

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Diego César Monteiro de Mendonça

**QUANTIZAÇÃO DE LAÇOS NO
MODELO BF $2+1$ DIMENSIONAL COM
CAMPOS DE MATÉRIA**

VITÓRIA
2015

DIEGO CÉZAR MONTEIRO DE MENDONÇA

**Quantização de Laços no Modelo BF 2+1
Dimensional com Campos de Matéria**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. Olivier Piguet

VITÓRIA
2015

“Quantização de Laços no Modelo BF 2+1 Dimensional com Campos de Matéria”

DIEGO CÉZAR MONTEIRO DE MENDONÇA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Ciências Físicas.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2015

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Olivier Piguet
Departamento de Física - UFV
Orientador

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis
Departamento de Física - UFES

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
Departamento de Física - UFES

Prof. Dr. Nelson Pinto Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Prof. Dr. Oswaldo Monteiro Del Cima
Departamento de Física - UFV

Para Alexandra.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado a capacidade e muita determinação para vencer dificuldades e terminar este trabalho.

Ao meu Professor Orientador Dr. Olivier Piguet, por tudo que fez e faz por mim. Nestes pouco mais de seis anos em que nos conhecemos e desde então trabalhamos juntos, aprendi a ser um professor, um cientista e também uma pessoa melhor. É marcante para mim perceber que, após tanto tempo de convívio, Olivier nunca deixou de me surpreender. É uma grande honra para mim ser seu aluno e seu amigo.

Queria agradecer ao pessoal do Programa de Pós-Graduação em Física (PPGFis) da UFES pelo apoio constante nesta longa jornada, em especial na reta final, e a seu coordenador Prof. Dr. Sérgio Vitorino e o conjunto do corpo docente pela compreensão com os percalços na defesa desta tese.

Queria também agradecer a todos do departamento de Física da UFV, em especial ao Prof. Dr. Daniel Franco, pela hospitalidade que a mim e a meu Professor Orientador foi oferecida, e pela liberdade para continuarmos a desenvolver este trabalho em suas dependências.

À minha esposa Alexandra por seu apoio incondicional, o seu amor é a minha energia e sua força de vontade que me dá forças para ser cada vez melhor. Este trabalho é dedicado a você.

À minha família, pelo apoio e por terem me educado desde sempre, muito obrigado.

Aos meus colegas de turma da pós-graduação na UFES e de graduação na UFMG pelo privilégio da sua companhia e pelo esforço e perseverança ao longo de nossa formação.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo financiamento que viabilizou este trabalho.

“The measure of greatness in a scientific idea is the extent to which it stimulates thought and opens up new lines of research.”

Paul A.M. Dirac

Resumo

O objetivo deste trabalho é explorar as simetrias e desenvolver a dinâmica associada a um modelo do tipo BF com campos escalares acoplados, tanto a nível clássico quanto a nível quântico. Para tal, desenvolvem-se ferramentas matemáticas apropriadas para se tratar em geral uma teoria de calibre topológica do tipo Yang-Mills, para formular uma ação covariante e estudar suas simetrias via o método de quantização canônica de Dirac, também conhecido como método hamiltoniano vinculado. Este método é desenvolvido extensamente para os casos abeliano e não-abeliano do nosso modelo, e em seguida quantiza-se o caso abeliano via laços para analisar o desenvolvimento da mecânica quântica nestas teorias de calibre descrevendo a base para nossos funcionais de estado, chamada de rede de cargas, bem como o cálculo de alguns observáveis associados a nossos estados cinemáticos e físicos.

Abstract

The main goal of this work is to explore the symmetries and develop the dynamics associated to a BF model with coupled scalar fields, at the classical and quantum levels. To achieve this we develop the proper mathematical tools to study a topological Yang-Mills gauge theory in general, to formulate a covariant action and study its symmetries via Dirac's canonical quantization method, also known as constrained hamiltonian method. This method is extensively developed for the abelian and non-abelian cases of our model, which then we quantize the abelian model in order to analyze the development of the quantum mechanics on these gauge theories, describing the basis for our state functions which we call charge networks, as well as the calculation of some observables related to our kinematic and physical states.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 13 |
| 2 | Introdução ao Modelo BF | 16 |
| 2.1 | Definições e Convenções | 17 |
| 2.1.1 | Índices | 17 |
| 2.1.2 | A Derivada Covariante | 17 |
| 2.1.3 | A curvatura de Yang-Mills F | 19 |
| 2.2 | Construindo o modelo BF | 19 |
| 2.3 | As invariâncias de calibre da teoria | 20 |
| 2.3.1 | Todas as simetrias de calibre | 21 |
| 2.3.2 | As equações de movimento do modelo BF | 22 |
| 2.4 | O Formalismo Canônico do modelo BF | 23 |
| 2.4.1 | O formalismo lagrangiano do Modelo BF | 24 |
| 2.4.2 | Os vínculos primários | 26 |
| 2.4.3 | A hamiltoniana canônica | 27 |
| 2.4.4 | A estabilidade dos vínculos primários | 28 |
| 2.4.5 | A estabilidade dos vínculos secundários | 30 |
| 2.4.6 | A Hamiltoniana total | 31 |
| 2.4.7 | Os colchetes de Dirac | 32 |
| 2.5 | Os vínculos de primeira classe e a invariância da hamiltoniana | 36 |
| 2.5.1 | A forma final da hamiltoniana | 36 |
| 2.5.2 | As transformações infinitesimais geradas pela hamiltoniana | 36 |
| 2.5.3 | A álgebra dos geradores de transformações | 38 |
| 2.5.4 | Sobre a quantização do modelo BF: O problema do produto escalar | 40 |
| 3 | Modelo BF com Campos de Matéria - Caso Abeliano | 43 |
| 3.1 | Definições e Convenções | 43 |
| 3.1.1 | O Grupo de Calibre $U(1)$ | 43 |
| 3.1.2 | A Derivada Covariante para os campos ϕ | 44 |
| 3.1.3 | A curvatura de Yang-Mills F | 45 |
| 3.1.4 | A densidade escalar | 45 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.2 | Construindo a ação | 46 |
| 3.3 | As invariâncias de calibre | 46 |
| 3.3.1 | Equações de movimento | 48 |
| 3.4 | O Formalismo Canônico do modelo BF + Campos de matéria | 50 |
| 3.4.1 | Os momentos conjugados | 50 |
| 3.4.2 | Sumário da estrutura simplética | 52 |
| 3.5 | Hamiltoniana e Vínculos | 52 |
| 3.5.1 | Estabilidade dos vínculos primários | 54 |
| 3.5.2 | Estabilidade dos vínculos secundários | 61 |
| 3.5.3 | Troca de base dos vínculos | 63 |
| 3.5.4 | A forma final da hamiltoniana | 69 |
| 3.6 | Os vínculos de primeira classe e a invariância da hamiltoniana - Modelo Abelian | 69 |
| 3.6.1 | A álgebra dos geradores de transformações | 72 |
| 4 | Modelo BF com Campos de Matéria - Caso Não-Abeliano | 74 |
| 4.1 | Definições e Convenções | 74 |
| 4.1.1 | O grupo de calibre $SO(n, 3 - n)$ | 74 |
| 4.1.2 | As leis de transformação dos campos independentes | 75 |
| 4.2 | Construindo a ação | 77 |
| 4.2.1 | As Equações de Movimento no caso Não-Abeliano | 78 |
| 4.3 | O Formalismo Canônico no caso Não-Abeliano | 79 |
| 4.3.1 | A Estrutura Simplética | 80 |
| 4.4 | Hamiltoniana e vínculos | 81 |
| 4.4.1 | A estabilidade dos vínculos | 83 |
| 4.4.2 | Sumário dos vínculos remanescentes | 86 |
| 4.4.3 | O argumento geral de estabilidade | 87 |
| 4.5 | Os vínculos de primeira classe e a invariância da hamiltoniana - Caso não-abeliano | 92 |
| 4.5.1 | A álgebra dos geradores de transformações | 94 |
| 5 | Quantização de Laços | 95 |
| 5.1 | Regularização de uma rede versus redes de <i>spin</i> | 95 |
| 5.2 | O espaço de configurações - Caso Abelian | 97 |
| 5.2.1 | Troca de base das variáveis independentes | 98 |
| 5.2.2 | A proposta de quantização do modelo BF com campos de matéria - caso abeliano | 100 |
| 5.3 | As holonomias de A | 101 |
| 5.3.1 | Definições e propriedades das holonomias | 102 |
| 5.3.2 | A transformação de calibre de uma holonomia | 104 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.3.3 | O transporte paralelo | 106 |
| 5.4 | A construção do espaço de Hilbert cinemático | 108 |
| 5.4.1 | Os funcionais cilíndricos | 108 |
| 5.4.2 | O produto escalar de funcionais cilíndricos | 109 |
| 5.5 | A construção de uma base ortonormal | 112 |
| 5.5.1 | O teorema de Peter-Weyl para uma linha | 112 |
| 5.5.2 | A generalização para um grafo qualquer | 113 |
| 5.5.3 | Redes de cargas | 115 |
| 5.6 | A aplicação do vínculo de Gauss | 116 |
| 5.6.1 | A diferenciação de uma holonomia | 116 |
| 5.6.2 | A aplicação de G sobre grafos de um laço | 118 |
| 5.6.3 | Caso de um grafo geral | 118 |
| 5.6.4 | Base de redes de cargas invariante de calibre | 119 |
| 6 | Operadores e Observáveis | 121 |
| 6.1 | Os estados invariantes sobre transformações de calibre - Caso Abelian | 122 |
| 6.2 | A solução local do vínculo de curvatura | 122 |
| 6.2.1 | Caso $\Sigma = \mathbb{R}^2$ | 123 |
| 6.2.2 | Caso $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ - O Operador Fluxo | 124 |
| 6.2.3 | Caso $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, com N pontos singulares | 126 |
| 6.3 | Observáveis | 127 |
| 7 | Conclusões e Perspectivas | 130 |
| A | Revisão de Geometria Diferencial | 132 |
| A.1 | Grupos de Lie | 132 |
| A.1.1 | Alguns grupos de Lie | 133 |
| A.1.2 | A álgebra do grupo $SU(2)$ | 134 |
| A.1.3 | A forma matricial de $g \in SU(2)$ | 135 |
| A.1.4 | Homeomorfismos de $SU(2)$ | 136 |
| A.2 | Formas diferenciais e vetores | 137 |
| A.2.1 | Representação adjunta para formas e vetores | 137 |
| A.2.2 | Formas, vetores e tensores em uma variedade diferenciável | 137 |
| A.2.3 | O espaço tangente T_p e o espaço dual T_p^* | 139 |
| A.2.4 | Multiplicação exterior de formas diferenciais | 141 |
| A.2.5 | Comutadores de formas diferenciais | 143 |
| A.2.6 | Derivação exterior de uma forma | 143 |
| A.2.7 | A Derivada Covariante - Definição e Propriedades | 145 |
| A.2.8 | As identidades de Bianchi | 147 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A.2.9 | Integração de uma forma | 147 |
| A.3 | Outros operadores derivadas | 148 |
| A.3.1 | A derivada interior | 148 |
| A.3.2 | A derivada de Lie | 149 |
| A.4 | Invariância sobre difeomorfismos | 151 |
| A.4.1 | Integrais invariantes | 152 |
| A.4.2 | Regra do Traço | 154 |
| A.4.3 | Regra de Integração por partes | 154 |
| B | Complementos sobre Quantização Canônica | 156 |
| B.1 | Visão geral do método Hamiltoniano | 156 |
| B.1.1 | O formalismo lagrangiano | 157 |
| B.1.2 | A notação simplética | 157 |
| B.1.3 | Sistemas vinculados | 158 |
| B.1.4 | O algoritmo de Dirac-Bergmann | 158 |
| B.1.5 | O princípio da correspondência | 160 |
| B.2 | A quantização de Schrödinger | 161 |
| B.2.1 | A ação de Schrödinger | 161 |
| B.2.2 | O Algoritmo de Dirac-Bergmann | 163 |
| B.2.3 | A classe de um vínculo | 164 |
| B.2.4 | Os colchetes de Dirac | 165 |
| B.3 | Construção do espaço de Hilbert cinemático | 167 |
| B.3.1 | O espaço de fase clássico | 167 |
| B.3.2 | O espaço de Hilbert na MQ | 167 |
| B.3.3 | Um espaço de estados físicos | 169 |

Capítulo 1

Introdução

A centenária teoria da Relatividade Geral (RG) [1–4], que apesar do seu enorme sucesso em prever e explicar fenômenos associados à gravitação, ainda não possui uma versão quântica. Tentativas anteriores de se quantizar a RG por métodos perturbativos mostraram que a teoria resultante não é renormalizável [5], enquanto as primeiras tentativas não-perturbativas de Wheeler e DeWitt [6] tiveram seus sucessos concentrados nos modelos de “minisuperespaço” reduzido dedicados à Cosmologia. Entretanto, progressos notáveis foram feitos nas últimas décadas, especialmente com o formalismo da *Loop Quantum Gravity* (LQG) [7–11] derivado a partir do método hamiltoniano canônico [12] aplicado a uma parametrização particular da RG [11, 13, 14].

A RG como uma teoria independente de fundo (*background*), isto é, com nenhuma geometria de fundo dada *a priori*, é uma teoria com geometria dinâmica e totalmente vinculada. Sua hamiltoniana é definida por uma soma de vínculos responsáveis por gerar as invariâncias de calibre da teoria. A aplicação das técnicas de LQG visa implementar os vínculos da teoria como operadores quânticos em um espaço de Hilbert pré-definido e resolvê-los, encontrando um subespaço para os estados físicos onde agem operadores auto-adjuntos que representam os observáveis da teoria. Alguns vínculos já foram resolvidos, mas um último, chamado de vínculo escalar, ainda não foi completamente resolvido e diversas abordagens para resolvê-lo foram criadas, com a mais popular sendo o formalismo

dos *spin foams*. [7, 15–17]

Em contraste, teorias de gravitação de dimensões mais baixas são bem mais simples de se lidar uma vez que elas podem ser descritas como teorias de calibre topológicas quando não acopladas à matéria [18–22]. No entanto acoplar estas teorias à matéria faz com que elas percam suas propriedades topológicas, exceto em alguns casos especiais onde uma quantização via laços (*loops*) completa e relativamente simples pode ser obtida [23, 24].

O principal objetivo deste trabalho é mostrar que a partir de um modelo de brinquedo (*toy model*) tipo BF [7, 25, 26] 2+1-dimensional, tal como o que foi construído anteriormente em [19], pode-se acoplar uma estrutura que possa representar campos de matéria [8] e desenvolver para este modelo o método de quantização canônica culminando na aplicação das técnicas de LQG, discutindo brevemente a estrutura da teoria quântica obtida por este processo bem como sua dinâmica, e estudar alguns operadores e observáveis dos nossos estados quânticos.

Vale a pena ressaltar que o formalismo da LQG, seja pela via covariante ou pela via canônica como estudado aqui, requer um modelo descrito em termos de conexões e momentos conjugados, o que permite obter representações independentes de fundo para o espaço de Hilbert considerado. A teoria será baseada num modelo topológico de tipo BF, ao qual serão acoplados minimamente campos escalares [27, 28] que farão o papel de matéria topológica, como os que aparecem em um modelo Sigma [29].

No capítulo 2 revisam-se as bases da formulação e construção do modelo BF, cuja principal característica é ser uma teoria de calibre (*gauge theory*) topológica do tipo Yang-Mills (YM) [27, 28], por consequência independente de fundo, isto é, uma teoria independente de métrica. O modelo BF também possui outras propriedades interessantes por ser uma teoria de calibre, como invariância sobre transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos ativos) e invariância sobre transformações de calibre locais associadas ao grupo de calibre da teoria. Focou-se neste trabalho no grupo $U(1)$ ou grupo abeliano como exposto no capítulo 3, e na classe de grupos $SO(n, 3 - n)$ que são grupos não-abelianos, estudados no capítulo 4. Ao acoplar minimamente o modelo BF com os termos de matéria, estudou-

se como este acoplamento afeta as simetrias esperadas para um modelo BF “puro” (sem o acoplamento).

Nos capítulos 3 e 4 estão as principais contribuições deste trabalho, que referem-se ao desenvolvimento do método do formalismo canônico para o modelo BF em 2+1 dimensões com termos de matéria, método que foi proposto por Dirac [12, 30] para resolver sistemas cuja transformada de Legendre não é trivial, por existirem relações entre as coordenadas e os momentos generalizados chamadas de vínculos. A partir dos resultados do formalismo canônico obteve-se as grandezas clássicas (variáveis dinâmicas, vínculos e multiplicadores de Lagrange) que posteriormente se transformam em operadores ou parâmetros de evolução de calibre, verificados para o caso abeliano neste trabalho e em [24] para o caso não-abeliano. Com o método de quantização de laços introduzido no capítulo 5 descreve-se para o caso abeliano um espaço de Hilbert cinemático para estes operadores, derivado do espaço de configurações clássico, e descrevem-se os estados quânticos de maneira análoga ao formalismo das redes de *spin*. [15, 31–33]

Segue no capítulo 6 uma discussão sobre as simetrias que prevalecem na teoria abeliana quântica, isto é, a implementação completa dos vínculos canônicos e como estas simetrias afetam a estrutura da nossa teoria de calibre quantizada, com a discussão de casos onde temos operadores observáveis [34].

Capítulo 2

Introdução ao Modelo BF

O modelo BF é uma teoria de campos topológica que quando quantizada se torna uma teoria quântica de campos topológica. Na sigla BF, como vê-se adiante, F denota a curvatura de uma conexão Yang-Mills A , e B é outro campo forma acoplado de maneira multiplicativa a F . O modelo BF é um *toy model*, ou modelo de brinquedo, devido ao fato de ser uma teoria considerada aqui apenas para estudar a aplicação da quantização de laços em uma teoria de campos independente de fundo.

Observe que a principal razão para se construir a teoria em 2+1 dimensões é que o modelo BF nestas condições representa a RG¹ formulada via o formalismo de primeira ordem [35], feita a escolha do grupo de calibre apropriado (que é o $SO(1, 2)$) e também pela simplificação dos cálculos no procedimento de quantização canônica, desenvolvido em detalhes nas seções seguintes.

Nota: O leitor que não está familiarizado com as notações, conceitos e propriedades da geometria diferencial é convidado a visitar o Apêndice A antes de prosseguir!

¹As associações e analogias entre as duas teorias já foram discutidas em detalhes num trabalho anterior, vide [19].

2.1 Definições e Convenções

2.1.1 Índices

É conveniente adotar uma notação para os índices que aparecem nas variáveis, campos e formas ao longo do texto. A dimensão do espaço-tempo considerada aqui é $D = 2 + 1$:

- Os índices de coordenadas do espaço-tempo são denotados pelas letras gregas (μ, ν, ρ, \dots) assumindo os valores $(0, 1, 2)$ ou $(t, 1, 2)$;
- Os índices de coordenadas puramente espaciais são denotados pelas letras latinas minúsculas (a, b, \dots) assumindo os valores $(1, 2)$;
- Os índices do grupo de calibre G pertencentes aos campos definidos no nosso modelo são denotados pelas letras latinas maiúsculas (I, J, K, \dots) e os valores que estes assumem dependem do grupo G em questão. (Por exemplo, $G = \text{SO}(3)$, $\text{SO}(n, 3-n)$ assumirão valores $(0, 1, 2)$.)

2.1.2 A Derivada Covariante

O modelo BF é uma teoria topológica, possuindo invariância de calibre local sob transformações pertencentes a um grupo de Lie² G . Isto é, dado um campo $\psi(x)$, onde $\psi(x)$ está descrito numa representação R do grupo G :

$$\psi'(x) = R(g(x))\psi(x) \tag{2.1}$$

onde $R(g(x))$ é a matriz que representa os elementos do grupo de calibre nesta representação e os geradores $g \in G$. Também quer-se que a derivada deste campo se transforme da mesma maneira que o campo, o que nos leva à definição da derivada covariante. Com

²Vide apêndice A.1

efeito, de (2.1) tem-se:

$$\partial_\mu \psi'(x) = \partial_\mu \psi(x) R(g(x)) + \psi(x) \partial_\mu R(g(x)).$$

A derivada covariante $D_\mu \psi$ é definida de maneira a se transformar como $(D_\mu \psi(x))' = R(g(x)) D_\mu \psi(x)$. Para tal, se introduz uma conexão $A_\mu \in G$ onde $A_\mu = A_\mu^I R(T_I)$ é a matriz da conexão A na representação base da álgebra de Lie que obedece a relações de comutação:

$$[T_I, T_J] = f_{IJ}^K T_K, \quad (2.2)$$

e que deve se transformar como

$$A'_\mu = R(g^{-1}) \partial_\mu R(g) + R(g^{-1}) A_\mu R(g) \quad (2.3)$$

onde $g^{-1} = g^\dagger$. Toma-se $g = e^\epsilon$ para escrever a transformação infinitesimal de A :

$$\begin{aligned} A'_\mu &= (1 - \epsilon) \partial_\mu \epsilon + (1 - \epsilon) A_\mu (1 + \epsilon) \\ A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu \epsilon + [A_\mu, \epsilon] \\ \delta A_\mu &= \partial_\mu \epsilon + [A_\mu, \epsilon]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Com este resultado tem-se o necessário para definir a derivada covariante e se escrever novamente a equação (2.4), passando da notação matricial para a notação em componentes³:

$$\boxed{(D_\mu \psi)^I = (\delta_J^I \partial_\mu - f_{JK}^I A_\mu^K) \psi^J \equiv D_{\mu J}^I \psi^J} \quad (2.5)$$

onde denota-se o símbolo D_J^I de matriz derivada covariante, ou apenas derivada covariante.

³Ver apêndice A para notações e definições.

Verifica-se para esta definição que $(D_\mu\psi)'$ de fato se transforma de maneira covariante:

$$\begin{aligned} (D_\mu\psi)' &= \partial_\mu R(g)\psi + R(g)\partial_\mu\psi - (\partial_\mu R(g)R(g^{-1}) + R(g)A_\mu R(g^{-1}))R(g)\psi \\ &= \partial_\mu R(g)\psi + R(g)(\partial_\mu\psi - A_\mu\psi) - \partial_\mu R(g)\psi = R(g)(D_\mu\psi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.3 A curvatura de Yang-Mills F

Define-se também a curvatura de Yang-Mills:

$$F_{\mu\nu}^I = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I + f_{JK}^I A_\mu^J A_\nu^K \quad (2.7)$$

que para ser escrita na notação de formas diferenciais toma-se o tensor $F_{\mu\nu}$ de *rank* 2 multiplicado por uma 2-forma e se utiliza a antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$:

$$F = dA + A^2 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.8)$$

Não é difícil mostrar que a atuação do grupo sobre F é a adjunta: $F' = R(g^{-1})FR(g)$. Comparando (2.4) com (2.8), fica evidente que a curvatura F pode ser chamada de derivada da conexão A .

2.2 Construindo o modelo BF

Para se começar a construção do modelo BF no espaço de dimensão $D = 2+1$, é necessário definir os objetos presentes na teoria.

Então têm-se:

- Um grupo de calibre G , G sendo um grupo de Lie;
- A 1-forma conexão A introduzida na seção (2.1.2) ;

- Uma 1-forma B .

Nenhuma métrica foi definida pois o modelo BF é independente de fundo e portanto independente de métricas.

Nota-se que o “ F ” do modelo BF já foi caracterizado na seção anterior, e agora caracteriza-se o campo “ B ”. A ideia por trás da escolha de um modelo do tipo BF é de se ter uma teoria de curvatura nula, isto é, com $F = 0$. Como é necessário construir uma integral invariante sob difeomorfismos, o integrando precisa ser uma 3-forma, logo se deve introduzir na ação um termo multiplicador de Lagrange 1-forma sobre F que também possa ser definido no espaço tangente dual $T_P^*(\mathcal{M})$, para a princípio garantir esta condição de invariância.

Quer-se que nossa ação seja também invariante de calibre, então se B é uma forma que se transforma na representação adjunta como $B' = R(g^{-1})BR(g)$, o produto $B \wedge F$ poderá ser escrito como invariante de calibre e de difeomorfismos da seguinte maneira⁴:

$$S_{BF} = \text{Tr} \int_{\mathcal{M}_3} B \wedge F(A) \quad (2.9)$$

onde \mathcal{M}_3 é a variedade tridimensional do espaço-tempo. Nota-se que os campos A, B e $F(A)$ estão representados aqui na forma de matrizes.

2.3 As invariâncias de calibre da teoria

A ação (2.9) foi construída invariante de calibre e de difeomorfismos. Ver-se-á a seguir que a ação possui mais uma invariância local. Para demonstrar tal fato, todas as invariâncias de calibre do sistema deverão ser escritas.

⁴Na seção A.4.2 estão definidas as propriedades do traço de formas diferenciais.

2.3.1 Todas as simetrias de calibre

O primeiro conjunto de transformações que deixa a ação invariante já é conhecido, são as transformações do tipo Yang-Mills, na forma infinitesimal:

$$\text{Transformações do 1º tipo} \begin{cases} \delta A = d\omega + [A, \omega] \\ \delta B = [B, \omega]. \end{cases} \quad (2.10)$$

O segundo conjunto de transformações vem da identidade de Bianchi $DF = 0$ (que podem ser vistas na seção A.2.8):

$$\text{Transformações do 2º tipo} \begin{cases} \delta A = 0 \\ \delta B = D\eta = d\eta + [A, \eta]. \end{cases} \quad (2.11)$$

Repare que se B é uma 1-forma η vai ser uma 0-forma, isto é, η tem a paridade oposta à de B . Deve-se ter cuidado com o comutador generalizado $[A, \eta]$ nesta situação, pois este é um comutador graduado⁵. Verifica-se a invariância da ação sobre este segundo conjunto de transformações:

$$\delta \text{Tr} \int BF = \text{Tr} \int \delta BF = \text{Tr} \int D\eta F = - \text{Tr} \int \eta DF + \overbrace{\text{Tr} \int d(\eta F)}{=0} \quad (2.12)$$

onde a regra de integração por partes que está mostrada no apêndice A.4.3 foi aplicada.

A teoria possui outras invariâncias além das já mostradas, como a invariância por difeomorfismos, isto é, sob as transformações:

$$\text{Transformações de difeomorfismos} \begin{cases} \delta A = \mathcal{L}_\xi A \\ \delta B = \mathcal{L}_\xi B. \end{cases} \quad (2.13)$$

As transformações (2.13) são óbvias, mas é interessante ver que elas são consequência das duas invariâncias de calibre definidas acima [36–38]. Discutiremos melhor estas transformações na seção 2.5.2.

⁵Vide seção A.2.5.

2.3.2 As equações de movimento do modelo BF

Agora analisa-se as equações de movimento da teoria, deduzidas da estacionariedade da ação sob variações arbitrárias δA e δB . Uma variação δB arbitrária gera a equação:

$$F = 0. \quad (2.14)$$

E para uma variação δA arbitrária:

$$\begin{aligned} \delta F = \delta(dA + A^2) &= d\delta A + \delta AA + A\delta A \\ &= d\delta A + [A, \delta A] = D\delta A. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Então, utilizando a regra de integração por partes se encontra:

$$\delta S = -2 \operatorname{Tr} \int BD\delta A = 2 \operatorname{Tr} \int DB\delta A \quad (2.16)$$

de onde segue a equação:

$$DB = 0. \quad (2.17)$$

Estuda-se primeiramente a equação de movimento (2.14). Para tal, tomou-se um ansatz para a solução desta equação como sendo uma conexão do tipo “puro *gauge*” $A(x) = h^{-1}(x)dh(x)$, onde $h(x) \in G$ e que pode ser verificada:

$$dA = dh^{-1}dh = -h^{-1}dh h^{-1}dh = -A^2 \quad \Rightarrow \quad F = 0.$$

Mas $A = h^{-1}dh$ não é solução geral, da mesma maneira que $d\omega = 0$ não implica em $\omega = dh$ em espaços não-triviais, como um toróide. Contudo, o lema de Poincaré não-abeliano [39] diz que localmente (em um aberto $U \subset \mathcal{M}$) existirá um $h(x) \in G$ tal que $A = h^{-1}dh$. Isto significa que a solução A é, localmente, a transformada de calibre da conexão nula.

Com efeito, fazendo uma transformação de calibre com $g = h^{-1}$ mostra-se que:

$$\begin{aligned}
 A' &= g^{-1}dg + g^{-1}Ag \\
 &= hdh^{-1} + hAh^{-1} = hdh^{-1} + hh^{-1}dhh^{-1} \\
 &= -hh^{-1}dhh^{-1} + dhh^{-1} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

A equação de movimento (2.17) pode ser escrita como $dB = 0$ tomando $A = 0$. Considerando que uma forma fechada é localmente uma forma exata, então segue que:

$$B = d\hat{B} = D\hat{B}. \tag{2.19}$$

Isto nada mais é do que a transformação de calibre de 2º tipo (2.11), com $\eta = \hat{B}$, do campo $B = 0$. Esta discussão mostra que, localmente, a solução das equações de movimento é dada pela solução trivial $A = B = 0$ a menos das transformações de calibre.

Discutir-se-á novamente as equações de movimento após a formulação do Hamiltoniano da teoria. Para tal, precisa-se desenvolver um método tal que a partir da ação do modelo BF pode-se escrever a lagrangiana e convertê-la para uma hamiltoniana, e aí sim estudar estas equações “de movimento” no espaço de fase apropriado.

2.4 O Formalismo Canônico do modelo BF

A quantização canônica é uma das várias maneiras na física de se quantizar uma teoria clássica. A palavra canônica se refere à estrutura clássica que é preservada na teoria quântica, chamada de estrutura simplética. Historicamente, a quantização canônica foi o método utilizado por Dirac (que o denomina de método hamiltoniano) para construir pela primeira vez a formulação de Mecânica Quântica (MQ) mais conhecida e utilizada hoje [40–42], mostrando que a MQ das funções de onda de Schrödinger é a mesma MQ das matrizes de Heisenberg. Uma visão geral deste método está no Apêndice B e é uma boa introdução ao método de quantização canônica.

2.4.1 O formalismo lagrangiano do Modelo BF

Seja a ação S_{BF} dada pela equação (2.9) que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{M}} \eta_{IJ} B^I F^J = \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{1}{2} \eta_{IJ} B_\mu^I F_{\nu\rho}^J \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \underbrace{\int_{\Sigma} d^2x \mathcal{L}(t, x)}_L \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde η_{IJ} é um tensor simétrico capaz de manipular apenas os índices do grupo G (latinos maiúsculos), logo não constitui uma métrica para as coordenadas do espaço-tempo. Nota-se que por não ter se definido nenhuma métrica para o espaço-tempo, não há nenhuma receita para se manipular os índices de “espaço”.

No caso do modelo BF as coordenadas generalizadas⁶ são A, B e as velocidades generalizadas são $\partial_t A, \partial_t B$. As equações de Euler-Lagrange são dadas por (2.14) e (2.17). Mais explicitamente, a ação (2.20) se escreve:

$$S_{BF} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \eta_{IJ} \varepsilon^{\mu\nu\rho} d^3x [B_\mu^I \underbrace{(\partial_\nu A_\rho^J - \partial_\rho A_\nu^J + f^J_{KL} A_\nu^K A_\rho^L)}_{F_{\nu\rho}^J}]. \quad (2.21)$$

Quando se define a lagrangiana L em (2.20), gera-se sobre o espaço uma restrição topológica, que é a hipótese da existência de uma dimensão temporal homeomórfica à reta real \mathbb{R} e calcula-se a lagrangiana como uma integral sobre a subvariedade espacial. Nesta teoria de calibre topológica não há nenhuma dimensão privilegiada *a priori*, mas o conceito de tempo foi introduzido para se realizar o método de quantização canônica e espera-se recuperar na teoria já quantizada esta liberdade de calibre para a dimensão temporal. Em suma, restringe-se a variedade a admitir uma foliação $\mathcal{M}_D = \mathbb{R} \times \Sigma$ (Fig. 2.1).

Denota-se por t a coordenada associada à linha de tempo \mathbb{R} e por x^a ($a = 1, 2$) as coordenadas do espaço Σ . O “espaço” Σ é uma variedade de dimensão 2 e todas as folhas Σ_t possuem a topologia de Σ . Assim, a “evolução temporal” preserva a topologia do

⁶Veja a seção B.1.1 para mais detalhes.

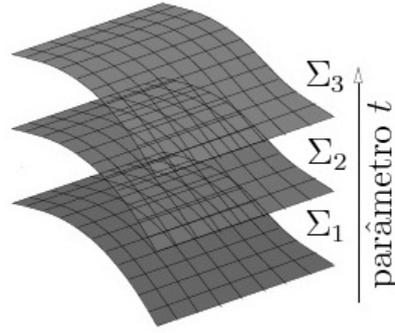


Figura 2.1: Foliação de uma variedade $\mathcal{M} = \mathbb{R} \otimes \Sigma$ que mostra a decomposição da variedade em várias “folhas” Σ_t .

espaço, de forma que se constrói a estrutura canônica independente do valor de t . Sendo assim, separa-se a ação em partes temporal e espacial, onde os índices $0 = t$ e $a, b = 1, 2$ foram utilizados:

$$S_{BF} = \frac{\eta_{IJ}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [\varepsilon^{0ab} (B_t^I F_{ab}^J) + \varepsilon^{b0a} (B_b^I F_{ta}^J) + \varepsilon^{ab0} (B_a^I F_{bt}^J)]$$

note que por convenção $\varepsilon^{0ab} = \varepsilon^{b0a} = \varepsilon^{ab0} \equiv \varepsilon^{ab}$ é um tensor de Levi-Civita completamente antissimétrico. Então:

$$S_{BF} = \frac{\eta_{IJ}}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [\varepsilon^{ab} (B_t^I F_{ab}^J) + \varepsilon^{ab} (B_b^I F_{ta}^J) + \varepsilon^{ab} (B_a^I F_{bt}^J)]. \quad (2.22)$$

Como os tensores ε^{ab} e F_{ab}^J são antissimétricos, o primeiro termo reescreve-se: $B_t^I (\varepsilon^{ab} F_{ab}^J) = B_t^I (\varepsilon^{12} F_{12} + \varepsilon^{21} F_{21}) = 2B_t^I F_{12}^J$ e com o tensor F_{ta}^J escrito explicitamente, S_{BF} fica:

$$S_{BF} = \eta_{IJ} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [B_t^I F_{12}^J + \partial_t A_a^J \varepsilon^{ab} B_b^I - \varepsilon^{ab} B_b^I D_a A_t^J]$$

onde se utilizou a definição da derivada covariante (2.5). Realiza-se uma integração por partes (A.108) no terceiro termo para obter:

$$S_{BF} = \eta_{IJ} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma} d^2x dt [B_t^I F_{12}^J + \partial_t A_a^J \varepsilon^{ab} B_b^I + \varepsilon^{ab} D_{aK}^J B_b^K A_t^J]. \quad (2.23)$$

Para simplificar a notação, define-se o *dual* de B :

$$\tilde{B}^{Ia} \equiv \varepsilon^{ab} B_b^I \quad (2.24)$$

e pode-se escrever a Lagrangiana do nosso sistema simplesmente como:

$$L = \eta_{IJ} \int_{\Sigma} d^2x [B_t^I F_{12}^J + \partial_t A_a^J \tilde{B}^{aI} + A_t^J D_{aK}^I \tilde{B}^{aK}]. \quad (2.25)$$

2.4.2 Os vínculos primários

Começa-se o método hamiltoniano convertendo a lagrangiana (2.25) para uma hamiltoniana. Para notarmos as grandezas supracitadas no formalismo hamiltoniano introduz-se os momentos Π conjugados aos campos A_{μ}^I , B_{μ}^I , definidos por

$$\begin{aligned} {}^A\Pi_I^a(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_a^I(x))} = \eta_{IJ} \tilde{B}^{aJ} = \tilde{B}_I^a \\ {}^B\Pi_I^a(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_a^I(x))} = 0 \\ {}^A\Pi_I^t(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_t^I(x))} = 0 \\ {}^B\Pi_I^t(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_t^I(x))} = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

cujos colchetes com as coordenadas generalizadas geram uma estrutura simplética definida pelos seguintes colchetes de Poisson:

$$\{A_{\mu}^I(x), {}^A\Pi_J^{\nu}(y)\} = \delta_J^I \delta_{\mu}^{\nu} \delta^2(x-y) \quad , \quad \{B_{\mu}^I(x), {}^B\Pi_J^{\nu}(y)\} = \delta_J^I \delta_{\mu}^{\nu} \delta^2(x-y) \quad (2.27)$$

e todos os demais são nulos

$$\{A_{\mu}^I(x), A_{\nu}^J(y)\} = \{{}^A\Pi_I^{\mu}(x), {}^A\Pi_J^{\nu}(y)\} = \{A_{\mu}^I(x), B_{\nu}^J(y)\} = \dots = 0. \quad (2.28)$$

O resultado (2.26) é preocupante, pois os momentos conjugados são independentes das velocidades e então não se pode escrever as velocidades como função dos momentos: tem-se então um sistema vinculado.

As equações (2.26) são vínculos primários, conforme a definição dada na seção B.1.3:

$$\Phi_{1I}^a \equiv {}^A\Pi_I^a - \tilde{B}_I^a \approx 0 \quad (2.29)$$

$$\Phi_{2I}^a \equiv {}^B\Pi_I^a \approx 0 \quad (2.30)$$

$$\Phi_{3I} \equiv {}^A\Pi_I^t \approx 0 \quad (2.31)$$

$$\Phi_{4I} \equiv {}^B\Pi_I^t \approx 0 \quad (2.32)$$

e notados por Φ_m , com $m = 1, 2, 3, 4$, como sendo uma forma de agrupar as equações (2.29) a (2.32), os quatro vínculos primários Φ .

2.4.3 A hamiltoniana canônica

Levando os vínculos primários em consideração, faz-se a transformação de Legendre para obter a hamiltoniana canônica como a integral $H_{\text{can}} = \int \mathcal{H}_{\text{can}}(x) d^2x$ da densidade hamiltoniana:

$$\mathcal{H}_{\text{can}}(x) = {}^A\Pi_I^a \partial_t A_a^I - \mathcal{L} = -\eta_{IJ} A_a^J D_{aK}^I \tilde{B}^{aK} - \eta_{IJ} B_t^I F_{12}^J. \quad (2.33)$$

Esta hamiltoniana não é unicamente determinada, pois pode-se adicionar a ela qualquer combinação linear de vínculos Φ 's, que são fracamente nulos. Escreve-se então H_T :

$$H_T = \int_{\Sigma} d^2x' [\mathcal{H}_{\text{can}}(x') + \lambda_{1a}^I(x') \Phi_{1I}^a(x') + \lambda_{2a}^I(x') \Phi_{2I}^a(x') + \lambda_3^I(x') \Phi_{3I}(x') + \lambda_4^I(x') \Phi_{4I}(x')] \quad (2.34)$$

onde as funções arbitrárias $\lambda_m(x)$ são multiplicadores de Lagrange. Usando o formalismo dos colchetes de Poisson pode-se escrever⁷ a derivada temporal de um funcional g das coordenadas generalizadas e momentos conjugados:

$$\dot{g} = \{g, H_T\} = \left\{g, \int_{\Sigma} d^2y' (\mathcal{H}_{\text{can}} + \sum_{m=1}^4 \lambda_m \Phi_m)\right\} \quad (2.35)$$

onde foi utilizada uma notação simplificada para a somatória sobre os vínculos primários.

⁷Vide a equação (B.8).

2.4.4 A estabilidade dos vínculos primários

Começa-se o Algoritmo de Dirac-Bergmann⁸ verificando as condições de consistência dos vínculos, tomando a equação (2.35) e trocando g por cada um dos Φ 's. Um vínculo é dito consistente ou estável quando este não evolui no tempo, isto é, colocando $\dot{g} = 0$ e $g = \Phi_m$:

$$\int_{\Sigma} d^2y' \{ \Phi_{mI}^{\mu}(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y') \} + \int_{\Sigma} d^2y' \lambda_{m'\nu}^I(y') \{ \Phi_{mI}^{\mu}(x), \Phi_{m'J}^{\nu}(y') \} \approx 0. \quad (2.36)$$

Observa-se que deve se ter cuidado com a notação para μ e ν , pois $\mu, \nu = a$ para Φ_1 e Φ_2 e $\mu, \nu = t$ para Φ_3 e Φ_4 , então temos *a priori* $m = 4$ verificações de estabilidade. Note que essas verificações envolvem o cálculo de todos os colchetes de Poisson ($m' = 1, 2, 3, 4$) entre os vínculos.

Denota-se por Γ a matriz dos colchetes de Poisson entre os vínculos definida por $\Gamma_{mn} = \{ \Phi_m, \Phi_n \}$. Apenas um dos colchetes é não-nulo:

$$\{ \Phi_{1I}^a(x), \Phi_{2K}^c(y) \} = \Gamma_{12}^{ac}{}_{IK}(x, y) = -\eta_{IK} \varepsilon^{ac} \delta^2(x - y) = +\Gamma_{21}^{ac}{}_{IK}(x, y). \quad (2.37)$$

Repare que Γ_{21} possui o mesmo sinal de Γ_{12} uma vez que o colchete é antissimétrico em ab .

Voltando para a verificação da estabilidade dos vínculos, onde faz-se $\dot{\Phi}_{1I}^a(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{1I}^a(x) &= \int_{\Sigma} d^2y \{ \Phi_{1I}^a(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y) \} + \lambda_{2b}^K(y) \{ \Phi_{1I}^a(x), \Phi_{2K}^b(y) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \left(-A_t^L(y) \eta_{KL} f_{JI}^K \delta^2(x - y) \tilde{B}^{aJ} + B_t^J(y) \eta_{JI} \varepsilon^{ba} \partial_b^y \delta^2(x - y) + \right. \\ &\quad \left. - B_t^J(y) \eta_{JL} \varepsilon^{ba} f_{IK}^L A_b^K(y) \delta^2(x - y) \right) + \int_{\Sigma} d^2y \left(-\lambda_{2b}^J(y) \eta_{IJ} \varepsilon^{ab} \delta^2(x - y) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

depois de uma integração por partes (A.108), reescreve-se a equação anterior como:

$$\varepsilon^{ab} \eta_{IJ} \lambda_{2b}^J(x) = -\eta_{KLF} f_{JI}^K A_t^L(x) \tilde{B}^{aJ}(x) - \varepsilon^{ba} D_{bI}^L(\eta_{JL} B_t^J(x)).$$

⁸Vide seção B.1.4.

Manipulando os índices de grupo pode-se escrever λ_2 de maneira mais simples:

$$\lambda_{2a}^I(x) = (D_a B_t)^I(x) - f^I{}_{JK} A_t^J(x) B_a^K(x) \quad (2.39)$$

e caiu-se no caso onde $\dot{\Phi}_1 = 0$ determina o multiplicador de Lagrange λ_2 (2.39). O vínculo Φ_1 é consistente.

Agora, faz-se $\dot{\Phi}_{2I}^a(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{2I}^a(x) &= \int_{\Sigma} d^2 y \{ \Phi_{2I}^a(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y) \} + \lambda_{1b}^K(y) \{ \Phi_{2I}^a(x), \Phi_{1K}^b(y) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2 y \eta_{JK} A_t^K(y) \varepsilon^{ba} D_b^{yJ} \delta^2(x-y) + \int_{\Sigma} d^2 y (-\lambda_{1b}^K(y) \eta_{IK} \varepsilon^{ab} \delta^2(x-y)) = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\varepsilon^{ab} \eta_{IJ} \lambda_{1b}^J(x) = \varepsilon^{ab} D_{bI}^J (\eta_{JK} A_t^K(x))$$

$$\lambda_{1a}^I(x) = (D_a A_t)^I(x). \quad (2.41)$$

Caiu-se no caso onde $\dot{\Phi}_2 = 0$ determina o multiplicador de Lagrange λ_1 (2.41) e o vínculo Φ_2 é consistente. Vamos agora estudar a consistência dos vínculos Φ_3 e Φ_4 .

Faz-se $\dot{\Phi}_{3I}(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{3I}(x) &= \int_{\Sigma} d^2 y \{ \Phi_{3I}(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y) \} = \int_{\Sigma} d^2 y \{ {}^A \Pi_I^t(x), -\eta_{JK} A_t^K(y) D_a^{yJ} \tilde{B}^{aL}(y) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2 y \eta_{JI} D_a^{yJ} \tilde{B}^{aL}(y) \delta^2(x-y) = \eta_{JI} D_a^J \tilde{B}^{aL}(x) \end{aligned} \quad (2.42)$$

este resultado gera um vínculo secundário

$$\Phi_{5I} \equiv (D_a \tilde{B}^a)_I \approx 0. \quad (2.43)$$

Faz-se $\dot{\Phi}_{4I}(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{4I}(x) &= \int_{\Sigma} d^2 y \{ \Phi_{4I}(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y) \} = \int_{\Sigma} d^2 y \{ {}^B \Pi_I^t(x), -\eta_{JK} B_t^J(y) F_{12}^K(y) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2 y \eta_{IK} F_{12}^K(y) \delta^2(x-y) = F_{12I}(x) \end{aligned} \quad (2.44)$$

e este resultado também gera um vínculo secundário

$$\Phi_{6I} \equiv \frac{\varepsilon^{ab}}{2} F_{abI} \approx 0. \quad (2.45)$$

2.4.5 A estabilidade dos vínculos secundários

Alguns vínculos primários geraram vínculos secundários, e estes ainda precisam ser estáveis.

Logo, o algoritmo se estende aos vínculos secundários, então deve-se fazer também a verificação da estabilidade dos vínculos Φ_{5I} e Φ_{6I} .

Faz-se $\dot{\Phi}_{5I}(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{5I}(x) &= \int_{\Sigma} d^2y (\lambda_{1c}^L(y) \{\Phi_{5I}(x), \Phi_{1L}^c(y)\} + \lambda_{2c}^L(y) \{\Phi_{5I}(x), \Phi_{2L}^c(y)\}) \\ &= \int_{\Sigma} d^2y [-\lambda_{1c}^L(y) \eta_{IJ} f_{KL}^J \tilde{B}^{cK}(x) \delta^2(x-y) + \lambda_{2c}^L(y) \eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J \delta^2(x-y)] \\ &= -\eta_{IJ} f_{KL}^J \tilde{B}^{cK}(x) \lambda_{1c}^L(x) - \eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J \lambda_{2c}^L(x). \end{aligned} \quad (2.46)$$

De (2.39) e (2.41), escreve-se (2.46) como:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{5I} &= -\eta_{IJ} f_{KL}^J \tilde{B}^{cK} (D_c A_t)^L - \eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J D_{cM}^L B_t^M + \eta_{IJ} f_{MK}^L D_{aL}^J (A_t^M \tilde{B}^{aK}) \\ &= -\eta_{IJ} f_{KM}^J A_t^M (\Phi_5^K) - [\Phi_6, B_t]_I \approx 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

que é uma expressão fracamente nula, logo Φ_{5I} e conseqüentemente Φ_{3I} são estáveis.

Finalmente, faz-se $\dot{\Phi}_{6I}(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{6I}(x) &= \int_{\Sigma} d^2y \lambda_{1c}^L(y) \{\Phi_{6I}(x), \Phi_{1L}^c(y)\} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \lambda_{1c}^L(y) (\eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J \delta^2(x-y)) = -\eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J \lambda_{1c}^L(x). \end{aligned} \quad (2.48)$$

E de (2.41), escreve-se (2.48) como:

$$\eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J \lambda_{1c}^L(x) = \eta_{IJ} \varepsilon^{ac} D_{aL}^J (D_c A_t)^L = [\Phi_6, A_t]_I \approx 0 \quad (2.49)$$

o que mostra que Φ_{6I} e Φ_{4I} são consistentes e nenhum vínculo secundário gera mais vínculos, então o algoritmo encerra.

Os colchetes de Poisson não-nulos entre os vínculos remanescentes vão ser:

$$\begin{aligned}\Gamma_{12\ IK}^{ac}(x, y) &= -\eta_{IK}\varepsilon^{ac}\delta^2(x - y) = +\Gamma_{21\ IK}^{ac}(x, y) \\ \Gamma_{15\ IL}^a(x, y) &= -\eta_{IJ}f^J_{KL}\tilde{B}^{aK}\delta^2(x - y) = +\Gamma_{51\ IL}^a(x, y)\end{aligned}\quad (2.50)$$

$$\Gamma_{25\ IL}^a(x, y) = -\eta_{IJ}\varepsilon^{ab}D_{bL}^J\delta^2(x - y) = +\Gamma_{52\ IL}^a(x, y)\quad (2.51)$$

$$\Gamma_{16\ IL}^a(x, y) = -\eta_{IJ}\varepsilon^{ab}D_{bL}^J\delta^2(x - y) = +\Gamma_{61\ IL}^a(x, y).\quad (2.52)$$

Resumo dos vínculos:

| Vínculos Primários | Vínculos Secundários |
|---|---|
| $\Phi_{1I}^a : {}^A\Pi_I^a - \tilde{B}_I^a \approx 0$ | $\Phi_{5I} : \eta_{IJ}D_{aK}^J\tilde{B}^{aK} \approx 0$ |
| $\Phi_{2I}^a : {}^B\Pi_I^a \approx 0$ | |
| $\Phi_{3I} : {}^A\Pi_I^t \approx 0$ | |
| $\Phi_{4I} : {}^B\Pi_I^t \approx 0$ | |
| | $\Phi_{6I} : F_{12I} \approx 0$ |

2.4.6 A Hamiltoniana total

Antes de se escrever novamente a hamiltoniana, nota-se que os vínculos Φ_{3I} e Φ_{4I} são vínculos que comutam fortemente com todos os outros, então uma vez definida a hamiltoniana pode-se tomar estes vínculos como igualdades fortes ${}^A\Pi^t = 0$ e ${}^B\Pi^t = 0$, o que define A_t e B_t como funções arbitrárias. No caso do modelo BF determinou-se explicitamente $\lambda_{1a}^I(x)$ (2.41) e $\lambda_{2a}^I(x)$ (2.39), e os demais λ são multiplicadores de Lagrange arbitrários. Com isto, a hamiltoniana total se escreve como:

$$H_T = \int_{\Sigma} d^2x \left[-A_t^I (D_a \tilde{B}^a)_I - B_t^I F_{12I} + (D_a A_t)^I \Phi_{1I}^a + ((D_a B_t)^I - f^I_{JK} A_t^J B_a^K) \Phi_{2I}^a \right] \quad (2.53)$$

note que os dois primeiros termos são os vínculos Φ_{5I} e Φ_{6I} da teoria, então esta expressão da hamiltoniana identifica A_t^I e B_t^I como sendo os multiplicadores de lagrange λ_5^I e λ_6^I

destes vínculos.

Com a hamiltoniana nesta forma ainda não se pode aplicar o princípio da correspondência sobre a teoria canônica. Com efeito, na teoria quântica correspondente onde A, B são operadores, os vínculos Φ_m também são operadores que restringem o funcional de onda ψ , que geram condições do tipo:

$$\hat{\Phi}_m \psi = 0, \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \hat{H} \psi = 0. \quad (2.54)$$

Só que quando se tem vínculos que não comutam entre si (chamados de vínculos de segunda classe) aparecem alguns termos $\Gamma_{mn} \neq 0$, tais como (2.37), etc. Ao se tomar estes colchetes como ponto de partida para a quantização tem-se, por exemplo:

$$[\hat{\Phi}_{1I}^a(x), \hat{\Phi}_{2J}^c(y)] = -i\hbar\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2(x-y).$$

Contudo, este comutador é inconsistente com $\hat{\Phi}_1\psi = 0$ e $\hat{\Phi}_2\psi = 0$, pois:

$$[\hat{\Phi}_{1I}^a(x), \hat{\Phi}_{2J}^c(y)]\psi = -i\hbar\varepsilon^{ac}\delta_J^I\delta^2(x-y)\psi \neq 0. \quad (2.55)$$

Neste caso, não se pode construir uma teoria quântica a partir destes comutadores. Então seguir-se-á o procedimento proposto por Dirac para a redefinição dos colchetes de Poisson como colchetes de Dirac.

2.4.7 Os colchetes de Dirac

O propósito de se introduzir os colchetes de Dirac é eliminar os vínculos de segunda classe, resolvendo-os no processo. Para definir o colchete de Dirac, primeiro escreve-se

explicitamente a matriz Γ dos colchetes de Poisson entre os vínculos:

$$\Gamma_{mn} \approx -\eta_{IJ} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{ab} & f^J_{KL} \tilde{B}^{aK} & \varepsilon^{ab} D^J_{bL} \\ \varepsilon^{ab} & 0 & \varepsilon^{ab} D^J_{bL} & 0 \\ f^J_{KL} \tilde{B}^{aK} & \varepsilon^{ab} D^J_{bL} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{ab} D^J_{bL} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y) \quad (2.56)$$

onde $(m, n) = (1, 2, 5, 6)$, uma vez que Φ_3 e Φ_4 foram tomados como igualdades fortes. A partir desta matriz realiza-se uma troca de base dos vínculos por um procedimento de diagonalização em blocos, o que simplifica bastante a definição dos colchetes de Dirac. Os vínculos secundários \mathcal{G}_I e \mathcal{F}_I ($\mathcal{G}_I = \Phi_{5I}$ e $\mathcal{F}_I = \Phi_{6I}$) combinam-se com os vínculos Φ_1 e Φ_2 , para gerar:

$$\mathcal{G}'_I = \mathcal{G}_I + f^J_{KL} B^K_a \Phi^a_{2J} + D^J_{aI} \Phi^a_{1J} \quad (2.57)$$

$$\mathcal{F}'_I = \mathcal{F}_I + D^J_{aI} \Phi^a_{2J}. \quad (2.58)$$

Nota-se que \mathcal{G}' e \mathcal{F}' são os coeficientes de A_t e B_t na hamiltoniana (2.53).

Os vínculos \mathcal{G}' e \mathcal{F}' são vínculos de primeira classe de acordo com a terminologia de Dirac⁹ pois possuem colchetes de Poisson fracamente nulos com todos os demais, enquanto os vínculos Φ_1, Φ_2 são vínculos de segunda classe, resultando na seguinte matriz Γ' diagonalizada:

$$\Gamma'_{mn} \approx -\eta_{IJ} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{ab} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x-y) \quad (2.59)$$

onde as linhas e colunas desta matriz são formadas por $\Phi_1, \Phi_2, \mathcal{G}'$ e \mathcal{F}' .

⁹Vide seção B.2.3.

Um resumo dos nossos vínculos de acordo com a sua classe e origem, na nova base:

| Vínculo | Primário | Secundário |
|-----------------|--|--|
| Primeira Classe | | $\mathcal{G}'_I : \mathcal{G}_I + f_I^J B_a^K \Phi_{2J}^a + D_{aI}^J \Phi_{1J}^a$ $\mathcal{F}'_I : \mathcal{F}_I + D_{aI}^J \Phi_{2J}^a$ |
| Segunda Classe | $\Phi_{1I}^a : {}^A \Pi_I^a - \tilde{B}_I^a \approx 0$ $\Phi_{2I}^a : {}^B \Pi_I^a \approx 0$ | |

Agora, nota-se por Δ a matriz dos vínculos de segunda classe remanescentes, cujos elementos são definidos por:

$$\Delta_{ss' IJ}^{ac} = \{\Phi_{sI}^a(x), \Phi_{s'J}^c(y)\} = -\varepsilon^{ac} \eta_{IJ} \varepsilon^{ss'} \delta^2(x-y) \quad (2.60)$$

onde $(s, s') = (1, 2)$. Invertendo¹⁰ a matriz Δ obtém-se:

$$\Delta^{-1} = -\varepsilon_{ca} \eta^{IJ} \delta^2(y-x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.61)$$

Com esta matriz Δ^{-1} definem-se os colchetes de Dirac:

$$\boxed{\{\xi, \chi\}_D = \{\xi, \chi\} - \{\xi, \Phi_s\} \Delta^{-1 ss'} \{\Phi_{s'}, \chi\}} \quad (2.62)$$

que se nota pelo símbolo $\{ \ , \ }_D$. Neste novo colchete, pode-se colocar os $\Phi_s = 0$ uma vez que, sendo g uma função qualquer dos campos A e B :

$$\begin{aligned} \{g, \Phi_s\}_D &= \{g, \Phi_s\} - \{g, \Phi_s\} \Delta^{-1 ss'} \{\Phi_{s'}, \Phi_s\} \\ &= \{g, \Phi_s\} - \{g, \Phi_s\} \Delta^{-1 ss'} \cdot \Delta_{s's} \\ &= \{g, \Phi_s\} - \{g, \Phi_s\} = 0. \end{aligned} \quad (2.63)$$

¹⁰No sentido da álgebra de convolução para os índices contínuos (x) e (y) : $(g*f)(x) = \int dy g(y)f(x-y)$.

Logo, as equações $\Phi_s = 0$ podem ser consideradas igualdades fortes, então:

$$\Phi_1 = 0 \rightarrow {}^A\Pi_I^a = \tilde{B}_I^a \quad (2.64)$$

$$\Phi_2 = 0 \rightarrow {}^B\Pi_I^a = 0 \quad (2.65)$$

como ${}^A\Pi_I^a \propto B$ e ${}^B\Pi_I^a = 0$, excluem-se os momentos ${}^A\Pi_I^a$ e ${}^B\Pi_I^a$ da teoria e considera-se (2.64) como o momento da variável A_a^I .

Da mesma maneira, temos que:

$$\begin{aligned} \{A_a^I(x), A_b^J(y)\}_D &= \{A_a^I(x), A_b^J(y)\} - \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(x), \Phi_s(y')\} \Delta^{-1 ss'} \{\Phi_{s'}(x'), A_b^J(y)\} \\ &= 0 - \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(x), \Phi_1(y')\} \Delta^{-1 12} \overbrace{\{\Phi_2(x'), A_b^J(y)\}}{=0} \\ &\quad - \int d^2x' d^2y' \overbrace{\{A_a^I(x), \Phi_2(y')\}}{=0} \Delta^{-1 21} \{\Phi_1(x'), A_b^J(y)\} = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\{B_a^I(x), B_b^J(y)\}_D = 0 \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \{A_a^I(x), B_b^J(y)\}_D &= \{A_a^I(x), B_b^J(y)\} - \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(x), \Phi_s(y')\} \Delta^{-1 ss'} \{\Phi_{s'}(x'), B_b^J(y)\} \\ &= 0 - \int d^2x' d^2y' \{A_a^I(x), \Phi_1(y')\} \Delta^{-1 12} \{\Phi_2(x'), B_b^J(y)\} \\ &\quad - \int d^2x' d^2y' \overbrace{\{A_a^I(x), \Phi_2(y')\}}{=0} \Delta^{-1 21} \{\Phi_1(x'), B_b^J(y)\} \\ &= -\varepsilon_{ba} \eta^{IJ} \delta^2(y - x) \end{aligned} \quad (2.68)$$

A partir de agora o sub índice D do colchete de Dirac será omitido. Note que o último colchete escreve-se de maneira simplificada na notação *dual* de B :

$$\{A_a^I(x), \tilde{B}^{cJ}(y)\} = -\varepsilon^{cb} \varepsilon_{ba} \eta^{IJ} \delta^2(y - x) = \delta_a^c \eta^{IJ} \delta^2(y - x). \quad (2.69)$$

2.5 Os vínculos de primeira classe e a invariância da hamiltoniana

2.5.1 A forma final da hamiltoniana

A Hamiltoniana total (2.53) do nosso sistema agora fica:

$$H_T = \int_{\Sigma} d^2x \left(-A_t^I (D_a \tilde{B}^a)_I - B_t^I F_{12I} \right). \quad (2.70)$$

Como os campos $-A_t^I$ e $-B_t^I$ são multiplicadores de Lagrange para os vínculos $\Phi_{5I} = \mathcal{G}_I = D_a \tilde{B}^a$ e $\Phi_{6I} = \mathcal{F}_I = F_{12I}$, podemos reescrever a hamiltoniana total como:

$$\boxed{H_T = \int_{\Sigma} d^2x (\lambda_5^I \mathcal{G}_I + \lambda_6^I \mathcal{F}_I)}. \quad (2.71)$$

Vale a pena ressaltar novamente que esta hamiltoniana é completamente vinculada, que é o que se espera de uma teoria de calibre topológica.

2.5.2 As transformações infinitesimais geradas pela hamiltoniana

Os vínculos \mathcal{G} e \mathcal{F} que aparecem na hamiltoniana (2.70) são vínculos de primeira classe, e como tal geram transformações de calibre. Então agora calcula-se os colchetes de Dirac destes termos da hamiltoniana (vínculos) com as variáveis A e B , para descobrir as transformações infinitesimais de calibre associadas aos termos da hamiltoniana. Uma vez que H é um invariante sobre as transformações geradas por estes vínculos, estas transformações são simetrias do sistema:

$$\delta_{(i)} g(x) = \left\{ g(x), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_i \Phi_i(y) \right\}. \quad (2.72)$$

Escreve-se agora a transformação infinitesimal $\delta_{\mathcal{G}}$, gerada pelo vínculo \mathcal{G} que age sobre as variáveis A_a^I e \tilde{B}^{aI} , fazendo uso da integração por partes (A.108) e da definição de derivada covariante (2.5):

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{G}}A_a^I(x) &= \{A_a^I(x), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_5^J(y) \eta_{JK} D_b^{yK} \tilde{B}^{bL}(y)\} \\ &= - \int_{\Sigma} d^2y D_b^{yK} (\eta_{JK} \lambda_5^J(y)) \eta^{IL} \delta_a^b \delta^2(y-x) = -(D_a \lambda_5)^I(x)\end{aligned}\quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{G}}\tilde{B}^{aI}(x) &= \{\tilde{B}^{aI}(x), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_5^J(y) \eta_{JK} D_b^{yK} \tilde{B}^{bL}(y)\} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \eta_{JK} \lambda_5^J(y) f_{LM}^K \eta^{IM} \delta_b^a \delta^2(x-y) \tilde{B}^{bL}(y) = f^I{}_{JL} \lambda_5^J(x) \tilde{B}^{aL}(x)\end{aligned}\quad (2.74)$$

Escrevendo estas transformações na notação matricial $A_a = A_a^I T_I$, etc., obtém-se:

$$\begin{cases} \delta_{\mathcal{G}}A_a = \partial_a \lambda + [A_a, \lambda] \\ \delta_{\mathcal{G}}\tilde{B}^a = [\tilde{B}^a, \lambda] \end{cases}\quad (2.75)$$

onde $\lambda = -\lambda_5$ faz o papel de parâmetro infinitesimal. Isto é, \mathcal{G} gera as transformações de calibre tipo YM espaciais.

Agora, escreve-se a transformação infinitesimal $\delta_{\mathcal{F}}$, gerada pelo vínculo \mathcal{F} que age sobre a variável \tilde{B}^{aI} , fazendo uso da integração por partes (A.108) e da antissimetria dos tensores ε^{ab} e $f^I{}_{JK}$:

$$\delta_{\mathcal{F}}A_a^I(x) = 0 \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned}\delta_{\mathcal{F}}\tilde{B}^{aI}(x) &= \{\tilde{B}^{aI}(x), \int_{\Sigma} d^2y \lambda_6^J(y) \frac{\varepsilon^{bc}}{2} F_{bc}^J(y)\} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \varepsilon^{ba} (\partial_b \lambda_6^I(y) - f^I{}_{JK} A_b^K(y) \lambda_6^J(y)) \delta^2(x-y) = -\varepsilon^{ab} D_{bJ}^I \lambda_6^J(x)\end{aligned}\quad (2.77)$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{cases} \delta_{\mathcal{F}}A_a = 0 \\ \delta_{\mathcal{F}}\tilde{B}^a = \varepsilon^{ab} D_b \epsilon \end{cases}\quad (2.78)$$

onde $\epsilon = -\lambda_6$ faz o papel de parâmetro infinitesimal. \mathcal{F} gera o segundo tipo de transformações de calibre do modelo BF, chamadas de tipo 2.

Os conjuntos de simetria $\delta_{\mathcal{G}, \mathcal{F}}$ são nada mais que a parte espacial das transformações de calibre da teoria. Na teoria quântica, \mathcal{G} e \mathcal{F} serão promovidos a operadores $\hat{\mathcal{G}}$ e $\hat{\mathcal{F}}$, geradores dos grupos de simetria. Os estados $|\psi\rangle$ que obedecem $\hat{\mathcal{G}}|\psi\rangle = 0$ e $\hat{\mathcal{F}}|\psi\rangle = 0$ vão ser os estados físicos, invariantes sobre as transformações de calibre.

A invariância sobre as transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos), é uma consequência das invariâncias sobre transformações de calibre (2.75) e (2.78) [36–38]. Para verificarmos isto, considere um campo vetorial espacial $v = v^a \partial_a$ com o qual definem-se os parâmetros:

$$\begin{cases} \lambda^I(v) = v^a A_a^I \\ \eta^I(v) = v_a \tilde{B}^{aI} \end{cases} . \quad (2.79)$$

Verifica-se facilmente que um difeomorfismo infinitesimal dado pela derivada de Lie ao longo do campo vetorial v pode ser expresso como uma transformação de calibre com os parâmetros (2.79), módulo equações de movimento:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_v A)_a^I = \delta_{\lambda(v)} A_a^I + \delta_{\eta(v)} A_a^I \\ (\mathcal{L}_v \tilde{B})^{aI} = \delta_{\lambda(v)} \tilde{B}^{aI} + \delta_{\eta(v)} \tilde{B}^{aI} \end{cases} \quad (2.80)$$

é o resultado (2.13) mostrado na seção 2.3.1.

2.5.3 A álgebra dos geradores de transformações

Nas seções anteriores escreveu-se a hamiltoniana do modelo BF completamente vinculada e mostrou-se que estes vínculos geram as transformações de calibre da teoria. Agora analisar-se-á a álgebra dos vínculos da hamiltoniana do modelo BF, escritos como trans-

formações de calibre:

$$\mathcal{G}(\lambda) = \int d^2x \lambda^I(x) D_a \tilde{B}_I^a(x) \quad (2.81)$$

$$\mathcal{F}(\epsilon) = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon_I(x) \varepsilon^{ab} F_{ab}^I(x). \quad (2.82)$$

Os colchetes entre os vínculos \mathcal{G} e \mathcal{F} resultam em:

$$\{\mathcal{G}(\lambda_1), \mathcal{G}(\lambda_2)\} = \mathcal{G}(\lambda_1 \times \lambda_2) \quad (2.83)$$

$$\{\mathcal{G}(\lambda), \mathcal{F}(\epsilon)\} = \mathcal{F}(\lambda \times \epsilon) \quad (2.84)$$

$$\{\mathcal{F}(\epsilon_1), \mathcal{F}(\epsilon_2)\} = 0 \quad (2.85)$$

onde $(\lambda_1 \times \lambda_2)^I = f_{JK}^I \lambda_1^J \lambda_2^K$ e $(\lambda \times \epsilon)_I = f_{IJ}^K \lambda^J \epsilon_K$, lembrando que em $\text{SO}(n, 3-n)$: $f_{IJ}^K = \varepsilon_{IJ}^K$ (tensor antissimétrico) e $(\lambda \times \lambda)$ é um produto vetorial. Logo, a álgebra dos vínculos é fechada.

Pode-se pensar nos vínculos da hamiltoniana também como sendo equações que restringem o espaço de fase a uma hipersuperfície vinculada, como a Fig. 2.2, e nesta hipersuperfície todas as variáveis dinâmicas evoluem arbitrariamente.

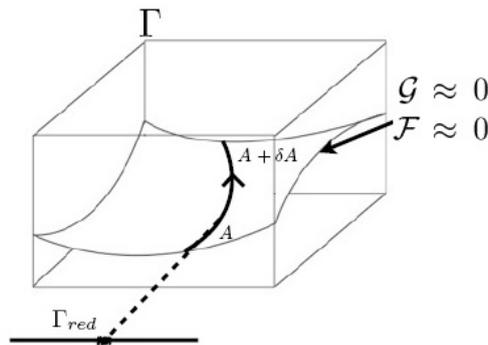


Figura 2.2: Esboço do espaço de fase cinemático, onde há um subespaço dos pontos que obedecem os vínculos.

Reescreve-se a hamiltoniana como em (2.70):

$$H = \mathcal{G}(\lambda) + \mathcal{F}(\epsilon) \quad (2.86)$$

o que deixa manifesto que a dinâmica da teoria na verdade é uma evolução arbitrária

dada pelas transformações de calibre gerada pelos vínculos.

Pode-se também calcular o número de graus de liberdade do espaço de fase considerando a dimensionalidade dos nossos campos independentes:

$$A_a^I : a = (1, 2) \quad I = (1, 2, 3) \rightarrow \dim = 6$$

$$\tilde{B}^{aI} : a = (1, 2) \quad I = (1, 2, 3) \rightarrow \dim = 6.$$

Isto é, em cada ponto x do espaço de fase tem-se o número de dimensões igual a 12 devido aos campos independentes. A dimensão dos parâmetros associados às simetrias é:

$$\lambda^I : I = (1, 2, 3) \rightarrow \dim = 3$$

$$\epsilon_I : I = (1, 2, 3) \rightarrow \dim = 3.$$

Cada parâmetro retira duas dimensões do espaço de fase, pois cada parâmetro está associado à implementação de um vínculo. Então, nosso espaço de fase vai possuir $12 - 6 \times 2 = 0$ graus de liberdade físicos, o que concorda com as equações de movimento (2.14) e (2.17) obtidas anteriormente:

$$DB = 0 \quad \text{anula os graus de liberdade de } B$$

$$F = 0 \quad \text{anula os graus de liberdade de } A.$$

2.5.4 Sobre a quantização do modelo BF: O problema do produto escalar

Antes de abordar a quantização desta teoria no formalismo de laços faremos algumas considerações gerais, em um nível mais informal.

Na quantização, primeiramente define-se o funcional de onda $\Psi = \Psi[A_a^I]$ sobre o espaço de configurações das conexões A_a^I . Definem-se também os operadores \hat{A} e \hat{B} , que devem

obedecer às relações de comutação correspondentes aos colchetes de Dirac (2.66, 2.67, 2.69):

$$[\hat{A}_a^I(x), \hat{B}_J^b(y)] = i\hbar\delta_a^b\delta_J^I\delta^2(x-y). \quad (2.87)$$

Esses operadores atuam em $\Psi[A]$ da seguinte forma:

$$\hat{A}_a^I\Psi = A_a^I\Psi \quad (2.88)$$

$$\hat{B}_I^a\Psi = -i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta A_a^I}. \quad (2.89)$$

Dirac começou a estudar a quantização da gravitação com este esquema, tomando A como a métrica e B como o momento conjugado da métrica [12].

Agora, define-se o produto escalar. Na MQ, o produto escalar é:

$$\langle\psi|\Phi\rangle = \int d^nq \psi^*(q)\Phi(q) \quad (2.90)$$

onde q representa as coordenadas generalizadas. Este produto escalar pode ter uma forma mais geral:

$$\langle\psi|\Phi\rangle = \int d\mu(q) \psi^*(q)\Phi(q) \quad (2.91)$$

onde $d\mu$ é uma medida de integração. O produto escalar no modelo BF teria a forma:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \int \mathcal{D}A(\Psi[A])^*\Phi[A] \quad (2.92)$$

onde $\mathcal{D}A$ é uma medida de integração no espaço de configuração das conexões $A_a^I(x)$. Não é difícil de ver que esta medida de integração corresponde à medida num espaço de configurações muito maior que o espaço correspondente ao do produto escalar (2.90), o que torna sua definição particularmente difícil.

Para se construir um espaço com produto interno bem definido, substitui-se o espaço de

configurações dos $A_a^I(x)$ pelo espaço das holonomias $h_\gamma[A]$, que é o primeiro passo para a quantização de laços.

A seguir estudar-se-á o modelo BF com campos de matéria, em particular como os vínculos e as transformações de calibre do modelo BF descrito neste capítulo se alterarão com a introdução dos campos de matéria.

Capítulo 3

Modelo BF com Campos de Matéria - Caso Abeliano

Agora parte-se do modelo de brinquedo tipo BF 2+1-dimensional independente de fundo tal como definido no capítulo 2, e sobre ele acoplar-se-á uma estrutura que possa representar campos de matéria [8]. Numa primeira tentativa acoplaremos minimamente campos escalares, como em um modelo sigma [29], à ação do modelo BF.

Por uma questão de simplicidade trata-se os campos da teoria como campos abelianos, neste capítulo. O caso não-abeliano será tratado no capítulo seguinte.

3.1 Definições e Convenções

3.1.1 O Grupo de Calibre $U(1)$

O grupo de Lie¹ a ser considerado neste capítulo é o grupo abeliano $U(1) = SO(2)$, que é o grupo de calibre do eletromagnetismo, compacto, conexo e unimodular (círculo unitário no plano complexo).

¹Ver apêndice A.1 sobre grupos de Lie em geral.

Os elementos g do grupo $U(1)$ podem ser parametrizados por um ângulo de rotação θ como $g = e^{i\theta}$, onde o mapa $[0, 2\pi[\subset \mathbb{R} \rightarrow U(1)$, $\theta \mapsto e^{i\theta}$ é homeomórfico já que a multiplicação de números complexos é equivalente a uma adição de fases.

As representações de $U(1)$ são bem simples, por serem unidimensionais. Cada representação irredutível é um homeomorfismo R^n caracterizado por um inteiro positivo ou negativo:

$$R^n(e^{i\theta}) = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.1)$$

de forma que estas representações R^n são caracteres do grupo $U(1)$. Elas são homeomorfismos do grupo consigo mesmo [43]. Sendo assim, deixa-se de escrever o índice de grupo para campos em $U(1)$ mesmo na representação de componentes observado que a representação R^{-n} é igual à conjugada de R^n :

$$R^{-n} = \overline{R^n} \quad (3.2)$$

3.1.2 A Derivada Covariante para os campos ϕ

Considera-se um campo escalar complexo $\phi(x)$, com $\bar{\phi}(x)$ como seu conjugado, que se transformam sob o grupo de calibre $U(1)$ como:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= g(x)\phi(x) \\ \bar{\phi}'(x) &= g^{-1}(x)\bar{\phi}(x) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $g(x) = e^{i\theta(x)} \in U(1)$. Também se quer que a derivada se transforme da mesma maneira que o campo, o que nos leva a definição da derivada covariante dos campos ϕ :

$$D_\mu\phi(x) \equiv \partial_\mu\phi(x) - A_\mu\phi(x) \quad (3.4)$$

$$D_\mu\bar{\phi}(x) \equiv \partial_\mu\bar{\phi}(x) + A_\mu\bar{\phi}(x). \quad (3.5)$$

A 1-forma conexão² A escrita em notação de componentes se transforma como:

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + g(x)\partial_\mu g^{-1}(x). \quad (3.6)$$

Repare que as equações (3.6) e (3.4 - 3.5) representam o caso particular abeliano para a transformação de A (2.4) e da derivada covariante (2.5) vistas no capítulo anterior para o caso BF “puro”.

3.1.3 A curvatura de Yang-Mills F

A curvatura $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ no caso abeliano é expressa simplesmente por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.7)$$

Pode-se escrever também as identidades de Bianchi $dF = 0$, que no caso abeliano é imediato ver que se verificam. Até aqui tem-se uma estrutura semelhante à do modelo BF já desenvolvida no capítulo anterior.

3.1.4 A densidade escalar

Outra grandeza presente na ação a se definir é o tensor completamente antissimétrico (3-forma) $\tilde{e}_{\mu\nu\rho}(x)$. Por simplicidade, pode-se expressar \tilde{e} em termos do seu *dual* e :

$$e \equiv \frac{1}{3!}\tilde{e}_{\mu\nu\rho}\varepsilon^{\mu\nu\rho} \quad (3.8)$$

e sendo uma densidade escalar.

Na seção seguinte a ação será escrita e as transformações das variáveis estudadas com detalhes, assim como as simetrias geradas por estas transformações.

²Note que pela maneira na qual a derivada covariante foi definida o campo A_μ é imaginário.

3.2 Construindo a ação

Para escrever a ação, considera-se uma variedade diferenciável tridimensional \mathcal{M} , e sobre ela define-se o modelo BF (a 1-forma conexão A_μ , e a 1-forma B_μ) e os demais acoplamentos (campos escalares $\phi, \bar{\phi}$ e a densidade escalar \tilde{e}).

A ação invariante sob as transformações de calibre (3.6) e (3.3) é³:

$$S[A, B, \phi, \bar{\phi}, e] = \frac{\kappa}{2} \int B \wedge F + \lambda \int B D\bar{\phi} D\phi + \sigma \int e(\phi\bar{\phi} - 1) \quad (3.9)$$

e em componentes

$$\begin{aligned} S[A, B, \phi, \bar{\phi}, \tilde{e}] &= \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_\mu F_{\nu\rho} + \lambda \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_\mu D_\nu \bar{\phi} D_\rho \phi + \\ &+ \frac{\sigma}{3!} \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \tilde{e}_{\mu\nu\rho} (\phi\bar{\phi} - 1) \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde κ, λ e σ são constantes de acoplamento. A ação também é invariante sobre transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos) $x'^\mu = x'^\mu(x)$.

3.3 As invariâncias de calibre

Sabe-se por construção que nossas variáveis são invariantes de calibre em relação ao grupo abeliano $U(1)$, na forma infinitesimal:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \epsilon, \quad \delta B_\mu = 0, \quad \delta \phi = \epsilon \phi, \quad \delta \bar{\phi} = -\epsilon \bar{\phi}, \quad \delta e = 0 \quad (3.11)$$

que são o caso particular abeliano das transformações (2.10) escritas no capítulo anterior.

A ação foi construída para ser também invariante sob as transformações gerais de co-

³Note que o campo B é imaginário, uma vez que $F = dA$ também é imaginário e a ação deve ser real. Note também que é possível definir uma ação invariante tomando $\sigma = 0$, anulando o terceiro termo. Com efeito, nestas condições pode-se redefinir as variáveis $A' = A - \phi D\bar{\phi}$ e $B' = B + \lambda \phi B \bar{\phi}$ para reduzir a ação a um único termo do tipo $B' \wedge F'$.

ordenadas (difeomorfismos). Estas simetrias dão informações sobre como os campos da teoria se relacionam. É importante notar que no caso do modelo BF puro a invariância sobre difeomorfismos é uma consequência da invariância sobre as transformações de calibre [36–38], mas aqui esta invariância deve ser construída.

Os difeomorfismos atuam sobre os índices μ, ν , logo pode-se desde já distinguir os difeomorfismos temporais e difeomorfismos espaciais (distinção que será justificada no desenvolvimento do método hamiltoniano). Um campo X se transforma infinitesimalmente como $\delta X(x) = \xi^\mu(x)\partial_\mu X(x)$, uma vez que $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$. Isto é:

$$\delta X(x) = \mathcal{L}_\xi X(x) \quad (3.12)$$

onde $\mathcal{L}_\xi X(x)$ é a derivada de Lie de $X(x)$ ao longo de ξ . O difeomorfismo dos tensores definidos na teoria pode ser calculado fazendo:

$$\delta A_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda A_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda A_\lambda \quad (3.13)$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda F_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda F_{\mu\lambda} \quad (3.14)$$

$$\delta B_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda B_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda B_\lambda \quad (3.15)$$

$$\delta \phi = \xi^\lambda \partial_\lambda \phi \quad (3.16)$$

$$\delta \bar{\phi} = \xi^\lambda \partial_\lambda \bar{\phi} \quad (3.17)$$

$$\delta e = \xi^\lambda \partial_\lambda e. \quad (3.18)$$

Sabe-se também que as simetrias de calibre nada mais são do que as transformações geradas pelos vínculos de primeira classe, que nestas teorias de calibre formam o hamiltoniano canônico. Espera-se que o tratamento canônico realizado nas seções seguintes forneça também as leis de invariância de difeomorfismos temporais e espaciais na forma de vínculos adicionais sobre o espaço de fase canônico.

3.3.1 Equações de movimento

Antes de se criar um *ansatz* para testar a invariância da ação S em relação às simetrias, pode-se variar a ação em relação às variáveis independentes da teoria $(A, B, \phi, \bar{\phi}, e)$ para se obter equações de movimento associadas. Parte-se então da ação S , equação (3.9), escrita como:

$$S[A, B, \phi, \bar{\phi}, e] = \int \text{Tr}(BF) + \lambda B D \bar{\phi} D \phi + e(\phi \bar{\phi} - 1)$$

onde a constante de acoplamento sigma foi absorvida por uma redefinição simples $e' = \sigma e$ e a constante de acoplamento BF foi absorvida fazendo $B' = \kappa B$. Varia-se A (δA) tomando $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int B d\delta A + \lambda B \delta A \bar{\phi} D \phi - \lambda B D \bar{\phi} \delta A \phi \\ &= \int \delta A (dB - \lambda B (\bar{\phi} D \phi + D \bar{\phi} \phi)) \\ \frac{\delta S}{\delta A} &= dB - \lambda B d(\bar{\phi} \phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde realizou-se uma integração por partes⁴ no primeiro termo (traço de $B \wedge F$) e permutações cíclicas entre formas pares (dB) e ímpares ($B, A, D\phi$), portanto (3.19) é a primeira equação de movimento.

Agora, varia-se B (δB) tomamos $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta B F + \delta B D \bar{\phi} D \phi \\ \frac{\delta S}{\delta B} &= F + d\bar{\phi} d\phi + A d(\bar{\phi} \phi) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

note que se usou $D\bar{\phi}D\phi = d\bar{\phi}d\phi + A(\bar{\phi}d\phi + d\bar{\phi}\phi)$ para obter a segunda equação de movimento (3.20).

⁴Vide seção A.4.3.

Varia-se ϕ ($\delta\phi$) tomando $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int BD\bar{\phi}D\delta\phi + e\bar{\phi}\delta\phi \\ &= \int \delta\phi(D(BD\bar{\phi}) + e\bar{\phi}) = \int \delta\phi(dBD\bar{\phi} - BF\bar{\phi} + e\bar{\phi})\end{aligned}\quad (3.21)$$

onde utilizou-se a identidade $D^2\bar{\phi} = F\bar{\phi}$ (equação A.68). Quer-se $\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0$, então:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = dBD\bar{\phi} - BF\bar{\phi} + e\bar{\phi} = 0. \quad (3.22)$$

e a variação do campo conjugado $\bar{\phi}$ é calculada de forma análoga

$$\begin{aligned}\delta S &= \int BD\delta\bar{\phi}D\phi + e\delta\bar{\phi}\phi \\ &= \int \delta\bar{\phi}(dBD\phi + BF\phi + e\phi) \\ \\ \frac{\delta S}{\delta\bar{\phi}} &= dBD\phi + BF\phi + e\phi = 0\end{aligned}\quad (3.23)$$

que nos dão a terceira equação (3.22) e a quarta equação (3.23) de movimento. Finalmente, varia-se e (δe) tomando $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \delta e(\phi\bar{\phi} - 1) \\ \frac{\delta S}{\delta e} &= \phi\bar{\phi} - 1 = 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

para se obter a quinta equação de movimento (3.24).

Repare que a parte não-dinâmica destas equações de movimento (3.19 , 3.20, 3.22, 3.23 e 3.24) deverá corresponder aos vínculos da teoria. Estas equações ainda podem ser combinadas para gerar um subconjunto de equações independentes:

$$dB = 0 \quad F = 0 \quad e = 0 \quad \bar{\phi}\phi = 1. \quad (3.25)$$

Na seção seguinte obter-se-á os vínculos de primeira classe e então poderemos comparar as invariâncias (3.25) da ação em relação a estas simetrias.

3.4 O Formalismo Canônico do modelo BF + Campos de matéria

A exemplo do método que foi desenvolvido extensamente na seção 2.4, faz-se então uma foliação na variedade $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \sigma$, que é a separação da parte espacial $\Sigma_t := X_t(\sigma)$ da temporal, onde $X_t : \sigma \rightarrow \mathcal{M}$ e $t \in \mathbb{R}$ definem uma família de hipersuperfícies $X_t(\sigma)$.

A ação S (3.10) escreve-se em 2+1 dimensões como:

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x dt [\varepsilon^{tab} B_t F_{ab} + \varepsilon^{atb} B_a F_{tb} + \varepsilon^{abt} B_a F_{bt}] + \int d^2x dt e [\phi \bar{\phi} - 1] \\ + \lambda \int d^2x dt [\varepsilon^{tab} B_t D_a \bar{\phi} D_b \phi + \varepsilon^{atb} B_a D_t \bar{\phi} D_b \phi + \varepsilon^{abt} B_a D_b \bar{\phi} D_t \phi]. \quad (3.26)$$

Então a lagrangiana escreve-se como:

$$L = \int d^2x \varepsilon^{ab} \left[\frac{1}{2} B_t F_{ab} - B_a \partial_t A_b - A_t \partial_b B_a \right] + e [\phi \bar{\phi} - 1] \\ + \lambda \varepsilon^{ab} [B_t D_a \bar{\phi} D_b \phi - B_a D_t \bar{\phi} D_b \phi + B_a D_b \bar{\phi} D_t \phi] \quad (3.27)$$

onde $\varepsilon^{tab} \equiv \varepsilon^{ab}$ é o tensor de Levi-Civita, completamente antissimétrico.

3.4.1 Os momentos conjugados

Para realizar a transformação de Legendre, primeiramente deve-se escrever os momentos conjugados aos campos $A, B, \phi, \bar{\phi}, e$:

$$\begin{aligned} {}^{(A)}\Pi^t(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_t(x))} = 0 \\ {}^{(B)}\Pi^t(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_t(x))} = 0 \\ {}^{(\phi)}\Pi(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \phi(x))} = \lambda \varepsilon^{ab} B_a D_b \bar{\phi} \\ {}^{(\bar{\phi})}\Pi(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \bar{\phi}(x))} = -\lambda \varepsilon^{ab} B_a D_b \phi \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
{}^{(e)}\Pi(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t e(x))} = 0 \\
{}^{(A)}\Pi^b(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_b(x))} = -\varepsilon^{ab} B_a \\
{}^{(B)}\Pi^a(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_a(x))} = 0.
\end{aligned}$$

Os colchetes de Poisson dos campos e seus momentos conjugados geram uma estrutura simplética:

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), {}^{(A)}\Pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^2(x-y) \\
\{B_\mu(x), {}^{(B)}\Pi^\nu(y)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^2(x-y) \\
\{\phi(x), {}^{(\phi)}\Pi(y)\} &= \delta^2(x-y) \\
\{\bar{\phi}(x), {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y)\} &= \delta^2(x-y) \\
\{e(x), {}^{(e)}\Pi(y)\} &= \delta^2(x-y)
\end{aligned}$$

e todos os demais colchetes são nulos:

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = \{{}^{(A)}\Pi^\mu(x), {}^{(A)}\Pi^\nu(y)\} = \{A_\mu(x), B_\nu(y)\} = \dots = 0.$$

Para o modelo BF “puro” descrito no capítulo 2, viu-se que as velocidades generalizadas das variáveis dinâmicas (A e B no caso) não podiam ser escritas em função das coordenadas e momentos generalizados, o que faz com que esses momentos sejam vínculos da teoria. No entanto sabe-se pelo resultado obtido na seção 2.4.7 que trata da definição do colchete de Dirac daquele modelo, que o cálculo da estabilidade dos vínculos primários é vastamente simplificado se tomarmos os momentos:

$${}^{(A)}\Pi^a(x) = \varepsilon^{ab} B_b \equiv \tilde{B}^a \quad (3.29)$$

$${}^{(B)}\Pi^a(x) = 0 \quad (3.30)$$

como igualdades fortes desde já.

Note que:

$$\tilde{B}^a(x) \equiv \varepsilon^{ab} B_b(x) \quad (3.31)$$

é uma notação para o *dual* de B . Considerar esta igualdade forte agora implica em considerar as variáveis A_a e \tilde{B}^a como um par canonicamente conjugado:

$$\{A_a, \tilde{B}^b\} = \delta_a^b \delta^2(x - y). \quad (3.32)$$

3.4.2 Sumário da estrutura simplética

Para fins de referência, resumizou-se a estrutura simplética do nosso espaço de fase, formado pelas variáveis:

$$A_\mu(x), B_\mu(x), \phi(x), \bar{\phi}(x), e(x), {}^{(A)}\Pi^\mu(x), {}^{(B)}\Pi^\mu(x), {}^{(\phi)}\Pi(x), {}^{(\bar{\phi})}\Pi(x), {}^{(e)}\Pi(x).$$

Os colchetes não-nulos são:

$$\{A_t(x), {}^{(A)}\Pi^t(y)\} = \delta^2(x - y) \quad (3.33)$$

$$\{B_t(x), {}^{(B)}\Pi^t(y)\} = \delta^2(x - y) \quad (3.34)$$

$$\{\phi(x), {}^{(\phi)}\Pi(y)\} = \delta^2(x - y) \quad (3.35)$$

$$\{\bar{\phi}(x), {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y)\} = \delta^2(x - y) \quad (3.36)$$

$$\{e(x), {}^{(e)}\Pi(y)\} = \delta^2(x - y) \quad (3.37)$$

$$\{A_a(x), \tilde{B}^b(y)\} = \delta_a^b \delta^2(x - y). \quad (3.38)$$

3.5 Hamiltoniana e Vínculos

Ao se considerar a lagrangiana $L(q, \dot{q})$, os momentos conjugados obtidos são independentes das velocidades generalizadas \dot{q} . No caso apresentado aqui, as velocidades não podem

ser trivialmente escritas como uma função dos momentos, característica de sistemas vinculados. Temos assim os vínculos primários:

$$\Phi_1 = {}^{(A)}\Pi^t(x) \approx 0 \quad (3.39)$$

$$\Phi_2 = {}^{(B)}\Pi^t(x) \approx 0 \quad (3.40)$$

$$\Phi_3 = {}^{(\phi)}\Pi(x) + \lambda \tilde{B}^a(x) D_a \bar{\phi}(x) \approx 0 \quad (3.41)$$

$$\Phi_4 = {}^{(\bar{\phi})}\Pi(x) - \lambda \tilde{B}^a(x) D_a \phi(x) \approx 0 \quad (3.42)$$

$$\Phi_5 = {}^{(e)}\Pi(x) \approx 0. \quad (3.43)$$

Note que o sinal \approx indica uma igualdade fraca, isto é, estas equações só se tornarão igualdades fortes após a resolução dos vínculos canonicamente.

Faz-se agora a transformação de Legendre para se obter a hamiltoniana canônica:

$$\begin{aligned} H_{\text{can}} &\equiv \int d^2x \mathcal{H}_{\text{can}}(x) = \int d^2x ({}^{(0)}\Pi \partial_t() - \mathcal{L}) \\ &= \int d^2x \left({}^{(A)}\Pi^a \partial_t A_a + {}^{(A)}\Pi^t \partial_t A_t + {}^{(B)}\Pi^t \partial_t B_t + {}^{(\phi)}\Pi \partial_t \phi + {}^{(\bar{\phi})}\Pi \partial_t \bar{\phi} + {}^{(e)}\Pi \partial_t e - \mathcal{L} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde se substituiu as expressões fracas para os momentos conjugados, observado desde já que a hamiltoniana total é definida como $H_{\text{tot}} = H_{\text{can}} + \sum_m \Lambda_m \Phi_m$, isto é, a hamiltoniana total contém a informação sobre os vínculos⁵. Explicitamente:

$$\begin{aligned} H_{\text{can}} &= \int d^2x \tilde{B}^a \partial_t A_a - \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi} \partial_t \phi + \lambda \tilde{B}^a D_a \phi \partial_t \bar{\phi} - \frac{\varepsilon^{ab}}{2} B_t F_{ab} - \tilde{B}^a \partial_t A_b - A_t \partial_b \tilde{B}^a \\ &\quad - \lambda \varepsilon^{ab} B_t D_a \bar{\phi} D_b \phi + \lambda \varepsilon^{ab} B_a D_t \bar{\phi} D_b \phi - \lambda \varepsilon^{ab} B_a D_b \bar{\phi} D_t \phi - e (\phi \bar{\phi} - 1) \\ &= \int d^2x - \frac{\varepsilon^{ab}}{2} B_t F_{ab} - A_t \partial_b \tilde{B}^a - \lambda \varepsilon^{ab} B_t D_a \bar{\phi} D_b \phi \\ &\quad + \lambda \varepsilon^{ab} B_a A_t \bar{\phi} D_b \phi + \lambda \varepsilon^{ab} B_a D_b \bar{\phi} A_t \phi - e (\phi \bar{\phi} - 1). \end{aligned}$$

Repare que ao combinar os termos de A_t , os termos $\bar{\phi} D_a \phi + D_a \bar{\phi} \phi = \partial_a (\bar{\phi} \phi)$ formam uma

⁵Adicionar uma combinação linear de expressões fracamente nulas não altera a hamiltoniana do sistema, uma vez que os vínculos serão resolvidos.

derivada total. H_{tot} vai ser:

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x (-A_t G - B_t G_0 - e(\bar{\phi}\phi - 1) + \Lambda_m \Phi_m) \quad (3.45)$$

onde

$$G = \partial_b \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a \partial_a (\bar{\phi}\phi), \quad G_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} F_{ab} + \lambda \varepsilon^{ab} D_a \bar{\phi} D_b \phi. \quad (3.46)$$

3.5.1 Estabilidade dos vínculos primários

Utiliza-se agora as equações de Hamilton para se verificar a estabilidade dos vínculos e a existência de vínculos secundários, aplicando o algoritmo de Dirac-Bergmann⁶.

As equações de Hamilton se escrevem, para f função dos (q, p) sem dependência explícita em relação ao tempo t :

$$\dot{f}(x) = \{f(x), H_{\text{tot}}\} + \underbrace{\frac{\partial f(x)}{\partial t}}_{=0} = \{f(x), \int d^2y [\mathcal{H}_{\text{can}} + \Lambda_m \Phi_m]\}. \quad (3.47)$$

E no algoritmo de Dirac-Bergmann verifica-se a estabilidade dos vínculos, fazendo $\dot{\Phi}_m \approx 0$, de forma que:

$$\int d^2y \{\Phi_m(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y)\} + \int d^2y \Lambda_n(y) \{\Phi_m(x), \Phi_n(y)\} \approx 0. \quad (3.48)$$

Para simplificar o cálculo da estabilidade dos vínculos será útil considerar as “médias ponderadas” [44]:

$$\Phi_n[\epsilon] = \int d^2x \epsilon(x) \Phi_n(x) \quad (3.49)$$

onde $\epsilon(x)$ é uma função de teste.

⁶Vide seção B.1.4.

Primeiro calcula-se a matriz dos colchetes de Poisson dos vínculos, $\Gamma_{mn} \equiv \{\Phi_m[\epsilon], \Phi_n[\eta]\}$ para $m, n = (1, 2, 3, 4, 5)$. O resultado é:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11} &= \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{14} = \Gamma_{15} = 0 \\ \Gamma_{22} &= \Gamma_{23} = \Gamma_{24} = \Gamma_{25} = 0\end{aligned}\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33} &= \int d^2x \int d^2y \{\Phi_3(\epsilon(x)), \Phi_3(\eta(y))\} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{\epsilon^{(\phi)}\Pi + \epsilon\lambda\tilde{B}^a D_a\bar{\phi}, \eta^{(\phi)}\Pi + \eta\lambda\tilde{B}^c D_c\bar{\phi}\} \\ &= \int +\epsilon\lambda D_a\bar{\phi}\{\tilde{B}^a(x), A_c(y)\}\eta\lambda\tilde{B}^c\bar{\phi} + \epsilon\lambda\tilde{B}^a\bar{\phi}\{A_a(x), \tilde{B}^c(y)\}\eta\lambda D_c\bar{\phi} \\ &= -\epsilon\eta\lambda^2 D_a\bar{\phi}\tilde{B}^a\bar{\phi} + \epsilon\eta\lambda^2 \tilde{B}^a\bar{\phi} D_a\bar{\phi} = 0\end{aligned}\tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{34} &= \int d^2x \int d^2y \{\Phi_3(\epsilon(x)), \Phi_4(\eta(y))\} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{\epsilon^{(\phi)}\Pi + \epsilon\lambda\tilde{B}^a D_a\bar{\phi}, \eta^{(\bar{\phi})}\Pi - \eta\lambda\tilde{B}^c D_c\phi\} \\ &= \int -\lambda\epsilon D_c\tilde{B}^c\eta - \lambda\epsilon\tilde{B}^c D_c\eta - \lambda\eta D_a\tilde{B}^a\epsilon - \lambda\eta\tilde{B}^a D_a\epsilon - \lambda^2\epsilon\eta\tilde{B}^a\partial_a(\bar{\phi}\phi) \\ &= \int -\epsilon\eta\lambda [\partial_a\tilde{B}^a + \lambda\tilde{B}^a\partial_a(\bar{\phi}\phi)]\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$\Gamma_{35} = \Gamma_{45} = \Gamma_{55} = 0\tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{44} &= \int d^2x \int d^2y \{\Phi_4(\epsilon(x)), \Phi_4(\eta(y))\} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{\epsilon^{(\bar{\phi})}\Pi - \epsilon\lambda\tilde{B}^a D_a\phi, \eta^{(\bar{\phi})}\Pi - \eta\lambda\tilde{B}^c D_c\phi\} \\ &= +\epsilon\eta\lambda^2 D_a\phi\tilde{B}^a\phi - \epsilon\eta\lambda^2 \tilde{B}^a\phi D_a\phi = 0.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Verificando Φ_1

Para verificar a estabilidade do vínculo Φ_1 , utiliza-se a equação (3.48) para $m = 1$. Então:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_1 &= \int d^2y \{ \Phi_1, \mathcal{H} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(A)}\Pi^t, -A_t [\partial_a \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a (D_a \bar{\phi} \phi + \bar{\phi} D_a \phi)] \} \\
&= \partial_a \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a (D_a \bar{\phi} \phi + \bar{\phi} D_a \phi) = G(x) \approx 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

o que define um novo vínculo da teoria $G(x) = \Phi_6$, o vínculo de Gauss. Note que:

$$\bar{\phi}(\partial_a - A_a)\phi + (\partial_a + A_a)\bar{\phi}\phi = \bar{\phi}\partial_a\phi + \partial_a\bar{\phi}\phi = \partial_a(\bar{\phi}\phi)$$

então o vínculo Φ_6 escreve-se simplesmente como:

$$\Phi_6 \equiv \partial_a \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a \partial_a (\bar{\phi} \phi) \tag{3.56}$$

e que também precisa ter sua estabilidade verificada.

Verificando Φ_2

Utilizando (3.48) para $m = 2$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_2 &= \int d^2y \{ \Phi_2, \mathcal{H} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(B)}\Pi^t, -B_t \left[\frac{\varepsilon^{ab}}{2} F_{ab} + \lambda \varepsilon^{ab} D_a \bar{\phi} D_b \phi \right] \} \\
&= \frac{\varepsilon^{ab}}{2} F_{ab} + \lambda \varepsilon^{ab} D_a \bar{\phi} D_b \phi = G_0(x) \approx 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

onde $G_0(x) \equiv \Phi_7$ é um novo vínculo da teoria, que chamamos de curvatura modificada.

Antes de verificarmos a estabilidade dos demais vínculos, vamos calcular mais alguns termos de interesse da matriz Γ , os Γ_{m6} e Γ_{m7} , para $m = 1, 2, \dots, 7$, uma vez que Φ_6 e Φ_7 estão explicitamente expressos na hamiltoniana (3.45):

$$\Gamma_{16} = \Gamma_{17} = \Gamma_{26} = \Gamma_{27} = 0 \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{36} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_3(\epsilon(x)), G(\eta(y)) \} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{ \epsilon^{(\phi)} \Pi + \epsilon \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}, \eta \partial_c \tilde{B}^c + \eta \lambda \tilde{B}^c \partial_c (\bar{\phi} \phi) \} \\ &= \int +\epsilon \eta \lambda \bar{\phi} (\partial_a \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a \partial_a (\bar{\phi} \phi)) = +G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{37} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_3(\epsilon(x)), G_0(\eta(y)) \} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{ \epsilon^{(\phi)} \Pi + \epsilon \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}, \eta \epsilon^{cd} \partial_c A_d + \eta \lambda \epsilon^{cd} D_c \bar{\phi} D_d \phi \} \\ &= \int -\epsilon \lambda \eta \bar{\phi} \left(\frac{\epsilon^{ab}}{2} F_{ab} + \lambda \epsilon^{ab} D_a \bar{\phi} D_b \phi \right) = -G_0(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{46} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_3(\epsilon(x)), G(\eta(y)) \} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{ \epsilon^{(\bar{\phi})} \Pi - \epsilon \lambda \tilde{B}^a D_a \phi, \eta \partial_c \tilde{B}^c + \eta \lambda \tilde{B}^c \partial_c (\bar{\phi} \phi) \} \\ &= \int +\epsilon \eta \lambda \phi (\partial_a \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a \partial_a (\bar{\phi} \phi)) = +G(\epsilon \eta \lambda \phi) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{47} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_4(\epsilon(x)), G_0(\eta(y)) \} \\ &= \int d^2x \int d^2y \{ \epsilon^{(\bar{\phi})} \Pi - \epsilon \lambda \tilde{B}^a D_a \phi, \eta \epsilon^{cd} \partial_c A_d + \eta \lambda \epsilon^{cd} D_c \bar{\phi} D_d \phi \} \\ &= \int -\epsilon \lambda \eta \left(\frac{\epsilon^{ab}}{2} F_{ab} + \lambda \epsilon^{ab} D_a \bar{\phi} D_b \phi \right) \phi = -G_0(\epsilon \eta \lambda \phi) \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\Gamma_{56} = \Gamma_{57} = 0$$

$$\Gamma_{66} = \Gamma_{77} = 0 \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{67} &= \int d^2x \int d^2y \{G(\epsilon(x)), G_0(\eta(y))\} \\
&= \int d^2x \int d^2y \{ \eta \partial_a \tilde{B}^a + \eta \lambda \tilde{B}^a \partial_a (\bar{\phi} \phi), \eta \epsilon^{cd} \partial_c A_d + \eta \lambda \epsilon^{cd} D_c \bar{\phi} D_d \phi \} \\
&= \int \lambda \epsilon^{ab} \partial_a (\epsilon \eta) \partial_b (\bar{\phi} \phi) = 0
\end{aligned} \tag{3.64}$$

note que em Γ_{67} utilizou-se uma integração por partes e o fato de que a derivada segunda exterior de uma forma é nula.

Verificando Φ_3

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_3 &= \int d^2y \{ \Phi_3, \mathcal{H} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(\phi)}\Pi + \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}, -A_t G - B_t G_0 - e(\bar{\phi} \phi - 1) + \Lambda_m \Phi_m \} \\
&= -A_t \lambda \bar{\phi} G + B_t \lambda \bar{\phi} G_0 + \int d^2y \{ {}^{(\phi)}\Pi, \phi \} (-e \bar{\phi}) + \Lambda_4 \{ \Phi_3, \Phi_4 \} \\
&= -A_t \lambda \bar{\phi} G + B_t \lambda \bar{\phi} G_0 + e \bar{\phi} - \Lambda_4 \lambda G \approx e \bar{\phi}
\end{aligned} \tag{3.65}$$

gera um novo vínculo $\Phi_8 \equiv e \bar{\phi} \approx 0$.

Verificando Φ_4

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_4 &= \int d^2y \{ \Phi_4, \mathcal{H} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi - \lambda \tilde{B}^a D_a \phi, -A_t G - B_t G_0 - e(\bar{\phi} \phi - 1) + \Lambda_m \Phi_m \} \\
&= -A_t \lambda \phi G + B_t \lambda \phi G_0 + \int d^2y \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \bar{\phi} \} (-e \phi) + \Lambda_3 \{ \Phi_4, \Phi_3 \} \\
&= -A_t \lambda \phi G + B_t \lambda \phi G_0 + e \phi + \Lambda_3 \lambda G \approx e \phi
\end{aligned} \tag{3.66}$$

gera um novo vínculo $\Phi_9 \equiv e \phi \approx 0$.

Verificando Φ_5

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_5 &= \int d^2y \{ \Phi_5, \mathcal{H} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(e)}\Pi, -A_t G - B_t G_0 - e(\phi\bar{\phi} - 1) + \Lambda_m \Phi_m \} \\
&= \int d^2y - \{ {}^{(e)}\Pi, e \} (\phi\bar{\phi} - 1) = \phi\bar{\phi} - 1 \approx 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Repare que $\phi\bar{\phi} \approx 1$ é uma nova relação entre nossas variáveis ϕ e $\bar{\phi}$, de forma que:

$$\Phi_{10} \equiv \phi\bar{\phi} - 1 \approx 0 \tag{3.68}$$

é um novo vínculo.

Os vínculos Φ_8 (3.65) e Φ_9 (3.66) não são independentes. Combina-se $\phi\Phi_8$ e $\bar{\phi}\Phi_9$ com a equação Φ_{10} (3.68), para se obter:

$$e \approx 0 \tag{3.69}$$

então as equações Φ_8 e Φ_9 podem ser substituídas por uma equação independente $\Phi_e \equiv e \approx 0$.

Neste ponto, pode-se usar Φ_e (3.69) e Φ_5 (3.43) para formar uma estrutura simplética entre a variável e e o momento ${}^{(e)}\Pi$, tomando estes dois vínculos como igualdades fortes:

$$\begin{aligned}
{}^{(e)}\Pi &= 0 \\
e &= 0.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Eles são trivialmente eliminados, pois todos os colchetes de Poisson envolvendo estes vínculos com os demais são nulos e o colchete entre eles não demanda alteração nos

colchetes de Poisson:

$$\Gamma_{5e} = \int d^2x d^2y \{ \Phi_5(\epsilon), \Phi_e(\eta) \} = \int \{ \epsilon^{(e)} \Pi, \eta e \} = -\epsilon \eta. \quad (3.71)$$

E a hamiltoniana total escreve-se como:

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x - A_t G(x) - B_t G_0(x) + \sum_{i=1}^4 \Lambda_i \Phi_i. \quad (3.72)$$

Note ainda que o elemento de matriz Γ_{34} (3.52) pode ser expresso como:

$$\Gamma_{34} = -G(\epsilon \eta \lambda) \quad (3.73)$$

o que facilita escrever a representação matricial de Γ_{mn} .

Antes de se verificar a estabilidade dos vínculos secundários, vamos calcular os Γ 's remanescentes com Φ_{10} :

$$\Gamma_{1,10} = \Gamma_{2,10} = 0 \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{3,10} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_3(\epsilon(x)), \Phi_{10}(\eta(y)) \} = \int d^2x \int d^2y \{ \epsilon^{(\phi)} \Pi + \epsilon \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}, \eta \phi \bar{\phi} - \eta \} \\ &= \int \epsilon \{^{(\phi)} \Pi, \phi \} \eta \bar{\phi} = -\bar{\phi}(\epsilon \eta) \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,10} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_4(\epsilon(x)), \Phi_{10}(\eta(y)) \} = \int d^2x \int d^2y \{ \epsilon^{(\bar{\phi})} \Pi - \epsilon \lambda \tilde{B}^a D_a \phi, \eta \phi \bar{\phi} - \eta \} \\ &= \int \epsilon \{^{(\bar{\phi})} \Pi, \bar{\phi} \} \eta \phi = -\phi(\epsilon \eta) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\Gamma_{6,10} = \Gamma_{7,10} = \Gamma_{10,10} = 0. \quad (3.77)$$

A Matriz $\Gamma_{mn} = \int d^2x \int d^2y \{\Phi_m(\epsilon(x)), \Phi_n(\eta(y))\}$ se escreve:

$$\begin{array}{c}
 \Phi_3 \quad \Phi_4 \quad G \quad G_0 \quad \Phi_{10} \\
 \left(\begin{array}{ccccc}
 0 & -G(\epsilon\eta\lambda) & +G(\epsilon\eta\lambda\bar{\phi}) & -G_0(\epsilon\eta\lambda\bar{\phi}) & -\bar{\phi}(\epsilon\eta) \\
 +G(\epsilon\eta\lambda) & 0 & +G(\epsilon\eta\lambda\phi) & -G_0(\epsilon\eta\lambda\phi) & -\phi(\epsilon\eta) \\
 -G(\epsilon\eta\lambda\bar{\phi}) & -G(\epsilon\eta\lambda\phi) & 0 & 0 & 0 \\
 +G_0(\epsilon\eta\lambda\bar{\phi}) & +G_0(\epsilon\eta\lambda\phi) & 0 & 0 & 0 \\
 +\bar{\phi}(\epsilon\eta) & +\phi(\epsilon\eta) & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \quad (3.78)
 \end{array}$$

não se incluiu Φ_1, Φ_2 uma vez que estes só produziriam linhas e colunas nulas, e Φ_5, Φ_8, Φ_9 já foram tomados como igualdades fortes.

3.5.2 Estabilidade dos vínculos secundários

Recapitulando, tem-se os seguintes vínculos primários remanescentes (3.39 - 3.42):

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= {}^{(A)}\Pi^t \approx 0 \\
 \Phi_2 &= {}^{(B)}\Pi^t \approx 0 \\
 \Phi_3 &= {}^{(\phi)}\Pi + \lambda\tilde{B}^a D_a \bar{\phi} \approx 0 \\
 \Phi_4 &= {}^{(\bar{\phi})}\Pi - \lambda\tilde{B}^a D_a \phi \approx 0.
 \end{aligned}$$

Que geram os seguintes vínculos secundários remanescentes (3.56, 3.57, 3.68):

$$\begin{aligned}
 G &= \partial_a \tilde{B}^a + \lambda\tilde{B}^a \partial_a (\bar{\phi}\phi) \approx 0 \\
 G_0 &= \frac{\varepsilon^{ab}}{2} F_{ab} + \lambda\varepsilon^{ab} D_a \bar{\phi} D_b \phi \approx 0 \\
 \Phi_{10} &= \bar{\phi}\phi - 1 \approx 0
 \end{aligned}$$

e que tal como os vínculos primários, precisam ter sua estabilidade verificada.

Verificando G

$$\begin{aligned}
\dot{G} &= \int d^2y \{G, \mathcal{H}\} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{G, -A_t G - B_t G_0 + \Lambda_m \Phi_m\} = \int \Lambda_3 \{G, \Phi_3\} + \Lambda_4 \{G, \Phi_4\} \\
&= -\lambda(\Lambda_3 \bar{\phi} + \Lambda_4 \phi) G \approx 0
\end{aligned} \tag{3.79}$$

como $\dot{G} \propto G \approx 0$, então G é estável.

Verificando G_0

$$\begin{aligned}
\dot{G}_0 &= \int d^2y \{G_0, \mathcal{H}\} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{G_0, -A_t G - B_t G_0 + \Lambda_m \Phi_m\} = \int \Lambda_3 \{G_0, \Phi_3\} + \Lambda_4 \{G_0, \Phi_4\} \\
&= \lambda(\Lambda_3 \bar{\phi} + \Lambda_4 \phi) G_0 \approx 0
\end{aligned} \tag{3.80}$$

como $\dot{G}_0 \propto G_0 \approx 0$, então G_0 é estável.

Verificando Φ_{10}

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{10} &= \int d^2y \{\Phi_{10}, \mathcal{H}\} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{\phi \bar{\phi} - 1, -A_t G - B_t G_0 + \Lambda_m \Phi_m\} = \int \Lambda_3 \{\phi \bar{\phi}, \Phi_3\} + \Lambda_4 \{\phi \bar{\phi}, \Phi_4\} \\
&= +\Lambda_3 \bar{\phi} + \Lambda_4 \phi
\end{aligned} \tag{3.81}$$

logo, a estabilidade de Φ_{10} determina Λ_3 em função de Λ_4 :

$$\Lambda_4 = -\Lambda_3 \bar{\phi} \phi^{-1} \quad (3.82)$$

sendo ϕ e $\bar{\phi}$ inversíveis. Finalmente a hamiltoniana (3.45) se reduz à:

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x \left[-A_t G(x) - B_t G_0(x) + \Lambda_1 \Phi_1 + \Lambda_2 \Phi_2 + \Lambda_3 (\Phi_3 - \bar{\phi} \phi^{-1} \Phi_4) \right]. \quad (3.83)$$

3.5.3 Troca de base dos vínculos

Os vínculos remanescentes ($\Phi_3, \Phi_4, G, G_0, \Phi_{10}$) podem ser redefinidos por uma combinação linear de vínculos de forma a maximizar o número de vínculos de 1ª classe (até então Φ_1 e Φ_2).

Tomou-se via *ansatz*⁷:

$$\begin{aligned} \Phi'_4 &= \phi \Phi_3 - \bar{\phi} \Phi_4 = \phi ({}^{(\phi)}\Pi + \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}) - \bar{\phi} ({}^{(\bar{\phi})}\Pi - \lambda \tilde{B}^a D_a \phi) \\ &= \phi ({}^{(\phi)}\Pi - \bar{\phi} ({}^{(\bar{\phi})}\Pi + \lambda \tilde{B}^a \partial_a (\phi \bar{\phi})). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Se $G = \partial_a \tilde{B}^a + \lambda \tilde{B}^a \partial(\phi \bar{\phi})$, pode-se escrever $G' = G - \Phi'_4$ para obter:

$$G' = \partial_a \tilde{B}^a - \phi ({}^{(\phi)}\Pi + \bar{\phi} ({}^{(\bar{\phi})}\Pi). \quad (3.85)$$

Para estes *ansatz*:

$$\begin{aligned} \Gamma_{4'3} &= \int d^2x d^2y \{ \Phi'_4(\epsilon), \Phi_3(\eta) \} = \int \{ \phi \Phi_3(\epsilon) - \bar{\phi} \Phi_4(\epsilon), \Phi_3(\eta) \} \\ &= \Phi_3(\epsilon \eta) - \bar{\phi} G(\epsilon \eta \lambda) \approx 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\Gamma_{4'4'} = \int d^2x d^2y \{ \Phi'_4(\epsilon), \Phi'_4(\eta) \} = \int \{ \phi \Phi_3(\epsilon) - \bar{\phi} \Phi_4(\epsilon), \phi \Phi_3(\eta) - \bar{\phi} \Phi_4(\eta) \} = 0 \quad (3.87)$$

⁷Esse *ansatz* é inspirado pelo termo que multiplica Λ_3 em (eq. 3.83).

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4'G'} &= \int d^2x d^2y \{ \Phi'_4(\epsilon), G'(\eta) \} = \int \{ \phi \Phi_3(\epsilon) - \bar{\phi} \Phi_4(\epsilon), G(\eta) - \Phi'_4(\eta) \} \\
&= G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi} \phi) - G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi} \phi) = 0
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4'G_0} &= \int d^2x d^2y \{ \Phi'_4(\epsilon), G_0(\eta) \} = \int \{ \phi \Phi_3(\epsilon) - \bar{\phi} \Phi_4(\epsilon), G_0(\eta) \} \\
&= -G_0(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi} \phi) + G_0(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi} \phi) = 0
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{4'10} &= \int d^2x d^2y \{ \Phi'_4(\epsilon), \Phi_{10}(\eta) \} = \int \{ \phi \Phi_3(\epsilon) - \bar{\phi} \Phi_4(\epsilon), \Phi_{10}(\eta) \} \\
&= -\epsilon \eta \bar{\phi} \phi + \epsilon \eta \bar{\phi} \phi = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{G'3} &= \int d^2x d^2y \{ G'(\epsilon), \Phi_3(\eta) \} = \int \{ G(\epsilon) - \Phi'_4(\epsilon), \Phi_3(\eta) \} \\
&= -G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) - (\Phi_3(\epsilon \eta) - G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi})) = -\Phi_3(\epsilon \eta) \approx 0
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\Gamma_{G'G'} = 0 \tag{3.92}$$

$$\Gamma_{G'G_0} = \int d^2x d^2y \{ G'(\epsilon), G_0(\eta) \} = \int \{ G(\epsilon) - \Phi'_4(\epsilon), G_0(\eta) \} = 0 \tag{3.93}$$

$$\Gamma_{G'10} = \int d^2x d^2y \{ G'(\epsilon), \Phi_{10}(\eta) \} = \int \{ G(\epsilon) - \Phi'_4(\epsilon), \Phi_{10}(\eta) \} = 0. \tag{3.94}$$

Então tem-se uma matriz Γ'_{mn} na nova base:

$$\begin{array}{c}
\Phi_3 \\
\Phi'_4 \\
G' \\
G_0 \\
\Phi_{10}
\end{array}
\begin{pmatrix}
\Phi_3 & \Phi'_4 & G' & G_0 & \Phi_{10} \\
0 & +G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) - \Phi_3(\epsilon \eta) & +\Phi_3(\epsilon \eta) & -G_0(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) & -\bar{\phi}(\epsilon \eta) \\
-G(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) + \Phi_3(\epsilon \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\Phi_3(\epsilon \eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+G_0(\epsilon \eta \lambda \bar{\phi}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+\bar{\phi}(\epsilon \eta) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Esta matriz é fracamente igual a:

$$\Gamma'' = \begin{matrix} & \Phi_3 & \Phi'_4 & G' & G_0 & \Phi_{10} \\ \begin{matrix} \Phi_3 \\ \Phi'_4 \\ G' \\ G_0 \\ \Phi_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{\phi}(\epsilon\eta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\bar{\phi}(\epsilon\eta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (3.95)$$

Analisando rapidamente a hamiltoniana (3.83), vê-se que $\{\Phi'_4, H_{\text{tot}}\} \approx \{G', H_{\text{tot}}\} \approx \{G_0, H_{\text{tot}}\} \approx 0$ e obtém-se uma separação explícita dos vínculos de 1ª e 2ª classe, como mostrados na tabela abaixo:

| Vínculo | Primário | Secundário |
|-----------------|------------------|--------------------|
| Primeira Classe | Φ_1, Φ_2 | Φ'_4, G', G_0 |
| Segunda Classe | Φ_3 | Φ_{10} |

A matriz $\Delta_{ss'}$ dos vínculos de 2ª classe remanescentes ($s, s' = 3, 10$) vai ser:

$$\Delta_{ss'} = \{\Phi_s(x), \Phi_{s'}(x)\} = -\varepsilon^{ss'} \bar{\phi} \delta^2(x - y). \quad (3.96)$$

Que é facilmente invertida:

$$\Delta_{ss'}^{-1} = +\varepsilon^{ss'} \bar{\phi}^{-1} \delta^2(x - y). \quad (3.97)$$

Logo, pode-se definir os Colchetes de Dirac⁸:

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{ss'} \int \{f, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, g\} \quad (3.98)$$

e neste novo colchete pode-se tomar $\Phi_s = 0$ (fortemente nulos), pois para qualquer função

⁸Note que no cálculo do colchete de Dirac estamos integrando um produto de colchetes, logo os termos não-nulos do segundo termo são um produto de funções delta, e este produto deve ser visto como uma convolução.

f :

$$\begin{aligned}
\{f, \Phi_s\}_D &= \{f, \Phi_s\} - \{f, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, \Phi_s\} \\
&= \{f, \Phi_s\} - \{f, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \Delta_{s's} \\
&= \{f, \Phi_s\} - \{f, \Phi_s\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Então tem-se as seguintes igualdades fortes:

$$\begin{aligned}
{}^{(\phi)}\Pi &= -\lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi} \\
\phi \bar{\phi} &= 1
\end{aligned} \tag{3.100}$$

que impõem condições severas sobre as variáveis ϕ e $\bar{\phi}$, afetando a sua álgebra. Note que ϕ e ${}^{(\phi)}\Pi$ não são mais variáveis independentes, e sim funções de $\bar{\phi}$ e ${}^{(\bar{\phi})}\Pi$. Calculando colchetes de Dirac sobre as variáveis ϕ e $\bar{\phi}$:

$$\{\phi, \phi\}_D = \{\phi, \phi\} - \sum_{ss'} \int \{\phi, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, \phi\} = 0 \tag{3.101}$$

$$\{\bar{\phi}, \bar{\phi}\}_D = \{\bar{\phi}, \bar{\phi}\} - \sum_{ss'} \int \{\bar{\phi}, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, \bar{\phi}\} = 0 \tag{3.102}$$

$$\{\phi, \bar{\phi}\}_D = \{\bar{\phi}, \phi\}_D = 0 \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi, {}^{(\phi)}\Pi\}_D &= \{\phi, {}^{(\phi)}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{\phi, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\phi)}\Pi\} \\
&= \delta^2(x-y) - \int \{\phi, \Phi_3\} \Delta_{3,10}^{-1} \{\Phi_{10}, {}^{(\phi)}\Pi\} \\
&= \delta^2(x-y) - \int \delta^2(x-s) \bar{\phi}^{-1} \delta^2(s'-s) \bar{\phi} \delta^2(s'-y) = 0
\end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\}_D &= \{\phi, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{\phi, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} \\
&= 0 - \int \{\phi, \Phi_3\} \Delta_{3,10}^{-1} \{\Phi_{10}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} \\
&= -\frac{\phi}{\bar{\phi}} \delta^2(x-y) = -\phi^2 \delta^2(x-y)
\end{aligned} \tag{3.105}$$

note que se $\phi\bar{\phi} = 1$, então $\phi = \frac{1}{\bar{\phi}}$ e $\frac{\phi}{\bar{\phi}} = \phi^2$.

$$\{\bar{\phi}, {}^{(\phi)}\Pi\}_D = \{\bar{\phi}, {}^{(\phi)}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{\bar{\phi}, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\phi)}\Pi\} = 0 \quad (3.106)$$

$$\{\bar{\phi}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\}_D = \{\bar{\phi}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{\bar{\phi}, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} = \delta^2(x - y) \quad (3.107)$$

$$\{ {}^{(\phi)}\Pi, {}^{(\phi)}\Pi\}_D = \{ {}^{(\phi)}\Pi, {}^{(\phi)}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{ {}^{(\phi)}\Pi, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\phi)}\Pi\} = 0 \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\}_D &= \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} \\ &= 0 - \int \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \Phi_3\} \Delta_{3,10}^{-1} \{\Phi_{10}, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} - \int \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \Phi_{10}\} \Delta_{10,3}^{-1} \{\Phi_3, {}^{(\bar{\phi})}\Pi\} \\ &= 0 + \lambda \tilde{B}^a D_a^y \delta^2(x - s) \bar{\phi}^{-1} \delta^2(s - s') \phi \delta^2(s' - y) \\ &\quad - \phi \delta^2(x - s) \bar{\phi}^{-1} \delta^2(s - s') \lambda \tilde{B}^a D_a^x \delta^2(s' - y) = 0 \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$\begin{aligned} \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, {}^{(\phi)}\Pi\}_D &= \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, {}^{(\phi)}\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, {}^{(\phi)}\Pi\} \\ &= 0 - \int \{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \Phi_3\} \Delta_{3,10}^{-1} \{\Phi_{10}, {}^{(\phi)}\Pi\} \\ &= 0 + \lambda \partial_a (\tilde{B}^a \delta^2) - \lambda D_a \tilde{B}^a \delta^2. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Também calcula-se a ação dos colchetes de Dirac sobre o outro par canônico de variáveis, (A_a, \tilde{B}^a) . O colchete de Dirac de A_a com uma função g qualquer escreve-se:

$$\begin{aligned} \{A, g\}_D &= \{A, g\} - \{A, \Phi_3\} \phi \{\Phi_{10}, g\} \\ &= \{A, g\} - \{A, \lambda \tilde{B} D \bar{\phi}\} \phi \{\phi \bar{\phi}, g\}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Observando o segundo termo, vê-se que só haverá modificações no colchete envolvendo

A_a com a variável independente $(\bar{\phi})\Pi$:

$$\begin{aligned}
\{A_a, (\bar{\phi})\Pi\}_D &= \{A_a, (\bar{\phi})\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{A_a, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, (\bar{\phi})\Pi\} \\
&= 0 - \int \{A_a, \lambda \tilde{B}^b D_b \bar{\phi}\} \phi \{\phi \bar{\phi}, (\bar{\phi})\Pi\} \\
&= -\lambda D_a \bar{\phi} \delta^2(x-y) \phi^2 = \lambda \delta^2(x-y) D_a \bar{\phi}^{-1}
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Analogamente para \tilde{B}^a :

$$\begin{aligned}
\{\tilde{B}^a, (\bar{\phi})\Pi\}_D &= \{\tilde{B}^a, (\bar{\phi})\Pi\} - \sum_{ss'} \int \{\tilde{B}^a, \Phi_s\} \Delta_{ss'}^{-1} \{\Phi_{s'}, (\bar{\phi})\Pi\} \\
&= 0 - \int \{\tilde{B}^a, \lambda \tilde{B}^b A_b \bar{\phi}\} \phi \{\phi \bar{\phi}, (\bar{\phi})\Pi\} \\
&= +\lambda \tilde{B}^a \bar{\phi} \delta^2(x-y) \phi^2 = \lambda \delta^2(x-y) \tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Pode-se sumarizar os resultados nesta seção ao dizer que obteve-se as variáveis independentes A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e $(\bar{\phi})\Pi$ como coordenadas do espaço de fase reduzido, que tem a seguinte estrutura simplética gerada pelos colchetes de Dirac:

$$\begin{aligned}
\{A_a(x), \tilde{B}^b(y)\}_D &= \delta_a^b \delta^2(x-y) \\
\{A_a(x), (\bar{\phi})\Pi(y)\}_D &= \lambda D_a \bar{\phi}^{-1} \delta^2(x-y) \\
\{\tilde{B}^a(x), (\bar{\phi})\Pi(y)\}_D &= \lambda \tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1} \delta^2(x-y) \\
\{\bar{\phi}(x), (\bar{\phi})\Pi(y)\}_D &= \delta^2(x-y)
\end{aligned}$$

e todos os demais colchetes são nulos:

$$\{A_a(x), A_b(y)\}_D = \{A_a(x), \bar{\phi}(y)\}_D = \{\tilde{B}^a(x), \tilde{B}^b(y)\}_D = \{\tilde{B}^a(x), \bar{\phi}(y)\}_D = \dots = 0.$$

3.5.4 A forma final da hamiltoniana

A Hamiltoniana total (3.83) do nosso sistema agora se escreve:

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x [-A_t G(x) - B_t G_0(x) - \Lambda_3 \Phi_0(x)] \quad (3.114)$$

onde

$$G = \partial_a \tilde{B}^a, \quad G_0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} F_{ab}, \quad \Phi_0 \equiv \bar{\phi}^2 \Phi_4 = \bar{\phi}^2 (\bar{\phi}) \Pi + \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}. \quad (3.115)$$

Como os campos $-A_t^I$, $-B_t^I$ e $-\Lambda_3$ são multiplicadores de Lagrange para os vínculos G , G_0 e Φ_0 , pode-se reescrever a hamiltoniana total como:

$$\boxed{H_{\text{tot}} = \int_{\Sigma} d^2x (\Lambda_G G + \Lambda_{G_0} G_0 + \Lambda_{\Phi_0} \Phi_0)} \quad (3.116)$$

que é uma hamiltoniana completamente vinculada, o que se espera de uma teoria de calibre topológica, tal como a hamiltoniana vista anteriormente para o caso BF “puro” (Seção 2.5.2).

3.6 Os vínculos de primeira classe e a invariância da hamiltoniana - Modelo Abelian

Os vínculos de primeira classe G , G_0 e Φ_0 são aqueles que geram as simetrias de calibre da teoria. Como uma verificação do desenvolvimento canônico realizado, calculou-se as transformações das variáveis independentes sobre estas simetrias comparando com os resultados obtidos na seção 3.3 variando-se a ação.

Vamos agora calcular os colchetes de Dirac destes termos da hamiltoniana (3.114) (que são vínculos) com as variáveis independentes A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e $(\bar{\phi})\Pi$, para descobrir os parâmetros das transformações infinitesimais de calibre associadas aos termos da hamiltoniana. H é

um invariante sobre as transformações geradas por estes vínculos, portanto estas transformações são simetrias do sistema⁹:

$$\delta_{(i)}g(x) = \{g(x), \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_i \Phi_i(y)\}. \quad (3.117)$$

Escreve-se agora a transformação infinitesimal δ_G , gerada pelo vínculo G que age sobre as variáveis A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e $(\bar{\phi})\Pi$:

$$\begin{aligned} \delta_G A_a(x) &= \{A_a(x), \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_G(y) \partial_b^y \tilde{B}^b(y)\} \\ &= - \int_{\Sigma} d^2y \partial_b^y \Lambda_G(y) \delta_a^b \delta^2(y-x) = -\partial_a \Lambda_G(x) \end{aligned} \quad (3.118)$$

$$\delta_G \tilde{B}^a(x) = \{\tilde{B}^a(x), \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_G(y) \partial_b^y \tilde{B}^b(y)\} = 0 \quad (3.119)$$

$$\delta_G \bar{\phi}(x) = \{\bar{\phi}, \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_G(y) \partial_a^y \tilde{B}^a(y)\} = 0 \quad (3.120)$$

$$\begin{aligned} \delta_G (\bar{\phi})\Pi(x) &= \{(\bar{\phi})\Pi, \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_G(y) \partial_a^y \tilde{B}^a(y)\} \\ &= - \int_{\Sigma} d^2y \partial_a^y \Lambda_G(y) \lambda \tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1} \delta^2(y-x) = -\lambda \tilde{B}^a(x) \bar{\phi}^{-1}(x) \partial_a \Lambda_G(x). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Escrevem-se as transformações não-nulas considerando $\epsilon_1 = -\lambda_G$ como parâmetro infinitesimal:

$$\begin{cases} \delta_G A_a = \partial_a \epsilon_1 \\ \delta_G (\bar{\phi})\Pi = +\lambda \tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1} \partial_a \epsilon_1 \end{cases} \quad (3.122)$$

Agora, escreve-se a transformação infinitesimal δ_{G_0} , gerada pelo vínculo G_0 que age sobre

⁹Daqui em diante omitiremos o subíndice “ D ” nos colchetes de Dirac.

as variáveis A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e $(\bar{\phi})\Pi$:

$$\delta_{G_0} A_a^I(x) = 0 \quad (3.123)$$

$$\begin{aligned} \delta_{G_0} \tilde{B}^a(x) &= \{ \tilde{B}^a(x), \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{G_0}(y) \frac{1}{2} \varepsilon^{bc} F_{bc}(y) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \varepsilon^{ba} \partial_b \Lambda_{G_0}(y) \delta^2(x-y) = -\varepsilon^{ab} \partial_b \Lambda_{G_0}(x) \end{aligned} \quad (3.124)$$

$$\delta_{G_0} \bar{\phi}(x) = \{ \bar{\phi}, \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{G_0}(y) \frac{1}{2} \varepsilon^{bc} F_{bc}(y) \} = 0 \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} \delta_{G_0} (\bar{\phi})\Pi(x) &= \{ (\bar{\phi})\Pi, \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{G_0}(y) \frac{1}{2} \varepsilon^{bc} F_{bc}(y) \} \\ &= - \int_{\Sigma} d^2y \varepsilon^{bc} \partial_b \Lambda_{G_0}(y) \lambda D_c^y \bar{\phi}^{-1}(y) \delta^2(x-y) = -\lambda \varepsilon^{bc} D_c \bar{\phi}^{-1}(x) \partial_b \Lambda_{G_0}(x) \end{aligned} \quad (3.126)$$

então as transformações não-nulas geradas por G_0 , onde $\epsilon_2 = -\Lambda_{G_0}$ faz o papel de parâmetro infinitesimal são dadas por

$$\begin{cases} \delta_{G_0} B_a = \partial_a \epsilon_2 \\ \delta_{G_0} (\bar{\phi})\Pi = \lambda \varepsilon^{ab} D_b \bar{\phi}^{-1} \partial_a \epsilon_2. \end{cases} \quad (3.127)$$

G_0 gera o segundo tipo de transformações de calibre do modelo BF, chamadas de tipo 2 e que estão presentes no nosso modelo. Por último, escreve-se a transformação infinitesimal δ_{Φ_0} , gerada pelo vínculo Φ_0 que age sobre as variáveis A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e $(\bar{\phi})\Pi$:

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi_0} A_a(x) &= \{ A_a(x), \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) (\bar{\phi}^2(y) (\bar{\phi})\Pi(y) + \lambda \tilde{B}^b(y) D_b^y \bar{\phi}(y)) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) (\bar{\phi}^2(y) \lambda D_a \bar{\phi}^{-1}(x) + \lambda D_a^y \bar{\phi}(y)) \delta^2(y-x) = 0 \end{aligned} \quad (3.128)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi_0} \tilde{B}^a(x) &= \{ \tilde{B}^a(x), \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) (\bar{\phi}^2(y) (\bar{\phi})\Pi(y) + \lambda \tilde{B}^b(y) D_b^y \bar{\phi}(y)) \} \\ &= \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) (\bar{\phi}^2(y) \lambda \tilde{B}^a(x) \bar{\phi}^{-1}(x) - \lambda \tilde{B}^a(y) \bar{\phi}(y)) \delta^2(x-y) = 0 \end{aligned} \quad (3.129)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\Phi_0} \bar{\phi}(x) &= \left\{ \bar{\phi}, \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) (\bar{\phi}^2(y) {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y) + \lambda \tilde{B}^b(y) D_b^y \bar{\phi}(y)) \right\} \\
&= \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) \bar{\phi}^2(y) \delta^2(x-y) = \Lambda_{\Phi_0}(x) \bar{\phi}^2(x)
\end{aligned} \tag{3.130}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\Phi_0} {}^{(\bar{\phi})}\Pi(x) &= \left\{ {}^{(\bar{\phi})}\Pi, \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) (\bar{\phi}^2(y) {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y) + \lambda \tilde{B}^b(y) D_b^y \bar{\phi}(y)) \right\} \\
&= - \int_{\Sigma} d^2y \Lambda_{\Phi_0}(y) \left[2\bar{\phi}(y) {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y) + \lambda \Lambda_{\Phi_0}(y) \partial_a^y \tilde{B}^a(y) \right. \\
&\quad \left. - \lambda \partial_a^y \Lambda_{\Phi_0}(y) \tilde{B}^a(y) \right] \delta^2(x-y) \\
&= -2\Lambda_{\Phi_0} \bar{\phi}(x) {}^{(\bar{\phi})}\Pi(x) - \lambda \Lambda_{\Phi_0}(x) \partial_a \tilde{B}^a(x) + \lambda \partial_a \Lambda_{\Phi_0}(x) \tilde{B}^a(x).
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Pode-se escrever as transformações não-nulas tomando um parâmetro infinitesimal de carga neutra $\epsilon_3 = -\bar{\phi} \Lambda_{\Phi_0}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{\Phi_0} \bar{\phi} = -\epsilon_3 \bar{\phi} \\ \delta_{\Phi_0} \phi = +\epsilon_3 \phi \\ \delta_{\Phi_0} {}^{(\bar{\phi})}\Pi = (2 {}^{(\bar{\phi})}\Pi + \lambda \partial_a (\tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1})) \epsilon_3 + \lambda \tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1} \partial_a \epsilon_3 \end{array} \right. \tag{3.132}$$

para se obter uma forma mais conhecida tal como nas equações (3.11)¹⁰. Note que as transformações de G (3.122) e Φ_0 (3.132) geram as transformações de calibre tipo YM espaciais que vimos na seção 3.3.

Na teoria quântica, G , G_0 e Φ_0 serão promovidos a operadores \hat{G} , \hat{G}_0 e $\hat{\Phi}_0$, geradores dos grupos de simetria. Os estados $|\psi\rangle$ que obedecem $\hat{G}|\psi\rangle = 0$, $\hat{G}_0|\psi\rangle = 0$ e $\hat{\Phi}_0|\psi\rangle = 0$ não ser os estados físicos, invariantes sobre as transformações de calibre.

3.6.1 A álgebra dos geradores de transformações

Nas seções anteriores escreveu-se a hamiltoniana do modelo BF completamente vinculada e foi mostrado que estes vínculos geram as transformações de calibre da teoria. Vamos

¹⁰ $\delta_{\Phi_0} \phi = \delta_{\Phi_0} \bar{\phi}^{-1}$ foi escrito para facilitar a comparação com a seção 3.3.

então analisar a álgebra dos vínculos da hamiltoniana do caso abeliano:

$$G(\epsilon_1) = \int d^2x \epsilon_1(x) \partial_a \tilde{B}^a(x) \quad (3.133)$$

$$G_0(\epsilon_2) = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon_2(x) \varepsilon^{ab} F_{ab}(x) \quad (3.134)$$

$$\Phi_0(\epsilon_3) = \int d^2x \epsilon_3(x) (\bar{\phi}(x) {}^{(\bar{\phi})} \Pi(x) + \lambda \bar{\phi}^{-1}(x) \tilde{B}^a(x) D_a \bar{\phi}(x)). \quad (3.135)$$

Os colchetes entre os vínculos G , G_0 e Φ_0 formam uma álgebra fechada:

$$\begin{aligned} \{G(\epsilon_1), G(\epsilon'_1)\} &= 0, & \{G(\epsilon_1), G_0(\epsilon_2)\} &= 0, & \{G(\epsilon_1), \Phi_0(\epsilon_3)\} &= 0 \\ \{G_0(\epsilon_2), G_0(\epsilon'_2)\} &= 0, & \{G_0(\epsilon_2), \Phi_0(\epsilon_3)\} &= 0 \\ \{\Phi_0(\epsilon_3), \Phi_0(\epsilon'_3)\} &= 0. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Pode-se pensar nos vínculos da hamiltoniana também como sendo equações que restringem o espaço de fase a uma hipersuperfície vinculada, portanto pode-se calcular o número de graus de liberdade do espaço de fase considerando a dimensionalidade dos campos independentes:

$$\begin{aligned} A_a &: a = (1, 2) \rightarrow \dim = 2 \\ \tilde{B}^a &: a = (1, 2) \rightarrow \dim = 2 \\ \bar{\phi} &: \dim = 1 \\ {}^{(\bar{\phi})} \Pi &: \dim = 1. \end{aligned}$$

Isto é, em cada ponto x do espaço de fase tem-se o número \dim igual a 6 devido aos campos independentes. A dimensão dos parâmetros associados às simetrias é:

$$\epsilon_1 : \dim = 1, \quad \epsilon_2 : \dim = 1, \quad \epsilon_3 : \dim = 1.$$

como cada parâmetro retira 2 \dim do espaço de fase já que cada parâmetro está associado à implementação de um vínculo, então o espaço de fase vai possuir $6 - 3 \times 2 = 0$ graus de liberdade físicos, o que concorda com as equações de movimento obtidas (3.25).

Capítulo 4

Modelo BF com Campos de Matéria - Caso Não-Abeliano

Trataremos agora neste capítulo do caso não-abeliano do modelo desenvolvido no capítulo 3, considerando nosso grupo não-abeliano como um grupo da classe $G = \text{SO}(n, 3 - n)$, com $n = (1, 2, 3)$.

4.1 Definições e Convenções

4.1.1 O grupo de calibre $\text{SO}(n, 3 - n)$

Seja G um grupo pseudo-ortogonal¹ da classe $\text{SO}(n, N - n)$.

A dimensão D do grupo G , igual ao número de geradores independentes, é dada por $\frac{1}{2}N(N - 1)$. Em particular, escolhe-se trabalhar aqui com $N = 3$, então se tem $D = 3$ geradores independentes de forma que $\dim G = 3$.

No caso $\text{SO}(n, 3 - n)$, o inteiro n pode assumir valores $(1, 2, 3)$, que irão determinar a assinatura da métrica do grupo $\eta_{IJ} = \text{diag}(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, onde por exemplo para $n = 1$,

¹Vide apêndice A.1.

$G = \text{SO}(1, 2)$ equivalente a métrica de Minkowski $\eta_{IJ} = (-1, 1, 1)$ ou ainda para $n = 3$ e $G = \text{SO}(3)$ a métrica euclidiana $\eta_{IJ} = (1, 1, 1)$. Escreve-se a seguinte relação entre os geradores para as propriedades definidas acima:

$$(R)^I{}_J : \eta_{KJ}(R)^K{}_I + \eta_{KI}(R)^K{}_J = 0 \quad (4.1)$$

para o caso de η_{KJ} ser a métrica de Minkowski e $(R)^K{}_I$ matrizes de rotação de Lorentz, tem-se simplesmente $(R)_{JI} + (R)_{IJ} = 0$, isto é, (R) é completamente antissimétrico quando todos os índices estão abaixados ou levantados por uma métrica de Minkowski bilinear e simétrica.

Define-se então uma base para representar os geradores que respeite as propriedades dos mesmos:

$$(R_{MN})^{IJ} = \delta_M^I \delta_N^J - \delta_M^J \delta_N^I \quad (4.2)$$

são resultados antissimétricos em $I \leftrightarrow J$, bem como em $M \leftrightarrow N$. Por exemplo:

$$(R_{MN})^I{}_J = \eta_{JJ'}(R_{MN})^{IJ'} = \delta_M^I \eta_{JN} - \delta_N^I \eta_{JM}.$$

Uma vez conhecida a base dos geradores de simetrias, definiremos as transformações dos campos independentes do modelo, como $A^I{}_{\mu J}$ (conexão), $B_{\mu IJ}$ (campo conjugado) e ϕ^I (campo escalar)² na subseção seguinte.

4.1.2 As leis de transformação dos campos independentes

A transformação para ϕ^I , considerando um parâmetro infinitesimal $\epsilon^{MN} = -\epsilon^{NM}$ é definida por:

$$\delta\phi^I = -\epsilon^I{}_J \phi^J. \quad (4.3)$$

²Para simplificar a notação tomamos $\phi^I = \frac{1}{2}\epsilon^I{}_{JK}\phi^{JK}$ correspondendo à representação fundamental, idêntica à representação adjunta no caso do grupo $G = \text{SO}(n, 3 - n)$.

A derivada covariante

$$D_\mu \phi^I = \partial_\mu \phi^I + A_{\mu J}^I \phi^J \equiv \delta_J^I \partial_\mu \phi^J + A_{\mu J}^I \phi^J = D_{\mu J}^I \phi^J \quad (4.4)$$

define as leis de transformações da conexão A_μ , pois ao variar $\delta(D\phi)$ define-se como δA deve se transformar:

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu \phi^I) &= -\partial_\mu (\epsilon^I{}_J \phi^J) + \delta A_{\mu J}^I \phi^J - A_{\mu J}^I \epsilon^J{}_K \phi^K \\ &= -\epsilon^I{}_J D_\mu \phi^J + [\delta A_{\mu J}^I \phi^J - \partial_\mu \epsilon^I{}_J \phi^J - A_{\mu J}^I \epsilon^J{}_K \phi^K + \epsilon^I{}_J A_{\mu K}^J \phi^K]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Quer-se que os termos dentro dos colchetes da equação (4.5) se anulem, o que estará realizado tomando:

$$\delta A_{\mu J}^I = \partial_\mu \epsilon^I{}_J + [A_\mu, \epsilon]^I{}_J \quad (4.6)$$

que resulta em

$$\delta \phi^I = -\epsilon^I{}_J \phi^J \quad \text{e} \quad \delta D\phi^I = -\epsilon^I{}_J D_\mu \phi^J. \quad (4.7)$$

Define-se a curvatura de Yang-Mills³ $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ como:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{IJ} &= \eta^{IK} \partial_\mu A_\nu^J{}_K - \eta^{IK} \partial_\nu A_\mu^J{}_K + \frac{1}{2} \eta^{IK} (A_{\mu L}^J A_\nu^L{}_K - A_{\nu L}^J A_\mu^L{}_K) \\ F_{\mu\nu}^{IJ} &= \eta^{IK} (D_{[\mu} A_{\nu]}^J)_K \end{aligned} \quad (4.8)$$

com a lei de transformação

$$\delta F_{\mu\nu}^{IJ} = [F_{\mu\nu}, \epsilon]^{IJ}. \quad (4.9)$$

E também define-se o campo $B_{\mu IJ}$ na representação adjunta, de forma que ele se trans-

³Que pode ser vista como a curvatura no caso de uma teoria de gravitação 2+1 dimensional [19].

forme como:

$$\delta B_{\mu IJ} = [B_{\mu}, \epsilon]_{IJ}. \quad (4.10)$$

Por último, de forma análoga ao desenvolvimento na seção (3.1.4) define-se o dual e de um tensor completamente antissimétrico 3-forma $\tilde{e}_{\mu\nu\rho}(x)$:

$$e = \frac{1}{3!} \tilde{e}_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \quad (4.11)$$

com $\delta e = 0$, para então se ter os campos independentes necessários para a construção da ação, o que será feito na seção seguinte.

4.2 Construindo a ação

Considere uma variedade diferenciável tridimensional \mathcal{M}_3 e nela introduzimos nossos campos independentes A_{μ} , B_{μ} , ϕ e e descritos na seção 3.2.

A ação invariante sob as transformações de calibre (4.6), (4.7) e (4.10) pode ser escrita em componentes como:

$$S[A, B, \phi, \tilde{e}] = \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left(-\frac{\kappa}{2} \text{Tr}(B_{\mu IJ} F_{\nu\rho}^{IJ}) + \frac{\lambda}{2} B_{\mu IJ} (D_{\nu}\phi)^I (D_{\rho}\phi)^J + \frac{\sigma}{3!} \tilde{e}_{\mu\nu\rho} (\eta_{IJ} \phi^I \phi^J - 1) \right) \quad (4.12)$$

onde κ , λ e σ são constantes de acoplamento⁴.

Nota-se que (4.12) é uma ação manifestamente invariante sob transformações do grupo ortogonal e também sobre transformações gerais de coordenadas (difeomorfismos) $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x)$. O difeomorfismo dos campos definidos na teoria já foi calculado em (3.13 - 3.18).

⁴Repare que esta ação pode ser vista como a ação de um modelo gravitacional 2+1 dimensional tomando $\kappa = 8\pi G$, A^{IJ} como a conexão de spin e $B_{IJ} \equiv \epsilon_{IJK} e^K$, e^K sendo a forma “dreibein”.

4.2.1 As Equações de Movimento no caso Não-Abeliano

Agora varia-se a ação (4.12) em relação às variáveis independentes do modelo (A, B, ϕ, e) para se obter as equações de movimento associadas. S escreve-se como:

$$S[A, B, \phi, e] = \int \frac{1}{2} \text{Tr}(B_{IJ} F^{IJ}) + \frac{\lambda}{2} B_{IJ} D\phi^I D\phi^J + \frac{e}{2} (\phi^I \phi_I - 1) \quad (4.13)$$

onde a constante de acoplamento sigma foi absorvida por uma redefinição simples $e' = \sigma e$ e a constante de acoplamento BF foi absorvida fazendo $B' = \kappa B$.

Variando A (δA) e tomando $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \text{Tr} \int \delta F^{IJ} B_{IJ} + \frac{\lambda}{2} \int \delta A^I{}_K (B_{IJ} \phi^K - B_{KJ} \phi^I) D\phi^J \\ \frac{\delta S}{\delta A^{IJ}} &= \frac{1}{2} (DB)_{IJ} + \frac{\lambda}{2} (B_{IK} \phi_J - B_{JK} \phi_I) D\phi^K = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Note que $\delta F = d\delta A + [\delta A, A]$ faz uso de um comutador graduado e realizou-se uma integração por partes⁵ neste termo e algumas contrações de índices de grupo para obter (4.14), nossa primeira equação de movimento.

Variando B (δB) e tomando $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2} \text{Tr} \int \delta B_{IJ} F^{IJ} + \frac{\lambda}{2} \int \delta B_{IJ} D\phi^I D\phi^J \\ \frac{\delta S}{\delta B_{IJ}} &= \frac{1}{2} F^{IJ} + \lambda D\phi^I D\phi^J = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

obtéem-se a nossa segunda equação de movimento (4.15). Tomando ϕ ($\delta\phi$) com $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned} \delta S &= \lambda \int \delta\phi^I ((DB)_{IJ} D\phi^J - B_{IJ} D^2\phi^J) + \int \delta\phi^I e\phi_I \\ \frac{\delta S}{\delta\phi^I} &= \lambda (DB)_{IJ} D\phi^J - \lambda B_{IJ} F^{JK} \phi_K + e\phi_I = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde utilizou-se uma integração por partes e propriedades da derivada covariante⁶ para

⁵Vide apêndice A.

⁶Vide equação (A.68) no Apêndice A.

se obter a terceira equação de movimento (4.16).

Finalmente, varia-se e (δe) tomando $\delta S = 0$:

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2} \int \delta e (\phi^I \phi_I - 1) \\ \frac{\delta S}{\delta e} &= \frac{1}{2} (\phi^I \phi_I - 1) = 0\end{aligned}\tag{4.17}$$

de forma que (4.17) é a última equação de movimento.

Assim como foi feito no capítulo anterior, estas equações de movimento podem ser combinadas para gerar um subconjunto de equações independentes:

$$(DB)_{IJ} = 0\tag{4.18}$$

$$\phi^I F_{IJ} = 0\tag{4.19}$$

$$\lambda (DB)_{IJ} D\phi^J + e\phi_I = 0\tag{4.20}$$

$$\phi^I D\phi_I = 0\tag{4.21}$$

onde (4.18) foi obtida ao combinar (4.14) e (4.17) explorando a antissimetria dos índices de B . A equação (4.19) foi obtida combinando (4.15) e (4.17). Note que (4.19) e (4.21) criam condições de transversalidade entre os campos ϕ^I e os campos F_{IJ} e $D\phi^I$ respectivamente, e (4.20) determina o campo e como função dos outros campos.

Uma vez obtidos os vínculos de primeira classe nas seções seguintes, pode-se compará-los às equações (4.18 - 4.21) a fim de verificar as simetrias da ação.

4.3 O Formalismo Canônico no caso Não-Abeliano

Novamente, a exemplo do método que foi desenvolvido extensamente na seção 2.4 e na seção 3.4 para o caso abeliano, faz-se então uma foliação na variedade $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \sigma$, que é a separação da parte espacial $\Sigma_t := X_t(\sigma)$ da temporal, onde $X_t : \sigma \rightarrow \mathcal{M}$ e $t \in \mathbb{R}$

definem uma família de hipersuperfícies $X_t(\sigma)$.

A ação S (4.12) descrita acima em termos de componentes pode ser decomposta em uma foliação como:

$$\begin{aligned}
S = & +\frac{1}{2} \int dt \int d^2x [\varepsilon^{tab} B_{tIJ} F_{ab}^{IJ} + \varepsilon^{atb} B_{aIJ} F_{tb}^{IJ} + \varepsilon^{abt} B_{aIJ} F_{bt}^{IJ}] \\
& +\frac{\lambda}{2} \int dt \int d^2x [\varepsilon^{tab} B_{tIJ} (D_a \phi)^I (D_b \phi)^J + \varepsilon^{atb} B_{aIJ} (D_t \phi)^I (D_b \phi)^J \\
& + \varepsilon^{abt} B_{aIJ} (D_b \phi)^I (D_t \phi)^J] + \frac{1}{2} \int dt \int d^2x e(\eta_{IJ} \phi^I \phi^J - 1) \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Então define-se uma lagrangiana L tal que $S = \int dt L$ e o tensor antissimétrico $\varepsilon^{tab} = \varepsilon^{bta} = \varepsilon^{abt} \equiv \varepsilon^{ab}$:

$$\begin{aligned}
L = & \int d^2x [B_{tIJ} F^{IJ} + \tilde{B}_{IJ}^a \partial_t A_a^{IJ} + A_t^{IJ} (D_a \tilde{B}^a)_{IJ}] + \frac{e}{2} (\eta_{IJ} \phi^I \phi^J - 1) \\
& + \lambda \left[\frac{1}{2} B_{tIJ} \varepsilon^{ab} (D_a \phi)^I (D_b \phi)^J + \tilde{B}_{IJ}^a (D_t \phi)^I (D_a \phi)^J \right] \quad (4.23)
\end{aligned}$$

onde o dual de B no caso não-abeliano como é definido por $\tilde{B}_{IJ}^a \equiv \varepsilon^{ab} B_{aIJ}$ e $F^{IJ} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} F_{ab}^{IJ}$.

4.3.1 A Estrutura Simplética

Os momentos conjugados às nossas variáveis canônicas (A, B, ϕ, e) vão ser:

$$\begin{aligned}
{}^{(A)}\Pi_{IJ}^t(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_t^{IJ}(x))} = 0 \\
{}^{(B)}\Pi^{tIJ}(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t B_t^{IJ}(x))} = 0 \\
{}^{(e)}\Pi(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t e(x))} = 0 \\
\Pi_I(x) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \phi^I(x))} = \lambda \tilde{B}_{IJ}^a (D_a \phi)^J
\end{aligned}$$

$${}^{(A)}\Pi_{IJ}^a(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t A_a^{IJ}(x))} = \tilde{B}_{IJ}^a \quad (4.24)$$

$${}^{(\tilde{B})}\Pi_a^{IJ}(x) = \frac{\delta L}{\delta(\partial_t \tilde{B}_{IJ}^a(x))} = 0. \quad (4.25)$$

Toma-se desde já (4.24) e (4.25) como igualdades fortes:

$${}^{(A)}\Pi_{IJ}^a(x) = \tilde{B}_{IJ}^a \quad (4.26)$$

$${}^{(\tilde{B})}\Pi_a^{IJ}(x) = 0$$

o que implica em considerar as variáveis A_a^{IJ} e \tilde{B}_{IJ}^a como um par canonicamente conjugado.

Portanto, a estrutura simplética do espaço de fase é gerada pela álgebra das variáveis:

$$A_\mu^{IJ}(x), B_{\mu IJ}(x), \phi^I(x), e(x), {}^{(A)}\Pi_{IJ}^t(x), {}^{(B)}\Pi^{tIJ}(x), \Pi_I(x), {}^{(e)}\Pi(x).$$

Os colchetes não-nulos são:

$$\{A_t^{IJ}(x), {}^{(A)}\Pi_{KL}^t(y)\} = (\delta_K^I \delta_L^J - \delta_L^I \delta_K^J) \delta^2(x - y) \quad (4.27)$$

$$\{B_{tIJ}(x), {}^{(B)}\Pi^{tIJ}(y)\} = (\delta_K^I \delta_L^J - \delta_L^I \delta_K^J) \delta^2(x - y) \quad (4.28)$$

$$\{\phi^I(x), \Pi_J(y)\} = \delta_J^I \delta^2(x - y) \quad (4.29)$$

$$\{e(x), {}^{(e)}\Pi(y)\} = \delta^2(x - y) \quad (4.30)$$

$$\{A_a^{IJ}(x), \tilde{B}_{KL}^b(y)\} = \delta_a^b (\delta_K^I \delta_L^J - \delta_L^I \delta_K^J) \delta^2(x - y). \quad (4.31)$$

4.4 Hamiltoniana e vínculos

No caso da lagrangiana L (4.23), as velocidades generalizadas dos campos independentes não podem ser trivialmente escritas como uma função dos momentos, característica de

sistemas vinculados. Temos assim os seguintes vínculos primários:

$$\Phi_{1IJ}(x) = {}^{(A)}\Pi_{IJ}^t(x) \approx 0 \quad (4.32)$$

$$\Phi_2^{IJ}(x) = {}^{(B)}\Pi^{tIJ}(x) \approx 0 \quad (4.33)$$

$$\Phi_3(x) = {}^{(e)}\Pi(x) \approx 0 \quad (4.34)$$

$$\Phi_{4I}(x) = \Pi_I(x) - \lambda \tilde{B}_{IJ}^a (D_a \phi)^J \approx 0. \quad (4.35)$$

Note que o sinal \approx indica uma igualdade fraca, isto é, estas equações só se tornarão igualdades fortes após a resolução dos vínculos canonicamente.

Faz-se a transformação de Legendre para se obter a hamiltoniana canônica:

$$\begin{aligned} H_{\text{can}} &\equiv \int d^2x \mathcal{H}_{\text{can}}(x) = \int d^2x ({}^{(0)}\Pi \partial_t() - \mathcal{L}) \\ &= \int d^2x ({}^{(A)}\Pi_{IJ}^a \partial_t A_a^{IJ} + {}^{(A)}\Pi_{IJ}^t \partial_t A_t^{IJ} + {}^{(B)}\Pi^{tIJ} \partial_t B_{tIJ} + \Pi_I \partial_t \phi^I + {}^{(e)}\Pi \partial_t e - \mathcal{L}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde substituiu-se as expressões fracas (4.32 - 4.35) e fortes (4.26) para os momentos conjugados, observado desde já que a hamiltoniana total é definida como $H_{\text{tot}} = H_{\text{can}} + \sum_m \Lambda_m \Phi_m$, isto é, a hamiltoniana total contém a informação sobre os vínculos⁷.

Explicitamente, H_{tot} é:

$$H_{\text{tot}} \equiv \int d^2x (-A_t^{IJ} G_{IJ} - B_{tIJ} G_0^{IJ} - eS + \Lambda_m \Phi_m) \quad (4.37)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{IJ} &= (D_a \tilde{B}^a)_{IJ} - \lambda (\phi_I \tilde{B}_{JK}^a - \phi_J \tilde{B}_{IK}^a) (D_a \phi)^K \\ G_0^{IJ} &= F^{IJ} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^{ab} (D_a \phi)^I (D_b \phi)^J \\ S &= \frac{1}{2} (\eta_{IJ} \phi^I \phi^J - 1). \end{aligned} \quad (4.38)$$

⁷Adicionar uma combinação linear de expressões fracamente nulas não altera a hamiltoniana do sistema, uma vez que os vínculos serão resolvidos.

4.4.1 A estabilidade dos vínculos

Para verificar a estabilidade dos vínculos, utiliza-se as equações de Hamilton aplicando o algoritmo de Dirac-Bergmann⁸ e também para verificar a existência de vínculos secundários, seguindo o método disposto na seção 3.5.1. Então, aplica-se a equação (3.48):

$$\int d^2y \{\Phi_m(x), \mathcal{H}_{\text{can}}(y)\} + \int d^2y \Lambda_n(y) \{\Phi_m(x), \Phi_n(y)\} \approx 0 \quad (4.39)$$

aos nossos vínculos. Contudo, deve-se considerar primeiramente as “médias ponderadas” [44]:

$$\Phi_n^\gamma[\epsilon_\gamma] = \int d^2x \epsilon_\gamma(x) \Phi_n^\gamma(x) \quad (4.40)$$

onde $\epsilon_\gamma(x)$ é uma função de teste, cujos índices de grupo γ serão completamente contraídos com os índices do vínculo considerado. Calculou-se alguns elementos de matriz dos colchetes de Poisson dos vínculos:

$$\Gamma_{mn} \equiv \{\Phi_m[\epsilon], \Phi_n[\tau]\} \quad (4.41)$$

para $m, n = (1, 2, 3, 4)$. O resultado é:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= \Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{14} = 0 \\ \Gamma_{22} &= \Gamma_{23} = \Gamma_{24} = 0 \\ \Gamma_{33} &= \Gamma_{34} = 0 \\ \Gamma_{44} &= \int d^2x \int d^2y \{\Phi_{4I}(x) \epsilon^I(x), \Phi_{4K}(y) \tau^K(y)\} \\ &= \lambda \int d^2x \epsilon^I \tau^K G_{IK} + \lambda^2 \int d^2x \epsilon^I \tau^K \varepsilon_{IKJ} (D_a \phi)^J \varepsilon^{LMP} \phi_L \tilde{B}_{MP}^a \end{aligned} \quad (4.42)$$

com G_{IK} dado por (4.38).

⁸Vide seção B.1.4.

Verificando Φ_1

Para verificar a estabilidade do vínculo Φ_1 , utiliza-se a equação (4.39) para $m = 1$. Então:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{1IJ} &= \int d^2y \{ \Phi_{1IJ}, \mathcal{H}_{\text{can}} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(A)}\Pi_{IJ}^t, -A_t^{KL} \left[(D_a \tilde{B}^a)_{KL} + \lambda \phi_L \tilde{B}_{KM}^a (D_a \phi)^M \right] \} \\
&= 2G_{IJ}(x) \approx 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

com G_{IJ} dado por (4.38). Este resultado define um novo vínculo da teoria, o vínculo de Gauss, que escreve-se:

$$G_{IJ} = (D_a \tilde{B}^a)_{IJ} + (\phi_I \Pi_J - \phi_J \Pi_I - (I \leftrightarrow J)) \tag{4.44}$$

conclui-se que este vínculo é equivalente ao vínculo

$$\Phi_5 \equiv G'_{IJ} = (D_a \tilde{B}^a)_{IJ} + \phi_I \Pi_J - \phi_J \Pi_I \tag{4.45}$$

e que também precisa ter sua estabilidade verificada.

Verificando Φ_2

Utiliza-se (4.39) para $m = 2$, e se obtém:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_2^{IJ} &= \int d^2y \{ \Phi_2^{IJ}, \mathcal{H}_{\text{can}} \} \approx 0 \\
&= \int d^2y \{ {}^{(B)}\Pi^{tIJ}, -B_{tKL} \left[F^{KL} + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^{ab} (D_a \phi)^K (D_b \phi)^L \right] \} \\
&= 2\Phi_6 \approx 0
\end{aligned} \tag{4.46}$$

onde $\Phi_6 \equiv G_0^{IJ}(x)$ dado em (4.38) é um novo vínculo da teoria, chamado de curvatura modificada.

Verificando Φ_3

Utiliza-se (4.39) para $m = 3$, e se obtém:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}_3 &= \int d^2y \{ \Phi_3, \mathcal{H}_{\text{can}} \} \approx 0 \\
 &= \int d^2y \{ {}^{(e)}\Pi, -\frac{e}{2} (\eta_{IJ} \phi^I \phi^J - 1) \} \\
 &= \Phi_7 \approx 0
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

onde $\Phi_7 \equiv S(x)$ dado em (4.38) é também um novo vínculo da teoria.

Verificando Φ_4

Finalmente, utiliza-se (4.39) para $m = 4$:

$$\dot{\Phi}_4 = \int d^2y \{ \Phi_4, \mathcal{H}_{\text{tot}} \} \approx 0 \tag{4.48}$$

que implica em gerar condições sobre \tilde{e} e sobre os multiplicadores de Lagrange Λ^i que aparecem em $\dot{\Phi}_4$:

$$\tilde{e} \phi^I + m_i^I \Lambda^i = 0 \implies \tilde{e} \approx -\phi_I m_i^I \Lambda^i \tag{4.49}$$

onde m_i são funções dos campos independentes multiplicadas pelos Λ^i correspondentes. Nota-se que o vínculo $\Phi_7 \approx 0$ foi utilizado nesta expressão, e isto determina e como uma função dos outros campos independentes.

4.4.2 Sumário dos vínculos remanescentes

Neste ponto, a hamiltoniana (4.37) já se escreve como uma hamiltoniana completamente vinculada:

$$H_{\text{tot}} = \sum_{\alpha} \Lambda_{\alpha} \Phi_{\alpha} \quad (4.50)$$

onde $\alpha = 1, \dots, 4$. Para escrever (4.50) explicitamente vamos primeiro sumarizar os vínculos remanescentes da teoria, que são Φ_4 (4.35), Φ_5 (4.45), Φ_6 (4.46) e Φ_7 (4.47):

$$\begin{aligned} \Phi_{4I}(x) &\equiv \tilde{\Phi}_I(x) = \Pi_I(x) - \lambda \tilde{B}_{IJ}^a(x) (D_a \phi)^J(x) \\ \Phi_{5IJ}(x) &\equiv G'_{IJ}(x) = (D_a \tilde{B}^a)_{IJ}(x) + \phi_I(x) \Pi_J(x) - \phi_J(x) \Pi_I(x) \\ \Phi_6^{IJ}(x) &\equiv G_0^{IJ}(x) = F^{IJ}(x) + \frac{\lambda}{2} \varepsilon^{ab} (D_a \phi)^I(x) (D_b \phi)^J(x) \\ \Phi_7(x) &\equiv S(x) = \frac{1}{2} (\eta_{IJ} \phi^I(x) \phi^J(x) - 1). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Toma-se Φ_1 (4.32), Φ_2 (4.33) e Φ_3 (4.34) desde agora como igualdades fortes:

$${}^{(A)}\Pi_{IJ}^t(x) = 0 \quad {}^{(B)}\Pi^{IJ}(x) = 0 \quad {}^{(e)}\Pi(x) = 0 \quad (4.52)$$

e estes serão trivialmente eliminados, pois todos os colchetes de Poisson envolvendo estes vínculos com os demais (4.42) são nulos. Os campos A_t^{IJ} , B_{IJ} e e tornam-se multiplicadores de Lagrange de (4.50), que se escreve explicitamente como:

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x (-A_t^{IJ} G'_{IJ} - B_{IJ} G_0^{IJ} - eS + \Lambda^I \tilde{\Phi}_I) \quad (4.53)$$

onde G'_{IJ} é uma combinação de G e Φ_4 (isto é, os 4 vínculos remanescentes estão presentes na hamiltoniana), de forma a deixar G' como um vínculo de primeira classe. Quer-se verificar se (4.53) é estável, isto é, se os vínculos secundários não geram mais vínculos Φ_m descendentes.

Calcula-se primeiro os colchetes de Poisson dos vínculos secundários G' , G_0 e S , utilizando

a notação de (4.41), para se completar a lista (4.42):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{45} &\approx 0 \\
\Gamma_{46} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_{4I} \epsilon^I(x), G_0^{JK} \tau_{JK}(y) \} \\
&\approx \lambda \int d^2x \epsilon^I \tau_{JK} \left(\phi_I F^{JK} - \frac{3}{2} \epsilon_{ILM} F^{LM} \epsilon^{JKN} \phi_N \right) \\
\Gamma_{47} &= \int d^2x \int d^2y \{ \Phi_{4I} \epsilon^I(x), S \tau(y) \} \approx - \int d^2x \epsilon^I \tau \phi_I \\
\Gamma_{55} &= \int d^2x \int d^2y \{ G'_{IJ} \epsilon^{IJ}(x), G'_{KL} \tau^{KL}(y) \} = \epsilon^I \tau^J G'_{IJ} \approx 0 \\
\Gamma_{56} &\approx \Gamma_{57} \approx \Gamma_{66} \approx \Gamma_{67} \approx \Gamma_{77} \approx 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

onde todas as igualdades são fracas. Os colchetes dos vínculos remanescentes $\tilde{\Phi}$, G' , G_0 e S podem ser agrupados numa matriz:

$$\Gamma' \approx \begin{matrix} & \tilde{\Phi} & G' & G_0 & S \\ \begin{matrix} \tilde{\Phi} \\ G' \\ G_0 \\ S \end{matrix} & \begin{pmatrix} \{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\} & 0 & \{\tilde{\Phi}, G_0\} & \{\tilde{\Phi}, S\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \{G_0, \tilde{\Phi}\} & 0 & 0 & 0 \\ \{S, \tilde{\Phi}\} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \end{matrix}. \tag{4.55}$$

4.4.3 O argumento geral de estabilidade

O algoritmo de Dirac-Bergmann, começado na subseção anterior, tem como finalidade verificar a estabilidade dos vínculos remanescentes na teoria, isto é, aqueles que compõem a hamiltoniana e são geradores de simetrias.

Faz-se agora uma análise geral deste método, considerando a hamiltoniana completamente vinculada $H = \sum \Lambda^\alpha \Phi_\alpha$ com os vínculos Φ_α , os multiplicadores de Lagrange Λ^α e os colchetes de Poisson $\Gamma_{\alpha\beta} \approx \{\Phi_\alpha, \Phi_\beta\}$ ⁹. (4.53) e (4.55) representam o caso particular

⁹Como estes colchetes envolvem igualdades fracas, os termos fracamente nulos são removidos nesta análise.

estudado neste capítulo. Aplica-se a condição de estabilidade (4.39) para se obter:

$$\dot{\Phi}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}\Lambda^\beta \approx 0 \quad (4.56)$$

onde $\alpha = 1, \dots, d$ e d é o total de vínculos remanescentes. A matriz $\Gamma_{\alpha\beta}$ pode ser dividida em blocos de acordo com seu posto r da seguinte forma:

$$(\Gamma_{\alpha\beta}) = \left(\begin{array}{cc} M_{\mu\nu} & N_{\mu d} \\ -N_{c\nu}^T & O_{cd} \end{array} \right) \begin{array}{l} \} r \\ \} d - r \end{array} \quad (4.57)$$

onde M é uma submatriz de dimensão r e de determinante não-nulo. A correspondente decomposição dos vetores Λ^α e Φ_α é dada por

$$(\Lambda^\alpha) = \begin{pmatrix} l^\mu \\ m^c \end{pmatrix} \quad (\Phi_\alpha) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_\mu \\ \mathcal{G}_c \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Então tem-se:

$$\begin{cases} Ml + Nm = 0 \\ -N^T l + Om = 0 \end{cases} \longrightarrow l = -M^{-1}Nm \quad (4.59)$$

isto é, os multiplicadores l^μ são funções lineares dos multiplicadores m^c , que por sua vez são arbitrários. Utiliza-se (4.59) para se escrever H como:

$$H = \mathcal{F}^T l + \mathcal{G}^T m = (-\mathcal{F}_\mu^T M^{-1\mu\nu} N_{\nu d} + \mathcal{G}_d^T) m^d \quad (4.60)$$

de forma que tem-se $(d - r)$ vínculos \mathcal{G}'_c de primeira classe:

$$\mathcal{G}'_c = \mathcal{G}_c^T - \mathcal{F}_\mu^T M^{-1\mu\nu} N_{\nu c} \quad (4.61)$$

Para verificar este resultado, calculou-se o colchete de Poisson dos vínculos primários:

$$\{\mathcal{G}'_c, \mathcal{G}'_d\}_D = (O + N^T M^{-1} N)_{cd} = 0. \quad (4.62)$$

A última igualdade pode ser mostrada se a combinarmos com a equação (4.59), que gera $(O + N^T M^{-1} N)m = 0$ implicando em:

$$O + N^T M^{-1} N = 0. \quad (4.63)$$

Com efeito, se o posto da matriz (4.62) fosse $s \geq 1$, teríamos multiplicadores de Lagrange m que não seriam independentes, o que implicaria em $r' \geq r + 1$ multiplicadores Λ dependentes, isto é, implicaria em um posto para $\Gamma \geq r + 1$, o que é uma contradição uma vez que por hipótese esse posto é igual a r . Portanto, $s = 0$, que implica em $O + N^T M^{-1} N = 0$, estando assim verificado que os \mathcal{G}' são todos os $(d - r)$ vínculos de 1ª classe.

Agora eliminam-se os vínculos de 2ª classe calculando os colchetes de Dirac, cuja definição foi dada na seção 2.4.7. Para duas funções X e Y quaisquer:

$$\{X, Y\}_D = \{X, Y\} - \{X, \mathcal{F}_\mu\} M^{-1\mu\nu} \{\mathcal{F}_\nu, Y\} \quad (4.64)$$

Pode-se verificar que os colchetes de Dirac de uma função X qualquer com os vínculos de 2ª classe \mathcal{F} se anulam:

$$\begin{aligned} \{X, \mathcal{F}_\rho\}_D &= \{X, \mathcal{F}_\rho\} - \{X, \mathcal{F}_\mu\} M^{-1\mu\nu} \{\mathcal{F}_\nu, \mathcal{F}_\rho\} \\ &= \{X, \mathcal{F}_\rho\} - \{X, \mathcal{F}_\mu\} M^{-1\mu\nu} M_{\nu\rho} = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Então, a recombinação de vínculos de primeira classe não afeta a álgebra dos vínculos independentes tais como na forma escrita explicitamente na hamiltoniana (4.53).

Uma vez introduzidos os colchetes de Dirac, pode-se tomar os vínculos de segunda classe como igualdades fortes, o que afetará a álgebra entre os campos independentes, que será analisada a seguir.

A solução para estabilidade dos vínculos no caso não-abeliano

Aplica-se agora esse procedimento geral no caso não-abeliano, considerado neste capítulo, e para tal toma-se a porção relevante da matriz Γ' (4.55), removendo a linha e a coluna correspondentes ao vínculo G' . Tem-se assim a matriz Γ , de dimensão 7, escrita em detalhes com todos os índices:

$$\Gamma \approx \begin{array}{c} \tilde{\Phi}_I \\ G_0^{JK} \\ S \end{array} \begin{array}{ccc} \tilde{\Phi}_L & G_0^{MN} & S \\ \left(\begin{array}{ccc} \{\tilde{\Phi}_I, \tilde{\Phi}_L\} & \{\tilde{\Phi}_I, G_0^{MN}\} & \{\tilde{\Phi}_I, S\} \\ \{G_0^{JK}, \tilde{\Phi}_L\} & 0 & 0 \\ \{S, \tilde{\Phi}_L\} & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \quad (4.66)$$

onde

$$\begin{aligned} \{\tilde{\Phi}_I(x), \tilde{\Phi}_L(y)\} &\approx \lambda^2 \epsilon_{ILJ} \epsilon^{MNP} \tilde{B}_{MN}^a \phi_P D_a \phi^J \delta^2(x-y) \\ \{\tilde{\Phi}_I(x), G_0^{MN}(y)\} &\approx \lambda \left(\phi_I F^{MN} - \frac{3}{2} \phi_J \epsilon^{MNJ} \epsilon_{IKL} F^{KL} \right) \delta^2(x-y) \\ \{\tilde{\Phi}_I(x), S(y)\} &\approx -\phi_I \delta^2(x-y) \end{aligned}$$

Verificou-se que o posto de Γ é igual a 2 mod(Φ_α), cujo cálculo deve ser feito módulo os vínculos (4.51): $\tilde{\Phi}$ é uma condição sobre os Π_I , G_0 é uma condição sobre os F^{IJ} e S gera uma condição sobre os ϕ^I , que em particular:

$$\phi^2 \approx \sqrt{1 - (\phi^0)^2 - (\phi^1)^2} \quad (4.67)$$

$$D_a \phi^2 \approx -\frac{1}{\phi^2} (D_a \phi^0 \phi^0 + D_a \phi^1 \phi^1). \quad (4.68)$$

Nota-se que \tilde{B}_{IJ}^a deveria ainda obedecer aqui a condição de $G'_{IJ} = 0$ (4.45), mas isso não muda o resultado para M , nem a separação entre vínculos de 1ª e 2ª classe e nem os colchetes de Dirac.

Logo, a classe dos vínculos remanescentes pode ser mostrada fazendo uma separação em blocos na matriz Γ conforme (4.57), escolhendo a submatriz M como uma submatriz

regular de dimensão 2:

$$\Gamma \approx \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -\phi_0 \\ \phi_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

onde $\dim(M) = \text{posto}(\Gamma) = 2$. A inversa de M é bem definida se $\phi_0 \neq 0$:

$$M^{-1} \approx \frac{1}{\phi_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Se $\phi_0 = 0$, pode-se escolher uma outra componente $\phi_I \neq 0$ e outra submatriz regular M , de forma que M^{-1} pode sempre ser bem definida.

Os resultados para os vínculos podem ser resumidos pela seguinte tabela:

| Vínculo | Primário | Secundário |
|------------------------|------------------|---|
| Primeira Classe | * | $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, G'^{IJ}, G_0^{IJ}$ |
| Segunda Classe | $\tilde{\Phi}_0$ | S |

* Os vínculos primários de primeira classe já foram resolvidos.

Com a matriz M^{-1} (4.70) pode-se definir explicitamente os colchetes de Dirac (4.64):

$$\{X, Y\}_D = \{X, Y\} - \{X, \mathcal{F}_\mu\} A^{-1\mu\nu} \{\mathcal{F}_\nu, Y\} \quad (4.71)$$

onde \mathcal{F}_μ , $\mu = 1, 2$ são os vínculos de segunda classe $\tilde{\Phi}_0$ e S . Agora, usa-se este novo colchete para tomar $\mathcal{F}_\mu = 0$ (fortemente), como visto em (4.65). Então:

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \sqrt{1 - (\phi^1)^2 - (\phi^2)^2} \\ \Pi_0 &= \lambda \tilde{B}_{0J}^a (D_a \phi)^J \end{aligned} \quad (4.72)$$

Calcula-se então os colchetes de Dirac para as variáveis canônicas independentes A_a^{IJ} , \tilde{B}_{IJ}^a , ϕ^i e Π_i , com $i = 1, 2$, para se saber como a álgebra será afetada pela imposição de

(4.72):

$$\{A_a^{IJ}(x), \tilde{B}_{KL}^b(y)\}_D = \delta_a^b(\delta_K^I \delta_L^J - \delta_L^I \delta_K^J) \delta^2(x-y) \quad (4.73)$$

$$\{A_a^{IJ}(x), \Pi_i(y)\}_D = \lambda \frac{\phi_i}{\phi^0}(y) \eta^{I0} (D_a \phi)^J(y) \delta^2(x-y) - (I \leftrightarrow J) \quad (4.74)$$

$$\{\tilde{B}_{IJ}^a(x), \Pi_i(y)\}_D = \lambda \frac{\phi_i}{\phi^0}(y) \varepsilon_I^{K0} \tilde{B}_{KJ}^a(y) \delta^2(x-y) - (I \leftrightarrow J) \quad (4.75)$$

$$\{\phi^i(x), \Pi_j(y)\}_D = \delta_j^i \delta^2(x-y) \quad (4.76)$$

e todos os demais colchetes são nulos:

$$\{A_a^{IJ}(x), A_b^{KL}(y)\}_D = \{A_a^{IJ}(x), \phi_i(y)\}_D = \{\tilde{B}_{IJ}^a(x), \tilde{B}_{KL}^b(y)\}_D = \dots = 0. \quad (4.77)$$

Esta álgebra entre os campos independentes é muito similar à álgebra obtida na seção 3.5.3 para o caso abeliano, no capítulo anterior. Ver-se-á a seguir que as simetrias obtidas a partir das transformações destes campos independentes são também similares ao obtido no caso abeliano.

4.5 Os vínculos de primeira classe e a invariância da hamiltoniana - Caso não-abeliano

Uma vez eliminados os 2 vínculos de segunda classe, a hamiltoniana (4.53) se escreve em termos das variáveis independentes A_a^{IJ} , \tilde{B}_{IJ}^a , ϕ^i e Π_i , como:

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x (-A_t^{IJ} G'_{IJ} - B_{tIJ} G_0^{IJ} + \Lambda^i \tilde{\Phi}_i) \quad (4.78)$$

Os 8 vínculos de primeira classe $\{\Phi_\alpha, \alpha = 1, \dots, 8\} = \{G'^{IJ}, G_0^{IJ}, \tilde{\Phi}_i\}$ são aqueles que geram as simetrias de calibre. Como uma verificação do desenvolvimento canônico apresentado, pode-se comparar as transformações das variáveis independentes sobre estas simetrias com os resultados obtidos na sessão 4.2.1 ao se variar a ação.

Então, calcula-se os colchetes de Dirac destes vínculos com as variáveis independentes

para se descobrir as transformações infinitesimais de calibre associadas:

$$\delta_{(\alpha)}g(x) = \{g(x), \Phi_\alpha(\epsilon)\}, \quad \Phi_\alpha(\epsilon) = \int_{\Sigma} d^2y \epsilon(y) \Phi_\alpha(y) \quad (4.79)$$

Em particular, com $G'(\epsilon) = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon^{IJ} G'_{IJ}$ onde $\epsilon^{IJ}(x) = -\epsilon^{JI}(x)$, o vínculo G' será o gerador das transformações de calibre tipo YM:

$$\begin{aligned} \{G'(\epsilon), A_a^{IJ}\} &= D_a \epsilon^{IJ} \\ \{G'(\epsilon), \tilde{B}_{IJ}^a\} &= [\epsilon, \tilde{B}^a]_{IJ} \\ \{G'(\epsilon), \phi^i\} &= -\epsilon^{ij} \phi_j \\ \{G'(\epsilon), \Pi_i\} &= \lambda \frac{\phi_i}{\phi^0} (\epsilon^{IJ} (D_a \phi)_I \eta^{K0} - (D_a \epsilon)^{IJ} \varepsilon_I^{K0}) \tilde{B}_{KJ}^a + \epsilon_i^j \Pi_j. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Analogamente, o vínculo G_0 gera o segundo tipo de transformações de calibre do modelo BF, chamadas de tipo 2¹⁰:

$$\begin{aligned} \{G_0(\epsilon), A_a^{IJ}\} &= 0 \\ \{G_0(\epsilon), \tilde{B}_{IJ}^a\} &= \varepsilon^{ab} D_b \epsilon_{IJ} \\ \{G_0(\epsilon), \phi^i\} &= 0 \\ \{G_0(\epsilon), \Pi_i\} &= \lambda \left(\partial_a \epsilon^0_J \frac{\phi_i}{\phi^0} - D_a \epsilon_{iJ} \right) \varepsilon^{ab} (D_b \phi)^J. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Por último, o vínculo $\tilde{\Phi}(\epsilon) = \int d^2x \epsilon^i \tilde{\Phi}_i$, que era o gerador das transformações de fase no caso abeliano (3.132) (que combinado com G , gera todas as transformações de calibre do tipo YM espaciais), vai atuar como:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\Phi}(\epsilon), A_a^{IJ}\} &= \lambda \left(\epsilon^i \frac{\phi_i}{\phi^0} \eta^{J0} + \epsilon^J \right) (D_a \phi)^I - (I \leftrightarrow J) \\ \{\tilde{\Phi}(\epsilon), \tilde{B}_{IJ}^a\} &= \lambda \epsilon^i \left(\frac{\phi_i}{\phi^0} \varepsilon_J^{K0} \tilde{B}_{KI}^a + \phi_I \tilde{B}_{iJ}^a \right) - (I \leftrightarrow J) \\ \{\tilde{\Phi}(\epsilon), \phi^i\} &= -\epsilon^i \\ \{\tilde{\Phi}(\epsilon), \Pi_i\} &= \lambda D_{ai}^I (\epsilon^j \tilde{B}_{jI}^a). \end{aligned} \quad (4.82)$$

¹⁰Vide seção 3.6.

Nota-se que estes resultados são completamente simétricos em relação à escolha de um eixo coordenado preferencial do campo escalar ϕ^0 feita em (4.67), isto é, caso outro eixo fosse tomado como preferencial teríamos uma teoria equivalente dada a arbitrariedade envolvida na separação das coordenadas. Para um grupo $G = \text{SO}(n, 3 - n)$, as transformações do tipo YM espaciais definem para $n = 0$ uma rotação particular entre os eixos 0 e i , e para $n \neq 0$ teremos transformações de Lorentz [2, 3] (*boosts* e *shifts*) em vez de rotações.

4.5.1 A álgebra dos geradores de transformações

Conforme visto na seção 4.4.3, ao se aplicar o resultado para a álgebra dos colchetes de Dirac nos elementos de matriz de M (4.66) pode-se concluir que a álgebra dos vínculos geradores de simetria fecha.

Pode-se também conhecer a dimensão do espaço de fase físico, considerando o número de graus de liberdade locais físicos obtidos do cálculo do posto da matriz G (4.66), para a qual encontramos o posto $r = 2$. Tem-se em cada ponto x do espaço Σ , 8 coordenadas A_A^{IJ} , ϕ^i juntas com 8 momentos conjugados, e 8 invariâncias de calibre geradas pelos vínculos G'_{IJ} , G_0^{IJ} e $\tilde{\Phi}_i$. Conclui-se que o número de graus de liberdade locais é nulo, o que concorda com o que foi encontrado para o caso abeliano no capítulo 3.

Capítulo 5

Quantização de Laços

Anteriormente no capítulo 2, viu-se que para construir um espaço com produto interno bem definido, deve-se substituir o espaço de configurações dos campos definidos na teoria pelo espaço das holonomias h_γ , que é o primeiro passo para a quantização de *loops*. Na seção 2.5.4 escreveu-se formalmente o produto escalar dos funcionais de onda como na equação (2.92). Para dois funcionais de onda Ψ e Ω , o produto escalar será:

$$\langle \Psi | \Upsilon \rangle = \int \mathcal{D}\mu(X) \Psi^*(X) \Omega(X) \quad (5.1)$$

onde $\mathcal{D}\mu(X)$ é uma medida de integração no espaço de configuração dos campos X , que ainda precisa ser definida.

Faz-se então a construção da medida neste capítulo para o modelo BF com campos de matéria no caso abeliano tal como o visto no capítulo 3.¹

5.1 Regularização de uma rede versus redes de *spin*

Um exemplo do desenvolvimento realizado para definir o produto escalar pode ser encontrado em Teoria Quântica de Campos e em outras teorias da física, que é aproximar o

¹Deixamos a construção do caso não-abeliano para o trabalho em progresso [24].

contínuo por uma rede discreta, o que constitui uma regularização. Em TQC tem-se a integral funcional de Feynmann, a partir da qual podem ser desenvolvidas as séries de perturbação de Feynmann, e também construções não-perturbativas baseadas na regularização de rede. Na regularização de rede, em vez de se considerar todos os pontos dentro de um volume V considera-se apenas os vértices da rede, separados por uma distância ϵ .

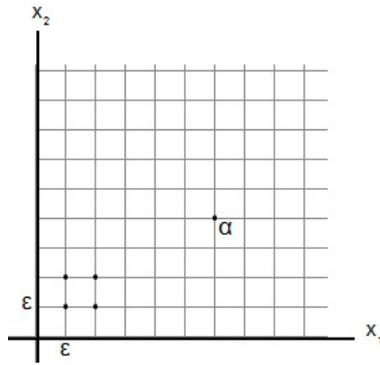


Figura 5.1: Espaço de Minkowski (mostrados apenas x_1 e x_2) com uma rede que gera uma restrição na qual o volume finito contém um número finito de pontos.

Sendo assim, o contínuo pode ser substituído por um conjunto de pontos x_α , $\alpha = 1, \dots, N$ e a integral funcional será uma integral ordinária:

$$\int \mathcal{D}A f(A) = \left(\prod_{\alpha=1}^N dA(x_\alpha) \right) f(A(x_1), \dots, A(x_\alpha)). \quad (5.2)$$

Existem teoremas sobre aproximações de rede, para se achar o limite para quando $\epsilon \rightarrow 0$, que em TQC já foi resolvido rigorosamente para espaços-tempo de até 3 dimensões, e por meio de integrações numéricas para 4 dimensões [42], cujos resultados podem ser aplicados no cálculo de parâmetros fundamentais dos hádrons. Uma construção da integração funcional deste tipo pode ser aplicada à definição do produto escalar.

Em teorias independentes de *background* como o modelo BF com campos de matéria geralmente adota-se um outro esquema [15, 33], baseado na noção de redes de *spin* que será discutido em mais detalhes nas seções seguintes, mas vale a pena apontar algumas analogias do procedimento de regularização de rede com a construção da rede de *spin*.

Então, considerando uma variedade \mathcal{M} , trabalhar-se-á com objetos chamados de grafos

orientados (ver Fig. 5.2), que são objetos formados por curvas orientadas (*links*) $\gamma_p \in \Sigma$ na foliação de \mathcal{M} e vértices (*nodes*) $v_q \in \Sigma$, que são pontos onde estas curvas se interceptam².

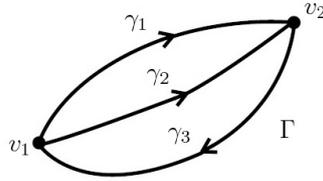


Figura 5.2: Um exemplo de grafo orientado Γ , composto por três linhas γ_1 , γ_2 e γ_3 e dois vértices v_1 e v_2 .

Em cada linha γ_p de um grafo, escreve-se um novo funcional dos campos independentes do nosso modelo definindo o espaço de configuração – aqui escolheu-se as componentes A_a da conexão e o campo escalar $\bar{\phi}$ –, a holonomia, e considera-se funcionais de onda definidos como funções dessas holonomias – os chamados funcionais “cilíndricos”.

Observa-se que se um tal funcional cilíndrico está definido sobre um conjunto finito de linhas (grafo), então ele depende só dos valores dos campos nestas linhas e não dos valores da conexão no espaço inteiro, análogo ao caso da substituição do contínuo por pontos x_α no caso da regularização de rede. Pode-se assim construir um produto escalar, numa primeira etapa, a partir de uma medida de integração definida num espaço menor que o espaço das configurações de A e $\bar{\phi}$.

5.2 O espaço de configurações - Caso Abeliano

Viu-se no capítulo 3 que para o modelo no caso abeliano o espaço de fase clássico é 6-dimensional em cada ponto de Σ , formado pelas variáveis independentes A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e $(\bar{\phi})\Pi$

²Lembre-se que nossa variedade \mathcal{M} é a variedade de espaçotempo tridimensional ($\dim(D) = 2+1$), e a folha Σ representa o espaço bidimensional.

que estão sujeitas aos vínculos dados pelas equações (3.133 - 3.135):

$$\begin{aligned}
G(\epsilon_1) &= \int d^2x \epsilon_1(x) \partial_a \tilde{B}^a(x) \approx 0 \\
G_0(\epsilon_2) &= \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon_2(x) \varepsilon^{ab} F_{ab}(x) \approx 0 \\
\Phi_0(\epsilon_3) &= \int d^2x \epsilon_3(x) \left(\bar{\phi}(x) {}^{(\bar{\phi})}\Pi(x) + \lambda \bar{\phi}^{-1}(x) \tilde{B}^a(x) D_a \bar{\phi}(x) \right) \approx 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

que compõem a hamiltoniana H_{tot} , equação (3.114):

$$H_{\text{tot}} = \int d^2x [-A_t G(x) - B_t G_0(x) - \Lambda_3 \Phi_0(x)]. \tag{5.4}$$

Durante o processo de quantização, estas grandezas (campos e vínculos) serão associadas a operadores, que serão aplicados aos funcionais de onda definidos num espaço de Hilbert adequado para representar os estados quânticos da nossa teoria. A seguir, se analisará a álgebra entre os campos independentes supracitados.

5.2.1 Troca de base das variáveis independentes

Na seção 3.5.3, recombinaaram-se os vínculos remanescentes na verificação de estabilidade da teoria³ para se obter como variáveis independentes A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e ${}^{(\bar{\phi})}\Pi$, coordenadas do espaço de fase reduzido, para as quais calculou-se a seguinte estrutura simplética gerada pelos colchetes de Dirac:

$$\begin{aligned}
\{A_a(x), \tilde{B}^b(y)\} &= \delta_a^b \delta^2(x-y) \\
\{A_a(x), {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y)\} &= \lambda D_a \bar{\phi}^{-1} \delta^2(x-y) \\
\{\tilde{B}^a(x), {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y)\} &= \lambda \tilde{B}^a \bar{\phi}^{-1} \delta^2(x-y) \\
\{\bar{\phi}(x), {}^{(\bar{\phi})}\Pi(y)\} &= \delta^2(x-y)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

³Veja a seção 3.5 para verificar passo a passo o algoritmo de Dirac-Bergmann para o caso abeliano.

com todos os demais colchetes nulos:

$$\{A_a(x), A_b(y)\} = \{A_a(x), \bar{\phi}(y)\} = \{\tilde{B}^a(x), \tilde{B}^b(y)\} = \{\tilde{B}^a(x), \bar{\phi}(y)\} = \dots = 0.$$

Pode-se simplificar um pouco esta álgebra (e conseqüentemente a álgebra dos operadores definidos a partir destes campos) realizando a seguinte troca de base:

$$\Pi \equiv {}^{(\bar{\phi})}\Pi - \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}^{-1}. \quad (5.6)$$

Os colchetes de Dirac da estrutura simplética para as variáveis A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$ e Π se escrevem como:

$$\begin{aligned} \{A_a(x), \tilde{B}^b(y)\} &= \delta_a^b \delta^2(x-y) \\ \{\bar{\phi}(x), \Pi(y)\} &= \delta^2(x-y) \\ \{A_a(x), \Pi(y)\} &= 0 \\ \{\tilde{B}^a(x), \Pi(y)\} &= 0 \\ \{\Pi(x), \Pi(y)\} &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

e todos os demais continuam nulos. Repare que

$$\Pi \equiv {}^{(\bar{\phi})}\Pi - \lambda \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}^{-1} = {}^{(\bar{\phi})}\Pi + \lambda \bar{\phi}^{-2} \tilde{B}^a D_a \bar{\phi}$$

e o vínculo Φ_0 (3.135) pode ser escrito em função de Π como:

$$\Phi_0(\epsilon_3) = \int d^2x \epsilon_3(x) \bar{\phi}(x) \Pi(x). \quad (5.8)$$

Note que as transformações de calibre associadas ao vínculo Φ_0 permanecem inalteradas:

$$\delta_{\Phi_0} \bar{\phi} = \epsilon_3 \bar{\phi} \quad (5.9)$$

e já que $\bar{\phi} = e^{-i\theta}$, observa-se que a transformação de calibre acima é equivalente a⁴:

$$\delta_{\Phi_0}\theta = i\epsilon_3.$$

5.2.2 A proposta de quantização do modelo BF com campos de matéria - caso abeliano

Na teoria quântica, os campos A_a , \tilde{B}^a , $\bar{\phi}$, Π serão promovidos a operadores, obedecendo às relações de comutação correspondentes aos colchetes clássicos (5.7):

$$[\hat{A}_a, \hat{B}^b] = i\hbar\delta_a^b\delta^2(x-y) \quad ; \quad [\hat{\phi}, \hat{\Pi}] = i\hbar\delta^2(x-y) \quad (5.10)$$

onde os demais são nulos. Estes operadores irão atuar sobre funcionais $\Psi[A, \bar{\phi}]$ que representam os estados quânticos do nosso modelo da seguinte forma:

$$\hat{A}_a\Psi = A_a\Psi \quad (5.11)$$

$$\hat{B}^a\Psi = -i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta A_a} \quad (5.12)$$

$$\hat{\phi}\Psi = \bar{\phi}\Psi \quad (5.13)$$

$$\hat{\Pi}\Psi = -i\hbar\frac{\delta\Psi}{\delta\bar{\phi}}. \quad (5.14)$$

Os vínculos G , G_0 e Φ_0 também serão promovidos a operadores \hat{G} , \hat{G}_0 e $\hat{\Phi}_0$, geradores dos grupos de simetria. Os estados $\Psi[A, \bar{\phi}]$ que obedecem $\hat{G}|\Psi\rangle = 0$, $\hat{G}_0|\Psi\rangle = 0$ e $\hat{\Phi}_0|\Psi\rangle = 0$ vão ser os estados físicos, invariantes sobre as transformações de calibre.

Solução do vínculo $\hat{\Phi}_0$

O vínculo $\hat{\Phi}_0$ pode ser escrito explicitamente como:

$$\hat{\Phi}_0 = \hat{\phi}\hat{\Pi}. \quad (5.15)$$

⁴Note que os parâmetros ϵ_i são imaginários e θ é real.

Nota-se que a solução de $\hat{\Phi}_0|\Psi\rangle = 0$, considerando que $\hat{\Pi}$ (5.14) é a derivada de $\bar{\phi}$, o que imediatamente mostra o funcional de onda $\Psi[A, \bar{\phi}]$ como sendo independente de $\bar{\phi}$:

$$\Psi = \Psi[A]. \quad (5.16)$$

A construção explícita destes funcionais $\Psi[A]$ em termos de holonomias deverá ser feita para que se possa resolver as condições restantes $\hat{G}|\Psi\rangle = 0$ e $\hat{G}_0|\Psi\rangle = 0$ e se escrever um espaço com produto interno bem definido. Começa-se pela definição das holonomias de A .

5.3 As holonomias de A

Nesta seção definir-se-á as holonomias para o caso mais geral com um grupo de calibre G não-abeliano. As expressões de interesse para o caso abeliano, onde $G = U(1)$, também são dadas.

Sendo assim, a holonomia $h_{\gamma_i}[A]$ ⁵ de A ao longo de uma curva orientada $\gamma_i \in \Sigma$ (ver Fig. 5.3) é definida como:

$$h_{\gamma_i}[A] = \mathcal{P}e^{\int_{\gamma_i} dx^a A_a} \quad (5.17)$$

onde \mathcal{P} é o operador de ordenação ao longo da curva γ_i e a integral no expoente é uma integral de linha sobre γ_i , que pode ser explicitada ao se fazer uma parametrização desta curva. No caso abeliano, \mathcal{P} pode ser omitido.

A holonomia é um elemento do grupo de calibre G , portanto possui leis de transformação mais simples do que as dos campos que elas representam, facilitando a construção de invariantes conforme visto a seguir.

⁵Neste trabalho notamos a holonomia como $h_{\gamma_i}[A]$, mas também é usual encontrar na literatura a notação $U[A, \gamma_i]$.

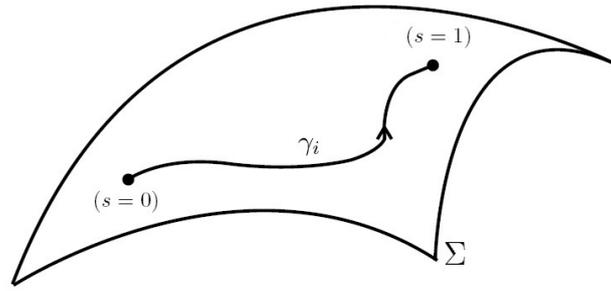


Figura 5.3: A curva γ em $\Sigma = \mathcal{M}_2$ parametrizada na variável s .

As equações paramétricas de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ são:

$$x^a = x^a(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (5.18)$$

e os vetores tangentes são dados por

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a}{ds} \quad (5.19)$$

onde $a = 1, 2$, $x^a(0) = x^a_{(i)}$ e $x^a(1) = x^a_{(f)}$. A holonomia é o transporte paralelo ao longo da curva γ , como veremos na subseção 5.3.3.

5.3.1 Definições e propriedades das holonomias

Escreve-se (5.17) de maneira mais geral, sendo $h_\gamma[A](s)$, $s \in [0, 1]$:

$$h_\gamma[A](s) = \mathcal{P}e^{\int_0^s ds' \dot{x}^a(s') A_a(x(s'))} \quad , \quad h_\gamma[A](1) = h_\gamma[A] \quad (5.20)$$

onde o efeito do operador \mathcal{P} é ordenar por valores crescentes de s (*path ordering*). Usou-se que $A = A_a dx'^a$ e $dx'^a = ds' \dot{x}^a$.

A expansão da holonomia (5.20) para $s = 1$, pela definição do operador de ordenação \mathcal{P} ,

escreve-se⁶:

$$\begin{aligned} h_\gamma[A] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P} \left(\frac{1}{n!} \left(\int_0^1 A(x(s)) \right)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \dot{x}(s_1) \cdot \vec{A}(s_1) \cdots \dot{x}(s_n) \cdot \vec{A}(s_n) \quad (5.21) \end{aligned}$$

onde $1 \geq s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$. Note que o caso abeliano é óbvio pois não há problema de ordem.

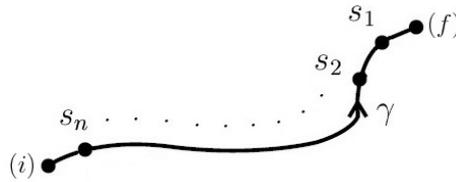


Figura 5.4: Pontos s_1, \dots, s_n de uma curva γ .

Por causa dos s maiores alocados perto de (f) e os menores perto de (i) (ver Fig. 5.4), tem-se uma propriedade de fatoração. Pode-se, por exemplo, fatorar esta holonomia em duas holonomias sobre duas curvas γ_1, γ_2 , tal que $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$:

$$h_\gamma[A] = h_{\gamma_2}[A] \cdot h_{\gamma_1}[A]. \quad (5.22)$$

Note que esta fatoração vale até para curvas contínuas por pedaços.

Como consequência da definição (5.20), $h_\gamma[A](s)$ é a solução da equação diferencial:

$$\frac{d}{ds} h_\gamma[A](s) - \dot{x}^a(s) A_a(x(s)) h_\gamma[A](s) = 0 \quad (5.23)$$

ou

$$dh_\gamma[A](s) = dA h_\gamma[A](s) \quad (5.24)$$

com a condição de contorno $h_\gamma[A](0) = \mathbb{1}$.

⁶A notação $\vec{A} \equiv A_a$, onde $a = 1, 2$.

Outra propriedade interessante das holonomias é que se γ vai de $(i) \rightarrow (f)$, pode-se definir γ^{-1} que vai de $(f) \rightarrow (i)$, isto é, a mesma curva porém orientada no sentido oposto:

$$h_{\gamma^{-1}}[A] = (h_{\gamma}[A])^{-1}. \quad (5.25)$$

5.3.2 A transformação de calibre de uma holonomia

Tem-se agora uma propriedade de fatoração, então pode-se considerar a holonomia infinitesimal δh , definida no trecho de curva infinitesimal $[s, s + \delta s]$:

$$\delta h = e^{\int_s^{s+\delta s} ds' \dot{x}^a(s') A_a(s')} \equiv h_{s, s+\delta s} \quad (5.26)$$

$$\delta h = \mathbb{1} + \int_s^{s+\delta s} ds' \dot{x}^a(s') A_a(s') + \mathcal{O}((\delta s)^2) \quad (5.27)$$

como δs é muito pequeno, nota-se que \mathcal{P} não aparece e a integral pode ser aproximada, com $\delta x = x(s + \delta s) - x(s)$:

$$\delta h = \mathbb{1} + \delta x^a A_a(s) + \mathcal{O}((\delta s)^2) \quad (5.28)$$

Agora analisa-se como se transforma uma holonomia infinitesimal sob uma transformação de calibre. Lembre-se que $A' = g^{-1} A g + g^{-1} dg$, conforme definido pela equação (2.3).

Então:

$$\begin{aligned} (\delta h)' &= \mathbb{1} + g^{-1}(x) \delta x^a A_a(x) g(x) + (g^{-1}(x + \delta x) - g^{-1}(x)) g(x) \\ &= g^{-1}(x + \delta x) g(x) + g^{-1}(x + \delta x) \delta x^a A_a(x) g(x) \\ &= g^{-1}(x + \delta x) [1 + \delta x^a A_a(x)] g(x) + \mathcal{O}((\delta x)^2) \end{aligned} \quad (5.29)$$

considerando a aproximação (5.28) e a definição (5.26), este resultado pode ser escrito como:

$$(\delta h)' = g^{-1}(x(s + \delta s)) e^{\int_s^{s+\delta s} ds' \dot{x}^a(s') A_a(s')} g(x(s)) + \mathcal{O}((\delta s)^2). \quad (5.30)$$

Lembre-se que quando se considera uma curva γ finita é necessário utilizar o operador de ordenação \mathcal{P} . Decompõe-se agora a curva γ em N segmentos (ver Fig. 5.5):

$$h_\gamma[A] = \lim_{N \rightarrow \infty} h_{1,s_{N-1}} \cdot h_{s_{N-1},s_{N-2}} \cdots h_{s_1,0}. \quad (5.31)$$

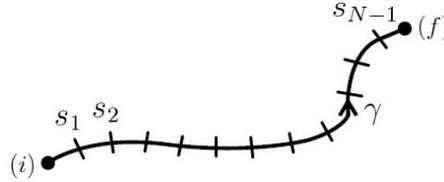


Figura 5.5: Uma curva γ finita dividida em N segmentos.

A transformação de calibre fica:

$$\begin{aligned} h'_\gamma[A] &= \lim_{N \rightarrow \infty} g^{-1}(x_{(f)})h_{1,s_{N-1}}g(x(s_{N-1})) \cdot g^{-1}(x(s_{N-1}))h_{s_{N-1},s_{N-2}}g(x(s_{N-2})) \\ &\quad \cdots g^{-1}(x(s_1))h_{s_N,0}g(x_{(i)}) \end{aligned}$$

e finalmente tem-se:

$$\boxed{h'_\gamma[A] = g^{-1}(x_{(f)})h_\gamma[A]g(x_{(i)})}. \quad (5.32)$$

Com a lei de transformação de calibre (5.32) pode-se construir exemplos de invariantes desta teoria tomando γ como uma curva fechada e em seguida toma-se o traço de h' , considerando que⁷ $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$:

$$\text{Tr } h_\gamma[A] = W_\gamma[A] \quad (5.33)$$

W são as holonomias conhecidas como laços (ou *loops*) de Wilson. O laço de Wilson é invariante de calibre:

$$\begin{aligned} W'_\gamma[A] &= \text{Tr}(h'_\gamma[A]) = \text{Tr}(g^{-1}(x_{(i)})h_\gamma[A]g(x_{(i)})) \\ &= \text{Tr}(h_\gamma[A]g(x_{(i)})g^{-1}(x_{(i)})) = W_\gamma[A]. \end{aligned} \quad (5.34)$$

⁷Vide apêndice A.4.2.

No caso abeliano o símbolo Tr é omitido.

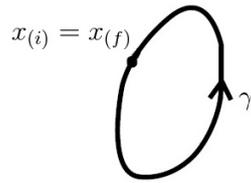


Figura 5.6: Laço γ , obtido tomando $x_{(i)} = x_{(f)}$.

Os laços de Wilson foram utilizados na primeira tentativa de se quantizar a teoria da gravitação com grafos [32], [20] (daí o nome *loop quantum gravity* para a teoria). Neste caso, $W_\gamma[A]$ são as holonomias sobre laços γ e A é a conexão de Ashtekar que é relacionada à conexão do campo gravitacional [19].

5.3.3 O transporte paralelo

Sejam r_1 e r_2 dois vetores definidos nos extremos $x_{(i)}$ e $x_{(f)}$ de uma curva γ . Como eles não fazem parte do mesmo espaço vetorial, para compará-los é preciso transportar r_1 para o espaço tangente em $x_{(f)}$, onde está contido r_2 (ver Fig. 5.7). Se o deslocamento é infinitesimal, o transporte é calculado pela derivada covariante e a holonomia é a generalização disto.

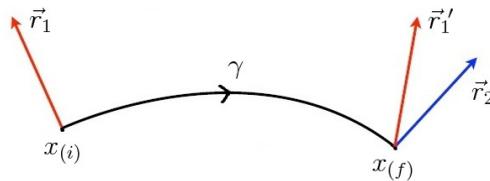


Figura 5.7: Holonomia como transporte paralelo, onde r'_1 é o vetor r_1 transportado para o espaço tangente em $x_{(f)}$.

Ver-se-á que as holonomias são geradores do transporte paralelo de um vetor de um espaço tangente para outro espaço tangente (ver Fig. 5.7). Para tal, considera-se o campo $\bar{\phi}(x)$ que se transforma como $\bar{\phi}'(x_{(i)}) = g^{-1}(x_{(i)})\bar{\phi}(x_{(i)})$ como visto na equação (3.3), em um

certo ponto $x_{(i)}$. Quer-se transportar este campo como:

$$\tilde{\phi}(x_{(f)}; x_{(i)}) = h_\gamma[A]\phi(x_{(i)}). \quad (5.35)$$

Verificou-se que esta transformação é covariante:

$$(\tilde{\phi}(x_{(f)}; x_{(i)}))' = g^{-1}(x_{(f)})\tilde{\phi}(x_{(f)}; x_{(i)}). \quad (5.36)$$

Prova:

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi}(x_{(f)}; x_{(i)}))' &= g^{-1}(x_{(f)})h_\gamma[A]g(x_{(i)})g^{-1}(x_{(i)})\bar{\phi}(x_{(i)}) = g^{-1}(x_{(f)})\tilde{\phi}(x_{(f)}; x_{(i)}) \\ &= h'_\gamma[A]\bar{\phi}'(x_{(i)}) \end{aligned}$$

onde a equação (5.32) foi utilizada.

Em geral, para um campo $\chi(x)$ que se transforma como $\chi'(x_{(i)}) = \chi(x_{(i)})g(x_{(i)})$ no ponto $x_{(i)}$ vamos ter o transporte do campo definido como:

$$\tilde{\chi}(x_{(f)}; x_{(i)}) = \chi(x_{(i)})h_\gamma^{-1}[A]. \quad (5.37)$$

Que se transforma como⁸:

$$(\tilde{\chi}(x_{(f)}; x_{(i)}))' = \tilde{\chi}(x_{(f)}; x_{(i)})g(x_{(f)}). \quad (5.38)$$

Também podemos considerar um campo $\psi(x)$ que se transforma como um campo na representação adjunta $\psi'(x_{(i)}) = g^{-1}(x_{(i)})\psi(x_{(i)})g(x_{(i)})$ no ponto $x_{(i)}$. O transporte do campo é definido como:

$$\tilde{\psi}(x_{(f)}; x_{(i)}) = h_\gamma[A]\psi(x_{(i)})h_\gamma^{-1}[A] \quad (5.39)$$

⁸Lembre que se $h' = g(x_{(f)})hg^{-1}(x_{(i)})$ então $h'^{-1} = g(x_{(i)})h^{-1}g^{-1}(x_{(f)})$.

cuja transformação é dada por

$$(\tilde{\psi}(x_{(f)}; x_{(i)}))' = g^{-1}(x_{(f)})\tilde{\psi}(x_{(f)}; x_{(i)})g(x_{(f)}). \quad (5.40)$$

Estes campos (5.37) e (5.39) transportados pela holonomia são objetos covariantes, isto é, os campos transportados se transformam localmente da mesma maneira que os campos iniciais. Logo, as holonomias são objetos que realmente podem descrever uma teoria baseada em campos covariantes.

5.4 A construção do espaço de Hilbert cinemático

Começa-se a construção do espaço de Hilbert cinemático escrevendo o funcional de onda $\Psi[A]$ como uma função que depende de um número finito de holonomias. Lembre-se que $A \equiv A_a$, com $a = 1, 2$ para o grupo $U(1)$.

Como calcula-se transformações de calibre, quer-se objetos que se transformam de maneira mais simples, por isso que se troca o funcional de A e seu espaço de configurações por uma função das holonomias de A definidas no espaço das holonomias $h_\gamma[A]$.

Como já dissemos, *a priori* tomar holonomias de A gera uma restrição no o espaço de configurações, uma vez que as holonomias estão definidas sobre curvas γ . A idéia é tomar as holonomias sobre todas as curvas possíveis, em vez de todos os pontos do espaço das conexões.

5.4.1 Os funcionais cilíndricos

Define-se então um grafo como sendo um conjunto de um número finito de curvas γ e vértices v (um exemplo pode ser visto na figura 5.8):

$$\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\} \oplus \{v_1, \dots, v_q\}. \quad (5.41)$$

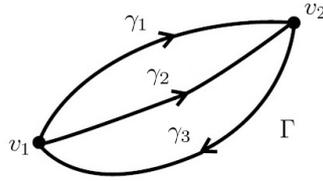


Figura 5.8: Grafo Γ fechado e conexo.

E toma-se um funcional de onda da forma:

$$\Psi_{\Gamma, \psi}[A] = \psi(h_{\gamma_1}[A], \dots, h_{\gamma_p}[A]) \quad (5.42)$$

onde a função $\psi : \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_{p \text{ vezes}} \rightarrow \mathbb{C}$. Pode-se desde agora fazer uma restrição sobre os grafos Γ tomando apenas grafos fechados e conexos, isto é, grafos onde as linhas são todas juntas e fechadas, pois os demais grafos serão eliminados pela imposição do vínculo de Gauss (ou condição de invariância de calibre) conforme será visto adiante. Note que isto implica na exclusão de vértices monovalentes, onde a valência de um vértice é o número de linhas que se interceptam ali.

Chama-se $\Psi_{\Gamma, \psi}[A]$ definida por (5.42) de funcional cilíndrico. O espaço vetorial cilíndrico Cyl é o espaço de todas as combinações finitas de funcionais $\Psi_{\Gamma, \psi}$:

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \sum_{k=i}^k c_{ik} \Psi_{\Gamma_i, \psi_k}[A]. \quad (5.43)$$

Esse espaço vetorial Cyl possui como fecho (complemento de Cauchy) o espaço de Hilbert cinemático ($\overline{\text{Cyl}} = \mathcal{H}_{\text{kin}}$), a ser definido a partir da norma associada ao produto escalar que define-se a seguir.

5.4.2 O produto escalar de funcionais cilíndricos

Considere o espaço Cyl , que é o espaço das combinações lineares finitas de $\Psi_{\Gamma, \psi}[A]$, da equação (5.42). Agora vamos utilizar a notação *bra-ket* (Notação de Dirac) para estes

funcionais:

$$\Psi_{\Gamma, \psi}[A] = \langle A | \Gamma, \psi \rangle. \quad (5.44)$$

Primeiramente define-se o produto interno de Ψ 's diferentes, mas pertencentes ao mesmo grafo ($\Psi_{\Gamma, \psi}$ e $\Psi_{\Gamma, \psi'}$):

$$\langle \Gamma, \psi | \Gamma, \psi' \rangle = \int d\mu(g_1) \cdots \int d\mu(g_p) (\psi(g_1, \dots, g_p))^* \psi'(g_1, \dots, g_p) \quad (5.45)$$

onde $d\mu(g_i)$ é a medida de Haar do grafo γ_i , que para $U(1)$ com $g = e^{i\theta}$ se escreve como

$$\int d\mu(g_1) \cdots \int d\mu(g_p) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} d\theta_1 \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_p. \quad (5.46)$$

Este produto (5.45) está bem definido num espaço vetorial $\text{Cyl}(\Gamma)$. Agora define-se o produto interno em grafos distintos, sendo $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ e $\Gamma' = \{\gamma_{1'}, \dots, \gamma_{p'}\}$ com n o número de linhas da união $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$:

$$\langle \Gamma, \psi | \Gamma', \psi' \rangle = \int d\mu(g_1) \cdots d\mu(g_n) \cdot (\psi(g_1, \dots, g_p))^* \psi'(g_1, \dots, g_{p'}). \quad (5.47)$$

Nota-se que tomar o produto escalar entre grafos distintos é essencialmente o mesmo que tomar o produto escalar sobre o único grafo $\hat{\Gamma}$ de n linhas formado pela união de grafos de p e p' linhas respectivamente⁹.

No exemplo da Fig. 5.9 têm-se: $\hat{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_6\}$ e $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ e $\Gamma' = \{\gamma_3^{-1}, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6\}$.

O produto escalar fica:

$$\langle \Gamma, \psi | \Gamma', \psi' \rangle = \int d\mu(g_1) \cdots d\mu(g_6) \cdot (\psi(g_1, g_2, g_3))^* \psi'(g_3^{-1}, g_4, g_5, g_6).$$

Nota-se ainda que a orientação relativa é importante, no caso de $\Gamma \leftrightarrow \Gamma'$.

⁹O número total de linhas de $\hat{\Gamma}$ é $n \leq p + p'$ para contar os casos onde os grafos Γ e Γ' possuem linhas coincidentes, como veremos no exemplo que segue.

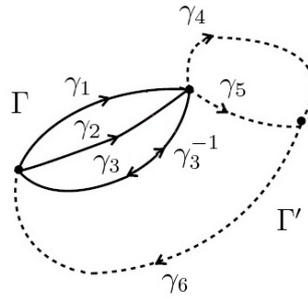


Figura 5.9: Grafos Γ e Γ' distintos. Note que neste caso $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$.

O produto escalar também é sesquilinear:

$$\langle a\Psi_1 + b\Psi_2 | c\Psi_3 \rangle = c(a^* \langle \Psi_1 | \Psi_3 \rangle + b^* \langle \Psi_2 | \Psi_3 \rangle). \quad (5.48)$$

As definições dadas acima também valem para grafos disjuntos: $\Gamma \cap \Gamma' = \emptyset$.

Agora com um produto escalar bem definido, pode-se definir uma norma:

$$\|\Psi_{\Gamma, \psi}\|^2 = \int d\mu(g_1) \cdots d\mu(g_n) |\psi(g_1, \dots, g_n)|^2 = \langle \Gamma, \psi | \Gamma, \psi \rangle. \quad (5.49)$$

Essa integral converge se o grupo G é compacto – que é o caso para $G = U(1)$. Com a norma, define-se o completamento de Cauchy de Cyl notado por $\overline{\text{Cyl}} = \mathcal{H}_{\text{kin}}$, o conjunto das sequências de Cauchy de Cyl , de forma que o espaço Cyl seja denso em \mathcal{H}_{kin} . Uma sequência de Cauchy $\{|\Psi_1\rangle, \dots, |\Psi_k\rangle, \dots\}$ é tal que a norma da diferença entre os $|\Psi\rangle$ tem o limite nulo:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\Psi_n - \Psi_m\| = 0. \quad (5.50)$$

Logo, \mathcal{H}_{kin} é completo por construção, isto é, toda sequência de Cauchy $\{\Psi_n \in \mathcal{H}_{\text{kin}}, n = 1, \dots, \infty\}$ possui um limite forte na topologia induzida pela norma.

O procedimento de quantização canônica análogo, para um sistema mecânico com um número finito de graus de liberdade, pode ser revisto no Apêndice B.3.

5.5 A construção de uma base ortonormal

O produto interno das funções cilíndricas é invariante sob:

1. As transformações de calibre, como consequência da invariância da medida de Haar¹⁰;
2. Os difeomorfismos espaciais, porque o produto só depende da topologia dos grafos.

Existe também um estado particular $|\emptyset\rangle$ onde $\Gamma = \emptyset$ (conjunto vazio).

$$\begin{cases} \langle A|\emptyset\rangle = \Psi_\emptyset[A] = 1 \\ \|\Psi_\emptyset\|^2 = \langle \emptyset|\emptyset\rangle = 1 \end{cases} . \quad (5.51)$$

Agora encontra-se uma base utilizando o teorema de Peter-Weyl, que enunciaremos a seguir para $G = U(1)$, pois quer-se construir uma base ortonormal para o modelo no caso abeliano.

Viu-se na seção 3.1.1 que as representações irredutíveis são os homomorfismos, definidos pelos caracteres $R^{(n)}$, onde n é um inteiro positivo ou negativo, conforme a equação (3.1):

$$R^{(n)}(e^{i\theta}) = e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (5.52)$$

de forma que um elemento $g = e^{i\theta} \in G$ é representado pelo número complexo $R^{(n)}(g)$.

5.5.1 O teorema de Peter-Weyl para uma linha

Enuncia-se agora o teorema de Peter-Weyl para o caso abeliano $U(1)$, considerando por enquanto as holonomias sobre um grafo Γ formado por uma única linha.

¹⁰Vide apêndice A.1.

Teorema 1 (Peter-Weyl - 1ª parte) *A integral de Haar do produto de caracteres correspondentes às representações irredutíveis do grupo é:*

$$\int d\mu(g) (R^{(n)}(g))^* R^{(n')}(g) = \delta^{nn'} \quad (5.53)$$

Então os elementos $R^{(n)}(g)$ constituem um sistema de vetores ortogonais.

A equação (5.53) pode ser escrita como o produto escalar de 2 vetores unitários $|\Gamma, n\rangle$, $|\Gamma, n'\rangle$:

$$\langle \Gamma, n | \Gamma, n' \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i(n-n')\theta} = \delta^{nn'} \quad (5.54)$$

Para o grupo $U(1)$ a segunda parte do teorema de Peter-Weyl é nada mais que o teorema de Fourier:

Teorema 2 (Peter-Weyl - 2ª parte) *Qualquer função $f(g)$ de valores complexos pode ser expandida no sistema de vetores ortogonais descrita na parte (1) do teorema:*

$$f(g) = \sum_n c_n R^{(n)}(g) \quad (5.55)$$

Assim os $|\Gamma, n\rangle$ formam uma base ortonormal do espaço Cyl_Γ , onde Γ é formado por uma linha.

5.5.2 A generalização para um grafo qualquer

Para se aplicar o teorema de Peter-Weyl para quaisquer grafos é necessário definir o seguinte funcional de onda, onde atribuímos a cada linha γ_p do grafo uma representação irredutível unitária de $U(1)$ com uma carga n_p :

$$\Psi_{\Gamma, \vec{n}}[A] \equiv \langle A | \Gamma, \vec{n} \rangle := R^{(n_1)}(h_{\gamma_1}[A]) \cdots R^{(n_p)}(h_{\gamma_p}[A]) \quad (5.56)$$

onde $\vec{n} = (n_1, \dots, n_p)$ é o vetor multicargas. O teorema de Peter-Weyl implica em:

$$\langle \Gamma, \vec{n} | \Gamma, \vec{n}' \rangle = \prod_{i=1}^p \delta_{n_i n'_i} \quad (5.57)$$

juntamente com a definição do produto escalar em (5.45).

Agora, se $\Gamma \neq \Gamma'$, temos que considerar $\hat{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$, conforme discutido na seção 5.4.2.

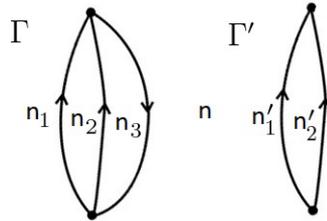


Figura 5.10: Grafos Γ e Γ' com $\Gamma \cap \Gamma'$. Note que Γ' é igual a Γ sem a 3ª linha.

No exemplo da Fig. 5.10 o produto vai ser:

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma, \vec{n} | \Gamma', \vec{n}' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 (R^{(n_1)}(g_1) R^{(n_2)}(g_2) R^{(n_3)}(g_3))^* \cdot R^{(n'_1)}(g_1) R^{(n'_2)}(g_2). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Esse exemplo é equivalente à situação onde $\Gamma' = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ é substituído por $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, mas com a carga $n = 0$ na terceira linha (ver Fig. 5.11).

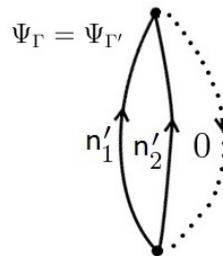


Figura 5.11: O grafo Γ' como um caso particular do grafo Γ .

Cuidado deve ser tomado se alguma linha γ de um grafo Γ' possui carga $n = 0$. Neste caso, o caracter $R^{(0)}(g_3) = 1$, o que implica que o funcional de onda é idêntico ao funcional obtido de Γ subtraído de uma linha correspondente a de carga nula:

$$\Psi_{\Gamma', n'}[A] = R^{(n'_1)}(g_1) R^{(n'_2)}(g_2) R^{(0)}(g_3). \quad (5.59)$$

Então, para evitar este problema de redundância, faz-se uma restrição de tomar apenas funcionais de onda Ψ com cargas não nulas, com a exceção do estado “vazio” $|\emptyset\rangle$, com $\langle A|\emptyset\rangle = 1$.

5.5.3 Redes de cargas

Como consequência da 2ª parte do Teorema de Peter-Weyl, todo funcional cilíndrico $\in \text{Cyl}$ pode ser expresso como uma combinação linear finita dos vetores $|\Gamma, n\rangle$ que formam uma base chamada de redes de cargas, análoga às redes de *spin* (*spin networks*) [15, 31–33]:

$$\boxed{|\Psi\rangle = c_\emptyset|\emptyset\rangle + \sum_\alpha \sum_a c_{\Gamma_\alpha, \vec{n}_a} |\Gamma_\alpha, \vec{n}_a\rangle \in \text{Cyl}} \quad (5.60)$$

onde a somatória é feita sobre um conjunto finito de grafos Γ_α , e para cada Γ soma-se um número finito de multicargas \vec{n}_a , cujas componentes são não-nulas. Em particular, considera-se o espaço $\text{Cyl}(\Gamma)$ dos $|\Psi\rangle$'s definidos sobre um mesmo grafo Γ :

$$|\Psi\rangle_\Gamma = c_\emptyset|\emptyset\rangle + \sum_a c_a |\Gamma, \vec{n}_a\rangle \in \text{Cyl}(\Gamma) \quad (5.61)$$

Ver-se-á que o produto escalar entre Ψ 's de grafos diferentes será nulo. Toma-se como exemplo os grafos Γ e Γ' anteriores da Fig. 5.10:

$$\langle \Gamma, n_1, n_2, n_3 | \Gamma', n'_1, n'_2 \rangle = \delta^{n_1 n'_1} \delta^{n_2 n'_2} \overbrace{\delta^{n_3 0}}{=0} = 0. \quad (5.62)$$

Em geral, ${}_\Gamma \langle \Psi | \Psi \rangle_{\Gamma'} = 0$ se $\Gamma \neq \Gamma'$, ou seja, $\text{Cyl}(\Gamma) \perp \text{Cyl}(\Gamma')$. O espaço Cyl pode então ser escrito como uma soma direta dos subespaços $\text{Cyl}(\Gamma)$:

$$\text{Cyl} = \bigoplus_\Gamma \text{Cyl}(\Gamma). \quad (5.63)$$

É interessante notar que tanto Cyl quanto seu completamento $\overline{\text{Cyl}} = \mathcal{H}_{\text{kin}}$ (definido na subseção 5.4.2) são espaços vetoriais de dimensão infinita não-enumerável. Portanto, \mathcal{H}_{kin} é um espaço de Hilbert não-separável. Contudo, os subespaços $\text{Cyl}(\Gamma)$ são separáveis pois

possuem uma base enumerável (\aleph_0) , então $\text{Cyl}(\Gamma)$ forma um espaço vetorial separável.

5.6 A aplicação do vínculo de Gauss

Agora que já se construiu uma base para o espaço \mathcal{H}_{kin} aplicam-se os vínculos sobre os estados de \mathcal{H}_{kin} para selecionar quais são os estados físicos. Neste final de capítulo realiza-se a aplicação do vínculo de Gauss G . A aplicação do vínculo de curvatura G_0 será discutida no início do capítulo 6.

5.6.1 A diferenciação de uma holonomia

Primeiro aplica-se o vínculo de Gauss G (3.133):

$$\hat{G}(\epsilon) = \int d^2x \partial_a \epsilon \hat{B}^a \quad (5.64)$$

onde $\hat{B}^a = -i\hbar \frac{\delta}{\delta \hat{A}_a}$ (equação 5.12). A aplicação deste vínculo consiste em basicamente diferenciar uma holonomia. Para fazer esta diferenciação expande-se a exponencial como uma somatória, decompõe-se a integral em n intervalos e define-se um ponto de corte $x_{(p)}$ da curva, para evitar problemas de ordenação com \mathcal{P} (ver Fig. 5.12):

$$h_\gamma[A] = \mathcal{P} e^{-\int_{x_{(i)}}^{x_{(f)}} A} = e^{-\int_{x_{(i)}}^{x_{(p)}} A} \cdot e^{-\int_{x_{(p)}}^{x_{(f)}} A}. \quad (5.65)$$

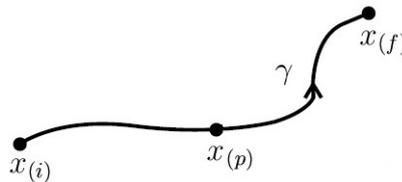


Figura 5.12: curva γ cortada em duas $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$.

Sobre o corte $x_{(p)}$ temos $A_b(x_p)$. Então¹¹:

$$\hat{B}^a(x)h_\gamma[A] = -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_a(x)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_{n-1}} ds_n \cdot \dot{x}^{b_1}(s_1) \cdots \dot{x}^{b_n}(s_n) \cdot A_{b_1}(x_1) \cdots A_{b_n}(x_n) \quad (5.66)$$

$$\hat{B}^a(x)h_\gamma[A] = -i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^n \delta_{b_p}^a \cdot \int d^2x_1 \cdots \int d^2x_p \cdots \int d^2x_n \cdot \dot{x}^{b_1}(s_1) \cdots \dot{x}^{b_n}(s_n) \cdot \delta^2(x - x_p) \cdot A_{b_1}(x_1) \cdots \check{A}_{b_p}(x_p) \cdots A_{b_n}(x_n) \quad (5.67)$$

onde o sinal ($\check{}$) indica que o termo sinalizado deve ser omitido. De (5.67) integra-se com um campo vetorial X_a qualquer e deduz-se:

$$\begin{aligned} \int d^2x X_a(x) \hat{B}^a(x) h_\gamma[A] &= -i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^n \int d^2x_1 \cdots \int d^2x_p \cdots \int d^2x_n \cdot \dot{x}^{b_1}(s_1) \cdots \dot{x}^{b_n}(s_n) \cdot A_{b_1}(x_1) \cdots X_{b_p}(x_p) \cdots A_{b_n}(x_n) \\ &= -i\hbar \int_0^1 dt h_{(1,t)} \dot{x}^a(t) X_a(x(t)) h_{(t,0)} \\ &= -i\hbar \int_0^1 dt \dot{x}^a(t) X_a(x(t)) h_{(1,0)}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Em particular, com $X_a = \partial_a \epsilon$:

$$\hat{G}(\epsilon)h_\gamma[A] = -i\hbar \int_0^1 dt \dot{x}^a(t) \partial_a \epsilon(x(t)) h_{(1,0)} = -i\hbar \left(\epsilon(x(1)) - \epsilon(x(0)) \right) h_\gamma. \quad (5.69)$$

A transformação finita correspondente é:

$$h'_\gamma[A] = e^{-i\theta(x_f)} h_\gamma[A] e^{i\theta(x_i)}. \quad (5.70)$$

A equação (5.69) é a transformação infinitesimal de calibre da holonomia h_γ , ou seja, o operador $\hat{G}(\epsilon)$ gera transformações de calibre da teoria. Então, a aplicação do vínculo de Gauss (3.133) $\hat{G}(\epsilon)\Psi_{\Gamma,\psi}[A] = 0$ é equivalente a requerer a invariância de calibre de $\Psi_{\Gamma,\psi}$.¹²

¹¹Parametrizando a curva com $x^a(s)$ temos: $x^a(0) = x_{(i)}$, $x^a(t) = x_{(p)}$ e $x^a(1) = x_{(f)}$.

¹²Onde ψ são funções das holonomias.

5.6.2 A aplicação de G sobre grafos de um laço

A aplicação do vínculo de Gauss (5.69) corresponde ao requerimento de invariância sobre as transformações de calibre infinitesimais. A seguir, consideram-se holonomias que obedecem à lei de transformação de calibre finita (5.32). Em particular, toma-se primeiro holonomias sobre laços, que são curvas γ fechadas, onde $x_{(i)} = x_{(f)} = x$. Elas são invariantes sob as transformações de $U(1)$:

$$h'_\gamma[A] = g(x)h_\gamma[A]g^{-1}(x) = h_\gamma[A]. \quad (5.71)$$

Considera-se agora funcionais de holonomias sobre laços $\Psi \in \text{Cyl}(\Gamma)$ dados pelos caracteres – as redes de cargas:

$$\Psi_{\Gamma,n}[A] = R^{(n)}(h_\gamma[A]) \quad (5.72)$$

onde Γ é o grafo constituído pelo laço γ . Os $\Psi_{\Gamma,n}[A]$ são invariantes de $U(1)$. Este objeto é o caso abeliano do laço de Wilson (5.33).

5.6.3 Caso de um grafo geral

É suficiente verificar a invariância de calibre das redes de cargas, base de Cyl . Numa rede de cargas em geral, têm-se vértices $(i-j)$ -valentes¹³, como o vértice representado na Fig. 5.13.

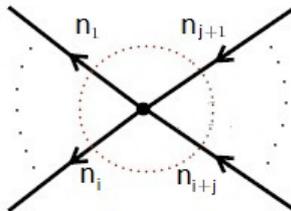


Figura 5.13: Vértice $(i-j)$ -valente.

¹³Isto é, vértices com j linhas “entrando” e i linhas “saindo”.

A parte relevante v_x da rede de cargas na vizinhança deste vértice é:

$$v_x \equiv R^{-1(n_1)}(h_1) \cdots R^{-1(n_i)}(h_i) \cdot R^{(n_{i+1})}(h_{i+1}) \cdots R^{(n_{i+j})}(h_{i+j}) \quad (5.73)$$

Com $R^{(n)} = e^{in\theta}$, vê-se que a condição de invariância neste caso abeliano:

$$\delta_\epsilon v_x = e^{i(n_1 + \cdots + n_i - n_{i+1} - \cdots - n_{i+j})\theta(x)} v_x \quad (5.74)$$

é a lei de conservação de carga dada pela expressão $n_1 + \cdots + n_i = n_{i+1} + \cdots + n_{i+j}$, isto é, têm-se em cada vértice condições sobre os valores das cargas n conforme às regras de conservação de cargas.

5.6.4 Base de redes de cargas invariante de calibre

Denota-se por \mathcal{H}_0 o espaço de Hilbert cujos vetores obedecem ao vínculo de Gauss (5.69). Uma base para o espaço \mathcal{H}_0 é dada pelas redes de cargas constituídas de produtos invariantes de calibre como os estudados anteriormente nesta seção:

$$\Psi_s[A] = \langle A|s \rangle \equiv \prod_{p=1}^N R^{(n_p)}(h_{\gamma_p}[A]) \quad (5.75)$$

com n_p obedecendo à lei de conservação de cargas em cada vértice do grafo Γ . Os $|s\rangle = |\Gamma, \vec{n}\rangle$ formam uma base ortogonal para as redes de cargas:

$$\langle s|s'\rangle = \langle \Gamma, \vec{n}|\Gamma', \vec{n}'\rangle = \delta_{\Gamma\Gamma'} \prod_{p=1}^N \delta_{n_p n'_p}. \quad (5.76)$$

Com esta base para a rede de cargas $|\Gamma, \vec{n}\rangle$ definida em \mathcal{H}_0 , tem-se uma base para os funcionais $\Psi_s[A]$ onde o vínculo $G(\epsilon)$ (e $\Phi_0(\epsilon)$) já estão satisfeitos.

O próximo passo é aplicar sobre os funcionais de onda $\Psi[A] \in \mathcal{H}_0$ invariantes sobre transformações de calibre o último vínculo gerador de simetrias do modelo, o vínculo curvatura G_0 (3.134), para então se construir um espaço de Hilbert físico \mathcal{H}_{fis} , com todos

os vínculos resolvidos.

Esta construção será considerada no início do capítulo seguinte.

Capítulo 6

Operadores e Observáveis

Neste capítulo analisar-se-á a estrutura do espaço de Hilbert físico da nossa teoria para o caso abeliano, que foi estudado nos capítulos 3 e 5, isto é, estudar a estrutura do espaço onde estão definidos os funcionais de onda que obedecem os vínculos canônicos geradores de simetrias, que são Φ_0 (5.8), G (5.64) e G_0 (3.134).

No capítulo anterior construiu-se os estados de base $|s\rangle = |\Gamma, \vec{n}\rangle \in \mathcal{H}_0$, onde $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_{\text{kin}}$ e $\Psi_s[A] = \langle A|s\rangle$ são funcionais de onda invariantes de transformações de calibre geradas por G e transformações de fase geradas por Φ_0 .

Uma vez construídos os funcionais de onda que pertencem ao espaço dos estados físicos da teoria, é conveniente definir alguns observáveis e analisar a dinâmica da teoria, o que será feito para o modelo supracitado¹.

¹Para exemplos não-abelianos, no trabalho [19] vários observáveis foram construídos para o modelo BF 2+1 dimensional puro.

6.1 Os estados invariantes sobre transformações de calibre - Caso Abelian

Seja $\Psi_s[A] = \langle A|\Psi\rangle_s \in \mathcal{H}_0$ um funcional de onda função das holonomias $h_\Gamma[A]$, pertencente ao espaço \mathcal{H}_0 dos estados que obedecem ao vínculo de Gauss (5.69). As redes de cargas $|s\rangle$ (5.75):

$$\Psi_s[A] = \langle A|s\rangle \equiv \prod_{p=1}^N R^{(n_p)}(h_{\gamma_p}[A]) \quad (6.1)$$

formam uma base ortonormal de \mathcal{H}_0 , como vimos na seção 5.6.4.

6.2 A solução local do vínculo de curvatura

Então tomam-se estes $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0$ (6.1) para se aplicar o último vínculo remanescente da teoria, que é o vínculo da curvatura espacial nula (3.134):

$$\hat{G}_0(\epsilon) = \int d^2x \epsilon(x) \hat{F}(x) \quad (6.2)$$

onde $\hat{F} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}\hat{F}_{ab}$. Aplica-se (6.2) em $|\Psi\rangle$ com a condição:

$$\hat{G}_0|\Psi\rangle = 0 \quad (6.3)$$

ou simplesmente $\hat{F}(A)|\Psi\rangle = 0$. A solução geral desta condição é dada pelas funções de holonomias $h_\gamma[A]$ que obedecem $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = 0$. Localmente, existe então uma função escalar $\varphi(x)$ real tal que:

$$A_a = i\partial_a\varphi \quad (6.4)$$

com uma transformação de calibre que se escreve como $\varphi' = \varphi + \omega$. A discussão a seguir depende da topologia da folha espacial Σ onde nossos grafos estão definidos, então

faremos alguns exemplos considerando diferentes topologias para Σ , uma vez que todas as variedades bidimensionais podem ser classificadas também de acordo com o seu *genus* [45, 46].

6.2.1 Caso $\Sigma = \mathbb{R}^2$

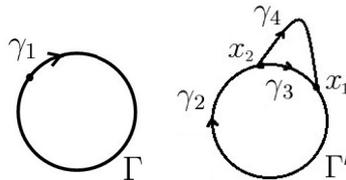


Figura 6.1: Dois grafos Γ e Γ' sobre um plano \mathbb{R}^2 .

Como um primeiro exemplo, considere o caso onde temos grafos $\Gamma = \{\gamma_1\}$ e $\Gamma' = \{\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}$ no plano \mathbb{R}^2 (ver Fig. 6.1), com cargas n_i associadas às linhas γ_i . A equação (6.4) vale globalmente em \mathbb{R}^2 , então:

$$\begin{aligned} h_{\gamma_1} &= e^{in_1 \oint d\varphi} = 1 \\ h_{\gamma_2} &= e^{in_2 \int_{x_1}^{x_2} d\varphi} = e^{in_2(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))} \end{aligned} \quad (6.5)$$

de forma que $h'_{\gamma_2} = h_{\gamma_2} e^{in_2(\omega(x_2) - \omega(x_1))}$, e obviamente h_{γ_3} e h_{γ_4} , não são invariantes. Impõe-se a conservação de cargas nos vértices de Γ' para se obter:

$$h_{\Gamma'} = e^{i \left(n_2 \int_{x_1}^{x_2} + n_3 \int_{x_2}^{x_1} + n_4 \int_{x_2}^{x_1} \right) d\varphi} = e^{i(n_2 - n_3 - n_4)(\varphi(x_2) - \varphi(x_1))} = 1 \quad (6.6)$$

já que $n_2 - n_3 - n_4 = 0$ no vértice x_1 , por exemplo. Então, os grafos Γ e Γ' definidos sobre uma folha espacial $\Sigma = \mathbb{R}^2$ podem ser deformados para um único ponto, de forma que temos apenas estados equivalentes ao estado do grafo vazio $|\emptyset\rangle$, isto é, neste caso o espaço de Hilbert físico é reduzido a um espaço trivial unidimensional:

$$\mathcal{H}_{\text{fis}} = \{\lambda|\emptyset\rangle, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

6.2.2 Caso $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ – O Operador Fluxo

Considera-se agora grafos definidos num espaço $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, que é o plano do qual a origem $x = 0$ está excluída. Todos os laços fechados que envolvem o ponto singular em $x = 0$ uma única vez têm o mesmo valor $h_\gamma = e^{iQ}$, onde Q chama-se de fluxo gerado pelo ponto singular².

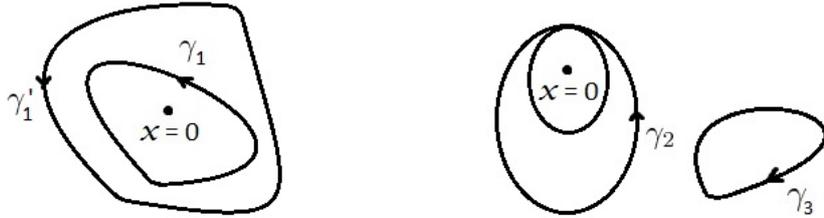


Figura 6.2: Esquerda: γ_1, γ'_1 circulando o ponto $x = 0$. Direita: γ_2 enrolando duas vezes em torno de $x = 0$ e γ_3 não circula $x = 0$.

Para exemplificar, tomam-se os grafos da Fig. 6.2 de forma que:

$$\begin{aligned} h_{\gamma_1} &= e^{\oint A} = e^{\int_{\Sigma_{\gamma_1}} F} = e^{iQ} = h_{\gamma'_1} \\ h_{\gamma_2} &= e^{2iQ} \\ h_{\gamma_3} &= 1 \end{aligned} \tag{6.7}$$

onde $\Sigma_{\gamma_i} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ é uma superfície cercada pela curva γ_i fechada, e o Teorema de Stokes pode ser aplicado. Logo, apenas holonomias que circulam “furos” terão resultados não-nulos, uma vez que aplicar o operador \hat{F} localmente implica em escrever A como um gradiente de um certo potencial (6.4).

Considere agora um grafo colorido (pelas cargas n) Γ num espaço $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (ver Fig. 6.3).

Repara-se que tanto $h_1^{-1}h_2$ quanto $h_1^{-1}h_3^{-1}$ circulam o ponto singular uma única vez, então

²O fluxo $Q \in \mathbb{R}$ pode ser visto como análogo ao fluxo magnético em um solenóide compacto infinitamente longo onde aplicamos a Lei de Ampère.

resultam em e^{iQ} . Se $h_1 = e^{i(\varphi_f - \varphi_i)}$:

$$h_2 = e^{i(Q + \varphi_f - \varphi_i)}$$

$$h_3 = e^{i(-Q - \varphi_f + \varphi_i)}.$$

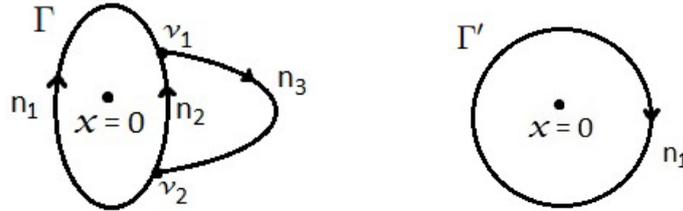


Figura 6.3: Um grafo colorido Γ sobre um plano $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, contraído para um grafo Γ' .

O estado $\Psi_{\Gamma,n}$ fica:

$$\Psi_{\Gamma,n} = e^{i(n_2 - n_3)Q} = e^{-in_1Q} \quad (6.8)$$

pois no vértice v_1 temos $n_1 + n_2 = n_3$. A equação (6.8) mostra que o grafo colorido Γ pode ser contraído ou deformado até a um único *loop* (grafo Γ') de carga n_1 orientado no sentido horário, em torno de $x = 0$. Nota-se que este resultado local pode ser visto globalmente como a construção de classes de equivalência de estados $|\Psi\rangle$ que resolvem $\hat{G}_0|\Psi\rangle = 0$:

$$\Psi_n[A] = e^{inQ} \quad (6.9)$$

com $n \in \mathbb{Z}$ sendo a carga do *loop* resultante, calculada a partir da condição de conservação de cargas. A base do espaço de Hilbert físico é então formada por vetores $|n\rangle$, $n \in \mathbb{Z}$, onde:

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}. \quad (6.10)$$

Para $n = 0$ tem-se $|0\rangle = |\emptyset\rangle$, o que corresponde a base do espaço do exemplo discutido na subseção 6.2.1.

Repare que o número inteiro n pode ser interpretado também como número de enlaçamento (*winding number*) de um *loop*: enlaçar n vezes o ponto singular com uma curva fechada de carga 1, ou enlaçar uma única vez o ponto singular com uma curva fechada de carga n , gera o mesmo funcional de onda³ $\Psi_n[A]$.

6.2.3 Caso $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, com N pontos singulares

A generalização para o caso de um plano \mathbb{R}^2 com N “furos” é direta. A base do espaço de Hilbert físico é dada por:

$$\mathcal{H}_{\text{fís}} = \{|\vec{n}\rangle\} \quad (6.11)$$

onde $|\vec{n}\rangle = |n_1, \dots, n_N\rangle$ e cada n_k é a carga (ou o número de enlaçamento) de uma curva fechada em torno do k -ésimo ponto singular, de forma que todos os outros pontos estão fora desta curva. O funcional de onda correspondente é dado por:

$$\langle A|\vec{n}\rangle = \Psi_{\vec{n}}[A] = e^{i \sum_{k=1}^N n_k Q_k} \quad (6.12)$$

onde Q_k é o fluxo associado ao k -ésimo ponto singular, definido por:

$$h_{\gamma_k}[A] = e^{iQ_k} \quad (6.13)$$

onde γ_k é uma curva fechada orientada positivamente que enlaça uma única vez o ponto singular x_k e deixa de fora todos os outros pontos singulares.

Estes vetores de base (6.11) obedecem à relações de ortogonalidade dadas por:

$$\langle n_1, \dots, n_N | n'_1, \dots, n'_{N'} \rangle = \delta_{NN'} \prod_{k=1}^N \delta_{n_k n'_k} \quad (6.14)$$

isto é, estados definidos por *loops* em torno do k -ésimo ponto singular que possuem um

³Vide as equações (6.7).

número n de enlaçamento/carga distintos serão ortogonais entre si, assim como os estados definidos por *loops* em torno de pontos singulares diferentes de k .

É importante notar que a invariância de difeomorfismos, que na teoria clássica era consequência das invariâncias de calibre⁴, é explícita na teoria quântica construída aqui uma vez que todos os vínculos são satisfeitos. Os estados do espaço de Hilbert (não separável) \mathcal{H}_0 (6.1) que ainda não obedecem ao vínculo \hat{G}_0 não são invariantes de difeomorfismos, já que estes dependem da localização e do formato dos grafos associados. O espaço \mathcal{H}_{fis} é um espaço separável, já que seus estados de base formam um conjunto enumerável com relações discretas de ortogonalidade (6.14).

6.3 Observáveis

Segue da discussão realizada na seção anterior que não existem observáveis para topologias simples como a de $\Sigma = \mathbb{R}^2$. No entanto, para topologias não-triviais como a de $\Sigma = \mathbb{R}^2$ subtraído de N pontos singulares, existe um conjunto de N observáveis \hat{L}_k , $k = 1, \dots, N$, que pode ser diagonalizado simultaneamente na base (6.11) de \mathcal{H}_{fis} :

$$\hat{L}_k |\vec{n}\rangle = n_k |\vec{n}\rangle \quad (6.15)$$

e são definidos por:

$$\hat{L}_k = \int_{\Sigma} d^2x X_a^{(k)}(x) \hat{B}^a(x) \quad (6.16)$$

onde $X_a^{(k)}$ é uma 1-forma fechada ($dX^{(k)} = 0$), tal que sua integral sobre uma curva γ_k fechada⁵ é explicitamente:

$$\int_{\gamma_k} X^{(l)} = \frac{i}{\hbar} \delta_{kl} \quad (6.17)$$

⁴Vide seção 3.3.

⁵Onde γ_k é orientada positivamente e enlaça uma única vez o ponto singular x_k , deixando de fora todos os outros pontos singulares.

isto é, a integral de $X^{(k)}$ é nula para outras curvas γ_l com $l \neq k$ de forma que o resultado só depende da classe de homotopia de γ_k .

Os autovalores da expressão (6.15) resultantes da aplicação de \hat{L}_k (6.15) calculam-se tomando a expressão para os nossos funcionais de onda pertencentes à \mathcal{H}_{fis} (6.12) com Q_k definido por (6.13), sobre o qual aplicamos o operador de diferenciação (5.68) que foi definido na seção 5.6.1 do capítulo anterior:

$$\int_{\Sigma} d^2x X_a^{(k)}(x) \frac{\delta}{\delta A_a(x)} h_{\gamma_l}[A] = \left(\int_{\gamma_l} X \right) h_{\gamma_l}[A] = \frac{i}{\hbar} \delta_{kl} h_{\gamma_l} \quad (6.18)$$

(sem somatória sobre l). O operador \hat{L}_k aplicado a um estado $|\Psi\rangle_{\text{fis}}$ está definido dentro de \mathcal{H}_{fis} , de fato, é um operador auto adjunto em \mathcal{H}_{fis} e forma um conjunto completo de observáveis comutáveis, que também comuta com os operadores gerados pelos vínculos no espaço físico:

$$\begin{aligned} [\hat{G}, \hat{L}]|\Psi\rangle_{\text{fis}} &= 0 \\ [\hat{G}_0, \hat{L}]|\Psi\rangle_{\text{fis}} &= 0 \\ [\hat{\Phi}_0, \hat{L}]|\Psi\rangle_{\text{fis}} &= 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Num sistema de coordenadas particular, como por exemplo um sistema de coordenadas polares (r, θ) centrado no ponto singular x_k , uma solução particular para a 1-forma $X^{(k)}$ é dada por:

$$X_r = 0 \quad , \quad X_{\theta} = \frac{i}{2\pi\hbar}. \quad (6.20)$$

Que é evidentemente uma forma fechada em $\Sigma = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_N\}$, pois:

$$\partial_r X_{\theta}^{(k)} - \partial_{\theta} X_r^{(k)} = 0. \quad (6.21)$$

Em particular, nota-se que nos pontos x_l para $l \neq k$:

$$\int_{\gamma_l} X^{(k)} = 0 \quad \text{se } l \neq k.$$

Este resultado pode ser interpretado “fisicamente” se considerarmos um espaço Σ com uma métrica euclidiana definida por:

$$g_{ab} = \begin{bmatrix} g_{rr} & 0 \\ 0 & g_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad g^{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

e a equação (6.17) é análoga ao caso da Lei de Ampère bidimensional, cuja fonte é uma corrente localizada em x_k “saindo do papel”, de valor $1/\hbar$, e $-iX_a^{(k)}$ é um campo magnético bidimensional gerado por esta corrente, de magnitude:

$$\begin{aligned} \|X^{(k)}\|^2 &= g^{ab} |X_a^{(k)} X_b^{(k)}| = \frac{1}{r^2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \\ \|X^{(k)}\| &= \frac{1}{2\pi\hbar} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho realizou-se a construção e a quantização de um modelo BF em 2+1 dimensões com campos escalares minimamente acoplados como um modelo sigma, fazendo o papel de campos de matéria. Para se construir esta teoria, foram desenvolvidas as ferramentas matemáticas necessárias para se tratar teorias de calibre, e sobre esta teoria aplicou-se o método hamiltoniano de Dirac cujo desenvolvimento teórico e prático em detalhes é uma das principais contribuições deste trabalho.

Foi realizado também o desenvolvimento das técnicas de quantização da LQG de forma detalhada para o caso abeliano do modelo, uma vez que a quantização do caso não-abeliano não é imediata e será apresentada em um trabalho futuro que está em andamento [24]. Entretanto, resultou-se do método hamiltoniano que nosso modelo possui os mesmos graus de liberdade de um modelo BF puro, tanto no caso abeliano quanto no caso não abeliano.

Esses graus de liberdade são não-locais e de natureza puramente topológica, de forma que a evolução da teoria foi dada por parâmetros das simetrias geradas pelos vínculos presentes na hamiltoniana, que são transformações de calibre dos campos que compõem nosso modelo.

A partir daí, conforme foi explicitamente desenvolvido para o caso abeliano, construiu-se um espaço de Hilbert para as grandezas dinâmicas então definidas como operadores e o

formalismo da LQG foi desenvolvido a fim de se construir uma base ortonormal para os estados quânticos, denominada rede de cargas. Uma vez construída a base de estados físicos da teoria, que é uma base de estados do subespaço que obedecem aos vínculos hamiltonianos, foi visto que esses estados eram caracterizados essencialmente pelo *genus* da topologia do espaço. Por último, estudou-se os operadores definidos nesse espaço de Hilbert físico, que formam um conjunto completo de N observáveis comutáveis \hat{L}_k no caso de uma topologia espacial sendo do tipo \mathbb{R}^2 com N pontos subtraídos (N “furos”). Estes resultados para o caso abeliano foram publicados em [23].

Apêndice A

Revisão de Geometria Diferencial

Neste capítulo faz-se uma breve revisão das principais ferramentas utilizadas neste trabalho tal como foi feito em [19], tomando alguns exemplos e mostrando propriedades matemáticas relevantes.

A.1 Grupos de Lie

Na matemática, um grupo de Lie [28, 39, 43] é um grupo que também é uma variedade diferenciável, o que faz com que as operações dos elementos do grupo, ou geradores, sejam compatíveis com a estrutura diferencial. Neste trabalho, quando refere-se a grupos de calibre (*gauge*) ou ainda grupos de simetria, considera-se que os grupos citados são grupos de Lie.

Os grupos de Lie, por serem variedades diferenciáveis, podem ser estudados utilizando o cálculo diferencial em contraste com os casos mais gerais de grupos topológicos. Uma das idéias chave na teoria de grupos de Lie é substituir o objeto global, o grupo, por sua versão local ou linearizada que é chamada de grupo infinitesimal cujo estudo é conhecido como álgebra de Lie, que é a teoria que atualmente melhor descreve as simetrias contínuas de objetos e estruturas matemáticas.

Um grupo de Lie G é caracterizado pelo espaço de seus parâmetros, que é uma variedade, no qual pode-se definir uma integração:

$$\int_G d\mu(g)f(g) \quad (\text{A.1})$$

onde $g \in G$. A medida $d\mu(g)$ é invariante sobre transformações do grupo G :

$$\int_G d\mu(g)f(g') = \int_G d\mu(g)f(g) \quad (\text{A.2})$$

onde $g' = hg$, $g' = gh$ ou $g' = g^{-1}$, com $h \in G$. Esta medida invariante é chamada de medida de Haar, que define a integração em grupos de Lie.

A.1.1 Alguns grupos de Lie

Escrevem-se aqui alguns exemplos de grupos de Lie que aparecem neste trabalho, ao longo do texto.

- O espaço euclidiano R^n com a adição vetorial comum como operação do grupo se torna um grupo de Lie abeliano não-compacto n -dimensional;
- O grupo círculo \mathcal{S}^1 que consiste em números complexos com valor absoluto = 1 sobre multiplicação. Este é um grupo de Lie abeliano compacto unidimensional.
- O grupo ortogonal $O(R^n)$, formado por todas as matrizes ortogonais $n \times n$ com valores reais. Este é um grupo de Lie $\frac{n(n-1)}{2}$ -dimensional desconexo, mas que tem um subgrupo conexo $SO^n(R)$ de mesma dimensão que é formado por matrizes ortogonais de determinante = 1, que é conhecido como grupo especial ortogonal (em inglês, *Special Orthogonal group*) (para $R^n = 3$, temos o grupo de rotações).
- O grupo unitário $U(n)$ é formado por matrizes unitárias $n \times n$ com valores complexos. Este é um grupo de Lie de dimensão n^2 compacto e conexo. Matrizes unitárias de determinante = 1 formam um subgrupo conexo fechado de dimensão $n^2 - 1$ chamado de $SU(n)$, o grupo especial unitário (em inglês *special unitary group*).

- O grupo de Lorentz e o grupo de Poincaré são os grupos de isometrias lineares e afins do espaço de Minkowski (interpretado como o espaço-tempo da relatividade restrita). Eles são grupos de Lie de dimensão 6 e 10.

A.1.2 A álgebra do grupo SU(2)

Para se definir o Grupo de Lie G (consideram-se grupos semissimples) temos que definir os geradores de transformações infinitesimais g . Define-se a seguir o grupo SU(2) como exemplo e para tal, seja ψ um spinor do espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ de uma variedade \mathcal{M} , no ponto p , cuja fibra¹ é o grupo G :

$$g \in G : \psi' = g\psi \quad (\text{A.3})$$

onde os g são matrizes² 2×2 . A transformação infinitesimal vai ser:

$$g \approx 1 + \omega ; |\omega| \ll 1. \quad (\text{A.4})$$

Propriedades das transformações infinitesimais de SU(2):

$$g^\dagger g \approx (1 + \omega)^\dagger (1 + \omega) = 1 + \omega^\dagger + \omega = 1 \quad : \quad \boxed{\omega^\dagger = -\omega} \quad (\text{A.5})$$

$$\det(g) = 1 \quad : \quad \boxed{\text{Tr}(\omega) = 0}. \quad (\text{A.6})$$

Com estas propriedades, escreve-se uma base para as matrizes ω usando as matrizes de Pauli σ_I , com ($I = 1, 2, 3$).

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

¹Para uma análise formal sobre espaços fibrados, veja a referência [39], capítulo 5.

²Estas matrizes serão escritas explicitamente na próxima subseção.

E chama-se uma base dos geradores ω de T_I , definida por:

$$T_I \equiv -\frac{i}{2}\sigma_I. \quad (\text{A.8})$$

Em geral:

$$\omega(x) = \omega^I(x)T_I. \quad (\text{A.9})$$

Nota-se também que:

$$\text{Tr}(T_I T_J) = -\frac{1}{2}\delta_{IJ} \quad (\text{A.10})$$

e têm-se relações de comutação entre os T_I :

$$[T_I, T_J] = f_{IJ}^K T_K \quad (\text{A.11})$$

onde f_{IJ}^K é a constante de estrutura do grupo, em $\text{SU}(2)$: $f_{IJ}^K = \varepsilon_{IJ}^K$, o tensor de Levi-Civita.

A.1.3 A forma matricial de $g \in \text{SU}(2)$

Toma-se um elemento $g \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ que depende de 4 números complexos, ou 8 parâmetros reais:

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Considera-se agora as duas propriedades (A.5) e (A.6) do grupo $\text{SU}(2)$:

1. $g^\dagger g = \mathbb{1}$: (U) Unitário (4 equações)
2. $\det(g) = 1$: (S) Especial (1 equação)

que geram 5 equações. Então, têm-se 3 parâmetros livres para $g \in \text{SU}(2)$, cuja solução é:

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (\text{A.14})$$

Como α e β são números complexos, a solução de (A.14) é uma esfera \mathcal{S}^3 , ou seja, $\text{SU}(2) = \mathcal{S}^3$. Nas coordenadas θ, φ, ν de \mathcal{S}^3 a integral de Haar é dada por:

$$\int_{\mathcal{S}^3} d\mu f(\theta, \varphi, \nu) = \int_0^\pi d\nu \sin^2 \nu \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi f(\theta, \varphi, \nu) \quad (\text{A.15})$$

e a medida de Haar é o ângulo sólido tridimensional.

A.1.4 Homeomorfismos de $\text{SU}(2)$

Há um homeomorfismo entre $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ dado por:

$$g \in \text{SU}(2) \mapsto R_{ij}(g) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma_i g \sigma_j g^\dagger) \quad (\text{A.16})$$

onde $i, j = 1, 2, 3$. Só que $R(-g) = R(g)$, então o espaço não é isomórfico, pois uma curva indo de g a $-g$ em $\text{SO}(3)$ é uma curva fechada, mas em $\text{SU}(2)$ é uma curva aberta. Então, esta mesma curva vai possuir classes de homotopia diferentes dependendo do espaço em que ela estiver definida, o que mostra que estes espaços não são isomórficos. Como uma curva fechada em $\text{SO}(3)$ é o mesmo que tomar duas curvas abertas em $\text{SU}(2)$ (de g a $-g$ e de $-g$ a g , respectivamente), chama-se $\text{SU}(2)$ de cobertura dupla de $\text{SO}(3)$.

A.2 Formas diferenciais e vetores

A.2.1 Representação adjunta para formas e vetores

A partir do estudo da álgebra do grupo de calibre $SU(2)$, adota-se uma notação para expressar os campos vetoriais e formas diferenciais:

$$A_\mu \leftrightarrow A_\mu^I T_I \equiv A_\mu^I \quad (\text{A.17})$$

$$B_\mu \leftrightarrow B_\mu^I T_I \equiv B_\mu^I. \quad (\text{A.18})$$

A.2.2 Formas, vetores e tensores em uma variedade diferenciável

Introduz-se o conceito de formas diferenciais [3,27,28,39], e toma-se como exemplo $A_\mu^I dx^\mu$. O campo A_μ^I pode ser considerado uma conexão, que define a derivada covariante na variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável é um conjunto de pontos p que possuem uma vizinhança U onde são definidos homeomorfismos, isto é, uma transformação que caracteriza de maneira única o ponto p (ver Fig. A.1).

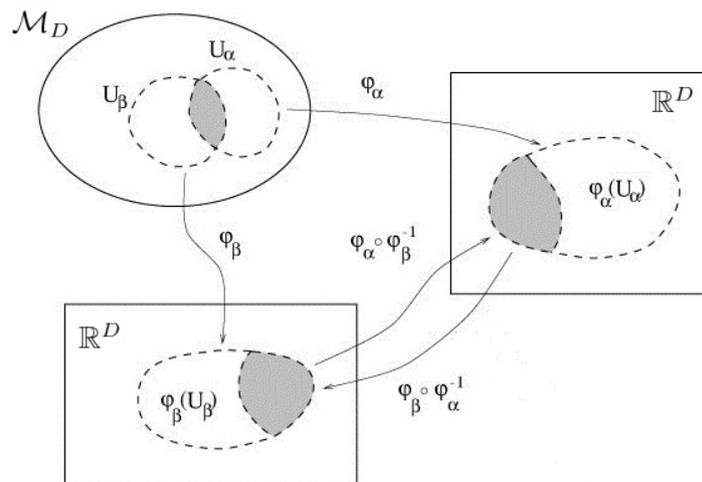


Figura A.1: Para pontos $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$ definem-se transformações de coordenadas φ_α e φ_β que mapeiam os pontos da variedade \mathcal{M}_D em subespaços \mathbb{R}^D .

Seja $x^\mu \equiv (x^0, x^1, \dots, x^{D-1})$ um sistema de coordenadas da variedade \mathcal{M}_D , de D di-

mensões. Escrevem-se as transformações de coordenadas de forma geral

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x) \quad (\text{A.19})$$

que em uma variedade diferenciável são funções definidas em \mathbb{C}^{∞} , infinitamente diferenciáveis.

Agora definem-se os vetores. Seja então $v(p)$ com $p \in \mathcal{M}$, um operador diferencial definido num sistema de coordenadas x por:

$$(vf)(x) = v^{\mu}(x)\partial_{\mu}f(x) \quad (\text{A.20})$$

onde $f(x)$ é uma função que é definida de forma que os vetores escritos nesta forma sejam invariantes. Chama-se $f(x)$ de uma função escalar, isto é, invariante sob uma transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' \\ f(x) &= f'(x'). \end{aligned}$$

Considerando transformações infinitesimais $x'^{\mu} = x^{\mu} - \xi^{\mu}(x)$, com $|\xi|$ pequeno:

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x - \xi) \\ f'(x) &= f(x + \xi) = f(x) + \xi^{\mu}\partial_{\mu}f = f(x) + \delta f(x). \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Note que os $v^{\mu}(\vec{x})$ podem ser vistos como as componentes e ∂_{μ} como os vetores da base. Uma vez definidos desta maneira tem-se independência do sistema de coordenadas, o que se quer para trabalhar com vetores na variedade diferenciável. Verifica-se a invariância de (A.20)

$$v'^{\mu}(x')\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}f'(x') = v^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}f(x) \quad (\text{A.22})$$

onde:

$$v'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} v^{\nu}(x) \quad (\text{A.23})$$

$$\partial'_{\mu} f'(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} f(x). \quad (\text{A.24})$$

As equações (A.23) e (A.24) são essencialmente as definições de vetor contravariante e vetor covariante respectivamente, que se obtém como consequência de $f(p)$ ser uma função escalar.

Em geral, tem-se o tensor:

$$\begin{aligned} t'^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu}} t^{\nu \mu_2 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu}} t^{\mu_1 \nu \mu_3 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \dots \lambda_n} + \dots \\ &+ \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda_1}} t^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\rho \lambda_2 \dots \lambda_n} + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda_2}} t^{\mu_1 \dots \mu_n}_{\lambda_1 \rho \lambda_3 \dots \lambda_n} + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

que possui índices covariantes e contravariantes.

A.2.3 O espaço tangente T_p e o espaço dual T_p^*

Sempre pode-se definir um espaço dual a um espaço vetorial pré-definido, então denota-se T_p^* o espaço dual do espaço tangente T_p , no ponto p de uma variedade \mathcal{M} . Um elemento $\omega \in T_p^*$ é uma forma linear $\omega(\alpha v + \beta w) = \alpha \omega(v) + \beta \omega(w)$ sobre T_p :

$$\omega : T_p \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{A.26})$$

$$v \mapsto \omega(v).$$

O dual T_p^* também é um espaço vetorial:

$$c_1 \omega_1(v) + c_2 \omega_2(v) = (c_1 \omega_1 + c_2 \omega_2)(v) \quad (\text{A.27})$$

onde $\omega_1, \omega_2 \in T_p^*$, $v \in T_p$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. $\dim(T_p^*) = \dim(T_p) = \dim(\mathcal{M}) = D$. Escreve-se

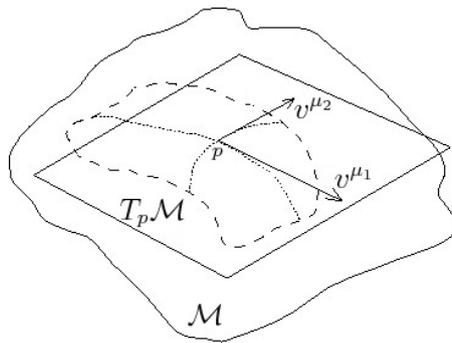


Figura A.2: O conjunto dos vetores v num ponto p se chama espaço tangente T_p , que é um espaço vetorial.

uma base de um sistema de coordenadas para $T_p^* : \{dx^\mu, \mu = 0, \dots, D - 1\}$ definida por $dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu$ para se definir a 1-forma geral $\omega \in T_p^*$:

$$\omega = \omega_\mu(\vec{x})dx^\mu \quad (\text{A.28})$$

que independe da escolha de coordenadas. De maneira análoga às leis de transformação dos vetores (A.23) e (A.24), deduz-se as leis de transformação das formas. Com

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu \quad (\text{A.29})$$

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\text{A.30})$$

obtém-se:

$$\omega'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu(x). \quad (\text{A.31})$$

A transformação infinitesimal de uma 1-forma ω , com $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = -\xi^\mu(x')$ é:

$$\delta\omega_\mu = \xi^\lambda \partial_\lambda \omega_\mu + \partial_\mu \xi^\lambda \omega_\lambda. \quad (\text{A.32})$$

Agora define-se a 1-forma $B \in T_p^*$ em termos de componentes $B = B^I T_I$, utilizando a

álgebra para os geradores do grupo como a definida nas equações (A.5) e (A.6):

$$\begin{aligned} B' &= (1 - \omega)B(1 + \omega) = B - [\omega, B] \\ \delta B &= -[\omega, B] \end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned} (\delta B^I)T_I &= -\omega^J B^K [T_J, T_K] = -\omega^J B^K f_{JK}^I T_I \\ \delta B^I &= -\omega^J B^K f_{JK}^I \equiv \omega^J \delta_J B^I \\ \delta_J B^I &= -B^K f_{JK}^I \end{aligned} \tag{A.34}$$

e B escrito em componentes é:

$$B = \frac{1}{(D-2)!} B_{\mu_1 \dots \mu_{D-2}}^I dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{D-2}}. \tag{A.35}$$

Que é o campo B da sigla “BF”, do modelo homônimo.

A.2.4 Multiplicação exterior de formas diferenciais

Pode-se generalizar a 1-forma para p-formas de forma análoga ao que foi feito anteriormente dos vetores para os tensores:

- vetor \rightarrow produto tensorial $T_p \otimes T_p \otimes \dots \otimes T_p$ (p vezes) \rightarrow gera um tensor contravariante de rank p ;
- 1-forma \rightarrow produto tensorial antissimétrico, ou produto exterior, $T_p^* \wedge T_p^* \wedge \dots \wedge T_p^*$ (p vezes) \rightarrow gera p-formas.

Uma 2-forma, por exemplo, vai ser escrita na base $\{dx^\mu\}$ da seguinte maneira:

$$\omega_2 : \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu}(\vec{x}) dx^\mu \wedge dx^\nu. \tag{A.36}$$

Como os elementos da base $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ são números de Grassmann, $\omega_{\mu\nu}$ poderia ter uma parte simétrica e outra antissimétrica, mas só a parte antissimétrica

sobrevive à contração dos índices, então $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e:

$$\omega_{12}dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{21}dx^2 \wedge dx^1 = 2\omega_{12}dx^1 \wedge dx^2. \quad (\text{A.37})$$

As p-formas são então:

$$\omega_p = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.38})$$

Quer-se a independência de um sistema de coordenadas, então os ω 's vão se transformar de uma maneira particular, tal como o caso das 1-formas visto anteriormente em (A.31) e (A.32):

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x'(x) \\ \omega'_{\mu_1 \dots \mu_p}(x') &= \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_p}}{\partial x'^{\mu_p}} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\delta\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} = \xi^\lambda \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} + \partial_{\mu_1} \xi^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_p} + \dots + \partial_{\mu_p} \xi^\nu \omega_{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \nu}. \quad (\text{A.40})$$

Considera-se agora o produto exterior, que mostra algumas propriedades importantes das formas:

$$\omega_p \wedge \omega_q = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{1}{q!} \omega_{\rho_1 \dots \rho_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\rho_1} \wedge \dots \wedge dx^{\rho_q} \quad (\text{A.41})$$

É uma $(p+q)$ -forma. Se p ou q forem pares elas comutam, e se ambos forem ímpares elas anticomutam:

$$\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p. \quad (\text{A.42})$$

Note que $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$. Se $\dim(\mathcal{M}) = D$, então o máximo de dx que podem ser colocados juntos é igual a D . Por exemplo, para $D = 2$:

$$\text{1-forma: } \omega_\mu dx^\mu = \omega_1 dx^1 + \omega_2 dx^2 \quad (\text{A.43})$$

$$\text{2-forma: } \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \omega_{21} dx^2 \wedge dx^1 \quad (\text{A.44})$$

$$\text{3-forma: } \omega_{\mu\nu\rho} dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = \omega_{12\rho} \underbrace{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^\rho}_{=0} = 0 \quad (\text{A.45})$$

pois $\rho = 1, 2$. Por fim, uma 0-forma nada mais é do que uma função escalar:

$$\omega = \omega(x) \quad (\text{A.46})$$

$$\delta\omega(x) = \xi^\lambda \partial_\lambda \omega(x). \quad (\text{A.47})$$

A.2.5 Comutadores de formas diferenciais

Os comutadores e anticomutadores que aparecem entre formas reescrevem-se como comutadores graduados, levando em conta a antissimetria do produto *wedge*. Seja então X_P uma P-forma e Y_Q uma Q-forma, o comutador generalizado ou graduado é tal que:

$$[X_P, Y_Q] \equiv X_P Y_Q - (-1)^{PQ} Y_Q X_P. \quad (\text{A.48})$$

Isto é, se P e Q forem ímpares teremos relações de anticomutação e em outras situações, relações de comutação.

A.2.6 Derivação exterior de uma forma

Define-se da seguinte maneira o operador derivada exterior d :

$$d\omega_p \equiv \frac{1}{p!} \partial_\mu \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.49})$$

Este operador derivada exterior d é intrinsecamente um operador ímpar, uma vez que ao derivar uma p-forma ω_p gera-se uma (p+1)-forma $d\omega_p$.

Algumas propriedades deste operador derivada:

$$d^2 = 0 \quad (\text{A.50})$$

$$d(\omega_p \wedge \omega_q) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q. \quad (\text{A.51})$$

A propriedade (A.50) pode ser mostrada levando em conta que o produto de uma grandeza simétrica com uma grandeza antissimétrica é nulo com a permutação dos índices:

$$d\omega_p = \partial_\mu \omega dx^\mu \wedge \dots \quad (\text{A.52})$$

$$dd\omega_p = \underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{simétrico}} \omega \underbrace{dx^\nu \wedge dx^\mu}_{\text{antissimétrico}} \wedge \dots = 0. \quad (\text{A.53})$$

Seguem alguns exemplos. Primeiro considera-se $p = 0$:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= f(x) \\ d\omega_0 &= \partial_\mu f(x) dx^\mu \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

onde $f(x)$ é uma função escalar (0-forma), então $\partial_\mu f(x)$ nada mais é do que um gradiente e o operador d faz o papel de derivada convencional. Considera-se agora 1-formas:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\mu dx^\mu \\ d\omega_1 &= \partial_\nu \omega_\mu dx^\nu \wedge dx^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Lembre-se que devido a contração com $dx^\mu \wedge dx^\nu$ só a parte antissimétrica irá contribuir, então:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \left[\frac{1}{2}(\partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu \omega_\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\nu \omega_\mu - \partial_\mu \omega_\nu) \right] dx^\mu \wedge dx^\nu \\ d\omega_1 &= \frac{1}{2}(\partial_\nu \omega_\mu - \partial_\mu \omega_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

que é o rotacional de ω_μ . Nota-se que os resultados encontrados até agora são consistentes com as duas propriedades citadas acima, levando em conta que o rotacional de um gradiente é sempre nulo (equação A.50).

A.2.7 A Derivada Covariante - Definição e Propriedades

Utilizando as propriedades de multiplicação de formas (Seção A.2.4) escrevem-se os campos, operadores e tensores na representação adjunta apenas multiplicando as equações pela direita com a forma dx^μ :

$$A'_\mu = g^{-1} \partial_\mu g + g^{-1} A_\mu g \mid dx^\mu \Rightarrow A' = g^{-1} dg + g^{-1} Ag \quad (\text{A.57})$$

$$D_\mu \chi = \partial_\mu \chi + A_\mu \chi \mid dx^\mu \Rightarrow D\chi = d\chi + A\chi \quad (\text{A.58})$$

sobre um campo $\chi \in G$ na representação adjunta. Pode-se que mostrar que, se $\chi' = g^{-1}\chi$, então:

$$(D\chi)' = g^{-1} D\chi. \quad (\text{A.59})$$

Isto é, nossa derivada exterior é covariante.

Agora calcula-se a derivada covariante de um tensor X arbitrário que está na representação adjunta. Seja X uma p -forma cuja derivada exterior se escreve como:

$$DX = dX + [A, X] \quad (\text{A.60})$$

onde A é uma forma conexão que se transforma de acordo com (A.58). Então se verifica que se $X' = g^{-1}Xg$ então:

$$(DX)' = g^{-1}DXg. \quad (\text{A.61})$$

Verificação:

$$(DX)' = d(g^{-1}Xg) + [g^{-1}dg + g^{-1}Ag, g^{-1}Xg] \quad (\text{A.62})$$

é necessário conhecer dg^{-1} . Note que se usou $g^{-1}g = 1$:

$$\begin{aligned} d(g^{-1}g) = 0 &= dg^{-1}g + g^{-1}dg \mid g^{-1} \\ dg^{-1} &= -g^{-1}dg g^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

daí,

$$\begin{aligned}
(DX)' &= d(g^{-1}Xg) + [g^{-1}dg + g^{-1}Ag, g^{-1}Xg] \\
&= dg^{-1}Xg + g^{-1}dXg + g^{-1}Xdg + g^{-1}dgg^{-1}Xg - g^{-1}Xgg^{-1}dg \\
&\quad + g^{-1}Agg^{-1}Xg - g^{-1}Xgg^{-1}Ag \\
&= g^{-1}(dX + [A, X])g = g^{-1}DXg.
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Se X está na representação adjunta, também DX está na representação adjunta. Verifica-se que a derivada covariante da conexão A se escreve como:

$$F = dA + A^2 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \tag{A.65}$$

que é uma grandeza também conhecida como a Curvatura de Yang-Mills, e também o tensor F presente no modelo “BF”.

Uma relação importante entre as derivadas covariantes e a curvatura de YM pode ser obtida considerando um campo X na representação adjunta $X' = g^{-1}Xg$ quando conveniente, e que se tem um comutador graduado para as formas diferenciais (vide seção A.2.5):

$$D^2X = (d + A)(d + A)X \tag{A.66}$$

$$\begin{aligned}
&= d(dX + [A, X]) + [A, dX] + [A, [A, X]] \\
&= [dA, X] + [A^2, X] = [F, X]
\end{aligned} \tag{A.67}$$

. Este resultado pode ser escrito como:

$$[D_\mu, D_\nu]X = [F_{\mu\nu}, X]. \tag{A.68}$$

Essa relação (A.68) entre o comutador das derivadas covariantes e a curvatura tem um análogo na Relatividade Geral, onde F é a curvatura de Riemann. Uma consequência importante desta relação no modelo BF, observado que neste caso uma das equações

de movimento é $F = 0$, é que as derivadas covariantes comutam – se as equações de movimento estão satisfeitas.

A.2.8 As identidades de Bianchi

Como F é adjunto, também deve ser DF . Ver-se-á que DF é de fato nulo. Com efeito:

$$DF = d(dA + A^2) + [A, dA + A^2]. \quad (\text{A.69})$$

Usando a regra de Leibniz generalizada para calcular o termo dA^2 :

$$dA^2 = d(A \wedge A) = dA \wedge A - A \wedge dA = [dA, A] \quad (\text{A.70})$$

$$DF = [dA, A] + [A, dA] + AA^2 - A^2A$$

$$DF = 0. \quad (\text{A.71})$$

Esta equação (A.71) é chamada de Identidade de Bianchi, e aparece também na Relatividade Geral.

A.2.9 Integração de uma forma

Seja ω_D uma D-forma, e quer-se calcular a integral $\int_V \omega_D$, com $V \subset \mathcal{M}$. Para tal, faz-se uma generalização restringindo nossas formas dx^μ , que são a base do espaço dual T_p^* , a serem elementos infinitesimais no espaço V . Isto é:

$$\omega_D = \frac{1}{D!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_D} \underbrace{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D}}_{\text{forma volume}}. \quad (\text{A.72})$$

A D-forma $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D}$ é a forma volume $+dV = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{D-1}$ se a permutação $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_D)$ de índices $(0, 1, \dots, D-1)$ for par ou é a forma $-dV$ se a permutação for ímpar. O símbolo que expressa este comportamento é o tensor de Levi-

Civita $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D}$, que é completamente antissimétrico. Então, seguindo a seguinte convenção:

$$\varepsilon^{012 \dots (D-1)} = 1 \quad \begin{cases} +1 \text{ se a permutação for par} \\ -1 \text{ se a permutação for ímpar} \end{cases} \quad (\text{A.73})$$

temos $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_D} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} dV$. Então:

$$\omega_D = \frac{1}{D!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \omega_{\mu_1 \dots \mu_D} dV \equiv \tilde{\omega} dV. \quad (\text{A.74})$$

Finalmente, escreve-se a integral:

$$\int_V \omega_D = \int_V dx^0 dx^1 \dots dx^{D-1} \tilde{\omega}(x). \quad (\text{A.75})$$

É importante notar que esta operação de integração não precisa de nenhuma métrica definida, a despeito do nome “forma volume”.

A.3 Outros operadores derivadas

A.3.1 A derivada interior

Um operador que obedece a regra de Leibniz gera uma operação que chamamos de derivação. Um operador que obedece a regra generalizada de Leibniz gera uma operação chamada de antiderivação.

Define-se então o operador i_v associado a um vetor $v : v = v^\mu(x) \partial_\mu$ de forma que suas

propriedades são tais que:

$$i_v(\omega_p \wedge \omega_q) = (i_v\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge i_v\omega_q \quad (\text{A.76})$$

$$i_v dx^\mu = v^\mu \quad (\text{A.77})$$

$$i_v \text{ 0-forma} = 0 \quad (\text{A.78})$$

$$(i_v)^2 = 0 \quad (\text{A.79})$$

$$i_{fv}\omega = fi_v\omega \quad (\text{A.80})$$

onde f em (A.80) é uma função escalar. Nota-se que (A.77) transforma uma forma de grau D em uma forma de grau $D - 1$, e também é um operador ímpar de antiderivação. Chama-se i_v de derivada interior ou contração. Calculam-se algumas derivadas de formas:

$$i_v\omega_1 = i_v(\omega_\mu dx^\mu) = \omega_\mu i_v dx^\mu = \omega_\mu v^\mu (\equiv \omega \cdot v) \quad (\text{A.81})$$

$$i_v\omega_p = \frac{1}{(p-1)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} v^{\mu_1} dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.82})$$

A.3.2 A derivada de Lie

Um operador \mathcal{L}_v associado a um vetor v , combinação da derivada interior e da derivada exterior, é chamado de derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_v\omega_p = (i_v d + di_v)\omega_p. \quad (\text{A.83})$$

Este operador é um objeto par, pois conserva o grau da forma, e respeita a regra de Leibniz. Que caracteriza \mathcal{L}_v como uma derivação.³

Da definição da derivada de Lie, deduz-se várias propriedades interessantes. Sejam um

³A partir de agora, sempre que nos referirmos ao produto de duas formas, estaremos falando do produto *wedge*, a menos que se diga o contrário: $\omega_p \wedge \omega_q \equiv \omega_p \omega_q$.

vetor v e uma função f :

$$d\mathcal{L}_v\omega = \mathcal{L}_v(d\omega) \quad (\text{A.84})$$

$$\mathcal{L}_{fv}\omega = f\mathcal{L}_v\omega + df \wedge i_v\omega \quad (\text{A.85})$$

onde (A.85) é consequência de (A.80). Calcula-se então a derivada de Lie \mathcal{L}_ξ para uma 0-forma ω_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi\omega_0 &= i_\xi d\omega_0 + di_\xi\omega_0 \\ &= i_\xi\partial_\mu\omega_0 dx^\mu = \xi^\mu\partial_\mu\omega_0 = \delta_{\text{diffeo}}\omega_0 \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

ou seja, a derivada de Lie sobre uma 0-forma tem o efeito de uma transformação geral de coordenadas infinitesimal ($x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu$) $\delta_{\text{diffeo}}\omega_0 = \xi^\mu\partial_\mu\omega_0$, encontrada na equação (A.21). No caso de uma 1-forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi\omega_1 &= i_\xi d\omega_\mu dx^\mu + di_\xi\omega_\mu dx^\mu \\ &= i_\xi(\partial_\nu\omega_\mu dx^\nu dx^\mu) + d(\xi^\mu\omega_\mu) \\ &= \partial_\nu\omega_\mu\xi^\mu dx^\mu - \partial_\nu\omega_\mu dx^\nu\xi^\mu + \partial_\nu\xi^\mu dx^\nu\omega_\mu + \xi^\mu\partial_\nu\omega_\mu dx^\mu \end{aligned}$$

renomeando alguns índices somados e cancelando o segundo e quarto termos, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi\omega_1 &= (\xi^\lambda\partial_\lambda\omega_\mu + \partial_\mu\xi^\lambda\omega_\lambda)dx^\mu \\ &= (\delta_{\text{diffeo}}\omega_\mu)dx^\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

Em geral:

$$\mathcal{L}_\xi\omega_p = \frac{1}{p!}(\delta_{\text{diffeo}}\omega_{\mu_1\dots\mu_p})dx^{\mu_1}\dots dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.88})$$

Mostra-se que a integração definida em (A.75) é invariante sob difeomorfismos infinitesi-

mais ($x' = x - \xi$):

$$\int_V \omega'_D - \int_V \omega_D \approx \int_V \mathcal{L}_\xi \omega_D = \int_V (i_\xi d\omega_D + di_\xi \omega_D) = \int_V di_\xi \omega_D. \quad (\text{A.89})$$

Se $di_\xi \omega_D = di_\xi(\tilde{\omega}dV) = d(\tilde{\omega}i_\xi dV)$, a integral pode ser escrita num sistema de coordenadas como:

$$\int_V di_\xi \omega_D = \int_V d^D x \partial_\mu (\xi^\mu \tilde{\omega}). \quad (\text{A.90})$$

O difeomorfismo deixa a borda de V fixa, então a integral é invariante. A quantidade entre parênteses ($\xi^\mu \tilde{\omega}$) é uma densidade vetorial, com $\tilde{\omega}$ sendo uma densidade escalar.

Um exemplo onde este tipo de estrutura é utilizada ocorre na RG, onde os escalares da teoria são multiplicados por fatores envolvendo \sqrt{g} , justamente pelo fato que os objetos desta teoria devem se transformar como (A.90).

A.4 Invariância sobre difeomorfismos

Na seção anterior estudou-se as condições para que ω_D seja invariante sobre difeomorfismos:

$$\delta \tilde{\omega}_D = \mathcal{L}_\xi \tilde{\omega}_D = \partial_\mu (\xi^\mu \tilde{\omega}_D) \quad (\text{A.91})$$

onde $\tilde{\omega}_D$ é uma densidade escalar. Uma vez que $\delta \int_{\mathcal{M}} \omega_D = 0$, utiliza-se esta forma para escrever ações invariantes sobre difeomorfismos. Por exemplo, na RG a ação tem uma forma do tipo $\int d^4x \sqrt{g} \mathcal{R}$, onde \mathcal{R} é o escalar de curvatura.

A invariância desta integral é obtida devido ao termo de densidade escalar \sqrt{g} que pode-se mostrar a partir da lei de transformação do tensor métrico:

$$\delta_{\text{dif}} g_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda g_{\mu\lambda} \quad (\text{A.92})$$

$$\delta(\sqrt{|g|} \mathcal{R}) = \partial_\lambda (\xi^\lambda \sqrt{|g|}) \mathcal{R} + \sqrt{|g|} \xi^\lambda \partial_\lambda \mathcal{R} = \partial_\lambda (\xi^\lambda \sqrt{|g|} \mathcal{R}). \quad (\text{A.93})$$

Com isto vê-se que a ação de Einstein-Hilbert [2, 3, 19] é invariante sobre difeomorfismos:

$$S_{EH} = \frac{1}{G} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{R} \quad (\text{A.94})$$

A.4.1 Integrais invariantes

Estudam-se agora as integrais de linha, então considera-se uma 1-forma $a = a_\mu dx^\mu$ integrada sobre uma curva C .

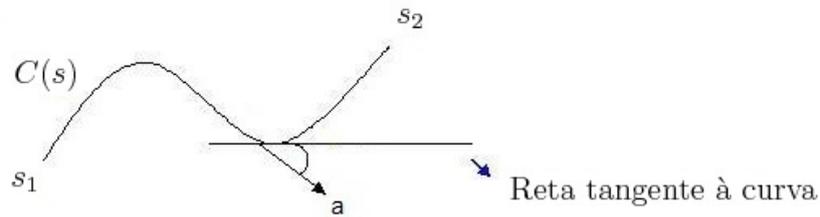


Figura A.3: A curva $C \in \mathcal{M}$, onde aplicou-se uma parametrização $x(s)$ para realizar a integração.

Define-se o sistema de coordenadas para a integração:

- Coordenadas de \mathcal{M} : $x^\mu, \mu = 0, \dots, \mu = D - 1$
- Parametrizar a curva $s, s_1 \leq s \leq s_2$

Então escrevem-se as equações paramétricas:

$$x^\mu = x^\mu(s), s_1 \leq s \leq s_2 \quad (\text{A.95})$$

$$dx^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} ds \equiv x'^\mu(s) ds \quad (\text{A.96})$$

ao longo de C . Nota-se que tomamos as formas dx^μ como diferenciais e a integral de linha é definida como:

$$\int_C a \equiv \int_{s_1}^{s_2} ds a_\mu(x(s)) x'^\mu(s). \quad (\text{A.97})$$

Que independe das escolhas de coordenadas e de parametrização.

Considera-se agora a integral de uma 2-forma: $\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(x)dx^\mu \wedge dx^\nu$. Nota-se que ao tomar $dx^\mu \wedge dx^\nu$ como diferenciais, se tem um elemento de área.

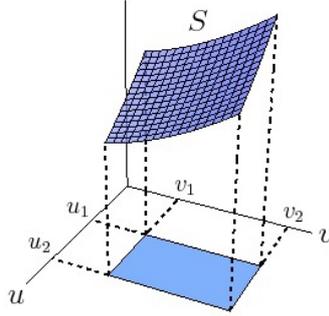


Figura A.4: A superfície $S \in \mathcal{M}$, onde aplicou-se uma parametrização $x(u, v)$ para realizar a integração.

Escrevem-se as equações paramétricas ao longo da superfície S :

$$x^\mu = x^\mu(u, v) \quad (\text{A.98})$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial u} du + \frac{\partial x^\mu}{\partial v} dv. \quad (\text{A.99})$$

O elemento de área se escreve como:

$$\begin{aligned} dx^\mu \wedge dx^\nu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} du \wedge dv + \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} dv \wedge du \\ &= \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} - \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \right) du \wedge dv. \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

E a integral de superfície é definida como:

$$\int_\Sigma \omega_2 \equiv \frac{1}{2} \int_\Sigma dudv \omega_{\mu\nu}(x(u, v)) \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \frac{\partial x^\nu}{\partial v} - \frac{\partial x^\mu}{\partial v} \frac{\partial x^\nu}{\partial u} \right). \quad (\text{A.101})$$

A generalização para D-formas é evidente.

A.4.2 Regra do Traço

Sejam X e Y D-formas adjuntas que se transformam como $X' = g^{-1}Xg$ e $Y' = g^{-1}Yg$.

Então, pelas propriedades do traço:

$$\text{Tr}(X'Y') = g^{-1}Xgg^{-1}Yg = g^{-1}XYg = \text{Tr}(XY) \quad (\text{A.102})$$

então $\text{Tr}(XY)$ é um invariante de calibre.

A.4.3 Regra de Integração por partes

Considere X_P uma P-forma e Y_Q uma Q-forma:

$$D(X_P Y_Q) = (DX)Y + (-1)^P XDY = d(X_P Y_Q) + [A, X_P Y_Q] \quad (\text{A.103})$$

Tomando o $\text{Tr}(X_P Y_Q)$ vê-se que:

$$D(\text{Tr}(X_P Y_Q)) = d(\text{Tr}(X_P Y_Q)) + 0. \quad (\text{A.104})$$

$\text{Tr}[X_P, Y_Q] = 0$, uma vez que:

$$\begin{aligned} (Y_Q X_P)_{\alpha\gamma} &= Y_{Q\alpha\beta} X_{P\beta\gamma} \\ \text{Tr}(Y_Q X_P) &= Y_{Q\alpha\beta} X_{P\beta\alpha} \\ &= (-1)^{QP} X_{P\beta\alpha} Y_{Q\alpha\beta} = (-1)^{QP} \text{Tr}(X_P Y_Q). \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

Portanto:

$$d(X_P Y_Q) = D(X_P Y_Q) = (DX_P)Y_Q + (-1)^P X_P DY_Q. \quad (\text{A.106})$$

Este resultado gera uma fórmula de integração por partes:

$$\text{Tr} \int (DX_P)Y_Q = (-1)^{P+1} \text{Tr} \int X_P DY_Q + \text{Tr} \int d(X_P Y_Q) \quad (\text{A.107})$$

pode-se utilizar a notação de componentes e as propriedades do traço para se obter

$$\boxed{\int X_{P I} D^I_J Y^J_Q = (-1)^{P+1} \int D^I_J X^J_P Y_{Q I} + \text{termos de contorno}} \quad (\text{A.108})$$

onde D^I_J é a matriz derivada covariante (equação A.60). No caso particular do modelo BF (ver equação 2.12) a equação (A.106), escreve-se:

$$d(\eta F) = D\eta F + (-1)^{D-3} \eta DF = 0 \quad (\text{A.109})$$

onde η é uma $(D-3)$ -forma e F é uma 2-forma. Sabendo que $DF = 0$ mostra-se que a variação da ação (2.9) é dada pela regra de integração escrita em (2.12):

$$\delta \text{Tr} \int BF = \text{Tr} \int D\eta F = (-1)^{D-2} \text{Tr} \int \eta DF = 0. \quad (\text{A.110})$$

Apêndice B

Complementos sobre Quantização

Canônica

Nos capítulos 2, 3 e 4 o método hamiltoniano [12, 30] foi aplicado aos modelos BF de interesse como base para se realizar uma quantização canônica via o formalismo de laços [15, 19, 31–33] tal como visto no capítulo 5. O objetivo deste apêndice é complementar as teorias desenvolvidas nos capítulos supracitados e fornecer exemplos de aplicações das mesmas.

B.1 Visão geral do método Hamiltoniano

Vamos primeiro enumerar brevemente os passos do método para um sistema mecânico com um número finito de coordenadas. A generalização para infinitas coordenadas é trivial e é tratada no caso dos modelos BF no texto principal (capítulo 2) e no exemplo na seção seguinte.

B.1.1 O formalismo lagrangiano

Seja um sistema físico com coordenadas generalizadas q^i onde $i = 1, \dots, d$. Primeiramente, escreve-se uma lagrangiana $L(q, \dot{q})$, integrante de uma ação S , e a partir do princípio variacional encontram-se as equações de movimento de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_n}. \quad (\text{B.1})$$

Definem-se os momentos conjugados às coordenadas generalizadas q^i como sendo:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (\text{B.2})$$

Se estes momentos podem ser resolvidos para as velocidades generalizadas \dot{q}^i como funções de q^i e P_i , a transformada de Legendre é inversível e a hamiltoniana é obtida de forma trivial:

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \rightarrow \dot{q} = \dot{q}(q, P) \quad (\text{B.3})$$

$$H(q, P) = [P_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q})]_{\dot{q}=\dot{q}(q, P)}. \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 A notação simplética

Utiliza-se o formalismo dos Colchetes de Poisson para expressar as equações do sistema nas variáveis q^i, P_i de forma mais sucinta e algebricamente vantajosa para a quantização:

$$\{F(q, P), G(q, P)\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial P_i} - \frac{\partial F}{\partial P_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (\text{B.5})$$

Os colchetes entre as coordenadas generalizadas e os momentos são:

$$\{q^i, q^j\} = 0 \quad ; \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad ; \quad \{q^k, P_p\} = \frac{\partial q^k}{\partial q^i} \frac{\partial P_p}{\partial P_i} = \delta_i^k \delta_p^i = \delta_p^k. \quad (\text{B.6})$$

B.1.3 Sistemas vinculados

Uma vez que se tem a lagrangiana e os momentos conjugados, tenta-se definir $H(q, P)$ e as equações de movimento de Hamilton fazendo uma transformada de Legendre, o que nem sempre funciona em sistemas que são vinculados (caso onde as equações (B.2) não podem ser resolvidos para as velocidades $\dot{q}^i(q^i, P_i)$), como é o caso do modelo BF. No modelo BF deve-se analisar os vínculos, que chamamos de funções $\phi_m(q, P)$, antes de escrever $H(q, P)$. Verificar a estabilidade dos vínculos e garantir que a hamiltoniana seja bem definida não é uma tarefa trivial para o modelo BF (e para teorias de calibre em geral). Este procedimento é conhecido como algoritmo de Dirac-Bergmann.

B.1.4 O algoritmo de Dirac-Bergmann

Primeiro, deve-se escrever a hamiltoniana adicionada de uma combinação linear de ϕ 's, o que determina unicamente a hamiltoniana numa teoria vinculada. Então H_c é:

$$H_c = P_i \dot{q}^i - L(q, \dot{q}) + u_m \phi_m \quad (\text{B.7})$$

onde os coeficientes u_m são multiplicadores de Lagrange. As equações de movimento de Hamilton valem também para sistemas vinculados e utiliza-se o formalismo dos colchetes de Poisson para escrevê-las. Seja uma função $F(q, P)$ qualquer (neste trabalho consideramos que $F(q, P)$ não tem dependência explícita em t):

$$\dot{F}(q, P) = \{F, H_c\}. \quad (\text{B.8})$$

Então, começa-se o Algoritmo de Dirac-Bergmann verificando as condições de consistência dos vínculos, tomando a equação (B.8) e trocando F por cada um dos ϕ 's, que chamamos de vínculos primários. Um vínculo é dito consistente ou estável quando este não evolui no tempo, isto é, quando $\dot{F} = 0$ para um certo $F = \phi_m$. Tem-se *a priori* que fazer m

verificações:

$$\{\phi_m, H\} + u_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0. \quad (\text{B.9})$$

O símbolo \approx representa a igualdade fraca, o que significa que os vínculos são considerados como valores não-nulos durante o processo de quantização canônica mas que serão tomados nulos quando resolvidos no final. É possível que estas verificações levem a uma inconsistência, como achar um resultado do tipo $1 = 0$. Se isto acontecer, significa que nossa lagrangiana é tal que as equações de movimento de Euler-Lagrange são inconsistentes, o que possivelmente significa um erro ao construir a ação da teoria e que a lagrangiana não pode ser arbitrária. Nesta situação, as equações (B.9) podem ser divididas em 3 tipos:

1. O primeiro tipo de equações (B.9) se reduz a $0 = 0$, isto é, é identicamente satisfeito com a ajuda dos vínculos primários;
2. O segundo tipo de equações (B.9) se reduz a uma equação independente dos u 's envolvendo apenas os q 's e P 's, isto é, uma equação da forma $\chi(q, P) = 0$. Estas equações devem ser independentes dos vínculos primários para não se reduzirem a equações do primeiro tipo.

Denotam-se estas equações de vínculos secundários, que só se diferem dos vínculos primários na maneira de se chega até eles – os vínculos primários são obtidos da definição dos momentos (B.2) e os vínculos secundários só aparecem quando se utilizam as equações de movimento (B.8). Os vínculos secundários geram outras condições de consistência para a teoria (estes também devem ser estáveis) e também devem ser verificados pelo algoritmo, isto é, devem ser tratados em pé de igualdade com os vínculos primários podendo inclusive gerar mais outros vínculos secundários.

3. O terceiro tipo de equações (B.9) não devem se reduzir em nenhuma das duas maneiras postas anteriormente, isto é, gera uma equação que impõe uma condição sobre os u 's.

Uma vez que se esgotam as verificações e todos os vínculos primários e secundários são consistentes, o algoritmo encerra e como resultado obtém-se tantos vínculos secundários $\chi(q, P)$ e outros tantos coeficientes u , e escreve-se a hamiltoniana total levando em consideração estes resultados.

B.1.5 O princípio da correspondência

Por fim, uma vez que se tem a hamiltoniana resolvida pode-se aplicar sobre a equação (B.8) o princípio da correspondência da MQ, que afirma que o comportamento de sistemas descritos pela mecânica quântica reproduzem o comportamento de sistemas clássicos no limite de números quânticos muito grandes. Uma vez aplicado o princípio da correspondência concluí-se o método de quantização canônica e se tem o seguinte quadro:

- Todas as coordenadas generalizadas q^i , momentos P_i e funções $F(q, P)$ são agora operadores \hat{q} , \hat{P} , \hat{F} num certo espaço de Hilbert;
- Substitui-se o colchete de Poisson $\{X, Y\}$ pelo comutador $[\hat{X}, \hat{Y}] = i\hbar[\widehat{X}, \widehat{Y}]$. Em particular $[\hat{q}^i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_j^i$;
- Constrói-se um espaço de Hilbert contendo uma representação da álgebra dos operadores \hat{q}^i, \hat{P}_i .

Sendo assim, a equação (B.8) se torna a equação de Heisenberg, que descreve a evolução de um operador no tempo:

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}] \quad (\text{B.10})$$

sobre a qual pode ser deduzido o teorema de Ehrenfest, que é o análogo quântico da segunda lei de Newton uma vez que os valores esperados dos operadores relacionados são tomados.

B.2 A quantização de Schrödinger

Todo o desenvolvimento realizado aqui de quantização canônica [12, 30] visa exemplificar o procedimento discutido no capítulo 2 para o modelo BF. Para realizar este exemplo, escolheu-se tratar o caso da ação que origina a equação de Schrödinger [40, 41] para uma partícula livre.

B.2.1 A ação de Schrödinger

Considera-se a ação I que gera a equação de Schrödinger de uma partícula livre, para mostrar que pode-se obter a dinâmica da mecânica quântica descrita pelos comutadores, e mediante a aplicação do teorema de Ehrenfest, obter a base da representação da álgebra de Heisenberg. A ação é:

$$I = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L} dt d^3x, \text{ onde } \mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi\nabla\psi^*. \quad (\text{B.11})$$

Note que no princípio variacional ψ e ψ^* são considerados como campos independentes.

O primeiro passo do método é converter a lagrangiana $L = \int d^3x \mathcal{L}$ para uma hamiltoniana.

Escrevem-se as equações de movimento de Lagrange em coordenadas generalizadas, que seguem da variação da integral de ação: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_n}$. Para o formalismo hamiltoniano, se introduzem as variáveis de momentos P_n , definidas por:

$$P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}.$$

No caso da ação de Schrödinger, definem-se os momentos conjugados aos campos ψ e ψ^* :

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}(\vec{x})} = i\hbar\psi^*(\vec{x}) \\ \Pi^*(\vec{x}) &= \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}^*(\vec{x})} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

que constituem os colchetes de Poisson fundamentais, ou estrutura simplética

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})\} &\equiv 0 & , & & \{\Pi(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})\} &\equiv 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \Pi(\vec{y})\} &\equiv \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) & , & & \{\psi^*(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})\} &\equiv \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad . \quad (\text{B.13})$$

Nota-se que os momentos não são funções independentes das velocidades, então vão existir relações do tipo $\phi_m(q, P) \approx 0$ que são chamadas vínculos primários. No caso em questão:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \Pi - i\hbar\psi^* \approx 0 \\ \Phi_2 &\equiv \Pi^* \approx 0 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde o símbolo \approx representa igualdade fraca, o que significa que os vínculos são considerados como valores não-nulos durante o processo de quantização canônica mas que serão tomados nulos quando resolvidos no final. Pode-se agora escrever $H = P_n \dot{q}_n - L$ e o H vai ser a integral da densidade hamiltoniana:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}. \quad (\text{B.15})$$

Explicitamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \Pi_n \dot{\psi}_n - \mathcal{L} = \Pi \dot{\psi} + \Pi^* \dot{\psi}^* - i\hbar\psi^* \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* \\ &= i\hbar\psi^* \dot{\psi} + 0 \cdot \dot{\psi}^* - i\hbar\psi^* \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^*. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Só que esta hamiltoniana não é unicamente determinada porque se pode adicionar qualquer combinação linear de Φ 's, que são fracamente zero. Define-se então \mathcal{H}_c :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* + u_m \phi_m \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi \nabla\psi^* + u_1(\Pi - i\hbar\psi^*) + u_2(\Pi^*). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

As equações de movimento de Hamilton segundo o método variacional são:

$$\dot{\psi}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_n} + u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \Pi_n} \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{\Pi}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_n} - u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \psi_n}. \quad (\text{B.19})$$

Usando o formalismo dos colchetes de Poisson, pode-se reescrever estas equações de movimento para que sejam da forma (sendo g uma função qualquer das coordenadas e momentos):

$$\dot{g} = \{g, H\} + \int d^3y u_m \{g, \Phi_m\} = \{g, H_c\} \quad (\text{B.20})$$

onde utilizamos (B.17) para escrever $H_c = \int d^3y \mathcal{H}_c$.

B.2.2 O Algoritmo de Dirac-Bergmann

Começa-se o algoritmo de Dirac-Bergmann verificando as condições de consistência dos vínculos, trocando g da equação (B.20) por cada um dos Φ 's. Um vínculo Φ_m é dito consistente quando este não evolui no tempo, isto é, satisfaz a $\dot{\Phi}_m \approx 0$:

$$\{\Phi_m(\vec{x}), H(\vec{y})\} + \int d^3y u_{m'}(\vec{y}) \{\Phi_m(\vec{x}), \Phi_{m'}(\vec{y})\} \approx 0. \quad (\text{B.21})$$

No caso de Schrödinger temos que fazer duas verificações, uma pra Φ_1 e outra para Φ_2 :

$$\{\Phi_1(\vec{x}), H(\vec{y})\} + \int d^3y u_2(\vec{y}) \{\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{y})\} \approx 0 \quad (\text{B.22})$$

$$\{\Phi_2(\vec{x}), H(\vec{y})\} + \int d^3y u_1(\vec{y}) \{\Phi_2(\vec{x}), \Phi_1(\vec{y})\} \approx 0 \quad (\text{B.23})$$

Calculou-se o colchete conveniente:

$$\begin{aligned} \int d^3y \{\Phi_1(\vec{x}), \Phi_2(\vec{y})\} &= \int d^3y \{\Pi(\vec{x}) - i\hbar\psi^*(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})\} \\ &= \int d^3y \{-i\hbar\psi^*(\vec{x}), \Pi^*(\vec{y})\} = -i\hbar \int d^3y \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ &= -i\hbar. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Antes de realizar os colchetes com H , pode-se reescrever (B.24) usando uma identidade vetorial¹:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3y \nabla\psi \nabla\psi^* = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3y (\nabla(\nabla\psi\psi^*) - \psi^* \nabla^2\psi) \quad (\text{B.25})$$

e utilizamos o teorema de Stokes para excluirmos o primeiro termo (divergente) e ficamos com $H = - \int d^3y \psi^* \nabla^2\psi$ ou sua conjugada. Assim:

$$\{\Phi_1, H\} = \{\Pi - i\hbar\psi^*, H\} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi^* \quad (\text{B.26})$$

$$\{\Phi_2, H\} = \{\Pi^*, H\} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi. \quad (\text{B.27})$$

Pode-se então resolver explicitamente (B.22) e (B.23) de maneira que se obtém:

$$u_1 = \frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi \quad (\text{B.28})$$

$$u_2 = -\frac{i\hbar}{2m} \nabla^2\psi^*. \quad (\text{B.29})$$

Note que $u_1 = u_2^*$. Caímos no caso onde as condições de consistência fixam os coeficientes u_m e o algoritmo encerra.

B.2.3 A classe de um vínculo

Para se resolver os vínculos no final do procedimento de quantização, introduzir-se o conceito de classe dos vínculos. Uma variável dinâmica $g(q, P)$ é dita de primeira classe se:

$$\{g, \Phi_m\} \approx 0 \quad \text{e} \quad \{g, H\} \approx 0 \quad (\text{B.30})$$

caso contrário, $g(q, P)$ é dito ser de segunda classe. Vale ressaltar que apenas uma igualdade fraca é necessária, isto é, o resultado dos colchetes (B.30) pode ser uma quantidade fracamente nula, como um vínculo.

¹Note que podemos também obter a expressão conjugada a esta, aplicando a identidade vetorial sobre $\nabla\psi^*$ em vez de $\nabla\psi$.

B.2.4 Os colchetes de Dirac

Observe que fazendo $g = \Phi_{m'}$ na equação (B.30) obtém-se:

$$\{\Phi_1, \Phi_2\} = -i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0. \quad (\text{B.31})$$

Isto é, os vínculos Φ_1 e Φ_2 são de segunda classe.

A idéia por trás de quantizar uma teoria com vínculos de segunda classe é que a própria existência de vínculos de segunda classe significa que existem graus de liberdade que não são fisicamente importantes e que podemos redefinir os colchetes de Poisson em colchetes de Dirac, para excluir estes graus de liberdade não-físicos da teoria [12]. Primeiro forma-se um determinante com os vínculos de segunda classe $\Phi_i \equiv \chi_i$:

$$\det(\Delta) = \begin{vmatrix} 0 & [\chi_1, \chi_2] \\ [\chi_2, \chi_1] & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -i\hbar \\ i\hbar & 0 \end{vmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) = -\hbar^2\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0.$$

Como $\det(\Delta) \neq 0$, a matriz Δ pode ser invertida:

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i\hbar} \\ -\frac{1}{i\hbar} & 0 \end{bmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$$

Define-se o novo colchete como:

$$\{\xi(\vec{x}), \eta(\vec{y})\}_D \equiv \{\xi(\vec{x}), \eta(\vec{y})\} - \sum_{ss'} \int d^3x d^3y \{\xi(\vec{x}), \chi_s(\vec{y})\} \Delta_{ss'}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) \{\chi_{s'}(\vec{x}), \eta(\vec{y})\}. \quad (\text{B.32})$$

Nota-se que as propriedades e as equações de movimento associadas se sustentam com a redefinição do colchete. Antes de trabalhar com os novos colchetes pode-se colocar os $\chi \equiv 0$. Isto é consistente pois os colchetes de Dirac dos χ 's com qualquer variável da teoria são (fracamente) nulos. No caso de Schrödinger, isto significa que os dois vínculos

podem ser tomados como igualdades fortes:

$$\Phi_1 = 0 \rightarrow \Pi = i\hbar\psi^* \quad (\text{B.33})$$

$$\Phi_2 = 0 \rightarrow \Pi^* = 0. \quad (\text{B.34})$$

Isto significa que a hamiltoniana pode ser escrita simplesmente como:

$$H = \frac{\hbar^2}{2m} \int d^3x \nabla\psi \nabla\psi^*. \quad (\text{B.35})$$

Como $\Pi \propto \psi^*$ e $\Pi^* = 0$, excluimos as variáveis Π e Π^* , e nossos colchetes fundamentais agora são:

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\} &= 0, & \{\psi^*(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^*(\vec{y})\} &= \frac{\delta^3(\vec{x}-\vec{y})}{i\hbar}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Com isto, conclui-se o método hamiltoniano de quantização canônica da teoria de Schrödinger. Nota-se que basta chamar os campos de operadores $\psi \rightarrow \hat{\psi}$ para termos o operador hamiltoniano $H_T \rightarrow \hat{H}_T$ bem como as relações fundamentais de comutação da mecânica quântica:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (\text{B.37})$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (\text{B.38})$$

onde $\hat{p} = -i\hbar\nabla$. A construção de um espaço de Hilbert onde os operadores $\hat{x}, \hat{p}, \hat{H}$ atuam como operadores auto-adjuntos satisfazendo a álgebra (B.37) e (B.38) será vista na seção seguinte.

B.3 Construção do espaço de Hilbert cinemático

B.3.1 O espaço de fase clássico

Seja um espaço de fase clássico formado por coordenadas generalizadas (q^α, P_α) com $\alpha = 1, \dots, D$ cujo colchetes fundamentais se escrevem como $\{q^\alpha, P_\beta\} = \delta_\beta^\alpha$. Os vínculos de primeira classe são tais que $C_a(q, P) \approx 0$ com $a = 1, \dots$ e obedecem $[C_a, C_b] = F_{ab}{}^c C_c$.

O primeiro passo para se quantizar este espaço de fase é definir os operadores auto-adjuntos \hat{q}^a e \hat{P}_a com a álgebra gerada pelo comutador, via princípio da correspondência²:

$$[\hat{q}^a, \hat{P}_b] = i\hbar\delta_b^a. \quad (\text{B.39})$$

B.3.2 O espaço de Hilbert na MQ

Constrói-se um espaço de Hilbert cinemático \mathcal{H}_k de representação desta álgebra. Então seja \hat{q}^a e \hat{P}_a operadores lineares auto-adjuntos atuando em \mathcal{H}_k , então $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}_k$:

$$\hat{q}|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k \quad (\text{B.40})$$

$$\hat{P}|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k. \quad (\text{B.41})$$

Na Mecânica Quântica convencional, temos em \mathcal{H}_k :

$$\hat{q}^a\psi(q) = q^a\psi(q) \quad (\text{B.42})$$

$$\hat{P}_a\psi(q) = -i\hbar\frac{\partial\psi(q)}{\partial q^a}. \quad (\text{B.43})$$

Deve-se construir um espaço de Hilbert cinemático \mathcal{H}_k de representação desta álgebra análogo ao espaço de Hilbert da mecânica quântica³, onde $\psi(q)$ é uma função tal que

²Fazemos a restrição aqui a um sistema com número finito de graus de liberdade.

³Isto é, o caso onde $\mathcal{H}_k = L^2(\mathbb{R}^D)$.

$\int d^D q |\psi|^2 < \infty$, isto é, $\psi(q)$ precisa ser bem definida no subespaço S das funções C^∞ de decrescimento rápido.

O subespaço $S \subset \mathcal{H}_k$, e se S é denso, $\bar{S} = \mathcal{H}_k$. \bar{S} é chamado de fecho de S , que será melhor definido a seguir. Então seja uma sequência de Cauchy $|\psi_n\rangle$, $n = 1, \dots, \infty$ tal que $\| |\psi_n\rangle - |\psi_m\rangle \| \rightarrow 0$. Têm-se as seguintes condições:

1. \mathcal{H}_k é completo se todas as sequências de Cauchy ψ_n têm um limite ψ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| |\psi_n\rangle - |\psi\rangle \| = 0 \quad (\text{B.44})$$

2. Se S não é completo, define-se o fecho \bar{S} , que é o conjunto de todas as sequências de Cauchy de S .
3. Sejam V e W dois espaços vetoriais onde $V \subset W$, W é completo e V é denso em W se $\forall \vec{w} \in W$, existe um vetor $\vec{v} \in V$ tal que:

$$\| \vec{w} - \vec{v} \| < \varepsilon \quad , \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (\text{B.45})$$

Então, S é denso em \bar{S} .

Na MQ prefere-se fazer os cálculos em S devido às suas propriedades – pode-se nele aproximar de uma função de onda qualquer função C^∞ de decrescimento rápido.

Na quantização de laços, discutida no capítulo 5, o procedimento do segundo passo supracitado é de fato construir um espaço $S = \text{Cyl}$ e completar Cyl , então $\overline{\text{Cyl}} = \mathcal{H}_k$.

B.3.3 Um espaço de estados físicos

O terceiro passo do procedimento de quantização consiste na resolução dos vínculos, isto é, definir em um espaço físico \mathcal{H}_{fis} vetores de estado que obedecem os vínculos:

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_k \quad , \text{ tal que } C_a|\psi\rangle = 0. \quad (\text{B.46})$$

A importância destes vínculos serem de primeira classe fica evidente aqui, pois os vínculos devem obedecer as regras de comutação:

$$[C_a, C_b]|\psi\rangle = C_a C_b |\psi\rangle - C_b C_a |\psi\rangle = F_{ab}{}^c C_c |\psi\rangle. \quad (\text{B.47})$$

Às vezes, o comutador dos vínculos gera uma anomalia \mathcal{A}_{ab} : $[C_a, C_b] = F_{ab}{}^c C_c + \mathcal{A}_{ab}$ que não é um vínculo. Isto acontece quando os vínculos são de segunda classe, ou quando os vínculos são de primeira classe mas possuem termos que são produtos de \hat{q} e \hat{P} de maneira que há um problema de ordem com os operadores. Eventualmente, uma anomalia pode ser eliminada fazendo uma combinação linear dos vínculos de maneira que \mathcal{A}_{ab} , coeficientes que dependem da representação e dos grupos, se anulem.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein. Feldgleichungen der gravitation. *Pais, Chap. 14, ref. E1; Chap. 15, ref. E15.*, Nov 1915.
- [2] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [3] Ray D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1995.
- [4] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. Institute for Theoretical Physics - University of California, December 1997.
- [5] M.J.G. Veltman Gerard ’t Hooft. One loop divergencies in the theory of gravitation. *Ann. Inst. Henri Poincaré (CERN)*, 1974. A20 69.
- [6] B.S. DeWitt. Quantum theory of gravity. i, ii and iii. *Phys. Rev.*, 1967. 160 (1113) 162 (1195-1239).
- [7] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [8] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2008.
- [9] Carlo Rovelli. What is observable in classical and quantum gravity? *Class.Quant.Grav.*, 8:297-316,1991, May 1990.
- [10] L. Smolin C. Rovelli. Discreteness of the area and volume in quantum gravity. *Nucl.Phys.B*, 442:593-622, 1995. e-print: arXiv:gr-qc/9411005.

- [11] Abhay Ashtekar. *Lectures on non perturbative canonical gravity*. World Scientific, 1991.
- [12] Paul A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Belfer Graduate School of Science, New York, 1964.
- [13] J.F. Barbero. Real ashtekar variables for lorentzian signature space times. *Phys. Rev.*, D51:5507-5510, 1995.
- [14] G. Immirzi. Real and complex connections for canonical gravity. *Class. Quant. Grav.*, 14:L177-L181, 1997.
- [15] Proceedings of the II International Conference on Fundamental Interactions. *Alejandro Perez: Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams*, Pedra Azul, Brazil, June 2004. e-print: arXiv:gr-qc/0409061v3.
- [16] A. Perez. Spin foam models for quantum gravity. *Class. Quant. Grav.*, 20:R43, 2003.
- [17] J.A. Zapata. Continuum spin foam model for 3d gravity. *J. Math. Phys.*, 43:5612-5623, 2002.
- [18] E. Witten. (2+1)-dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nucl. Phys.*, 1988. B311 (46).
- [19] Diego C.M. Mendonça. Quantização de laços no modelo bf em 2+1 dimensões. Master's thesis, Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, 2010.
- [20] Steve Carlip. *Quantum Gravity in 2+1 dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [21] C. Rovelli L. Freidel, E.R. Livine. Spectra of length and area in (2+1) lorentzian loop quantum gravity. *Class. Quant. Grav.* 20:1463-1478, 2003, December 2002. e-print: arXiv:gr-qc/0212077v2.
- [22] A. Perez K. Noui. Three dimensional loop quantum gravity: Physical scalar product and spin foam models. *Class. Quant. Grav.* 22:1739-1762, 2005, February 2004. e-print: arXiv:gr-qc/0402110.

- [23] O. Piguet D.C.M. Mendonça. Loop quantization of a 3d abelian bf model with σ -model matter. *Adv. Math. Phys.*, 2015(307132):8, Dec 2014. e-print: arXiv:1410.1058v1 [gr-qc].
- [24] O. Piguet D.C.M. Mendonça. Work in progress. (...) e-print: (...) [gr-qc], Mar 2015.
- [25] J. Lewandowski A. Ashtekar. Background independent quantum gravity: A status report. *Class.Quant.Grav.*, 21:R53,2004, April 2004. e-print: arXiv:gr-qc/0404018 v2.
- [26] J.C. Baez. An introduction to spin foam models of quantum gravity and bf theory. *Lect. Notes Phys.*, 543:25-94, 2000.
- [27] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalies in quantum field theory*. Clarendon Press, Oxford, UK, 1996.
- [28] Andrew J. Hanson Tohru Eguchi, Peter B. Gilkey. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. North-Holland Publisher Company, Amsterdam, 1980.
- [29] M. Lévy M. Gell-Mann. The axial vector current in beta decay. *Il Nuovo Cimento*, Volume 16, Issue 4, pp 705-726, 16 Maggio 1960. DOI: 10.1007/BF02859738.
- [30] Nivaldo A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2 edition, 2007.
- [31] O. Piguet C.P. Constantinidis, G. Luchini. The hilbert space of chern-simons theory on the cylinder. a loop quantum gravity approach. *Class.Quant.Grav.*27:065009,2010, July 2009. e-print: arXiv:gr-qc/0907.3240v2.
- [32] L. Smolin C. Rovelli. Spin networks and quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 53:5743, 1995.
- [33] J.C. Baez. Spin network states in gauge theory. *Adv. Math.*, 117:253-272, 1996.
- [34] C. Rovelli A. Perez. Observables in quantum gravity. e-print: arXiv:gr-qc/01044034v2, 2001.

- [35] C.W. Misner R. Arnowitt, S. Deser. The dynamics of general relativity. *Gravitation: an introduction to current research*, Louis Witten, chapter 7, pp 227–265, ed. (Wiley 1962). e-print: arXiv:gr-qc/0405109v1.
- [36] T. Thiemann. The phoenix project: Master constraint programme for loop quantum gravity. *Class.Quant.Grav.*23:2211-2248,2006, May 2003. e-print: arXiv:gr-qc/0305080.
- [37] G.T. Horowitz. Exactly soluble diffeomorphism invariant theories. *Comm. Math. Phys.* 125, 1989. pg 417.
- [38] K. Ezawa. Ashtekar’s formulation for $n = 1, 2$ supergravities as constrained bf theories. *Prog.Theor.Phys.* 95, 1996. pg 863-882.
- [39] Chris J. Isham. *Modern Differential Geometry for Physicists*, volume 61. World Scientific Lecture Notes in Physics, 2 edition, 1999.
- [40] F. Laloë C. Cohen-Tannoudji, B. Diu. *Mécanique quantique*. Hermann, Paris, 2 edition, 1977.
- [41] San Fu Tuan J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics Revised Edition*. Addison-Wesley, United States, 1994.
- [42] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [43] Georgi Howard. *Lie Algebras in particle physics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts, USA, 1995.
- [44] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, Inc., United States, 1973.
- [45] I. Richards. On the classification of noncompact surfaces. *A.M.S.*, 1963. DOI: 10.2307/1993768.
- [46] Colin C. Adams. *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. American Mathematical Society, USA, 2004.

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|-----|
| 2.1 | Foliação de uma variedade $\mathcal{M} = \mathbb{R} \otimes \Sigma$ que mostra a decomposição da variedade em várias “folhas” Σ_t | 25 |
| 2.2 | Esboço do espaço de fase cinemático, onde há um subespaço dos pontos que obedecem os vínculos. | 39 |
| 5.1 | Espaço de Minkowski (mostrados apenas x_1 e x_2) com uma rede que gera uma restrição na qual o volume finito contém um número finito de pontos. | 96 |
| 5.2 | Um exemplo de grafo orientado Γ , composto por três linhas γ_1, γ_2 e γ_3 e dois vértices v_1 e v_2 | 97 |
| 5.3 | A curva γ em $\Sigma = \mathcal{M}_2$ parametrizada na variável s | 102 |
| 5.4 | Pontos s_1, \dots, s_n de uma curva γ | 103 |
| 5.5 | Uma curva γ finita dividida em N segmentos. | 105 |
| 5.6 | Laço γ , obtido tomando $x_{(i)} = x_{(f)}$ | 106 |
| 5.7 | Holonomia como transporte paralelo, onde r'_1 é o vetor r_1 transportado para o espaço tangente em $x_{(f)}$ | 106 |
| 5.8 | Grafo Γ fechado e conexo. | 109 |
| 5.9 | Grafos Γ e Γ' distintos. Note que neste caso $\Gamma \cap \Gamma' \neq \emptyset$ | 111 |
| 5.10 | Grafos Γ e Γ' com $\Gamma \cap \Gamma'$. Note que Γ' é igual a Γ sem a 3ª linha. | 114 |
| 5.11 | O grafo Γ' como um caso particular do grafo Γ | 114 |
| 5.12 | curva γ cortada em duas $\gamma = \gamma_2 \circ \gamma_1$ | 116 |
| 5.13 | Vértice (i-j)-valente. | 118 |
| 6.1 | Dois grafos Γ e Γ' sobre um plano \mathbb{R}^2 | 123 |
| 6.2 | Esquerda: γ_1, γ'_1 circulando o ponto $x = 0$. Direita: γ_2 enrolando duas vezes em torno de $x = 0$ e γ_3 não circula $x = 0$ | 124 |
| 6.3 | Um grafo colorido Γ sobre um plano $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, contraído para um grafo Γ' | 125 |
| A.1 | Para pontos $p \in U_\alpha$ e $q \in U_\beta$ definem-se transformações de coordenadas φ_α e φ_β que mapeiam os pontos da variedade \mathcal{M}_D em subespaços \mathbb{R}^D | 137 |
| A.2 | O conjunto dos vetores v num ponto p se chama espaço tangente T_p , que é um espaço vetorial. | 140 |
| A.3 | A curva $C \in \mathcal{M}$, onde aplicou-se uma parametrização $x(s)$ para realizar a integração. | 152 |

| | | |
|-----|---|-----|
| A.4 | A superfície $S \in \mathcal{M}$, onde aplicou-se uma parametrização $x(u, v)$ para realizar a integração. | 153 |
|-----|---|-----|