' contido em R.

Proposição 7 *Seja (f) uma curva plana irredutível algebróide. Como antes, seja $\mathcal{O} = k[[x,y]]$ o seu anel local e $\tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$ o seu fecho inteiro (no corpo de frações de $\mathcal{O}$). Seja ainda $\mathcal{C}$ o condutor de $\mathcal{O}$ em $\tilde{\mathcal{O}}$. Então,*

(a) $\mathcal{C} \neq (0)$.

(b) $\mathcal{C} = t^c\tilde{\mathcal{O}}$, *onde c é o condutor do semigrupo $S(f)$.*

Demonstração: (a) $\tilde{\mathcal{O}}$ é um $\mathcal{O}$-módulo finitamente gerado, digamos

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}x_1 + \mathcal{O}x_2 + \cdots + \mathcal{O}x_r, \text{ com cada } x_i \in \tilde{\mathcal{O}}.$$

No entanto o corpo de frações de $\tilde{\mathcal{O}}$ é o mesmo corpo de frações de $\mathcal{O}$ que é dado por $K = k((x))[y]$. Então, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$ podemos escrever

$$x_i = \frac{c_i}{d_i}, \text{ com } c_i, d_i \in \mathcal{O} \text{ e } d_i \neq 0.$$

Assim temos que

$$\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}\frac{c_1}{d_1} + \mathcal{O}\frac{c_2}{d_2} + \cdots + \mathcal{O}\frac{c_r}{d_r} = \mathcal{O}\frac{c_1'}{d} + \mathcal{O}\frac{c_2'}{d} + \cdots + \mathcal{O}\frac{c_r'}{d},$$

onde d é um múltiplo comum de $d_1, d_2, \ldots, d_r$ e $c_1', c_2', \ldots, c_r'$ são os novos numeradores. Logo, $d\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ e, portanto, $d \in \mathcal{C}$, o que nos garante $\mathcal{C} \neq \{0\}$.

(b) Pelo item (a) já sabemos que $\mathcal{C}$ é um ideal não nulo de $\mathcal{O} = k[[t]]$. Então existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{C} = t^\alpha \mathcal{O}$. Basta verificar que este α é o condutor de $S(f)$. Primeiramente observe que se $n \geq \alpha$ então

$$t^n = t^\alpha \cdot t^{n-\alpha} \in t^\alpha \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}.$$

Logo, $n = \nu(t^n) \in \nu(\mathcal{O} - \{0\}) = S(f)$. Para concluir que α é o condutor basta verificar que $\alpha - 1 \notin S(f)$. Suponha, por contradição, que $\alpha - 1 \in S(f)$. Então existe $h \in \mathcal{O}$ tal que $\alpha - 1 = \nu(h)$. Então podemos escrever

$$h = h_{\alpha-1}t^{\alpha-1} + h_\alpha t^\alpha + \cdots \quad \text{com} \quad h_i \in k \quad \text{e} \quad h_{\alpha-1} \neq 0.$$

Portanto, $h = h_{\alpha-1}t^{\alpha-1} + \tilde{h}$ onde $\tilde{h} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{O}$. Segue que

$$h_{\alpha-1}t^{\alpha-1} = h - \tilde{h} \in \mathcal{O} \quad \text{pois} \quad h, \tilde{h} \in \mathcal{O} \quad \text{e logo} \quad t^{\alpha-1} \in \mathcal{O}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} t^{\alpha-1}\tilde{\mathcal{O}} &= t^{\alpha-1}k[[t]] = t^{\alpha-1}(k + kt + kt^2 + \cdots) \\ &= kt^{\alpha-1} + kt^\alpha + kt^{\alpha+1} + \cdots \\ &= kt^{\alpha-1} + t^\alpha k[[t]] \subset \mathcal{O} \end{aligned}$$

O que nos permite concluir que $t^{\alpha-1} \in \mathcal{C}$. Mas isto é uma contradição, pois $\mathcal{C} = t^\alpha \tilde{\mathcal{O}}$. Portanto α é o condutor de $S(f)$. □

Teorema 8 *(A. Azevedo ([Az])) Sejam (f) uma curva plana irredutível algebróide, $\mathcal{O}$ o seu anel local e $\tilde{\mathcal{O}}$ o seu fecho inteiro (no corpo de frações de $\mathcal{O}$). Sejam ainda $\mathcal{C}$ o ideal condutor de $\mathcal{O}$ em $\tilde{\mathcal{O}}$ e $S = S(f) = \nu(\mathcal{O} - \{0\})$ o semigrupo associado a (f). Então,*

$$\#\{lacunas\ de\ S\} = \#(\mathbb{N} - S) = dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}.$$

Demonstração: Sabemos que $\tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$. Seja $L = \{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ o conjunto das lacunas de S, que podemos supor ordenado, digamos, $r_1 < r_2 < \cdots < r_s$.

Vamos denotar por $\bar{h}$ a imagem do elemento $h \in \tilde{\mathcal{O}}$ no quociente $\dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$, isto é, $\bar{h} = h + \mathcal{O}$. Seja c o condutor numérico de S e considere os elementos de S menores do que c, isto é, os elementos de $S \cap [0, c-1]$. Já sabemos que S é um semigrupo simétrico (corolário 2, página 44), portanto pela proposição 4 (página 24), $\#(S \cap [0, c-1]) = \#L = s = \dfrac{c}{2}$. Podemos supor que este conjunto esteja ordenado, digamos, $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_s < c-1$. Todos os números naturais entre n_s e c (excluindo obviamente n_s e c) são lacunas. Como $n_s \in S$, existe $g_s \in \mathcal{O} = k[[t]]$ tal que $n_s = \nu(g_s)$. Dividindo eventualmente g_s por uma constante não nula podemos escrever

$$g_s = t^{n_s} + \beta_1^s t^{r_1^s} + \beta_2^s t^{r_2^s} + \cdots + \beta_{\lambda_s}^s t^{r_{\lambda_s}^s} + h_s^1$$

onde, para cada $i = 1, 2, ..., \lambda_s$, temos que $\beta_i^s \in k$ e $r_i^s \notin S$, isto é, $r_i^s \in L$ (é uma lacuna de S). Além disso, $n_s < r_1^s < r_2^s < \cdots < r_{\lambda_s}^s < c$ e $\nu(h_s^1) \geq c$. Olhando no quociente módulo $\mathcal{O}$, como $h_s^1 \in \mathcal{O}$, temos que $\overline{h_s^1} = 0$ e então, podemos escrever

$$0 = \overline{g_s} = \overline{t^{n_s}} + \beta_1^s \overline{t^{r_1^s}} + \cdots + \beta_{\lambda_s}^s \overline{t^{r_{\lambda_s}^s}}$$

isto é,

$$\overline{t^{n_s}} = -\beta_1^s \overline{t^{r_1^s}} - \beta_2^s \overline{t^{r_2^s}} - \cdots - \beta_{\lambda_s}^s \overline{t^{r_{\lambda_s}^s}}.$$

Como $n_{s-1} \in S$, existe $g_{s-1} \in \mathcal{O}$ tal que $n_{s-1} = \nu(g_{s-1})$. Analogamente ao argumento anterior, dividindo eventualmente g_{s-1} por uma constante não nula podemos escrever

$$g_{s-1} = t^{n_{s-1}} + \beta_1^{s-1} t^{r_1^{s-1}} + \beta_2^{s-1} t^{r_2^{s-1}} + \cdots + \beta_{\lambda_{s-1}}^{s-1} t^{r_{\lambda_{s-1}}^{s-1}} + h_{s-1}$$

onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, \lambda_{s-1}$, temos que $\beta_i^{s-1} \in k$ e $r_i^{s-1} \notin S$, isto é, $r_i^{s-1} \in L$. Além disso, $n_{s-1} < r_1^{s-1} < r_2^{s-1} < \cdots < r_{\lambda_{s-1}}^{s-1} < n_s$ e vale $\nu(h_{s-1}) \geq n_s$. Olhando no quociente módulo $\mathcal{O}$, neste caso podemos ter $h_{s-1} \notin \mathcal{O}$ e então $\overline{h_{s-1}} \neq 0$, no entanto, temos que

$$\overline{h_{s-1}} \in \langle \overline{t^{n_s}}, \overline{t^{r_1^s}}, ..., \overline{t^{r_{\lambda_s}^s}} \rangle \subset \langle \overline{t^{r_1^s}}, ..., \overline{t^{r_{\lambda_s}^s}} \rangle,$$

e então,

$$\overline{t^{n_{s-1}}} = -\beta_1^{s-1} \overline{t^{r_1^{s-1}}} - \beta_2^{s-1} \overline{t^{r_2^{s-1}}} - \cdots - \beta_{\lambda_{s-1}}^{s-1} \overline{t^{r_{\lambda_{s-1}}^{s-1}}} - \overline{h_{s-1}}.$$

Segue que,

$$\overline{t^{n_{s-1}}} \in \langle \overline{t^{r_1^{s-1}}}, \overline{t^{r_2^{s-1}}}, ..., \overline{t^{r_{\lambda_{s-1}}^{s-1}}}, \overline{h_{s-1}} \rangle \subset \langle \overline{t^{r_1^{s-1}}}, \overline{t^{r_2^{s-1}}}, ..., \overline{t^{r_{\lambda_{s-1}}^{s-1}}} \overline{t^{r_1^s}}, \overline{t^{r_2^s}}, ..., \overline{t^{r_{\lambda_s}^s}} \rangle.$$

Este argumento se repete e, por recorrência, obtemos que

$$\overline{t^{n_j}} \in \langle \overline{t^{r_1}}, \overline{t^{r_2}}, \ldots, \overline{t^{r_s}} \rangle \text{ para todo } n_j \in [0, c-1] \cap S.$$

Isto mostra que $\{\overline{t^{r_1}}, \overline{t^{r_2}}, ..., \overline{t^{r_s}}\}$ gera $\dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$ sobre k. Então podemos concluir que

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} \leq \#L.$$

Agora basta mostrar que o conjunto $\{\overline{t^{r_1}}, \overline{t^{r_2}}, ..., \overline{t^{r_s}}\}$ é k-linearmente independente. Para isto, suponhamos que

$$a_1\overline{t^{r_1}} + a_2\overline{t^{r_2}} + \cdots + a_s\overline{t^{r_s}} = 0 \text{ com cada } a_i \in k.$$

Mas isto significa que $a_1 t^{r_1} + a_2 t^{r_2} + \cdots + a_s t^{r_s} \in \mathcal{O}$. Como temos que $r_1 < r_2 < \cdots < r_s$, se $a_1 \neq 0$, então $\nu(a_1 t^{r_1} + a_2 t^{r_2} + \cdots + a_s t^{r_s}) = r_1 \in S$. Mas isto é uma contradição, uma vez que r_1 é uma lacuna de S. Portanto $a_1 = 0$. Indutivamente concluimos que $a_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, s$. Assim, $\{\overline{t^{r_1}}, \overline{t^{r_2}}, \ldots, \overline{t^{r_s}}\}$ é uma base de $\dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$ sobre k e isto conclui a demonstração do teorema.

□

Teorema 9 *(Caso local do Teorema de Gorenstein) Sejam (f) uma curva plana irredutível algebróide, $\mathcal{O}$ o seu anel local e $\tilde{\mathcal{O}}$ o seu fecho inteiro no corpo de frações de $\mathcal{O}$. Sejam ainda $\mathcal{C}$ o ideal condutor de $\mathcal{O}$ em $\tilde{\mathcal{O}}$ e c o condutor (numérico) do semigrupo $S = S(f) = \nu(\mathcal{O} - \{0\})$. Então*

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}$$

Demonstração: Naturalmente temos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}}$ e portanto temos,

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{C}} = dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} + dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}. \text{ Mas, } dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{C}} = dim_k \frac{k[[t]]}{t^c k[[t]]} = c$$

e, pelo teorema 8,

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = \#\{\text{lacunas de } S\} = \#(\mathbb{N} - S) = \frac{c}{2}.$$

O teorema segue dessas duas últimas igualdades. Além disso, obtemos

$$dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}} = \frac{c}{2} \text{ e } dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = \frac{c}{2}.$$

Observação 8

Na verdade, o Teorema de Gorenstein (caso local) é equivalente à simetria do semigrupo $S(f)$, pois se soubéssemos que $dim_k \dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = dim_k \dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}$ então teríamos que $\#(\mathbb{N} - S(f)) = \dfrac{c}{2}$ e, pela caracterização de semigrupos simétricos, teríamos que $S(f)$ seria simétrico.

4.2 O caso semi-local do Teorema de Gorenstein

Nesta secção vamos considerar curvas algebróides redutíveis que surgem em singularidades de curvas algébricas planas. Neste caso, na nomenclatura clássica tais curvas algebróides são chamadas de ramos da curva no ponto singular considerado. Do ponto de vista algébrico a situação é a seguinte. Seja C uma curva algébrica plana afim irredutível definida por um polinômio (irredutível) $f = f(X,Y) \in k[X,Y]$, onde k é um corpo algebricamente fechado. Seja $P \in C$ um ponto singular. Após uma eventual mudança afim de coordenadas podemos supor $P = (0,0)$. Como antes, para estudar as propriedades locais de C em P olhamos o polinômio f no anel $k[[X,Y]]$ das séries formais. Aqui estamos interessados no caso em que f se decompõe em $k[[X,Y]]$, digamos, $f = f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$, onde $f_j \in k[[X,Y]]$ é irredutível para cada $j = 1,2,\ldots,n$. Sabemos que os fatores irredutíveis de f em $k[[X,Y]]$ são todos não associados dois a dois, isto é, para todo elemento inversível $u \in k[[X,Y]]$ temos que $f_i \neq u \cdot f_j$ se $i \neq j$ (Veja por exemplo [Za], Teorema 31, página 320). Vamos utilizar as notações seguintes.

$$R = \left(\frac{k[X,Y]}{(f)}\right)_{(X,Y)} = \left\{\frac{g}{h};\ g,h \in \frac{k[X,Y]}{(f)}),\ h \notin (X,Y)\right\}$$

e

$$\mathcal{O} = \frac{k[[X,Y]]}{(f)} = k[[x,y]] \text{ o completamento de } R.$$

R é o anel local de C em $P = (0,0)$ e $\mathcal{O}$ é o seu completamento na topologia (x,y)-ádica. Por abuso de linguagem, vamos chamar $\mathcal{O}$ também de anel local de (f). Como os f_i são dois a dois não associados então $\mathcal{O}$ não tem elementos nilpotentes.

Para cada $1 \leq j \leq n$ vamos denotar $\mathcal{O}_j = \dfrac{k[[X,Y]]}{(f_j)}$ que é um domínio pois cada um dos f_j é irredutível em $k[[X,Y]]$. O seguinte diagrama ilustra a situação que estamos considerando.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & \tilde{\mathcal{O}} & \simeq & \tilde{\mathcal{O}}_1 & \times & \tilde{\mathcal{O}}_2 & \times\cdots\times & \tilde{\mathcal{O}}_n \\
 & / & & & & & & & \\
\tilde{R} & & | & & | & & | & & | \\
 & & & & & & & & \\
| & & \mathcal{O} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_1 & \times & \mathcal{O}_2 & \times\cdots\times & \mathcal{O}_n \\
 & / & & & & & & & \\
R & & | & & | & & | & & | \\
 & & \mathcal{C} & & \mathcal{C}_1 & & \mathcal{C}_2 & & \mathcal{C}_n
\end{array}
$$

onde a inclusão $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$ é dada por:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{O} = \dfrac{k[[X,Y]]}{(f)} & \hookrightarrow & \dfrac{k[[X,Y]]}{(f_1)} \times \dfrac{k[[X,Y]]}{(f_2)} \times \cdots \times \dfrac{k[[X,Y]]}{(f_n)} \\
g + fA & \to & (g + f_1A, \;\; g + f_2A, \cdots\cdots, \;\; g + f_nA)
\end{array}
$$

e estamos denotando aqui $A = k[[X,Y]]$ e os demais objetos do diagrama são:

- $\tilde{R}$ é o fecho inteiro de R,
- $\tilde{\mathcal{O}}$ é o fecho inteiro de $\mathcal{O}$ e o completamento de $\tilde{R}$,
- para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, $\tilde{\mathcal{O}}_j$ é o fecho inteiro de $\mathcal{O}_j$,
- para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{C}_j$ é o condutor de $\mathcal{O}_j$ em $\tilde{\mathcal{O}}_j$,
- $\mathcal{C}$ é o condutor de $\mathcal{O}$ em $\tilde{\mathcal{O}}$.

É imediato verificar que $\tilde{\mathcal{O}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{O}}_n$.
Também, daqui em diante usaremos a notação: $h_j = \dfrac{f}{f_j} = \dfrac{f_1 \cdot f_2 \cdots f_n}{f_j}$.
Consideremos em $\mathcal{O} = \dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$ o ideal gerado pelos elementos $h_1, h_2, \ldots, h_n$ módulo (f). Este ideal de $\mathcal{O}$ fica identificado, via a inclusão dada acima, com o ideal $h_1\mathcal{O}_1 \times h_2\mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{O}_n$ de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$. Denotemos por $\mathcal{C}'$ o condutor de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$. Temos então a proposição seguinte.

Proposição 8 *O condutor de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$ é*

$$\mathcal{C}' = h_1\mathcal{O}_1 \times h_2\mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{O}_n.$$

Demonstração: $\mathcal{C}' = \{g \in \mathcal{O} \mid g \cdot (\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n) \subset \mathcal{O}\}$. Já temos que $h_1\mathcal{O}_1 \times h_2\mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{O}_n \subset \mathcal{C}'$. Seja $g \in A = k[[X,Y]]$. Então, $g + fA = (g + f_1A, g + f_2A, \ldots, g + f_nA)$. Se $g + fA \in \mathcal{C}'$ então:

$$\begin{array}{rcl} (g+fA)(1,0,\ldots,0) & = & (g+f_1A, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{O} \\ (g+fA)(0,1,\ldots,0) & = & (0, g+f_2A, \ldots, 0) \in \mathcal{O} \\ & \vdots & \\ (g+fA)(0,0,\ldots,1) & = & (0,0,\ldots, g+f_nA) \in \mathcal{O} \end{array}$$

Assim, para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ existe $g_j \in A$ tal que:

$$(0, \ldots, g + f_jA, \ldots, 0) = (g_j + f_1A, \ldots, g_j + f_nA).$$

Portanto, necessariamente, $g_j = \prod\limits_{k \neq j} f_k \cdot \alpha_j$, para algum $\alpha_j \in k[[X,Y]]$.

Logo, $g + f_jA = \left(\prod\limits_{k \neq j} f_k \cdot \alpha_j\right) + f_jA = h_j \cdot \alpha_j + f_jA$. Isto mostra que $\mathcal{C}' \subset h_1\mathcal{O}_1 \times h_2\mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{O}_n$.

□

Vamos denotar por $\mathcal{C}''$ o condutor de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$ em $\tilde{\mathcal{O}}$.

Proposição 9 *O condutor de $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n$ em $\tilde{\mathcal{O}}$ é*

$$\mathcal{C}'' = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n,$$

Demonstração: Pela definição de condutor temos,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}'' & = & \{z \in (\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n) \mid z \cdot \tilde{\mathcal{O}} \subset (\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n)\} \\ & = & \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{O} \mid (z_1, \ldots, z_n) \cdot \tilde{\mathcal{O}} \subset (\mathcal{O}_1 \times \cdots \times \mathcal{O}_n)\} \\ & = & \{z_1 \in \mathcal{O}_1 \mid z_1 \cdot \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_1\} \times \cdots \times \{z_n \in \mathcal{O}_n \mid z_n \cdot \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_n\} \\ & = & \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \end{array}$$

□

Sejam R, S e T anéis tais $R \subset S \subset T$. Sejam ainda $\mathcal{C}_1$ o condutor de R em S, $\mathcal{C}_2$ o condutor de S em T e $\mathcal{C}_3$ o condutor de R em T. Então, é fácil verificar que $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_3$. No entanto, em geral não vale a igualdade, isto é, em geral não vale: $\mathcal{C}_1 \cdot \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3$.

Na nossa situação temos então que $\mathcal{C}' \cdot \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$, isto é,

$$h_1 \cdot \mathcal{C}_1 \times h_2 \cdot \mathcal{C}_2 \times \cdots \times h_n \cdot \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C},$$

e também vale a inclusão contrária. Isto é o que afirma a proposição seguinte.

Proposição 10 *Utilizando as notações acima, temos que*

$$\mathcal{C} = h_1 \cdot \mathcal{C}_1 \times h_2 \cdot \mathcal{C}_2 \times \cdots \times h_n \cdot \mathcal{C}_n.$$

Demonstração: Pelos comentários anteriores, é suficiente mostrar a inclusão $\mathcal{C} \subset h_1 \cdot \mathcal{C}_1 \times h_2 \cdot \mathcal{C}_2 \times \cdots \times h_n \cdot \mathcal{C}_n$. Seja $g \in A$ e suponha que $g + fA \in \mathcal{C}$. Pela definição de condutor, $(g + fA) \cdot \tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$, temos que $g + fA \in \mathcal{C}'$, e portanto,

$$(g + f_1 A, g + f_2 A, \ldots, g + f_n A) \in h_1 \mathcal{O}_1 \times h_2 \mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n \mathcal{O}_n.$$

Então, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $\xi_j \in A$ e então $\xi_j + f_j A \in \mathcal{O}_j$ tal que,

$$(g + f_1 A, g + f_2 A, \ldots, g + f_n A) = (h_1 \cdot \xi_1 + f_1 A, h_2 \cdot \xi_2 + f_2 A, \ldots, h_n \cdot \xi_n + f_n A)$$

Precisamos mostrar que $\xi_j + f_j A \in \mathcal{C}_j = \{x \in \mathcal{O}_j \mid x \cdot \tilde{\mathcal{O}}_j \subset \mathcal{O}_j\}$, isto é, $(\xi_j + f_j A)\alpha_j \in \mathcal{O}_j$, para cada $\alpha_j \in \tilde{\mathcal{O}}_j$. Mas $g + fA \in \mathcal{C}$ e isto significa que $(h_1 \cdot \xi_1 + f_1 A, h_2 \cdot \xi_2 + f_2 A, \ldots, h_n \cdot \xi_n + f_n A) \in \mathcal{C}$. Em particular,

$$(h_1 \cdot \xi_1 + f_1 A, h_2 \cdot \xi_2 + f_2 A, \ldots, h_n \cdot \xi_n + f_n A) \cdot (0 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{O}}_j \times \cdots \times 0) \subset \mathcal{O}.$$

Logo, para cada $\alpha_j \in \tilde{\mathcal{O}}_j$ temos que $(0, \ldots, (h_j \cdot \xi_j + f_j A)\alpha_j, \ldots, 0) \in \mathcal{O}$. Segue que existe algum $g_j \in A$ tal que

$$(0, 0, \ldots, (h_j \cdot \xi_j + f_j A)\alpha_j, \ldots, 0) = (g_j + f_1 A, g_j + f_2 A, \ldots, g_j + f_n A).$$

Assim, se $i \neq j$ então g_j é múltiplo de f_i e, portanto, g_j é múltiplo de $f_1 f_2, \ldots f_{j-1} f_{j+1} \ldots f_n = h_j$, isto é, existe $g'_j \in A$ tal que $g_j = h_j . g'_j$. Comparando a componente j na igualdade acima, obtemos

$$(h_j \cdot \xi_j + f_j A)\alpha_j = g_j + f_j A = h_j \cdot g'_j + f_j A.$$

Como cada $\tilde{\mathcal{O}}_j$ é um domínio, podemos cancelar h_j, que é não nulo em $\tilde{\mathcal{O}}_j$, temos que $(\xi_j + f_j A)\alpha_j = g'_j + f_j A \in \mathcal{O}_j$ e, como α_j é arbitrário em $\tilde{\mathcal{O}}_j$, podemos concluir que $(\xi_j + f_j A)\tilde{\mathcal{O}}_j \subset \mathcal{O}_j$. Então $\xi_j + f_j A \in \mathcal{C}_j$. Assim, $g + fA \in h_1 \cdot \mathcal{C}_1 \times h_2 \cdot \mathcal{C}_2 \times \cdots \times h_n \cdot \mathcal{C}_n$, isto conclui a prova.

$\square$

O Teorema de Gorenstein no caso local (Teorema 9, página 48) nos afirma que:

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}_j}{\mathcal{O}_j} = dim_k \frac{\mathcal{O}_j}{\mathcal{C}_j} = \frac{c_j}{2}, \text{ para cada } 1 \leq j \leq n.$$

Vejamos que desta informação local podemos tirar que o caso semi-local também é válido, a saber,

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}.$$

Para provar isto olhamos o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_1 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{O}}_n & \simeq & \tilde{\mathcal{O}} \\
| & & \\
\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n & & \\
| & & \\
\mathcal{O} & & \\
| & & \\
\mathcal{C}' & = & h_1 \cdot \mathcal{O}_1 \times h_2 \cdot \mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n \cdot \mathcal{O}_n \\
| & & \\
\mathcal{C} & = & h_1 \cdot \mathcal{C}_1 \times h_2 \cdot \mathcal{C}_2 \times \cdots \times h_n \cdot \mathcal{C}_n
\end{array}$$

Basta então mostrar que:

1. $dim_k \left(\dfrac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n} \right) = dim_k \left(\dfrac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}} \right).$

2. $dim_k \left(\dfrac{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n}{\mathcal{O}} \right) = dim_k \left(\dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'} \right).$

Vejamos a demonstração de 1:

$$
\begin{aligned}
dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n} &= dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}_1 \times \tilde{\mathcal{O}}_2 \times \cdots \times \tilde{\mathcal{O}}_n}{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n} \\
&= dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}_1}{\mathcal{O}_1} + dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}_2}{\mathcal{O}_2} + \cdots + dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}_n}{\mathcal{O}_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}_j}{\mathcal{O}_j} = \sum_{j=1}^{n} dim_k \frac{\mathcal{O}_j}{\mathcal{C}_j} = \sum \frac{c_j}{2}
\end{aligned}
$$

A penúltima igualdade é consequência do caso local (Teorema 9, página 48).

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
dim_k \frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}} &= dim_k \frac{h_1\mathcal{O}_1 \times h_2\mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{O}_n}{h_1\mathcal{C}_1 \times h_2\mathcal{C}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{C}_n} \\
&= dim_k \frac{h_1\mathcal{O}_1}{h_1\mathcal{C}_1} + dim_k \frac{h_2\mathcal{O}_2}{h_2\mathcal{C}_2} + \cdots + dim_k \frac{h_n\mathcal{O}_n}{h_n\mathcal{C}_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} dim_k \frac{\mathcal{O}_j}{\mathcal{C}_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{2}.
\end{aligned}
$$

A última igualdade é consequência do isomorfismo de k espaços vetoriais:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_j & \longrightarrow & h_j\mathcal{O}_j \\
g + f_j w & \longmapsto & h_j g + f_j w
\end{array}
$$

Vejamos agora a demonstração de 2:

Basta mostrar que: $dim_k \dfrac{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n}{\mathcal{C}'} = 2 \cdot dim_k \dfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'}$. Temos

$$
\begin{aligned}
dim_k \frac{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n}{\mathcal{C}'} &= dim_k \frac{\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2 \times \cdots \times \mathcal{O}_n}{h_1\mathcal{O}_1 \times h_2\mathcal{O}_2 \times \cdots \times h_n\mathcal{O}_n} \\
&= dim_k \frac{\mathcal{O}_1}{h_1\mathcal{O}_1} + dim_k \frac{\mathcal{O}_2}{h_2\mathcal{O}_2} + \cdots + dim_k \frac{\mathcal{O}_n}{h_n\mathcal{O}_n} \\
&= \sum_{j=1}^{n} dim_k \frac{\mathcal{O}_j}{h_j\mathcal{O}_j} = \sum_{j=1}^{n} I(f_j, h_j)
\end{aligned}
$$

A última igualdade segue de uma das caracterizações da multilicidade de interseção. Podemos escrever esta soma como segue:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} I(f_j,h_j) &= I(f_1,f_2\cdots f_n)+I(f_2,f_1f_3\cdots f_n)+\cdots+I(f_n,f_1\cdots f_{n-1})\\ &= 2\cdot I(f_1,f_2)+2\cdot I(f_1,f_3)+\cdots+2\cdot I(f_{n-1},f_n)\\ &= 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n} I(f_i,f_j).\end{aligned}$$

Queremos demonstrar que $dim_k\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'}=\sum_{1\le i<j\le n} I(f_i,f_j)$, isto é,

$$dim_k\frac{k[[X,Y]]}{(h_1,h_2,\ldots,h_n)}=\sum_{1\le i<j\le n} I(f_i,f_j).$$

Vamos demonstrar isto por indução em n. Para $n=2$ a afirmação é óbvia pois, $dim_k\frac{k[[X,Y]]}{(h_1,h_2)}=I(f_1,f_2)$, uma vez que, neste caso, $h_1=f_2$ e $h_2=f_1$. Agora suponha, por hipótese de indução, que a igualdade acima seja verdadeira para $n-1$ elementos irredutíveis $f_j\in k[[X,Y]]$. Em particular, ela é verdadeira para $f_2,f_3,\ldots,f_n$, isto é:

$$dim_k\frac{k[[X,Y]]}{(f_3f_4\cdots f_n,f_2f_4\cdots f_n,\ldots,f_2f_3\cdots f_{n-1})}=\sum_{2\le i<j\le n} I(f_i,f_j).$$

Considere o ideal $\mathcal{I}=(h_1,...,h_n)$ de $k[[X,Y]]$ e observe que $\mathcal{I}\subset(f_1,h_1)$. Considere também o isomorfismo:

$$\frac{\frac{k[[X,Y]]}{\mathcal{I}}}{\frac{(f_1,h_1)}{\mathcal{I}}}\simeq\frac{k[[X,Y]]}{(f_1,h_1)}.$$

Então, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que:

$$dim_k\frac{k[[X,Y]]}{\mathcal{I}}=dim_k\frac{(f_1,h_1)}{\mathcal{I}}+dim_k\frac{k[[X,Y]]}{(f_1,h_1)},$$

e, pelas propriedades da multiplicidade de interseção temos:

$$\begin{aligned}dim_k\frac{k[[X,Y]]}{(f_1,h_1)} &= I(f_1,h_1)=I(f_1,f_2)+I(f_1,f_3)+\cdots+I(f_1,f_n)\\ &= \sum_{k=2}^{n} I(f_1,f_k).\end{aligned}$$

Para concluir a prova por indução basta verificar que

$$dim_k \frac{(f_1, h_1)}{\mathcal{I}} = \sum_{2 \leq i < j \leq n} I(f_i, f_j).$$

Isso segue dos isomorfismos abaixo:

$$\frac{(f_1, h_1)}{\mathcal{I}} \to \frac{f_1 k[[X, Y]]}{(h_2, h_3, \cdots, h_n)} \to \frac{k[[X, Y]]}{(\frac{h_1}{f_2}, \frac{h_1}{f_3}, \cdots, \frac{h_1}{f_n})},$$

onde o inverso do último isomorfismo é a multiplicação por f_1. Basta agora ultilizar a hipótese de indução e temos a igualdade que queríamos.

Acabamos de demonstrar o

Teorema 10 *(Teorema de Gorenstein no caso semi-local) Sejam* (f) *uma curva plana algebróide,* $\mathcal{O}$ *o seu anel local e* $\tilde{\mathcal{O}}$ *o fecho inteiro de* $\mathcal{O}$ *em seu anel total de frações. Seja ainda* $\mathcal{C}$ *o ideal condutor de* $\mathcal{O}$ *em* $\tilde{\mathcal{O}}$*. Então*

$$dim_k \frac{\tilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}} = dim_k \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}}\ .$$

Referências Bibliográficas

[An] G. Angermüller, *Die Wertehalbgrappe einer ebenen irreduciblen algebroiden Kurve*, Math. Zeitschr. **153**, 267-282, (1977).

[AM] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, University of Oxford, (1969).

[Ap] R. Apéry, *Sur les branches superlineaires des courbes algébriques*, C.R. Acad. Sci. Paris *222*, 1198-1200 (1946).

[Az] A. Azevedo, *The Jacobian Ideal of a Plane Algebroid Curve*, PhD Thesis, Purdue, (1967).

[Fu] W. Fulton, *Algebraic Curves: an Introduction to Algebraic Geometry*, Benjamin, New York, (1969).

[Ga] A. Garcia, *Semigrupos Associados a Pontos Singulares de Curvas Algébricas Planas*, tese de doutorado, IMPA, RJ, (1980).

[Go] D. Gorenstein, *An Arithmetic Theory of Adjoint Plane Curves*, Trans. Amer. Math soc. **72**, 414-437, (1952).

[He] A. Hefez, *Irreducible Plane Curve Singularities*, Real and Complex Singularities, Lecture Notes in Pure Mathematics, **232**,1-120, Marcel Dekker, (2003).

[St] H. Stichtenoth, *Algebraic Function Fields and Codes*, Universitext. Springer-Verlag, Berlim, (1993).

[Za] O. Zariski, *Commutative Algebra*, Vol. 2, Van Nostrand, (1960).