

A Quantização da Gravitação em 3D com Constante Cosmológica Positiva

Zui Oporto Almaraz



Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Orientadores

Prof. Dr. Olivier Piguet

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

Banca

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella

Prof. Dra. Maria Cristina Batoni Abdalla

Prof. Dr. Flávio Gimenes Alvarenga

Prof. Dr. Olivier Piguet

Prof. Dr. Clisthenis Ponce Constantinidis

Prof. Dr. Jose Francisco Gomes

Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Muito obrigado ao Centro Latino-Americano de Física e ao
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico por fazer possível este trabalho

Contents

Abstract	1
1 Introdução	5
2 Modelos de gravitação e de teorias topológicas	11
2.1 Alguns aspectos gerais sobre a gravitação em 3D e 4D dimensões . . .	11
2.1.1 Formalismo de primeira ordem	12
2.1.2 Formalismo canônico da gravitação	15
2.1.3 Variáveis de Ashtekar–Barbero da gravitação em 4D	27
2.1.4 Variáveis de Ashtekar na gravitação em 3D	35
2.2 Teoria de Chern–Simons	37
2.2.1 Densidades de Chern–Pontryagin e de Chern–Simons	38
2.2.2 Invariância de calibre	39
2.2.3 Invariância de difeomorfismo	40
2.2.4 Análise canônico da teoria de Chern–Simons	41
2.2.5 Cociclo	44
2.3 Gravitação em 3D como uma teoria de Chern–Simons	48
2.3.1 Primeira forma quadrática	49
2.3.2 Segunda forma quadrática.	52
2.3.3 Modelo de Bonzom–Livine: Análise canônica	53
3 Calibre axial	59
3.1 Variante da análise canônica do modelo de Bonzom–Livine.	59
3.2 Troca de variáveis	63
3.3 Calibre axial	65
4 Gravitação quântica de laços	71
4.1 “Reduzir então quantizar” <i>vs.</i> “Quantizar então reduzir”	71
4.2 Conexão <i>vs.</i> holonomia	73
4.2.1 Representação da conexão	73
4.2.2 Representação de holonomias e fluxos	73
4.3 Espaço de Hilbert da LQG	75
4.3.1 Espaço de Hilbert cinemático	77
4.3.2 Vínculo de Gauss e redes de spin	80
4.3.3 Implementação dos difeomorfismos do espaço	82

5	Quantização de laços da gravitação Lorentziana em 3D	85
5.1	Quantização canônica	85
5.1.1	Representação da conexão	85
5.1.2	Representação de laços	89
5.2	Observável	96
5.3	Limite clássico: O espectro de zero não é zero	103
5.4	Quantização das constantes fundamentais	105
6	Conclusões	107
	Bibliography	111

Resumo

Foi mostrado por Bonzon e Livine que a gravitação em 2+1 dimensões com constante cosmológica contém uma ambiguidade que depende de um parâmetro γ do tipo Barbero–Immirzi, similar ao que se tem na gravitação em 4D. Baseados neste fato mostramos que, no caso $\Lambda > 0$, a teoria Lorentziana pode ser parcialmente reduzida, através de uma fixação de calibre apropriada, a uma teoria de Chern–Simons com grupo de calibre SU(2). Após revisar uma estratégia de quantização da teoria de Chern–Simons já conhecida no contexto da quantização de laços para o caso de um espaço com a topologia de um cilindro, adaptamos as ferramentas deste esquema para nosso modelo. Finalmente construímos um observável quântico que, embora tenha um espectro não trivial no nível quântico, corresponde a uma quantidade que classicamente é nula.

Abstract

It was shown by Bonzom and Livine that 2+1 gravity with cosmological constant contains an ambiguity that depends on a Barbero–Immirzi-like parameter γ known from 4D gravity. Based on this fact, we showed that, for the $\Lambda > 0$ case, the Lorentzian theory can be partially reduced, thanks to a suitable gauge fixing, to a Chern–Simons theory with compact gauge group $SU(2)$. Then we revised already known loop quantization of Chern–Simons theory for the case of a space with the topology of a cylinder. Finally we construct a quantum observable which, despite having a not trivial spectrum at the quantum level, it corresponds to a classical quantity identically null.

Breve parágrafo sobre as convenções e notações

Ao longo deste trabalho consideramos a variedade diferencial \mathcal{M}_D sendo o espaço-tempo de dimensão $\dim(\mathcal{M}_D) \equiv D$. Em particular, são considerados modelos de dimensão $D = 3$ e $D = 4$. Numa carta local as coordenadas do espaço-tempo são escritas x^μ onde os índices tensoriais tipo espaço-tempo são representados por letras gregas: μ, ν , etc, assumindo os valores $0, 1, 2, \dots, D - 1$. Optamos por escrever o índice 0 como t para evitar confusão com o índice 0 no caso dos índices de grupo (veja mais adiante). Para a análise canônica é assumido que \mathcal{M}_D têm a topologia $\Sigma_{D-1} \times \mathbb{R}$, onde Σ_{D-1} é a variedade puramente de dimensão $\dim(\Sigma_{D-1}) = D - 1$, e \mathbb{R} sendo o tempo. Numa carta local as coordenadas do espaço são escritas como x^a onde os índices tensoriais são denotados por letras latinas do início do alfabeto: a, b , etc assumindo os valores $1, 2, \dots, D - 1$. Dependendo do caso, as vezes os índices espaciais são escritos como subíndices x, y , etc. O tensor totalmente antissimétrico de Levi-Civita $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_D}$ é definido por $\varepsilon^{0123} \equiv 1$, e o tensor completamente antissimétrico espacial como $\varepsilon^{ta_1 a_2 \dots a_{D-1}} \equiv \varepsilon^{a_1 a_2 \dots a_{D-1}}$, onde é claro que $\varepsilon^{12 \dots (D-1)} = 1$.

No contexto das teoria de calibre temos as seguintes definições. G representa um grupo de Lie de dimensão $\dim(G) = d$ que pode ser compacto ou não. A álgebra de Lie associada ao grupo G é $\text{Lie}(G) \equiv \mathfrak{g}$, também de dimensão d . Uma base nesta álgebra é denotada por τ_I onde I, J , etc são índices de grupo ou “internos” assumem os valores $1, 2, \dots, d$. Neste trabalho frequentemente consideramos grupos do tipo $\text{SO}(D')$, $\text{SO}(D' - 1, 1)$ ou $\text{SO}(D' - 2, 2)$, que têm a dimensão $d = \frac{1}{2}D'(D' - 1)$. Os índices de grupo serão chamados “índices de Lorentz”, e só neste caso, os geradores de grupo são escritos como M_{IJ} , onde I, J, \dots assumem os valores $0, 1, 2, \dots, D'$. Um outro grupo utilizado de forma recorrente é $\text{SU}(2)$, os geradores neste caso serão denotados por τ_i , onde os índices i, j, \dots assumem os valores $1, 2, 3$. No início de cada seção será explicitado o grupo de calibre em consideração para evitar qualquer confusão. Especializando o caso $\text{SO}(3, 1)$, defini-se o tensor completamente antissimétrico no espaço interno como ϵ_{IJKL} , onde $\epsilon_{0123} \equiv 1$. Repare que estamos utilizando um símbolo diferente do que era o tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ no espaço-tempo, isso para evitar qualquer tipo de confusão entre estes tensores. O tensor completamente antissimétrico restringido ao setor “espacial” do grupo $\text{SO}(3, 1)$, é definido como $\epsilon_{0ijk} \equiv \epsilon_{ijk}$, onde $\epsilon_{123} = 1$.

O leitor pode consultar a seguinte tabela que é um resumo de algumas das nossas convenções.

Simbolo

\mathcal{M}_D , $\dim(\mathcal{M}_D) = D$
 Σ_{D-1} , $\dim(\Sigma_{D-1}) = D - 1$
 $\mu, \nu, \dots = t, 1, \dots, (D - 1)$

$a, b, \dots = 1, \dots, D - 1$
 $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\varepsilon^{t123} = 1$, $\varepsilon^{abc} = \varepsilon^{abc}$

G , $\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$

τ_I

$I, J, \dots = 0, 1, \dots, D$

ϵ_{IJKL} , $\epsilon_{0123} = 1$, $\epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk}$

$i, j, \dots = 1, 2, 3$

$t^{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(t^{\mu\nu} - t^{\nu\mu})$

$s^{[IJ]} = \frac{1}{2}(s^{IJ} - s^{JI})$

$A = A_\mu^I \tau_I dx^\mu$

$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^I \tau_I dx^\mu dx^\nu$

$\mathbf{A} = A_a^I \tau_I dx^a$

$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{ab}^I \tau_I dx^a dx^b$

Significado

Variedade do espaço-tempo D -dimensional.

Variedade do espaço $(D - 1)$ -dimensional.

Índices tensoriais de espaço-tempo
(t corresponde ao índice temporal).

Índices tensoriais de espaço.

Tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita.

Grupo de Lie e sua correspondente álgebra de Lie.

Geradores do álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Índices da álgebra do grupo $\text{SO}(d,1)$ ou $\text{SO}(2,d-1)$
(índices de Lorentz).

Tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita.
no espaço interno.

Índices da álgebra do grupo $\text{SU}(2)$ ou $\text{SO}(3)$.

Antissimetriação nos índices de espaço-tempo e
nos índices de grupo.

Conexão espaço-temporal.

Curvatura espaço-temporal de A .

Conexão espacial.

Curvatura espacial de \mathbf{A} .

1 Introdução

“If there is a problem you can’t solve, then there is an easier problem you can solve: find it.”

George Polya, *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*.

A imagem parcial atual que temos da física, pode muito bem ser comparada de forma alegórica com um quebra cabeças, só que neste não temos de antemão as peças, mas temos que buscá-las nos fenômenos naturais, para logo juntá-las. É uma tarefa difícil, mas graças à estreita colaboração entre teóricos e experimentais, é que na atualidade temos completado grandes porções desse quebra cabeças. Só para dar um exemplo, recentemente foi divulgada a notícia da possível descoberta de uma das peças emblemáticas do modelo padrão, como é o Boson de Higgs.

Como resultado deste trabalho em equipe, temos na atualidade uma imagem parcial respeitável da física. Por uma parte se distingue claramente um grupo grande de peças que conformam a relatividade geral, edificada sobre os fundamentos da mecânica clássica. De outro lado estão as peças que constituem a mecânica quântica e sobre a qual se edificam a teoria quântica de campos e o modelo padrão da física de partículas. Temos assim, dois aspectos da natureza opostos e ao mesmo tempo que se completam: o macroscópico e o microscópico. No meio destas duas teorias existe um vazio de peças aguardando por ser preenchido, e sinala que há uma teoria com um quadro conceitual suficientemente geral para explicar a aparente bi-polaridade da natureza.

Formalmente o problema é formulado como a procura de uma teoria física que combine adequadamente os princípios da relatividade general com aqueles da mecânica quântica. Esta teoria recebe o nome de “teoria quântica da gravitação”. É de se esperar que as singularidades e divergências presentes nas teorias da relatividade geral e na teoria quântica de campos, devam ser regularizadas no contexto da gravitação quântica, além de fornecer uma descrição satisfatória da estrutura microscópica do espaço-tempo, a escalas de Planck, que se acredita representar a escala de energia ou comprimento na qual os efeitos quânticos da gravitação são relevantes.

Infelizmente desta vez não é possível apelar à exitosa dupla teoria-experimento, pois as peças do quebra cabeças nesta vez estão 15 ordens de grandeza acima da energia permitida pela tecnologia. Assim, do ponto de vista experimental, o prob-

lema da quantização da gravitação pertence a uma época futura¹. A física teórica, por enquanto, esta sozinha neste problema.

Existem várias propostas teóricas para atacar o problema, algumas delas radicais, outras complementárias e outras antagônicas (um resumo cronológico de algumas destas teorias é apresentado em [4], também pode-se consultar [3] que contém uma coleção variada de diferentes abordagens no problema da gravitação quântica). Em particular, duas teorias destacam-se por seu grande avanço e interesse por parte da comunidade científica. A primeira parte são as teorias de (super-)cordas, a teoria-M [5, 3], com uma proposta revolucionária, baseada no princípio unificador, que introduz novas simetrias, dimensões extras e princípios holográficos. No estado atual, a teoria de cordas é formulada perturbativamente sem contemplar a natureza dinâmica do espaço-tempo, porém, existem indicativos, graças á dualidade AdS/CFT [3], que apontam a uma formulação não perturbativa. Do outro lado, estão as teorias não perturbativas da gravitação quântica, das quais destacam-se a gravitação quântica de laços (LQG) [6, 7] na formulação canônica, e as espumas de spin (spin foams) [8, 9], na formulação covariante. A proposta destas teorias é modesta, quando comparada com a teoria de cordas, a ideia básica é incorporar os princípios básicos da mecânica quântica, respeitando o princípio fundamental da relatividade geral como uma teoria geométrica do espaço-tempo. Espera-se então o surgimento de uma sorte de geometria ou “espuma quântica” (*quantum foam*)[10] a escalas de Planck. Nesta tese, nos inclinamos pela proposta da LQG.

Entre os resultados importantes da LQG, está a construção rigorosa do espaço de Hilbert dos estados invariantes de calibre e de difeomorfismos espaciais [11]. No nível cinemático é possível construir operadores de geometria (comprimento, área, volume, etc) [12, 13, 14, 15] com espectros discretos, fornecendo-nos assim uma primeira intuição sobre a natureza da espuma quântica. Os princípios da LQG aplicados na cosmologia, aparentemente regularizam a singularidade do Big Bang, substituindo-o por um “*Big Bounce*” [16, 17]. Porém, a LQG está longe de ser uma teoria completa. Todavia não existe uma descrição satisfatória da dinâmica desse sistema, e existe ainda o problema de recobrar o limite semiclássico da teoria. Nesses casos, resulta de grande ajuda recorrer a exemplos mais simples que capturam as principais características da teoria original. A gravitação em 3D é um exemplo destas teorias.

Em princípio a gravitação em 3D [18] poderia parecer um exemplo simples de mais pelo fato que neste modelo não há suficiente “espaço” para sustentar a propagação de ondas gravitacionais². Isto não significa que a gravitação em 3D seja trivial. É simples, mais não simples de mais. Casos mais interessantes surgem quando partículas pontuais são acopladas na teoria, dando lugar a singularidades cônicas [19,

¹Tal vez num futuro próximo. Existem propostas corajosas que sugerem ser possível detectar sinais indiretamente dos efeitos quânticos da gravitação. Pode consultar, por exemplo, [1, 2], e também as contribuições em [3], para uma revisão dos avanços da fenomenologia na gravitação quântica

²Este é o exemplo de uma teoria do espaço-tempo que não contém gravitação, ilustrando assim o conceito que o espaço-tempo é o ente fundamental e a gravitação uma consequência.

20, 21]. Também é possível adicionar termos que geram massa topológica [22, 23], até mesmo é possível ter soluções de buracos negros [24, 25]. Assim, a gravitação em 3D representa um bom “laboratório” para por em prática as técnicas de quantização da LQG, formulados em 4D.

Talvez um dos resultados mais profundos da gravitação em 3D seja sua relação com as teorias topológicas de Chern–Simons. O primeiro passo nesta direção foi dado por Achúcarro e Townsend [26], mas foi só depois do elaborado trabalho de Witten [27], que a analogia foi evidente. Na atualidade, quase que é parte do senso comum dizer que a gravitação 3-dimensional e a teoria de calibre de Chern–Simons são equivalentes, até mesmo derivadas totais (termos na borda), onde a simetria de calibre subjacente é o grupo de Poincaré. Contudo, a diferença entre as duas teorias é que no caso da gravitação em 3D, a triáde é restringida a ser inversível, enquanto que tal restrição não se aplica a teoria de Chern–Simons. Assim, pode-se interpretar a teoria de Chern–Simons como uma extensão da gravitação em 3D, incluindo métricas singulares ou, alternativamente, pode-se considerar a gravitação em 3D como uma versão restringida da teoria de Chern–Simons [27]. (Porém, existem ainda questões não triviais referentes ao papel da invertibilidade da triáde [28]).

Uma estrutura mais rica surge quando o grupo de simetria local de Poincaré é deformado ao grupo (anti)-de Sitter. Neste caso, além da forma quadrática padrão que conduz à gravitação em 3D, é possível construir uma ação “exótica”, equivalente à primeira ao nível das equações de campo. Esta particularidade da gravitação, quando formulada a partir da teoria de Chern–Simons, não foi ignorada no trabalho original de Witten. Isto conduz a uma analogia com a bem estabelecida propriedade da LQG, conhecida como ambiguidade do parâmetro de Barbero–Immirzi [29, 30, 11, 31, 32]. Esta analogia foi estudada detalhadamente pelos autores de [33], e representa a principal motivação desta tese.

A introdução das variáveis de Ashtekar no formalismo canônico da gravitação em 4D [34, 35] foi um grande passo rumo à simplificação dos vínculos. A simplicidade foi alcançada graças à introdução de um espaço de fase complexo, mas que se torna problemático no momento de impor as condições de realidade na teoria quântica. Uma densidade de Lagrangiana auto-dual correspondente ao Hamiltoniano de Ashtekar foi proposto independentemente por Samuel [36] e Jacobson e Smolin [37]. Logo então Barbero apontou [29] a possibilidade de ter uma realização real das variáveis canônicas, intimamente relacionadas com as variáveis de Ashtekar, só que o preço a pagar é a introdução de um parâmetro γ real/complexo, arbitrário, conhecido como parâmetro de Barbero–Immirzi [30]. Além disso, a simplicidade dos vínculos do Hamiltoniano de Ashtekar é destruída. Finalmente, Holst introduz [38] a ação mais geral que resume todos os casos prévios, ela contém um termo topológico (*on-shell*) acoplado pelo parâmetro γ . A teoria é interpretada como uma classe de ações da gravitação em 4D, classicamente indistinguíveis, mas não equivalentes quânticamente. Embora as variáveis de Ashtekar se encaixem naturalmente no formalismo da gravitação em 3D, permanece até agora desconhecido se existe uma correspondente conexão real do tipo Ashtekar–Barbero, definida sobre um grupo de Lie compacto, isto é, o $SU(2)$.

Com tudo isto, estamos na possibilidade de propor as seguintes questões para se resolver neste trabalho:

- É possível a descrição da gravitação Lorentziana em 3D, como uma teoria de calibre definida sobre um grupo compacto?
- Se a resposta é afirmativa, é possível quantizar este modelo usando as ferramentas da LQG?
- Existem observáveis físicos na teoria?

Vamos tentar responder estas perguntas estudando o modelo que Bonzom e Livine, proposto em [33], onde eles quantizam a gravitação Riemanniana em 3D com constante cosmológica, baseados na presença de duas ações invariantes, portanto com dois parâmetros independentes: a constante gravitacional e um parâmetro tipo Barbero-Immirzi. Baseados neste modelo, pretendemos abordar as questões acima mencionadas, para o caso da gravitação Lorentziana com constante cosmológica Λ . No caso da constante cosmológica ser positiva, onde a simetria local é descrita pelo grupo $SO(3,1)$, veremos que é possível quantizar a teoria com a abordagem LQG, graças a uma fixação de calibre parcial, que reduz o grupo de calibre ao grupo compacto $SO(3)$, para a qual uma quantização do tipo LQG foi desenvolvida em [39], no caso de uma teoria de Chern-Simons, onde o espaço tem a topologia de um cilindro. Também construímos um observável físico que tem certa analogia com o operador de área na gravitação em 4D, apesar deste primeiro não possuir uma correspondente quantidade geométrica clássica.

No contexto da LQG, é bem sabido que a compacticidade do grupo de calibre – ou então, do grupo residual após a fixação parcial de calibre – é crucial, pelo menos até agora. Além da gravitação Riemanniana, o grupo compacto é obtido para a gravitação Lorentziana em 4D, no caso do calibre temporal [11, 31, 32], válido unicamente em quatro dimensões. Um progresso significativo foi obtido pelos autores de [40, 41, 42, 43], que conseguiram reduzir o grupo de calibre da gravitação Lorentziana D -dimensional ao grupo compacto $SO(D-1)$ —mas a técnica funciona unicamente para o formalismo Hamiltoniano. Nosso caso é diferente em três aspectos: em três dimensões não precisamos de seus vínculos de simplicidade (veja o segundo artigo em [41]), respaldamo-nos firmemente na existência do parâmetro tipo Barbero-Immirzi, introduzido por Bonzom e Livine, uma marca característica particular a essa dimensão, além disso, começamos com um formalismo Lagrangiano existente.

A tese está dividida em duas partes, uma correspondendo à teoria clássica e a outra à quantização. Cada uma das partes está composta de dois capítulos: um de revisão (capítulo 2, capítulo 4) e outro apresentando os resultados da tese (capítulo 3, capítulo 5). O leitor familiarizado com essa área de pesquisa é convidado a ler diretamente os capítulo 3 e capítulo 5 e se referir aos capítulo 2 e capítulo 4 na medida que seja requerido. O capítulo 2, começa com uma apresentação da gravitação em 4D e em 3D, do ponto de vista das teorias de Yang-Mills (seção 2.1). Logo após, na seção 2.2, continuamos com uma exposição breve sobre a teoria de Chern-Simons. As ferramentas básicas para escrever a gravitação em 3D, com (ou sem) constante cosmológica, como uma teoria de calibre de Chern-Simons é apresentada na seção 2.3,

onde a origem do parâmetro tipo Barbero–Immirzi é explicada. A [seção 2.3.3](#) é a mais importante deste capítulo, pois contém a descrição do modelo de Bonzom e Livine. No [capítulo 3](#) o argumento principal deste trabalho é exposto, onde consideramos uma variante da análise canônica do modelo de Bonzom e Livine, para depois propor uma fixação de calibre ([seção 3.3](#)) que reduz o grupo de simetria da teoria a um grupo compacto $SU(2)$. Na segunda parte da tese, consideramos a quantização da gravitação em 3D com constante cosmológica. Uma revisão geral sobre os métodos da LQG utilizados para construir o espaço de Hilbert físico, é apresentada no [capítulo 4](#). Estes métodos são aplicados, previa adaptação, para o nosso modelo ([capítulo 5](#)), nesta seção também se apresenta a construção de um observável quântico, onde é obtido seu correspondente espectro quântico. Finalmente estudamos também o limite clássico deste observável. O último capítulo é reservado para alguns comentários sobre a redução da simetria pela fixação de calibre, a quantização do modelo no espírito da LQG, as conclusões da tese, assim como suas perspectivas.

2 Modelos de gravitação e de teorias topológicas

Apresentamos na [seção 2.1](#) uma revisão geral das teorias de gravitação desde a perspectiva das teorias de calibre como teorias vinculadas. Mostra-se a estreita relação que existe entre a gravitação e as teorias de calibre de Yang–Mills, primeiro com argumentos heurísticos, e logo de forma rigorosa, pela dedução detalhada do formalismo canônico de Ashtekar–Barbero da gravitação em 4D. A conclusão principal desta análise é que o espaço de fases cinemático da gravitação tem a mesma estrutura das teorias Yang–Mills, onde as coordenadas são dadas pelos campos de calibre e elétrico (relacionados com a conexão de spin e a tríada espacial, respectivamente), junto com um vínculo de Gauss responsável por gerar as transformações infinitesimais de calibre tipo Yang–Mills. Estes resultados são válidos também, após algumas modificações, no caso da gravitação em 3D. Na [seção 2.2](#) se revisa alguns aspectos gerais da teoria de calibre topológica de Chern–Simons. Em particular estuda-se as invariâncias de calibre e de difeomorfismos, e a relação existente entre estas simetrias. Depois estudam-se em detalhe o formalismo canônico da teoria de Chern–Simons como um sistema vinculado. A [seção 2.3](#) representa o nexa entre as duas primeiras seções, o formalismo da gravitação em 3D com constante cosmológica Λ é formulada como uma teoria de Chern–Simons onde o grupo de simetria local é identificado com o grupo de (anti)-de Sitter. No caso $\Lambda = 0$ o grupo de calibre é o grupo de Poincaré. Mostra-se também que a invariância de calibre é suficiente para descrever os difeomorfismos. Uma propriedade muito particular no modelo com $\Lambda \neq 0$ é a possibilidade de se escrever duas formulações diferentes da gravitação em 3D, uma correspondendo á teoria padrão da gravitação em 3D, sendo a segunda uma versão “exótica”. Bonzom e Livine estudaram a quantização do modelo Riemanniano geral que contém a ação padrão e o termo exótico, este último acoplado com um parâmetro arbitrário γ . Em particular estamos interessados na formulação canônica deste modelo que é desenvolvido em detalhe na ultima parte deste capítulo.

2.1 Alguns aspectos gerais sobre a gravitação em 3D e 4D dimensões

A teoria da gravitação com constante cosmológica Λ formulada sob a variedade 3-dimensional \mathcal{M}_D é descrita pela ação de Einstein–Hilbert mais um termo cos-

mológico

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^D x \sqrt{-g} (R(g) - 2\Lambda), \quad (2.1)$$

onde $\det g_{\mu\nu} \equiv g$ é o determinante da métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de Ricci definido a partir do tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu}{}^{\alpha}.$$

Nesta fórmula $R_{\mu\nu}$ é chamado tensor de curvatura de Ricci.

As equações de campo são as equações de Euler–Lagrange obtidas a partir da variação de (2.1), e que se escrevem

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.2)$$

as quais são covariantes sob o grupo de difeomorfismos do espaço-tempo.

No caso $D = 2 + 1$ dimensões existe uma “degenerescência”, pois os tensores de Riemann e Ricci possuem a mesmo número de componentes independentes. Em consequência o tensor de Riemann depende linearmente do tensor de curvatura de Ricci através da relação

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R.$$

Portanto, de (2.2) se segue que as soluções das equações de movimento do campo gravitacional no caso $\Lambda = 0$ são aquelas de curvatura nula (soluções planas) enquanto que no caso $\Lambda \neq 0$ as soluções são espaços de curvatura constante. Isto implica que a gravitação pura em 2+1 dimensões não tem graus de liberdade locais, pois a geometria local é dada por uma das soluções mencionadas anteriormente. A não trivialidade da teoria surge quando acoplamos matéria (por exemplo, partículas pontuais). No vácuo, graus de liberdade globais estão presentes quando o espaço-tempo possui uma topologia não trivial.

2.1.1 Formalismo de primeira ordem

A gravitação como apresentada previamente é uma teoria de “segunda ordem” no sentido que as equações de campo são de segunda ordem. Existe uma formulação alternativa da gravitação, conhecida como formalismo de Palatini¹, que fornece equações de campo de primeira ordem, por isso este formalismo também é referido como o de “primeira ordem”. Vamos introduzi-lo aqui numa linguagem muito semelhante ao que se tem nas teorias de calibre, e que difere do formalismo métrico muito comum na relatividade geral.

¹Um fato histórico muito interessante é que o formalismo de primeira ordem “de Palatini” foi descoberto na verdade por Einstein em 1925, 6 anos depois do trabalho de Palatini! Daqui que alguns autores utilizam a denominação de formalismo de Einstein–Palatini. Uma referência sobre esta discussão se encontra em [44].

Em virtude do Princípio de Equivalência, definimos localmente um referencial inercial, denominado “de Lorentz”, em cada ponto P do espaço-tempo D -dimensional \mathcal{M}_D . O referencial local de Lorentz é identificado como o espaço tangente no ponto P . Agora introduzimos os campos fundamentais $e_\mu^I(x)$, que chamamos indistintamente de *vielbein* ou *co-frame* local, onde $I, J, \dots = 0, 1, \dots, D$ são “índices internos”, também chamados índices de Lorentz, que servem para distinguir os diferentes campos. A métrica do espaço-tempo em vez de ser fundamental, é um objeto composto:

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv e_\mu^I(x)e_\nu^J(x)\eta_{IJ}, \quad (2.3)$$

e para nós “campo gravitacional” significa os campos $e_\mu^I(x)$, que definem a geometria através de (2.3). Nesta definição η_{IJ} é a métrica no espaço interno, utilizada para subir e abaixar índices, definida como $\eta_{IJ} = \text{diag}(\sigma, 1, 1, \dots, 1)$, onde $\sigma = \pm 1$ representa um parâmetro que nos permite considerar simultaneamente o modelo Riemanniano e Lorentziano, respectivamente. A relação entre os determinantes é imediata:

$$\det g = \sigma(\det e)^2.$$

Devido à (2.3) costuma-se dizer que o *vielbein* é a raiz quadrada da métrica.

Repare que o $g_{\mu\nu}$, sendo um tensor simétrico, possui $D(D+1)/2$ graus de liberdade enquanto os campos e_μ^I têm D^2 . Portanto temos $D(D-1)/2$ graus de liberdade a mais que requerem a introdução de simetrias internas na teoria. Isto fica claro se notamos que a definição de $g_{\mu\nu}$ não é unívoca pois existe uma infinidade de tríadas relacionadas através de transformações locais de Lorentz da forma $e'^I = \Lambda^I_J(x)e^J$ que se dividem em $D-1$ *boosts* e $(D-1)(D-2)/2$ rotações espaciais, dando um total de $D(D-1)/2$ transformações, justamente igual ao número de graus de liberdade adicionais. Assim, a simetria interna esta relacionada com a simetria local Lorentz, isto é, com a simetria $\text{SO}(D-1,1)$. Na continuação é enunciado o conceito formal da simetria local de Lorentz.

Seja então o espaço-tempo D -dimensional \mathcal{M}_D introduzido anteriormente, no qual definimos os campo 1-forma $e^I(x) = e_\mu^I(x)dx^\mu$ e a 1-forma conexão de spin $\omega^{IJ}(x) = \omega^{IJ}_\mu(x)dx^\mu$ que carregam uma representação do grupo de Lorentz, e que se transformam como

$$\begin{aligned} e^I(x) &\mapsto e'^I(x) = \Lambda^I_J(x)e^J(x), \\ \omega^I_J(x) &\mapsto \omega'^I_J(x) = (\Lambda^{-1})^I_K \omega^K_L \Lambda^L_J + (\Lambda^{-1})^I_K d\Lambda^K_J, \end{aligned} \quad (2.4)$$

onde $\Lambda \in \text{SO}(D-1,1)$ são as transformações de Lorentz. A tríada fornece assim um mapa entre o fibrado do espaço tangente $(\mathcal{M}, T(\mathcal{M}))$ e o fibrado principal de Lorentz denotado por $(\mathcal{M}, \text{SO}(D-1,1))$. Geometricamente isto significa que se $v^\mu(x)$ é um vetor no espaço tangente no ponto P , então $v^\mu e_\mu^I$ é um vetor no espaço (interno) de Minkowski. A conexão no fibrado toma valores na álgebra $\mathfrak{so}(D-1,1)$ que é ω^{IJ} .

A ação de Einstein–Palatini da gravitação $D+1$ dimensional se escreve neste formalismo como²

$$S = \frac{1}{16\pi(D-2)!G} \int_{\mathcal{M}} \epsilon_{I_1 I_2 \dots I_D} e^{I_1} e^{I_2} \dots e^{I_{D-2}} \left(R^{I_{D-1} I_D}(\omega) + \frac{\Lambda}{6} e^{I_{D-1}} e^{I_D} \right), \quad (2.5)$$

onde $\epsilon_{I_1 I_2 \dots I_D}$ é o tensor de Levi–Civita completamente antissimétrico definido por $\epsilon_{01 \dots D} \equiv 1$, e

$$R^{IJ} = d\omega^{IJ} - \omega^I_K \omega^{KJ}.$$

é uma 2-forma que definimos como a curvatura de ω . Note que nesta formulação temos dois campos fundamentais independentes, e^I e ω^{IJ} , em contraste com a formulação de Einstein–Hilbert na qual só se tem o campo $g_{\mu\nu}$.

As equações de Euler–Lagrange obtidas a partir da variação da ação (2.5) são

$$T^I \equiv de^I - \omega^I_J e^J = 0, \quad R^{IJ} = -\frac{\Lambda}{6} e^I e^J.$$

A primeira equação nos diz que a torção é nula, e por tanto ω^{IJ} é “compatível com e^I ”, quer dizer que essa equação pode ser resolvida algebricamente para ω em termos de e :

$$\omega^{IJ}{}_{\mu} = e^{[I\alpha} \partial_{\mu} e_{\alpha}^{J]} - e^{[I\alpha} \partial_{\alpha} e_{\mu}^{J]} - e^{[I\alpha} e^{J]\beta} e_{\mu}^K \partial_{\alpha} e_{K\beta}, \quad (2.6)$$

onde $[IJ]$ significa antissimetria nos índices I e J . A segunda equação é equivalente às equações de Einstein desde que a primeira equação seja satisfeita. Na solução (2.6) introduz-se e_I^{μ} definido como a inversa do *vielbein*:

$$e_I^{\mu} e_J^{\mu} = \delta^I_J, \quad e_{\mu}^I e_I^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu},$$

eles constituem uma base ortonormal no espaço tangente em cada ponto do espaço-tempo: $(e_I, e_J) \equiv g_{\mu\nu} e_I^{\mu} e_J^{\nu} = \eta_{IJ}$, com $(,)$ o produto interno no espaço-tempo. Em $D = 3, 4$ estes campos vetoriais são referidos como campos tríada ou tetrada, respectivamente; são basicamente os vetores duais ao *co-frame*, daqui que são chamados também de campos de *frame*. A relação entre o *frame* e o *co-frame* é simplesmente $e_{\mu}^I = \eta^{IJ} e_J^{\nu} g_{\nu\mu}$. Vetores e 1-formas no espaço tempo são transformados em vetores e 1-formas de Lorentz através da regra $v^{\mu} = e_I^{\mu} v^I$, $\omega_{\mu} = e_{\mu}^I \omega_I$.

Por que o formalismo de primeira ordem? Do ponto de vista matemático o debate se traduz na questão de escolha entre um espaço afim ou um espaço métrico. Como exemplo ilustrativo, uma propriedade dos espaços afins é o paralelismo, embora nos espaços métricos temos a propriedade de ortogonalidade. Claramente dois conceitos perpendiculares. Na gravitação, ω é um objeto afim, pois é o responsável do transporte paralelo, e o *vielbein* e é um objeto métrico por razões óbvias (a partir dele se define a métrica). Então impor, a priori, que um deles depende do outro “é uma forma de violência desnecessária”³. Uma generalização natural da gravi-

²No que segue evitamos escrever reiterativamente o produto *wedge* \wedge . A natureza graduada das n -formas é obtida através da regra de anticomutatividade $dx^{\mu} dx^{\nu} = -dx^{\nu} dx^{\mu}$.

³Tomamos emprestada a citação do J. Zanelli em [45] (pagina 9), que contém uma discussão extensa sobre este tema.

tação ao nível estrutural básico consiste em manter as estruturas afim e métrica independentes, *i.e.* considerar ω e e com os campos fundamentais da teoria.

Aparentemente o primeiro a considerar o formalismo de primeira ordem foi o próprio A. Einstein⁴, demonstrando assim sua capacidade para quebrar não só com os paradigmas de seus colegas, mas também com os seus próprios. Num esforço por unificar o campo eletromagnético e gravitacional, o formalismo de primeira ordem levou a Einstein à teoria conhecida como “Gravitação Teleparalela”. A teoria permaneceu obscura durante varias décadas mas agora atravessa por uma etapa de renascimento (o leitor pode consultar [46] que contém referências aos trabalhos originais).

Por outro lado, $T = 0$, uma equação de movimento no formalismo de primeira ordem, garante a compatibilidade de ω com o *frame*, resultado válido na gravitação clássica pura. No setor quântico, os campos, obedecendo o princípio de incerteza, flutuam em torno das configurações clássicas, *i.e.* *of-shell*. Por exemplo, os campos podem ter configurações tais que $T \neq 0$ ou $\det e = 0$, portanto ω não necessariamente é uma conexão Riemanniana ou e não precisa estar associado a uma métrica. No formalismo de segunda ordem estas flutuações são negligenciadas.

O formalismo de primeira ordem permite acoplar matéria fermiônica, uma vez que contamos com a simetria local de Lorentz, fundamental na teoria de Dirac. Os graus de liberdade fermiônicos contribuem para a geração de torção como consequência do acoplamento mínimo com a gravitação. Assim, diferenças qualitativas entre o formalismo de primeira ordem e de segunda ordem já ocorrem a nível clássico, desde que estejam em jogo graus de liberdade fermiônicos. O leitor pode consultar [47] para uma argumentação detalhada deste ponto.

2.1.2 Formalismo canônico da gravitação

O objetivo deste parágrafo é enfatizar de forma intuitiva a estreita relação entre a gravitação, as teorias de Yang–Mills e as teorias de campo topológicas. O ponto de vista é o formalismo canônico de sistemas vinculados.

2.1.2.1 Sistemas vinculados

O primeiro passo na construção do formalismo canônico clássico é descrito no seguinte esquema:

1. Começamos com a formulação Lagrangiana do sistema físico. Daqui calculamos os **momentos canônicos** definidos como $p \equiv \partial L / \partial \dot{q}$.
2. Realizamos uma **transformação de Legendre** que consiste em resolver as velocidades em termos dos momentos canônicos, $\dot{q} = \dot{q}(p, q)$. Então introduzimos o Hamiltoniano do sistema físico como $H_C = \dot{q}p - L(\dot{q}, q)$.

⁴Veja a nota de rodapé na pagina 12.

3. O **espaço de fase** é gerado pelo par canonicamente conjugado (q, p) , onde postulamos os colchetes de Poisson $\{q, p\} = 1$ que define a estrutura simpléctica deste espaço.
4. A **evolução temporal ou dinâmica** é determinada pelo Hamiltoniano através dos comutadores fundamentais $\dot{q} = \{q, H_C\}$, $\dot{p} = \{p, H_C\}$.

Esta prescrição não é infalível. Existem sistemas físicos (por exemplo no caso de sistemas descritos por Lagrangianas de primeira ordem linear nas velocidades) nos quais o segundo passo falha não sendo possível resolver todas as velocidades em termos dos momentos canônicos. No caso, é dito que a Lagrangiana é “singular” ou bem que a dinâmica é “vinculada”. Uma característica essencial dos sistemas vinculados, descoberta por Dirac [48], é que podem ser interpretados como teorias de calibre, e vice-versa. De fato, a presença de vínculos na teoria conduz a graus de liberdade redundantes, portanto o número de soluções fisicamente distinguíveis é menor do que seriam se não existissem os vínculos, uma característica justamente das teorias de calibre.

A prescrição para lidar com teorias vinculadas tem o seguinte esquema [49]:

1. **Momentos canônicos.** Partindo da Lagrangiana calculamos os momentos canônicos definidos como antes $p \equiv \partial L / \partial \dot{q}$.
2. **Transformada de Legendre.** Resolvemos as velocidades em termos dos momentos canônicos, mas isto não é possível para todas as velocidades. Definimos então os **vínculos primários** como

$$\phi \equiv p - \partial L / \partial \dot{q} \approx 0,$$

onde o símbolo “ \approx ” se lê “fracamente nulo”⁵. Adicionamos estes vínculos na Lagrangiana original através de multiplicadores de Lagrange, λ . Então o Hamiltoniano do sistema é definido como

$$H = \dot{q}p - L(\dot{q}, q) - \lambda\phi.$$

3. **Espaço de fase.** É definido pelo par conjugado (q, p) , junto com os colchetes de Poisson $\{q, p\} = 1$ que define a estrutura simpléctica deste espaço. O espaço de fase contém todos os possíveis estados da teoria sem tomar conta da dinâmica vinculada, e por isso será denominado de “cinemático”. A dinâmica determina órbitas no espaço de fase cinemático.

⁵A igualdade “fraca”, denotada por “ \approx ”, é útil por duas razões. A primeira é que nos permite distinguir, por exemplo, um vínculo de uma equação de movimento. A segunda razão é que estas igualdades fracas definem hipersuperfícies, \mathcal{C} , no espaço de fase (não vinculado) original sobre as quais elas se comportam como simples identidades, mas pode acontecer que fora destas elas são diferentes de zero.

4. **Análise de estabilidade dos vínculos primários.** Os vínculos, que restringem a gama de condições iniciais nos pontos do espaço de fase, devem acompanhar a evolução do sistema,

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} \approx 0.$$

Da condição de estabilidade pode acontecer que 1) surjam “vínculos secundários” (aqueles que precedem aos primários), que devem ser adicionados ao Hamiltoniano original, ou/e 2) podem surgir condições que fixam alguns dos multiplicadores de Lagrange. No caso em que surgem novos vínculos repete-se o processo até não se ter novos vínculos.

5. **Vínculos de primeira classe e vínculos de segunda classe.** (Não confundir estes últimos com os vínculos secundários!). O critério de catalogação é o seguinte: Um vínculo, ϕ , é de “primeira classe” se o colchete de Poisson com todos os vínculos é nulo ou proporcional a outros vínculos, (eles devem ser fracamente nulos) mas não só isso, também é preciso que o colchete de Poisson com o Hamiltoniano seja fracamente nulo. Dado que a estabilidade dos vínculos foi levada até o final, esta última condição se satisfaz automaticamente. Caso contrário algum colchete de Poisson com os vínculos não é fracamente nulo, o vínculo é de “segunda classe”, que denotamos por χ .
6. **Colchetes de Dirac.** A ideia é fazer que os vínculos de segunda classe, em princípio fracamente nulos, sejam fortemente nulos. Para levar a cabo isto definimos o colchete de Dirac

$$\{f, g\}_D \equiv \{f, g\} - \{f, \chi\}C^{-1}\{\chi, g\}, \quad (2.7)$$

onde C^{-1} é a inversa da matriz C dos vínculos de segunda classe que é definida como

$$C_{ij} \equiv \{\chi_i, \chi_j\}.$$

Segundo esta definição, o colchete de Dirac entre uma função arbitraria no espaço de fase e os vínculos de segunda classe é nulo (ou fracamente) nulo por construção. Portanto, podemos escrever os vínculos de segunda classe como igualdades fortes, $\chi = 0$, e de ser possível elas devem ser resolvidas, de modo que uma parte das variáveis canônicas se escrevam em termos das outras. O resultado é um espaço de fase reduzido, onde a estrutura simpléctica que a redução induz é justamente dada pelos colchetes de Dirac.

7. **Dinâmica.** A evolução temporal é determinada pelo Hamiltoniano que após a redução só contém vínculos de primeira classe. A presença dos vínculos de primeira classe se traduz numa redundância nos graus de liberdade. Temos assim uma teoria de calibre onde a evolução do sistema é dividida em dinâmica

“verdadeira”, determinada por um Hamiltoniano não nulo H_C , e dinâmica de puro calibre, determinada pelos vínculos:

$$\dot{f} = \{f, H\} = \{f, H_C + G\} = \{f, H_C\} + \delta_G f,$$

onde $\delta_G f \equiv \{f, G\}$ são as transformações infinitesimais de calibre de f geradas pelo vínculo de primeira classe G .

Optamos por desenvolver em detalhe este esquema com um exemplo particular, como é o caso das teorias de Yang–Mills. Esta teoria presenta, como veremos no que segue, unicamente vínculos de primeira classe. A análise dos sistema com vínculos de segunda classe é adiada até a introdução da teoria de Chern–Simons na [seção 2.2](#)

2.1.2.2 O caso de Yang–Mills

A teoria de Yang–Mills é considerada paradigmática no conjunto das teorias de calibre. Os elementos necessários para construir uma teoria deste tipo são uma variedade diferencial D -dimensional \mathcal{M}_D que representa o espaço-tempo⁶, com grupo de simetria local G e sua correspondente álgebra de Lie \mathfrak{g} . G é assumido como semi-simples, mas não necessariamente compacto. A álgebra de Lie se assume equipada com uma forma quadrática não degenerada dada pela forma de Killing, que se escreve $k_{IJ} \equiv \text{Tr}(\tau_I \tau_J)$. O campo fundamental da teoria é a 1-forma campo de calibre ou conexão (potencial de Yang–Mills), $A = A_\mu^I \tau_I dx^\mu$, que toma valores na álgebra de Lie do grupo; os τ_I são uma base nesta álgebra, satisfazendo as relações de comutação

$$[\tau_I, \tau_J] = f_{IJ}^K \tau_K. \quad (2.8)$$

A curvatura de A , conhecida também como tensor de curvatura de Yang–Mills, é a 2-forma definida como⁷

$$F \equiv dA + \frac{1}{2}[A, A] = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^I \tau_I dx^\mu dx^\nu. \quad (2.9)$$

A conexão e a curvatura se transformam sob as transformações de calibre como

$$\begin{aligned} A(x) &\mapsto A^g(x) = g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x), \\ F(x) &\mapsto F^g(x) = g^{-1}(x)F(x)g(x). \end{aligned}$$

⁶Consideramos neste parágrafo o espaço-tempo de Minkowski, com métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

⁷Deve-se ter em mente todas as possíveis notações dos campos. Por exemplo podemos ter: $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^I \tau_I dx^\mu dx^\nu$ uma 2-forma e uma matriz, $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^I \tau_I$ as componentes de um tensor de segundo ordem e uma matriz, $F^I = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^I dx^\mu dx^\nu$ uma 2-forma e um vetor na álgebra, por último $F_{\mu\nu}^I$ um tensor de segunda ordem e um vetor na álgebra.

Com frequência é vantajoso considerar a versão infinitesimal das transformações de calibre. Seja $g = e^\lambda$ um elemento do grupo, com $\lambda = \lambda^I \tau_I$ um parâmetro infinitesimal que assume valores na álgebra. As transformações infinitesimais dos campos são

$$\begin{aligned}\delta A &= D_A \eta = (\partial_\mu \lambda^I + f^I_{JK} A^J \lambda^K) \tau_I dx^\mu, \\ \delta F &= [F, \lambda] = \frac{1}{2} (f^I_{JK} F_{\mu\nu}^J \lambda^K) \tau_I dx^\mu dx^\nu.\end{aligned}$$

Repare que estamos definindo a derivada covariante

$$D_A = d + [A, \] \quad \text{ou} \quad D_{J\mu}^I = \delta_J^I \partial_\mu + f^I_{KJ} A_\mu^K.$$

Com todos estes elementos, escrevemos a ação da teoria de Yang–Mills:

$$S_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}_D} d^D x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}_D} d^D x k_{IJ} F_{\mu\nu}^I F^{J\mu\nu}.$$

A invariância de calibre desta ação se deduz facilmente das transformações de F e a propriedade cíclica do traço. As equações de campo são a generalização não Abelianas das equações de Maxwell:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} D_\nu F_{\rho\sigma} = 0.$$

A segunda equação é a identidade de Bianchi, que é uma consequência de $d^2 = 0$.

O formalismo canônico da teoria de YM começa com a identificação de uma coordenada tipo tempo. No espaço-tempo de Minkowski escolhemos simplesmente a coordenada t . Todos os campos envolvidos na ação devem-se separar em componentes espaciais e temporais. Isto sendo feito da seguinte forma:

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \text{Tr}(2F_{ta} F^{ta} + F_{ab} F^{ab}),$$

onde $x^0 \equiv t$ é índice temporal, e $a, b, \dots = 1, 2, \dots, D-1$ os índices espaciais. Sendo que $F^{ta} = \eta^{tt} \eta^{ab} F_{tb} = -F_{ta}$, e definindo os campos “elétrico” e “magnético” não Abelianos

$$E_a \equiv F_{ta} = \dot{A}_a - \partial_a A_t, \quad B_a \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} F^{bc}, \quad (\text{onde } \dot{A}_a \equiv \partial_t A_a)$$

temos que a ação se escreve

$$\begin{aligned}S_{\text{YM}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1} x k_{IJ} \delta^{ab} (E_a^I E_b^J - B_a^I B_b^J), \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1} x k_{IJ} \delta^{ab} ((\dot{A}_a^I - \partial_a A_t^I)(\dot{A}_b^J - \partial_b A_t^J) - B_a^I B_b^J).\end{aligned}$$

Calculamos agora os momentos canônicos a partir do termo cinético:

$$P_I^a = k_{IJ} \delta^{ab} E_b^I \equiv E_I^a, \quad P_I^t = 0.$$

Da primeira destas equações é fácil resolver as velocidades \dot{A}_a^I em termos de P_J^b , o resultado é $A_a^I = E_a^I + \partial_a A_t^I$. No referente ao momento canônico de A_t , notamos de imediato que este é zero, e portanto não podemos resolvê-lo em termos de \dot{A}_t^I . Temos assim vínculos primários definidos como

$$\phi_I^t \equiv P_I^t \approx 0. \quad (2.10)$$

O Hamiltoniano da teoria se escreve então

$$\begin{aligned} H &= H_C + \lambda^I \phi_I^t \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1}x \left[k_{IJ} \delta^{ab} (E_a^I E_b^J + B_a^I B_b^J) - A_t^I D_a E_I^a d^3x + \lambda^I P_I^t \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

com $\lambda(\mathbf{x})$ um multiplicador de Lagrange que é visto como uma função teste.

Definimos o espaço de fase cinemático a partir dos pares canonicamente conjugados (A_t^I, P_J^t) e (A_a^I, E_b^J) , junto com a estrutura simpléctica que se postula é

$$\{A_t^I(\mathbf{x}), P_J^t(\mathbf{y})\} = \delta_J^I \delta^{D-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \{A_a^I(\mathbf{x}), E_b^J(\mathbf{y})\} = \delta_J^I \delta_a^b \delta^{D-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

O critério de estabilidade dos vínculos conduz a vínculos secundários,

$$\dot{P}_I^t(\mathbf{x}) = \{P_I^t(\mathbf{x}), H\} = \frac{1}{2} (\partial_a E_I^a + f_{IJ}{}^K A_a^J E_K^a)(\mathbf{x}) \approx 0.$$

Reconhecemos neste novo vínculo a versão não Abelina da lei de Gauss no vácuo,

$$\mathcal{G}_I(\mathbf{x}) \equiv \partial_a E_I^a + f_{IJ}{}^K A_a^J E_K^a \approx 0. \quad (2.12)$$

Os vínculos de Gauss satisfazem a álgebra

$$\{\mathcal{G}_I(\mathbf{x}), \mathcal{G}_J(\mathbf{x}')\} = \delta^{D-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') f_{IJ}{}^K \mathcal{G}_K(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

onde $f_{IJ}{}^K$ são as constantes de estrutura do grupo introduzidas em (2.8).

Antes de continuar, é conveniente introduzir a versão “ponderada” (ou *smeared*) dos vínculos (2.10), (2.12), definidos como

$$P^t(\eta) \equiv \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1}x \eta^I(\mathbf{x}), \quad \mathcal{G}(\eta) \equiv \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1}x \eta^I G_I(\mathbf{x}).$$

Com esta definição a álgebra dos vínculos de Gauss se escreve

$$\{\mathcal{G}(\eta), \mathcal{G}(\eta')\} = \mathcal{G}(\eta \times \eta') \quad (\text{onde } (\eta \times \eta')^I \equiv f^I{}_{JK} \eta^J \eta^K). \quad (2.14)$$

O vínculo de Gauss é estável, pois é possível mostrar que

$$\dot{\mathcal{G}}(\eta) = \{\mathcal{G}(\eta), H_c - \mathcal{G}(A_t) + P^t(\Lambda)\} \approx \{\mathcal{G}(\eta), H_C\} = 0.$$

Em resumo, os vínculos na teoria de YM são $P^t(\eta)$ e $\mathcal{G}(\eta)$, e a análise de estabilidade termina aqui. Passamos agora à classificação dos vínculos.

É evidente que $P^t(\eta)$ comuta consigo mesmo e com o vínculos de Gauss, portanto ele é de primeira classe. O vínculo de Gauss é também de primeira classe, como é verificado da álgebra (2.14). Em conclusão, os vínculos são de primeira classe, e consequentemente estes geram transformações de calibre infinitesimais,

$$\begin{aligned}\delta_{P^t(\eta)} A_t^I &= \{A_t^I, P^t(\eta)\} = \eta^I, \\ \delta_{G(\eta)} A_a^I &= \{A_a^I, \mathcal{G}(\eta)\} = D_a \eta^I, \\ \delta_{G(\eta)} E_I^a &= \{E_I^a, \mathcal{G}(\eta)\} = f_I^J{}_K E_J^a \eta^K,\end{aligned}$$

e todas as outras possibilidades identicamente nulas. Note que as transformações de calibre do campo A_t^I são proporcionais a uma função (teste) completamente arbitrária, significa que este campo não carrega graus de liberdade físicos, é um “puro calibre”. O importante de este resultado é que daqui em diante A_t^I será considerado simplesmente como um multiplicador de Lagrange, e o vínculo $P^t(\eta)$ ignorado. Note também que o vínculo de Gauss é responsável de gerar as transformações de calibre tipo Yang–Mills, onde A_a^I se transforma como uma conexão e E_I^a na adjunta (*i.e.* como um vetor).

Os graus de liberdade físicos estão contidos no par conjugado A_a^I e E_J^b , eles representam as coordenadas do espaço de fase cinemático da teoria de Yang–Mills. Não todos os pontos do espaço de fases são físicos, pois ainda temos o vínculo de Gauss restringindo as possíveis configurações dos campos.

Finalmente estamos na possibilidade de descrever a dinâmica da teoria de Yang–Mills através do Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1}x k_{IJ} \delta^{ab} \left(E_a^I E_b^J + B_a^I B_b^J \right) + \frac{1}{2} \mathcal{G}(A_t). \quad (2.15)$$

É instrutivo neste ponto a contagem dos graus de liberdade físicos. Temos o par conjugado (A_a^I, E_J^b) que definem um espaço de fase de dimensão $2 \times d \times (D-1) \times \infty^{D-1}$, sendo d a dimensão do grupo de calibre G e D a dimensão do espaço-tempo. O vínculo de Gauss \mathcal{G}_I têm d componentes, cada componente reduz o espaço de fase em $2 \times \infty^{D-1}$. Portanto a dimensão do espaço de fase se reduz à $2 \times d \times (D-2) \times \infty^{D-1}$. O número de graus de liberdade físicos é a metade da dimensão do espaço de fase, *i.e.* $d \times (D-2) \times \infty^{D-1}$. Por exemplo no caso $D = 4$ temos d fótons se propagando, cada um com 2 graus de liberdade, em cada ponto do espaço.

Em síntese, no formalismo canônico da teoria de YM, o espaço de fase cinemático se define a partir dos campos A_a^I e E_J^b , representando as coordenadas, e que satisfazem os colchetes de Poisson fundamentais

$$\{A_a^I(\mathbf{x}), E_J^b(\mathbf{y})\} = \delta_J^I \delta_a^b \delta^{D-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Além disso o campo A_t^I é simplesmente um multiplicador de Lagrange que multiplica o vínculo de Gauss. Esta estrutura fundamental surgirá de forma recorrente em diferentes contextos, como será visto mais adiante.

2.1.2.3 O caso da gravitação

Nosso objetivo agora é construir a relatividade geral (com ou sem constante cosmológica), da forma mais parecida possível com as teorias de Yang–Mills. A nossa pretensão não é “descobrir” a relatividade geral, mas simplesmente enfatizar sua estreita relação com as teorias de calibre. Este parágrafo segue basicamente [50, 51], os resultados sendo válidos tanto em 2+1 como em 3+1 dimensões.

Com base no parágrafo anterior, consideremos o espaço de fase da teoria de Yang–Mills com grupo de calibre G , assumido como semi-simples mas não necessariamente compacto. No marco do formalismo canônico, A_t é considerado simplesmente como um multiplicador de Lagrange associado com o vínculo de Gauss da teoria. O espaço de fase é gerado pelas componentes espaciais dos campos de calibre, e seus correspondentes momentos canônicos conjugados (campo elétrico de Yang–Mills): \mathcal{A}_a^I e $\tilde{\mathcal{E}}_J^b$, onde a, b, \dots são índices espaciais e I, J, \dots são índices de grupo⁸. Devemos ter o cuidado de respeitar a posição “covariante” ou “contravariante” dos índices de grupo, pois temos aberta a possibilidade de que o grupo seja não compacto, isto é, com uma métrica de Killing não trivial. A estrutura simpléctica dada pelos colchetes de Poisson é a estrutura usual nas teorias de Yang–Mills:

$$\{\mathcal{A}_a^I(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_J^b(\mathbf{x}')\} = \delta_a^b \delta_J^I \delta^{D-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Observe que nesta vez não necessariamente estamos especificando \mathcal{M} como o espaço de Minkowski, portanto $\tilde{\mathcal{E}}_J^b$ deve ser um vetor de densidade de peso $w = 1$ ⁹, motivo pelo qual escrevemos um “til” acima dele. Esta definição garante que a contração de $\tilde{\mathcal{E}}_J^b$ com \mathcal{A}_a^I produza uma densidade escalar que integrada é invariante de difeomorfismos.

Além disso temos o já familiar vínculo de Gauss na forma “ponderada”

$$\mathcal{G}(\lambda) = \int_{\Sigma_{D-1}} d^{D-1}x \lambda^I (\partial_a \tilde{\mathcal{E}}_I^a + f_{IJ}{}^K \mathcal{A}_a^J \tilde{\mathcal{E}}_K^a)(\mathbf{x}) \approx 0, \quad (2.18)$$

onde λ^I é uma função escalar teste. O vínculo de Gauss satisfaz uma álgebra de primeira classe

$$\{\mathcal{G}(\lambda), \mathcal{G}(\lambda')\} = \mathcal{G}(\lambda \times \lambda') \quad (\text{onde } (\lambda \times \lambda')^I = f^I{}_{JK} \lambda^J \lambda^K), \quad (2.19)$$

⁸**Advertência!** Correndo o risco de confundir o leitor, estamos modificando levemente a notação utilizando símbolos caligráficos, isto com a finalidade de homogeneizar nossa notação com as subsequentes seções.

⁹Um tensor densidade, $\tilde{t}^a{}_b$, de “peso” w se transforma sob os difeomorfismos da seguinte forma

$$(\mathcal{L}\tilde{t})^a{}_b = \xi^c \partial_c \tilde{t}^a{}_b - \partial_c \xi^a \tilde{t}^c{}_b + \partial_b \xi^c \tilde{t}^a{}_c + w(\partial_c \xi^c) \tilde{t}^a{}_b, \quad (2.16)$$

onde \mathcal{L}_ξ é a derivada de Lie ao longo do vetor ξ . Se ϕ é um escalar densidade de peso $w = 1$, esta fórmula se escreve

$$\mathcal{L}_\xi \tilde{\phi} = \xi^c \partial_c \phi + (\partial_c \xi^c) \phi = \partial_c (\xi^c \phi). \quad (2.17)$$

Daqui se verifica que a integral de um escalar de densidade de peso 1 é invariante sob difeomorfismos.

e gera transformações de calibre infinitesimais nos campos \mathcal{A}_a^I e $\tilde{\mathcal{E}}_J^b$:

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \mathcal{A}_a^I &= \{\mathcal{A}_a^I, \mathcal{G}(\lambda)\} = D_a \lambda^I \\ \delta_\lambda \tilde{\mathcal{E}}_I^a &= \{\tilde{\mathcal{E}}_I^a, \mathcal{G}(\lambda)\} = f_I^J{}_K \tilde{\mathcal{E}}_J^a \lambda^K\end{aligned}\quad (2.20)$$

Tudo isto define o espaço de fase cinemático clássico de uma teoria tipo Yang–Mills. A diferença com a gravitação é na dinâmica contida no Hamiltoniano. Seguidamente então se constrói o Hamiltoniano da gravitação. A discussão se baseia principalmente nos trabalhos de [50, 51].

Os princípios fundamentais que servem de guia na construção do Hamiltoniano da gravitação são 1) a invariância de difeomorfismos e 2) a independência de fundo. No contexto de uma teoria de calibre a invariância de difeomorfismos é interpretada como invariância de calibre. Mas então, sendo que o Hamiltoniano determina a evolução temporal do sistema, a mesma que nas teorias relativistas é equivalente a difeomorfismos temporais, concluímos que a evolução temporal é puramente de calibre! A moral da história é que o Hamiltoniano deve ser completamente vinculado. O segundo princípio, a independência de fundo, essencialmente indica que na construção do Hamiltoniano está categoricamente proibida qualquer estrutura de fundo, como por exemplo uma métrica não dinâmica¹⁰. Em suma, buscamos um Hamiltoniano puramente vinculado construído unicamente a partir dos campos \mathcal{A}_a^I e $\tilde{\mathcal{E}}_J^b$ sem invocar métrica de fundo alguma.

As transformações de calibre tipo Yang–Mills são geradas pelo o vínculo de Gauss (2.18) que satisfaz a álgebra (2.19) e gera as transformações (2.20). Para gerar os difeomorfismos, precisamos de D vínculos: $D-1$ “vínculos vetoriais”, os responsáveis de gerar difeomorfismos sobre as folhas espaciais¹¹ Σ , e um “vínculo escalar” que desloque estas folhas na direção temporal.

Começamos por construir os vínculos espaciais. Eles devem gerar as transformações

$$\begin{aligned}\delta_\xi \mathcal{A}_a^I &= (\mathcal{L}_\xi \mathcal{A})_a^I = \xi^b \partial_b \mathcal{A}_a^I + \partial_a \xi^b \mathcal{A}_b^I, \\ \delta_\xi \tilde{\mathcal{E}}_I^a &= (\mathcal{L}_\xi \tilde{\mathcal{E}})_I^a = \partial_b (\xi^b \tilde{\mathcal{E}}_I^a) - \partial_b \xi^a \tilde{\mathcal{E}}_I^b,\end{aligned}$$

ser construídos apenas a partir de \mathcal{A}_a^I e $\tilde{\mathcal{E}}_J^b$, e ser invariante de calibre de Yang–Mills. Além disso deve ter um índice espacial livre, pois este se deve contrair com um vetor N^a (o parâmetro infinitesimal dos difeomorfismos espaciais). O “vetor” de Poynting

$$V_a = \tilde{\mathcal{E}}_I^b \mathcal{F}_{ab}^I \approx 0, \quad (2.21)$$

¹⁰Novamente enfatizamos que o nosso objetivo é mostrar a relação entre a teoria de YM e a gravitação. É possível incluir uma métrica de fundo dinâmica, mas neste caso também devemos introduzir uma ação que descreva a dinâmica desta métrica. O resultado é então uma teoria de YM acoplada com uma teoria da gravitação.

¹¹Dado que \mathcal{M}_D tem a topologia $\Sigma_{D-1} \times \mathbb{R}$, uma foliação significa definir hipersuperfícies parametrizadas Σ_t , $t \in \mathbb{R}$, onde t é uma etiqueta da hipersuperfície e desempenha o papel de “tempo”.

onde $\mathcal{F}_{ab}^I = \partial_a \mathcal{A}_b^I - \partial_b \mathcal{A}_a^I + f^I{}_{JK} \mathcal{A}_a^J \mathcal{A}_b^K$ é o tensor de curvatura de Yang–Mills, preenche todos os requisitos. Para ser exato, o vetor de Poynting gera uma combinação de difeomorfismos espaciais e transformadas de calibre de Yang–Mills:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}_a^I, V(\vec{N})\} &= N^b(\mathbf{x}) \mathcal{F}_{ba}^I(\mathbf{x}), \\ &= \mathcal{L}_{\vec{N}} \mathcal{A}_a^I - \{\mathcal{A}_a^I, \mathcal{G}(N^a \mathcal{A}_a)\}, \\ &= \mathcal{L}_{\vec{N}} \mathcal{A}_a^I \quad (\text{mod. trans. de calibre}), \\ \\ \{\tilde{\mathcal{E}}_I^a, V(\vec{N})\} &= D_b(N^b \tilde{\mathcal{E}}_I^a) - D_b(N^a \tilde{\mathcal{E}}_I^b), \\ &= \partial_b(N^b \tilde{\mathcal{E}}_I^a) + f_{IJ}{}^K(N^b \mathcal{A}_b^J) \tilde{\mathcal{E}}_K^a - \partial_b(N^a \tilde{\mathcal{E}}_I^b) - N^a f_{IJ}{}^K \mathcal{A}_b^J \tilde{\mathcal{E}}_K^b, \\ &= \mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{\mathcal{E}}_I^a - \{\tilde{\mathcal{E}}_I^a, \mathcal{G}(N^a \mathcal{A}_a)\} - N^a \mathcal{G}_I, \\ &\approx \mathcal{L}_{\vec{N}} \tilde{\mathcal{E}}_I^a \quad (\text{mod. trans. de calibre}), \end{aligned}$$

onde $N^a \mathcal{A}_a^I$ é um parâmetro infinitesimal da transformação de calibre tipo Yang–Mills¹².

Para a construção do vínculo escalar especializamos o caso $D = 4$. O vínculo deve ser invariante de calibre tipo Yang–Mills e de difeomorfismos espaciais. Temos duas possibilidades (sem recorrer a teorias com derivadas superiores) de saturar todos os índices espaciais, uma delas é $\tilde{\mathcal{E}}^a \tilde{\mathcal{E}}^b \mathcal{F}_{ab}$, a outra é $\varepsilon_{abc} \tilde{\mathcal{E}}^a \tilde{\mathcal{E}}^b \tilde{\mathcal{E}}^c$, onde ε_{abc} é o tensor densidade de peso -1 completamente antissimétrico definido por $\varepsilon_{123} = 1$. A invariância de calibre de Yang–Mills se garante simplesmente saturando os índices de grupo com as constantes de estrutura. Assim o vínculo escalar se escreve:

$$H = \int_{\Sigma_3} d^3x \left(\frac{1}{2} f^{IJ}{}_{K} \tilde{\mathcal{E}}_I^a \tilde{\mathcal{E}}_J^b \mathcal{F}_{ab}^K + \frac{\Lambda}{3} f^{IJK} \varepsilon_{abc} \tilde{\mathcal{E}}_I^a \tilde{\mathcal{E}}_J^b \tilde{\mathcal{E}}_K^c \right) \approx 0, \quad (2.23)$$

onde Λ é uma constante de acoplamento arbitrária¹³.

O Hamiltoniano total é definido como a soma de todos os vínculos da teoria

$$H_T = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_3} d^3x (\lambda^I \mathcal{G}_I + N^a V_a + NH) = \int_{\mathbb{R}} dt (\mathcal{G}(\lambda) + V(\vec{N}) + H(N)),$$

¹²Um vínculo que somente gera difeomorfismos espaciais se define como

$$V'(\vec{N}) = N^a V_a + \mathcal{G}(N^a \mathcal{A}_a) = N^a (\tilde{\mathcal{E}}_I^b \mathcal{F}_{ab}^I - \mathcal{A}_a^I D_b \tilde{\mathcal{E}}_I^b). \quad (2.22)$$

¹³No caso 2+1 dimensional o termo que multiplica Λ é $\eta_{IJ} \tilde{\mathcal{E}}^I \tilde{\mathcal{E}}^J$, onde

$$\tilde{\mathcal{E}}^I \equiv \frac{1}{2} f^{IJK} \tilde{\mathcal{E}}_J^a \tilde{\mathcal{E}}_K^b \varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} f^I{}_{JK} e_a^J e_b^K \varepsilon^{ab}, \quad (2.24)$$

é um vetor no espaço interno e uma densidade escalar de peso 1 no espaço (veja a [seção 2.1.4](#) e [\[52\]](#) para mais detalhes).

onde V_a e H satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned} \{V(\vec{N}), V(\vec{M})\} &= V(\mathcal{L}_{\vec{N}}\vec{M}) + \mathcal{G}(M^a N^b \mathcal{F}_{ab}), \\ \{V(\vec{N}), H(M)\} &= H(\mathcal{L}_N M) + \mathcal{G}_I(MN^a f^{IJ}{}_K \tilde{\mathcal{E}}_J^b \mathcal{F}_{ab}^K), \\ \{H(N), H(M)\} &= - \int_{\Sigma_3} d^3x f^{IJ}{}_K f^{KM}{}_N (N \partial_b M - M \partial_b N) \tilde{\mathcal{E}}_I^a \tilde{\mathcal{E}}_J^b \tilde{\mathcal{E}}_M^c \mathcal{F}_{ac}^N, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Neste ponto devemos fazer vários comentários.

1. O significado do vínculo escalar de momento é obscuro por causa do colchete entre dos vínculos escalares. Não podemos afirmar que a álgebra é fechada sem antes considerar casos específicos. Suponha então o espaço-tempo com $D = 3 + 1$, e $SU(2)$ como grupo de calibre tipo Yang-Mills. A métrica de Killing para este grupo é $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ e as constantes de estrutura são $f_{IJK} \equiv \epsilon_{ijk}$, com $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ os índices de grupo. Substituindo isto na álgebra (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} \{V(\vec{N}), V(\vec{M})\} &= V(\mathcal{L}_{\vec{N}}\vec{M}) + \mathcal{G}(M^a N^b \mathcal{F}_{ab}) \\ \{V(\vec{N}), H(M)\} &= H(\mathcal{L}_N M) + \mathcal{G}_I(MN^a \epsilon^{ij}{}_k \tilde{\mathcal{E}}_j^b \mathcal{F}_{ab}^k) \\ \{H[N], H[M]\} &= -V(\vec{K}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde $K^a(\vec{\mathcal{E}}) \equiv (N \partial_b M - M \partial_b N) q^{ab}$, e intruzimos $q^{ab} \equiv (\det \tilde{\mathcal{E}})^{-1} \delta^{ij} \tilde{\mathcal{E}}_i^a \tilde{\mathcal{E}}_j^b$ definida como a “métrica” do espaço. Vemos que neste caso a álgebra dos vínculos fecha, mas com a particularidade que o colchete de Poisson entre os vínculos escalares contém funções de estrutura em lugar de constantes de estrutura. A interpretação geométrica de $\tilde{\mathcal{E}}_i^a$ é revelada: são as componentes de uma “tríada” espacial. A simetria tipo Yang-Mills se interpreta com rotações locais da tríada no espaço tangente. A álgebra acima obtida, com o sinal “-” no termo $-V(\vec{K})$ que resulta do colchete entre dois vínculos escalares, corresponde à “gravitação Riemanniana” (os detalhes na [seção 2.1.3](#)).

2. Se nosso objetivo é o caso mais realista da gravitação Lorentziana, então o colchete de Poisson entre os vínculos escalares deve ter o sinal oposto (*i.e.* $+V(\vec{K})$)¹⁴. Uma forma de mudar o sinal em (2.26) consiste em manter o grupo de calibre $SU(2)$, mas complexificar a conexão, de tal modo que o colchete de Poisson fundamental adquira um fator i em frente:

$$\{\mathcal{A}_a^i(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_j^b(\mathbf{y})\} = i \delta_a^b \delta_j^i \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.27)$$

Em princípio a complexificação duplica o número de graus de liberdade da conexão, mas isto não é o caso na gravitação, pois surge um vínculo: a conexão resultante é “auto-dual”. Este resultado longe de ser trivial, foi descoberto por

¹⁴Vamos a justificar isso na [seção 2.1.3](#), por enquanto simplesmente queremos entender a relação entre a gravitação e as teorias de calibre.

A. Ashtekar [34] baseado numa ideia prévia de A. Sen [53]. O formalismo da gravitação complexificada nas variáveis $(\mathcal{A}_a^i, \tilde{\mathcal{E}}_b^j)$ é conhecida como Formalismo das Variáveis de Ashtekar. Apesar de estas variáveis simplificarem drasticamente os vínculos da teoria, são pouco práticas na quantização (no momento de recobrar os graus de liberdade reais).

3. É possível fazer uma extensão analítica das variáveis de Ashtekar e introduzir uma conexão real a fim de vencer as dificuldades de trabalhar com uma teoria complexificada. A ideia é substituir i por um parâmetro arbitrário γ , conhecido na literatura como parâmetro de Barbero–Immirzi [29, 30]. Infelizmente a elegância e simplicidade original dos vínculos na formulação de Ashtekar é destruída. Este formalismo, que será desenvolvido detalhadamente na seção 2.1.3, é conhecido como Formalismo das Variáveis de Ashtekar–Barbero.
4. Consideramos agora o caso da gravitação $D = 2 + 1$ e $\text{SO}(2, 1)$ o grupo de calibre tipo Yang–Mills. Neste caso a métrica de Killing é $\eta_{IJ} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ e as constantes de estrutura são $f_{IJK} \equiv \epsilon_{IJK}$, com índices $I, J, K, \dots = 0, 1, 2$. Então a relação

$$\epsilon^{IJ} \epsilon_{KM} \epsilon^N = -(\eta^{IM} \eta_N^J - \eta_N^I \eta^{JM})$$

fornece o sinal trocado nos colchetes (2.25). Novamente a $q^{ab} \equiv (\det \tilde{\mathcal{E}})^{-1} \eta^{IJ} \tilde{\mathcal{E}}_I^a \tilde{\mathcal{E}}_J^b$ como a métrica espacial, mas nesta vez repare que (ao contrário do que acontece em $D = 3 + 1$) $\tilde{\mathcal{E}}_I^a$ não são as componentes de uma “díada” espacial pois $I = 0, 1, 2$ enquanto que $a = 1, 2$. No caso $D = 3 + 1$ a simetria local corresponde a rotações espaciais da tríada, em contraste, no caso $D = 2 + 1$ a simetria local corresponde às transformações de Lorentz ou rotações espaço-temporais. A conexão é real, mas o grupo não compacto. Isto tem um impacto negativo no momento de quantizar a teoria, como vamos explicar mais em diante. Esta formulação é a extensão do formalismo de Ashtekar no caso 2+1 dimensional (veja por exemplo [50] e as referências ali).

5. Não existe até agora uma formulação da gravitação 2+1 Lorentziana que introduza uma conexão análoga à conexão de Ashtekar–Barbero em 3+1 dimensões, *i.e.* real e definida sobre um grupo compacto.
6. Continuamos com a gravitação $D = 2 + 1$. Por que não considerar uma díada tipo $\tilde{\mathcal{E}}_i^a$ com $i = 1, 2$ e $a = 1, 2$? Parece uma escolha natural, pois neste caso a simetria local é descrita pelo grupo Abelian $\text{SU}(1)$, que corresponde à rotação espacial local da díada. O problema com esta proposta é que uma conexão espacial $\text{SU}(1)$ só tem duas componentes: \mathcal{A}_a , $a = 1, 2$, enquanto que a díada tem 4 componentes. Então, existe uma incompatibilidade entre o número de componentes, a conexão não possui termos suficientes para formar um par canonicamente conjugado com a díada.

7. A generalização deste argumento para outras dimensões é o seguinte [40]. Seja o espaço-tempo de dimensão D , com grupo de calibre $SO(D,1)$. Uma $(D-1)$ -ada \tilde{E}_i^a tem $(D-1)^2$ componentes, enquanto que uma conexão $SO(D,1)$ \mathcal{A}_a^{ij} tem $\frac{1}{2}(D-1)^2(D-2)$ componentes. Portanto a diferença entre o número de componentes é $\frac{1}{2}(D-1)^2(D-4)$. Notamos que o número mágico é $D=4$. No caso $D=3$ obtemos o número -2 , que nos diz que a conexão tem 2 componentes a menos que a díada. No caso $D=5$ obtemos 4 que nos diz que a conexão tem 4 componentes a mais que a tetrada. No trabalho [40] os autores propõem “novas variáveis” em D -dimensões com o fim de generalizar o formalismo original de Ashtekar.

2.1.3 Variáveis de Ashtekar–Barbero da gravitação em 4D

A introdução das variáveis de Ashtekar no formalismo canônico da gravitação em 4D [34] se deu um passo importante na simplificação dos vínculos. A simplificação foi graças à introdução de um espaço de fase complexo, mas que se tornou problemático no momento de impor as condições de realidade. Uma densidade lagrangiana auto-dual correspondente ao Hamiltoniano de Ashtekar foi dada de maneira independente por Samuel [36] e por Jacobson e Smolin [37]. Foi então que Barbero (e independentemente Immirzi) apontaram [29, 30] a possibilidade de se ter uma realização real das variáveis canônicas intimamente relacionadas com as de Ashtekar, mas o preço a ser pago é a introdução de um parâmetro real/complexo γ , conhecido como o parâmetro de Barbero–Immirzi, totalmente arbitrário no nível clássico, mas correspondendo a diferentes setores na teoria quântica. Aliás, a simplicidade do Hamiltoniano de Ashtekar é destruído. Finalmente Holst introduz [38] a ação mais geral reunindo todos os casos prévios, que contém um termo topológico (*on-shell*) acoplado através do parâmetro γ . A teoria é interpretada então como uma classe de ações para a gravitação classicamente indistinguíveis mas inequivalente no setor quântico. Apesar da introdução das variáveis de Ashtekar caber naturalmente na gravitação em $D=2+1$, permanece até agora desconhecido se existe um conexão real do tipo Ashtekar–Barbero definida sob um grupo compacto, e.g. $SU(2)$.

Uma estratégia usual para obter o Hamiltoniano de Ashtekar–Barbero começa com o espaço de fase do formalismo canônico ADM da gravitação, as variáveis da Ashtekar–Barbero são obtidas através de uma transformação canônica [32] que contém o parâmetro arbitrário γ . Uma outra alternativa parte diretamente da ação com o termo topológico de Holst no calibre temporal (pode consultar por exemplo [11]). Uma abordagem mais nova¹⁵ é a formulação da gravitação em 4D como uma teoria topológica tipo BF com “vínculos de simplicidade”. Os vínculos de simplicidade têm a tarefa de trazer de volta os graus de liberdade físicos da gravitação ausentes na teoria topológica BF. Esta abordagem é também o ponto de partida no formalismo de “espumas de spin” [9].

¹⁵Na verdade trata-se de uma ideia que se remonta a um trabalho de J. Plebanski de 1977 [54], mas veja também a nota histórica em [55].

Vamos deduzir agora o formalismo canônico das variáveis de Ashtekar–Barbero da gravitação em $D = 3 + 1$. A apresentação é um pouco diferente da abordagem apresentada nas referências padrão. Optamos por um esquema e notação respaldados fortemente nas formas diferenciais, adaptados de tal forma que a extensão para a teoria de Chern–Simons em 3D é direta.

Considere a ação de Palatini–Holst [38] numa variedade 4-dimensional \mathcal{M}_4 (com índices internos I, J, K , variando de 0 a 3),

$$\begin{aligned} S_{\text{PH}} &= S_1 - \frac{1}{\gamma} S_2, \quad \text{onde} \\ S_1 &= \int_{\mathcal{M}_4} \frac{1}{4} \epsilon_{IJKL} e^I e^J R^{KL}, \quad S_2 = \int_{\mathcal{M}_4} \frac{1}{4} \delta_{IJKL} e^I e^J R^{KL}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

e onde R^{IJ} é a curvatura da conexão de spin definida como

$$R^{IJ} \equiv d\omega^{IJ} - \omega^I_K \omega^{KJ},$$

ϵ_{IJKL} é o tensor completamente antissimétrico de Levi–Civita com $\epsilon_{0123} \equiv 1$, e

$$\delta_{IJKL} \equiv \delta_{IK} \delta_{JL} - \delta_{IL} \delta_{JK}. \quad (2.29)$$

Os índices de grupo são abaixados e levantados com a métrica $\eta = \text{diag}(\sigma, 1, 1, 1)$, onde $\sigma = \pm 1$ é um parâmetro que permite considerar os casos Lorentziano e Riemanniano de forma conjunta. Esta ação é invariante sob as transformações de calibre $\text{SO}(3, 1)$ ($\text{SO}(4)$ no caso $\sigma = 1$) definidas na (2.4). O termo S_1 corresponde à ação de Einstein–Palatini no formalismo dos *vielbein*, S_2 é o termo de Holst que é um termo topológico *on-shell*.

O termo de Holst está relacionado com a 4-forma de Nieh–Yan (veja por exemplo [45]) que é um termo topológico definido como

$$N_4 = \eta_{IJ} T^I T^J - \delta_{IJKL} e^I e^J R^{KL} = d(\eta_{IJ} e^I T^J), \quad (2.30)$$

onde

$$T^I \equiv de^I - \omega^I_J e^J = De^I \quad (2.31)$$

é definida como a torção. Se $T = 0$, o lado direito na (2.30) é nulo o que implica que $N_4 = 0$. Para isto ter sentido $\delta_{IJKL} e^I e^J R^{KL}$ (o termo de Holst) deve ser identicamente nulo também. Certamente, se $T = 0$, ω é compatível com a tríada, portanto $R_{\mu\nu\alpha\beta} = e_{\mu K} e_{\nu L} R^{KL}{}_{\alpha\beta}$ é o tensor de Riemann que satisfaz a identidade de Bianchi

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0.$$

Usando esta identidade no termo de Holst obtemos o resultado esperado, *i.e.*

$$\delta_{IJKL} e^I e^J R^{KL} = e_{I\alpha} e_{J\beta} R^{IJ}{}_{\mu\nu}(e) \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} d^4x = R_{\alpha\beta\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = 0.$$

Daqui se diz que o termo de Holst é topológico *on-shell* ou “quase topológico”.

Não é necessário impor a condição de torção nula, pois ela surge como uma das equações de campo no caso da gravitação pura, como se verifica da variação da ação (2.28) com respeito de ω :

$$\begin{aligned} \delta_\omega S_{\text{PH}} &= e^I T^J \left(\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} - \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) \delta \omega^{KL}, \\ \Rightarrow 0 &= \left(\frac{1}{2} \epsilon_{IJKL} - \frac{1}{2\gamma} \delta_{IJKL} \right) e^I T^J \equiv P_{IJKL} e^I T^J, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\Rightarrow T^J = 0, \quad (2.33)$$

onde P (e sua inversa) são definidos como

$$P_{IJKL} \equiv \frac{1}{2} (\epsilon_{IJKL} - \frac{1}{\gamma} \delta_{IJKL}) \rightarrow (P^{-1})^{IJKL} = \frac{\sigma \gamma^2}{2(\gamma^2 - \sigma)} (\epsilon^{IJKL} + \frac{1}{\gamma} \delta^{IJKL}). \quad (2.34)$$

(com δ_{IJKL} dado na (2.29)). Substituindo $T = 0$ na ação de Palatini–Holst (2.28), o termo de Holst se anula identicamente resultando simplesmente na ação de Hilbert–Einstein, mostrando assim que as duas teorias são equivalentes desde que conduzam as mesmas equações de campo. Note que (conforme (2.34)) isto é verdade sempre que $\gamma^2 \neq \sigma$.

Com a certeza que a ação de Holst descreve a teoria correta, procedemos a desenvolver o formalismo canônico. A nossa estratégia inicia com a definição da 2-forma

$$E^{IJ} \equiv e^I e^J,$$

que é antissimétrico nos índices de grupo: $E^{IJ} = -E^{JI}$. Com esta definição a ação (2.28) se escreve esquematicamente com termos proporcionas a “ E vezes R ”, isto é, fica na forma $\sim \text{Tr}(BF)$. Uma ação deste tipo corresponde à teoria topológica BF [56], mas repare que a gravitação em 3+1 dimensões não é topológica! A solução disso é que na gravitação $E = E(e)$ é um campo composto pelo *vielbein*, enquanto que numa teoria BF o campo B é uma 2-forma geral, não necessariamente relacionado com os *vielbein*. Para construir a gravitação a partir de uma teoria tipo BF é preciso acrescentar “vínculos de simplicidade” (veja por exemplo [8]) que reduzem alguns dos graus de liberdade topológicos na teoria BF de tal forma que a teoria reduzida contém graus de liberdade físicos. Não vamos seguir esse caminho pois não queremos lidar com vínculos de simplicidade, ao invés disso simplesmente consideramos E^{IJ} como uma notação abreviada de $e^I e^J$.

Com esta clarificação, o seguinte passo é separar o setor não compacto dos campos (*i.e.* aquele associado aos *boosts*). Para isso note que é possível decompor os campos em componentes tipo *boosts* e tipo rotações (no que segue fazemos $\epsilon_{ijk} \equiv \epsilon_{0ijk}$, consequentemente $\epsilon_{123} = 1$):

$$\omega^{IJ} : \begin{cases} A^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega^{jk} \\ B^i \equiv \omega^{0i} \end{cases}, \quad E^{IJ} : \begin{cases} E_A^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e^i e^j \\ E_B^i \equiv e^0 e^i \end{cases}.$$

Então temos que a curvatura se decompõe como

$$R^{IJ} : \begin{cases} R_A^i = F_A^i + \frac{\sigma}{2}\epsilon_{ijk}B^jB^k & , \text{ onde } F_A^i = dA^i + \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}A^jA^k \\ R_B^i = D_A B^i & , \text{ onde } D_A B^i = dB^i + \epsilon_{ijk}A^jB^k \end{cases} .$$

Note que em todas estas fórmulas os índices latinos da metade do alfabeto são definidos como $i, j, k \dots = 1, 2, 3$. Neste caso a métrica é simplesmente $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, portanto não fazemos distinção alguma entre índices contravariantes e covariantes do grupo. No que segue utilizaremos uma notação vetorial na qual $A \cdot B = \delta^{ij}A^iB^j$, $(A \times B)_i = \epsilon_{ijk}A^jB^k$, etc, de modo que expressões anteriores são reescritas como

$$E^{IJ} : \begin{cases} E_A \equiv \frac{1}{2}e \times e \\ E_B \equiv e^0 e \end{cases} , \quad (2.35)$$

$$R^{IJ} : \begin{cases} R_A = F_A + \frac{\sigma}{2}B \times B & , \text{ onde } F_A^i = dA + \frac{1}{2}A \times A \\ R_B^i = D_A B & , \text{ onde } D_A B = dB + A \times B \end{cases} . \quad (2.36)$$

Repare que estes objetos ainda carregam a natureza de n -formas. Por dar um exemplo, escrevemos explicitamente

$$\begin{aligned} R_A^i &= \frac{1}{2}(F_A + \frac{\sigma}{2}B \times B)_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu, \\ &= \frac{1}{2}(dA + \frac{1}{2}A \times A + \frac{\sigma}{2}B \times B)_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu, \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + \epsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k + \frac{\sigma}{2}\epsilon_{ijk}B_\mu^j B_\nu^k)dx^\mu dx^\nu. \end{aligned}$$

Podemos apreciar neste exemplo a conveniência dessa notação vetorial¹⁶.

Após essas considerações, reescrevemos os dois termos que compõem a ação de Palatini–Holst (2.28)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\epsilon_{IJKL}E^{IJ}R^{KL} &= E_A \cdot R_B + E_B \cdot R_A \equiv \langle E, R \rangle_1, \\ \frac{1}{4}\delta_{IJKL}E^{IJ}R^{KL} &= \sigma E_B \cdot R_B + E_A \cdot R_A \equiv \langle E, R \rangle_2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Consequentemente a ação total assume a forma

$$S_{\text{PH}} = \int_{\mathcal{M}_4} \langle E, R \rangle_1 - \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{M}_4} \langle E, R \rangle_2, \quad (2.39)$$

¹⁶Deve ser colocado especial cuidado no grau das n -formas diferenciais no momento de comutar termos. Considere como exemplo os seguintes casos,

$$A \times B = B \times A \quad \text{e} \quad E_A \cdot (B \times B) = (B \times B) \cdot E_A, \quad (2.37)$$

onde A, B são 1-formas e E_A é uma 2-forma. No primeiro caso temos o produto exterior de 1-formas, como é sabido as 1-formas anticomutam, mas ao mesmo tempo temos o produto antissimétrico “ \times ”, portanto o resultado final não muda de sinal. No segundo caso temos o produto exterior de duas 2-formas, E_A e $(B \times B)$, que é simétrico, e ao mesmo tempo o produto “ \cdot ” também simétrico, portanto o resultado final não muda de sinal.

onde estamos usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ para denotar os produtos internos invariantes de Lorentz, definidos acima. Continuando com o análise, assumimos agora que o espaço tem a topologia $\mathcal{M} = \Sigma_3 \times \mathbb{R}$, onde Σ_3 representa as folhas de espaço e \mathbb{R} representa o tempo. Na linguagem das formas diferenciais a decomposição é direta, simplesmente temos que escrever uma 1-forma quaisquer, Ω , como a soma (a nossa convenção de índices é $\mu, \nu, \dots = t, a, b, \dots$ com $t = 0$ e $a, b, \dots = 1, 2, 3$)

$$\Omega = \Omega_t dt + \Omega_a dx^a \equiv \Omega_t dt + \mathbf{\Omega}.$$

O primeiro termo é a 1-forma temporal e o segundo (destacado em negrito) é uma 1-forma espacial. Formas de ordem superior se definem de forma análoga. Aplicando esta decomposição nas fórmulas (2.35) e (2.36) os campos se separam da seguinte forma

$$R_A : \begin{cases} R_{At} = d_t \mathbf{A} + \mathbf{D}_A A_t + \sigma \mathbf{B} \times B_t \\ \mathbf{R}_A = \mathbf{F}_A + \frac{\sigma}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \end{cases} \quad E_A : \begin{cases} E_{At} = e_t \times \mathbf{e} \\ \mathbf{E}_A = \frac{1}{2} \mathbf{e} \times \mathbf{e} \end{cases} \quad (2.40)$$

$$R_B : \begin{cases} R_{Bt} = d_t \mathbf{B} + \mathbf{D}_A B_t + \mathbf{B} \times A_t \\ \mathbf{R}_B = d\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \end{cases} \quad E_B : \begin{cases} E_{Bt} = e_t^0 \mathbf{e} - e_t \mathbf{e}^0 \\ \mathbf{E}_B = \mathbf{e}^0 \mathbf{e} \end{cases} \quad (2.41)$$

com $\mathbf{F}_A = d\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{D}_A \equiv d + \mathbf{A} \times \cdot$.

Explicitemos por exemplo o termo R_{At} :

$$\begin{aligned} R_{At}^i &= (d_t \mathbf{A} + \mathbf{D}_A A_t + \sigma \mathbf{B} \times B_t)^i \\ &= (\partial_t A_a - \partial_a A_t + A_t \times A_a + \sigma B_t \times B_a)^i dt dx^a \\ &= (\dot{A}_a^i - \partial_a A_t^i + \epsilon_{ijk} A_t^j A_a^k + \sigma \epsilon_{ijk} B_t^j B_a^k) dt dx^a, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a propriedade anti-comutação $dx^a dt = -dt dx^a$, e escrevemos $\dot{A}_a^i = \partial_t A_a^i$. Um outro termo que poderia resultar confuso é E_{Bt}^i , neste caso temos

$$E_{Bt}^i = (e_t^0 \mathbf{e} - e_t \mathbf{e}^0)^i = (e_t^0 e_a - e_t e_a^0)^i dt dx^a = (e_t^0 e_a^i - e_t^i e_a^0) dt dx^a.$$

Substituindo (2.40) e (2.41) em (2.39) e após algumas manipulações algébricas é possível mostrar que a ação adquire a seguinte forma:

$$S_{\text{PH}} = \int_{\mathbb{R}} dt (\mathcal{L}_{\text{cin}} + \mathcal{G}(A_t) + \mathcal{G}_0(B_t) + V(E_{At}) + H(E_{Bt})), \quad (2.42)$$

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} \equiv \int_{\Sigma_3} \left((-\dot{\mathbf{B}} + \frac{1}{\gamma} \dot{\mathbf{A}}) \cdot \mathbf{E}_A + (-\dot{\mathbf{A}} + \frac{\sigma}{\gamma} \dot{\mathbf{B}}) \cdot \mathbf{E}_B \right),$$

$$\mathcal{G}(A_t) \equiv \int_{\Sigma_3} A_t \cdot \left(\mathbf{D}_A \mathbf{E}_B - \mathbf{E}_A \times \mathbf{B} - \frac{1}{\gamma} (\mathbf{D}_A \mathbf{E}_A - \sigma \mathbf{E}_B \times \mathbf{B}) \right), \quad (2.43)$$

$$\mathcal{G}_0(B_t) \equiv \int_{\Sigma_3} B_t \cdot \left(\mathbf{D}_A \mathbf{E}_A - \sigma \mathbf{E}_B \times \mathbf{B} - \frac{\sigma}{\gamma} (\mathbf{D}_A \mathbf{E}_B - \mathbf{E}_A \times \mathbf{B}) \right), \quad (2.44)$$

$$V(E_{At}) \equiv \int_{\Sigma_3} E_{At} \cdot \left(\mathbf{d}\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} - \frac{1}{\gamma} (\mathbf{F}_A + \frac{\sigma}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{B}) \right), \quad (2.45)$$

$$H(E_{Bt}) \equiv \int_{\Sigma_3} E_{Bt} \cdot \left(\mathbf{F}_A + \frac{\sigma}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \frac{\sigma}{\gamma} (\mathbf{d}\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}) \right). \quad (2.46)$$

Repare agora que a forma dos termos cinéticos sugerem uma redefinição das variáveis. Introduzimos assim as variáveis caligráficas

$$\begin{aligned} (A_t, B_t) &\rightarrow (\mathcal{A}_t, B_t) \equiv (A_t - \gamma B_t, B_t), \\ (\mathbf{A}, \mathbf{B}) &\rightarrow (\mathcal{A}, \mathbf{B}) \equiv (\mathbf{A} - \gamma \mathbf{B}, \mathbf{B}), \\ (\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B) &\rightarrow (\mathcal{E}, \mathbf{E}) \equiv (\mathbf{E}_A - \gamma \mathbf{E}_B, \mathbf{E}_B). \end{aligned}$$

Com esta substituição (e após definir os correspondentes \mathcal{F}_A , \mathbf{D}_A como já é de costume) obtemos uma simplificação razoável como se evidencia aqui:

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} \left(\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{E} + (\sigma - \gamma^2) \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (2.47)$$

$$\mathcal{G}(A_t) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} \mathcal{A}_t \cdot \left(\mathbf{D}_A \mathcal{E} + (\sigma - \gamma^2) \mathbf{B} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.48)$$

$$\mathcal{G}_0(B_t) = -\frac{\sigma - \gamma^2}{\gamma} \int_{\Sigma_3} B_t \cdot \left(\mathbf{D}_A \mathbf{E} + \mathbf{B} \times \mathcal{E} + 2\gamma \mathbf{B} \times \mathbf{E} \right) \quad (2.49)$$

$$V(E_{At}) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} E_{At} \cdot \left(\mathcal{F}_A + \frac{1}{2} (\sigma - \gamma^2) \mathbf{B} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.50)$$

$$H(E_{Bt}) = \int_{\Sigma_3} E_{Bt} \cdot \left(\mathcal{F}_A - \frac{\sigma - \gamma^2}{\gamma} \mathbf{D}_A \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\sigma - \gamma^2) \mathbf{B} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.51)$$

Até agora a teoria é bastante complicada, as variáveis canônicas que servem de coordenadas no espaço de fase se determina diretamente do termo cinético: onde se reconhece facilmente a presença dos pares conjugados $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$, (\mathbf{B}, \mathbf{E}) , que em total coordenam, em cada ponto \mathbf{x} da folha espacial, um espaço de fase (cinemático) de 36 dimensões!

Repare que a escolha $\sigma = \gamma^2$ simplificaria os vínculos dramaticamente:

$$\begin{aligned} S_{\text{PH}} &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_3} \left(\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{E} - \mathcal{A}_t \cdot \mathbf{D}_A \mathcal{E} - E_{At} \cdot \mathcal{F}_A + \gamma E_{Bt} \cdot \mathcal{F}_A \right), \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_3} \left(\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{E} - \mathcal{A}_t \cdot \mathbf{D}_A \mathcal{E} - \mathcal{E}_t \cdot \mathcal{F}_A \right) \quad (\text{onde } \mathcal{E}_t \equiv E_{At} - \gamma E_{Bt}). \end{aligned} \quad (2.52)$$

O caso Lorentziano $\sigma = -1$ implica $\gamma = i$, que corresponde a uma descrição complexificada da gravitação (note que na segunda linha acima, todas os campos, inclusive os multiplicadores de Lagrange, são complexos). O caso Riemanniano $\sigma = 1$

implica $\gamma = 1$, e todos os campos são reais. Reconhecemos de imediato a presença de um vínculo (complexificado) de Gauss, $\mathbf{D}_A \mathcal{E}$, usual nas teorias de Yang–Mills conforme o exposto na [seção 2.1.2.2](#). O segundo vínculo, multiplicado por \mathcal{E}_t , diz que a conexão é de curvatura nula. O termo cinético e os vínculos de Gauss e de curvatura nula são característicos nas teorias BF, porém note que neste caso existem vínculos de realidade implícitos. O problema com os vínculos de realidade é a dificuldade de implementá-los no nível quântico (não há geradores associados com estes vínculos).

Se queremos evitar as complicações de trabalhar com variáveis complexas, devemos considerar estritamente $\gamma^2 \neq \sigma$. Neste caso, uma possibilidade de simplificar os vínculos consiste em impor o calibre temporal [\[32\]](#)

$$e_a^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{i.e. } \mathbf{e}^0 = 0).$$

Além disso, definimos também as funções de *lapse* e *shift* como

$$N \equiv e_t^0, \quad e_t^i \equiv N^a e_a^i.$$

Com tudo isto, vemos de [\(2.40\)](#) e [\(2.41\)](#) que

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_B^i = (\mathbf{e}^0 \mathbf{e})^i = e_{[a}^0 e_{b]}^i dx^a dx^b = 0,$$

e portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^i &= A^i - \gamma B^i = (A_a^i - \gamma B_a^i) dx^a, \\ \mathcal{E}^i &= \frac{1}{2} (\mathbf{e} \times \mathbf{e})^i = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{ab}^i dx^a dx^b = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_a^j e_b^k dx^a dx^b, \\ E_{At}^i &= N^a (e_a \times \mathbf{e})^i = \epsilon_{ijk} N^b e_b^j e_a^k dx^a, \\ E_{Bt}^i &= N \mathbf{e}^i = N e_a^i dx^a. \end{aligned}$$

Observamos que no calibre temporal o termo cinético $\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{E}$ desaparece, ficando simplesmente o termo $\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{E}$ que em forma explícita se escreve

$$\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{2} \dot{\mathcal{A}}_a^i \mathcal{E}_{bc}^i \epsilon^{abc} d^3x = \dot{\mathcal{A}}_a^i \tilde{\mathcal{E}}_i^a d^3x, \quad (2.53)$$

$$\text{onde } \tilde{\mathcal{E}}_i^a \equiv \frac{1}{2} \delta_{ij} \epsilon^{abc} \mathcal{E}_{bc}^j = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} (e_b \times e_c)_i, \quad (2.54)$$

tendo um fator ϵ^{abc} , se comporta como um vetor densidade de peso -1 sob as transformações gerais de coordenadas. Adotamos como variáveis fundamentais os campos $(\mathcal{A}_a^i, \tilde{\mathcal{E}}_j^b)$. A estrutura simpléctica do espaço de fase definida pelos colchetes de Poisson é

$$\{\mathcal{A}_a^i(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_j^b(\mathbf{x}')\} = \gamma \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.55)$$

que se deduz examinando o termo cinético [\(2.53\)](#) em [\(2.52\)](#).

Antes de escrever os vínculos em termos das novas variáveis precisamos escrever e_a^i em termos de $\tilde{\mathcal{E}}^a$, o resultado é

$$e_a^i = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}} \varepsilon_{abc} (\tilde{\mathcal{E}}^b \times \tilde{\mathcal{E}}^c)^i = \frac{1}{2\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}} \varepsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{\mathcal{E}}_j^b \tilde{\mathcal{E}}_k^c. \quad (2.56)$$

Com tudo isto os vínculos (2.48), (2.49), (2.50) e (2.51) se escrevem

$$\mathcal{G}(A_t) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} d^3x \mathcal{A}_t \cdot D_a \tilde{\mathcal{E}}^a, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{G}_0(B_t) = \frac{\sigma - \gamma^2}{\gamma} \int_{\Sigma_3} d^3x B_t \cdot B_a \times \tilde{\mathcal{E}}^a, \quad (2.58)$$

$$V(\vec{N}) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} d^3x N^a \tilde{\mathcal{E}}^c \cdot \left(\mathcal{F}_{ac} + \frac{1}{2} (\sigma - \gamma^2) B_a \times B_c \right), \quad (2.59)$$

$$N(N_t) = -\int_{\Sigma_3} d^3x \frac{N}{2\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}} (\tilde{\mathcal{E}}^a \times \tilde{\mathcal{E}}^b) \cdot \left(\mathcal{F}_{ab} - \frac{1}{\gamma} (\sigma - \gamma^2) D_{[a} B_{b]} - (\sigma - \gamma^2) B_a \times B_b \right). \quad (2.60)$$

O interessante de este resultado é que o vínculo $\mathcal{G}_0(B_t)$, originalmente uma equação diferencial nos campos, agora é algébrico: $B_a \times \tilde{\mathcal{E}}^a = 0!$ É razoável resolver este vínculo agora, isto se faz da seguinte forma:

$$0 = B_a \times \tilde{\mathcal{E}}^a = \epsilon_{ijk} B_a^j \tilde{\mathcal{E}}_k^a = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} \epsilon_{klm} B_a^j e_b^l e_c^m. \quad (2.61)$$

Expandindo a forma B_a^j na base do *vielbein* forma, $B_a^j = K^{jn} e_a^n$, e usando a identidade $e \epsilon^{nlm} = \varepsilon^{abc} e_a^n e_b^l e_c^m$, obtemos

$$0 = \frac{1}{2} e K^{jn} \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \epsilon^{nlm} = e K^{jn} \epsilon_{ijn}, \quad (2.62)$$

o que implica que a matriz K é simétrica. Em conclusão, a solução geral é

$$B_a^i = K^{ij} e_a^j, \quad K^{ij} = K^{ji}. \quad (2.63)$$

Repare que $K_{ab} \equiv K^{ij} e_a^i e_b^j$ é também simétrico. Este tensor representa no formalismo métrico a curvatura extrínseca da folha espacial [57].

Note que o segundo termo do vínculo vetorial (2.59) é proporcional ao vínculo algébrico $B_a \times \tilde{\mathcal{E}}^a$, portanto é descartado. Finalmente temos que os vínculos se escrevem

$$\mathcal{G}(A_t) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} d^3x \mathcal{A}_t^i D_a \tilde{\mathcal{E}}_i^a, \quad (2.64)$$

$$V(N) = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Sigma_3} d^3x N^a \tilde{\mathcal{E}}_i^c \mathcal{F}_{ac}^i, \quad (2.65)$$

$$N(N_t) = -\int_{\Sigma_3} d^3x \frac{N}{2\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}} \epsilon_{ijk} \tilde{\mathcal{E}}_j^a \tilde{\mathcal{E}}_k^b \left(\mathcal{F}_{ab}^i - \frac{1}{\gamma} (\sigma - \gamma^2) D_{[a} B_{b]}^i - (\sigma - \gamma^2) \epsilon_{ilm} B_a^l B_b^m \right). \quad (2.66)$$

Desta forma chegamos ao Hamiltoniano de Ashtekar–Barbero. \mathcal{A}_a^i é uma conexão SU(2) real chamada de conexão de Ashtekar–Barbero, $\gamma \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de Barbero–Immirzi.

Fechamos esta seção com alguns comentários importantes.

1. Sendo honestos, não terminamos de contar toda a história. Sendo $\mathbf{E} = 0$ no calibre temporal, o que acontece com seu momento conjugado \mathbf{B} ? A resposta é que este campo não é independente, ele deve ser função dos campos \mathcal{A} e \mathcal{E} . Em termos gerais (veja [58] para uma análise detalhada), a ideia é a seguinte: lembre que tínhamos definido $\mathcal{B} = \mathbf{A} - \gamma\mathbf{B}$, então

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\gamma}\mathbf{A} - \mathcal{A}.$$

Agora, \mathbf{A} não é um campo independente, ele é a conexão compatível com os *vielbein*, o que implica que em princípio é possível escrever $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{e})$ e daqui $\mathcal{A} = \mathbf{A}(\mathcal{E})$. Portanto, o campo $\mathbf{B} = \gamma^{-1}(\mathbf{A}(\mathcal{E}) + \mathcal{A})$ é uma função de \mathcal{E} e \mathcal{A} . O espaço de fase reduzido têm como coordenadas unicamente o par canônico conjugado $(\mathcal{A}_a^i, \tilde{\mathcal{E}}_j^b)$.

2. Voltamos novamente ao caso $\sigma = \gamma^2$, nesta vez no calibre temporal. O vínculo sofre uma simplificação significativa. Neste caso a lagrangiana se escreve

$$L = \frac{1}{\gamma} \int \tilde{\mathcal{E}}_i^a \dot{\mathcal{A}}_a^i - \mathcal{A}_t^i D_a \tilde{\mathcal{E}}_i^a + \frac{1}{\gamma} N^a \tilde{\mathcal{E}}_i^b \mathcal{F}_{ab}^i + \frac{N}{2\sqrt{\mathcal{E}}} \epsilon_{ijk} \tilde{\mathcal{E}}_j^a \tilde{\mathcal{E}}_k^b \mathcal{F}_{ab}^i.$$

Esta ação corresponde à teoria construída na [seção 2.1.2.3](#) por argumentos heurísticos, trata-se do formalismo canônico de Ashtekar da gravitação. Agora podemos esclarecer alguns aspectos que não foram justificados nessa construção. Note que $\gamma^2 = 1$ corresponde à teoria Riemanniana, neste caso a álgebra dos vínculos é dada pelos colchetes (2.25). No caso $\gamma^2 = -1$, a conexão é complexa mas o campo elétrico permanece real (veja sua definição na (2.54)). Então fica claro agora o porquê os colchetes de Poisson (2.55) adquirem um i na frente. Também fica claro como é que a complexificação da conexão conduz à misteriosa troca de sinal nos colchetes de Poisson entre dois vínculos escalares, sugerida heurísticamente.

2.1.4 Variáveis de Ashtekar na gravitação em 3D

Lembre que na seção [seção 2.1.2.3](#) mencionamos sem justificação que o formalismo de Ashtekar cabe naturalmente na gravitação em 3D. Por completude oferecemos neste parágrafo a demonstração formal, contudo, este caso é muito mais simples que o caso em 4D, portanto simplesmente mencionamos os passos mais importantes¹⁷.

¹⁷Mantemos a notação e convenções da seção precedente, com as modificações evidentes no caso em 3D.

O ponto de partida é a ação no formalismo de primeira ordem:

$$S = \int_{\mathcal{M}_3} \epsilon_{IJK} e^I (R^{JK} + \frac{\Lambda}{6} e^J e^K).$$

O grupo de calibre se assume que seja $SO(2, 1)$ (ou $SO(3)$ no caso Riemanniano). Definimos

$$\omega^I \equiv \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} \omega^{JK}, \quad R^I \equiv \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} R^{JK} = d\omega^I + \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} \omega^J \omega^K.$$

Neste modelo não vamos separar os “*boosts*” das “*rotações*”. A justificação será evidente em um momento.

Seguindo com o formalismo canônico fazemos a separação em espaço + tempo:

$$\begin{aligned} e^I &= e_t^I dt + \mathbf{e}^I = e_t^I dt + e_a^I dx^a \\ R^I &= R_t^I dt + \mathbf{R}^I = (\dot{\omega}^I + D\omega_t^I) dt + (d\omega^I + \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} \omega^J \omega^K). \end{aligned}$$

Com tudo isto a ação se escreve

$$S = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} d^2x \eta_{IJ} \left(\dot{\omega}_a^I e_b^J + \omega_t^I D_a e_b^J + \frac{1}{2} e_t^I (R_{ab}^J + \frac{\Lambda}{3} \epsilon^J{}_{KL} e_a^K e_b^L) \right) \varepsilon^{ab}.$$

De modo similar ao caso em 4D, o termo cinético sugere introduzir o vetor de densidade de peso 1 definido como

$$\tilde{\mathcal{E}}_I^a \equiv \eta_{IJ} \varepsilon^{ab} e_b^J \rightarrow e_a^I = \eta^{IJ} \varepsilon_{ab} \tilde{\mathcal{E}}^b.$$

O análogo de $\tilde{\mathcal{E}} \times \tilde{\mathcal{E}}$ é o escalar densidade de “degenerescência” [52]

$$\tilde{\mathcal{E}}^I = \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} \varepsilon^{ab} e_a^J e_b^K = \frac{1}{2} \epsilon^{IJK} \varepsilon_{ab} \tilde{\mathcal{E}}_J^a \tilde{\mathcal{E}}_K^b, \quad (2.67)$$

um escalar densidade de peso 1 no espaço, mas vetor de Lorentz no espaço interno¹⁸. Também é útil definir

$$\tilde{\mathcal{R}}^I = \varepsilon^{ab} R_{ab}^I \rightarrow R_{ab}^I = \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \tilde{\mathcal{R}}^I.$$

Com estas definições a ação se lê

$$S = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} d^2x \left(\dot{\omega}_a^I \tilde{\mathcal{E}}_I^a + \omega_t^I D_a \tilde{\mathcal{E}}_I^a + \frac{1}{2} \eta_{IJ} e_t^I (\tilde{\mathcal{R}}^J + \frac{2\Lambda}{3} \tilde{\mathcal{E}}^J) \right).$$

Se $\tilde{\mathcal{E}}^I$, o escalar de degenerescência, é não nulo (uma suposição natural se queremos ter um termo cosmológico não nulo), sempre é possível fazer a transformação

$$e_t^I \rightarrow (\underline{N}, N^a),$$

¹⁸ ε_{ab} deve ser uma densidade de peso -1 , pois a contração $\varepsilon_{ab} \varepsilon^{ac}$ deve ser um escalar.

onde \underline{N} e N^a são as funções *lapse* e *shift* definidas como

$$e_t^I = N^a e_a^I + \underline{N} \tilde{\mathcal{E}}^I = N^a \eta^{IJ} \varepsilon_{ab} \tilde{\mathcal{E}}_J^b + \underline{N} \tilde{\mathcal{E}}^I.$$

Note que definimos \underline{N} como um escalar de peso -1 para garantir que $\underline{N} \tilde{\mathcal{E}}$ seja um escalar (veja [52] para mais detalhes).

Com tudo isto a ação finalmente se escreve

$$S = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} d^2x \left(\dot{\omega}_a^I \tilde{\mathcal{E}}_I^a + \mathcal{G}(\omega_t) + V(\vec{N}) + H(\underline{N}) \right),$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= D_a \tilde{\mathcal{E}}_I^a, \\ V &= \tilde{\mathcal{E}}_I^b R_{ab}^I, \\ H &= \left(\frac{1}{2} \epsilon^{IJ} {}_K \tilde{\mathcal{E}}_I^a \tilde{\mathcal{E}}_J^b R_{ab}^K + \frac{\Lambda}{3} \eta_{IJ} \tilde{\mathcal{E}}^I \tilde{\mathcal{E}}^J \right), \end{aligned} \quad (2.68)$$

são precisamente os vínculos de Gauss, o vínculo vetorial e o vínculo escalar, respectivamente, construídos na [seção 2.1.2.3](#). Não deixa de ser uma curiosidade que os vínculos tenham a mesma forma que os vínculos na gravitação em 4D. Porém, note que na gravitação em 3D o termo cosmológico é diferente que no caso em 4D (compare (2.68) e (2.23)). Uma diferença importante neste modelo, quando comparado com a gravitação em 4D, é que não separamos o setor não compacto dos campos, associado aos *boost* de Lorentz no grupo. Como consequência, no caso em 3D $\tilde{\mathcal{E}}_a^I$ não é uma “díada” espacial. Assim, o grupo de calibre local não se interpreta geometricamente como rotações espaciais, mas como transformações de Lorentz no grupo $\text{SO}(2,1)$. Pode parecer até vantajoso trabalhar com o grupo de Lorentz, no final de contas, a teoria é no espaço-tempo, mas o problema é que o grupo de Lorentz é não compacto, fato que representa um obstáculo significativo no momento de quantizar a teoria. A discussão sobre a quantização se reserva para a seção dedicada á quantização de laços ([capítulo 4](#) e [capítulo 5](#)).

2.2 Teoria de Chern–Simons

Nesta seção vamos introduzir alguns aspectos gerais da teoria de Chern–Simons. Uma revisão geral desta teoria dificilmente vai fazer justiça a ela pois é muito rica do ponto de vista matemático, e encontra muitas aplicações físicas. Nos restringimos simplesmente aos aspectos mais relevantes da teoria de Chern–Simons em 3D para o presente trabalho: como são as propriedades da teoria frente as transformações de calibre, o formalismo canônico e por último a relação com a gravitação em 3D.

2.2.1 Densidades de Chern–Pontryagin e de Chern–Simons

Seja \mathcal{M}_4 uma variedade 4-dimensional orientável. Seja G um grupo de Lie semi-simples como o grupo de calibre da teoria, e $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ sua correspondente álgebra de Lie equipada com uma forma quadrática não degenerada e denotada por $\text{Tr}(\cdot, \cdot)$. Esta forma quadrática pode ser construída a partir da forma de Killing da álgebra, mas não necessariamente. Considere o campo de calibre 1-forma $A = A_\mu^I \tau_I dx^\mu$, onde τ_I formam uma base dos geradores do grupo de calibre que satisfazem certas relações de comutação.

A 4-forma de Chern–Pontryagin é definida por¹⁹

$$P \equiv -\kappa \text{Tr}(F^2),$$

onde $F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ é 2-forma curvatura de A , e κ uma constante de acoplamento referida como o “nível” da teoria.

A forma de Chern–Pontryagin é importante do ponto de vista matemático pelo fato que sua integral 4-dimensional é um invariante topológico. Se ele é zero temos um sinal de que os campos de calibre possuem propriedades topológicas não triviais. Repare que a definição da forma de Chern–Pontryagin não envolve métrica nenhuma o que é uma indicação da independência do fundo.

Sendo P um invariante topológico é de se esperar que este se escreva como uma derivada (exterior) total, de fato temos

$$P = -\kappa \text{Tr}(FF) = d(CS(A)),$$

onde $CS(A)$ é a 3-forma de Chern–Simons dada por

$$CS(A) \equiv -\kappa \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}AAA).$$

A ação definida a partir da forma de Chern–Pontryagin é

$$S = -\kappa \int_{\mathcal{M}_4} P = -\kappa \int_{\mathcal{M}_4 = \partial\mathcal{M}_3} CS(A),$$

onde \mathcal{M}_3 , uma variedade 3-dimensional, é a borda de \mathcal{M}_4 . Assim, vemos que a teoria de calibre obtida a partir da forma de Chern–Pontryagin sobre a variedade \mathcal{M}_4 fica definida completamente pela forma de Chern–Simons na borda $\mathcal{M}_4 = \partial\mathcal{M}_3$. Neste sentido a teoria depende dos aspectos globais da variedade, aspecto que caracteriza, entre outras coisas, uma teoria topológica.

Apesar de termos introduzido a ação de Chern–Simons como a teoria na borda de uma teoria 4-dimensional, nada nos impede definir a ação independentemente da densidade P . Então definimos a teoria de Chern–Simons a partir da ação

$$S = -\kappa \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr}(AdA + \frac{2}{3}A^3) = -\kappa \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr}(A_\alpha \partial_\beta A_\gamma + \frac{2}{3}A_\alpha A_\beta A_\gamma) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} d^3x. \quad (2.69)$$

¹⁹Lembre que no produto de formas não escrevemos o “wedge”: $F^2 = F \wedge F$, etc.

Neste caso \mathcal{M}_3 não é necessariamente a borda de alguma outra variedade 4-dimensional, inclusive pode-se ter o caso $\partial\mathcal{M}_3 \neq 0$. No que segue vamos nos especializar unicamente no caso em que $\partial\mathcal{M}_3 = 0$.

A variação da ação fornece as equações de campo que se leem simplesmente

$$F_A = dA + A^2 = 0. \quad (2.70)$$

A equação de movimento diz que a curvatura é nula, isto quer dizer que as soluções desta equação são conexões “planas” (*flat*). Uma solução desta equação é $A = 0$, mas também qualquer transformação de calibre desta, *i.e.*

$$A(x) = 0 \mapsto A(x) = g^{-1}(x)dg(x).$$

É simples verificar que, de fato, esta solução resolve (2.70) e esta depende de um elemento do grupo completamente arbitrário, tais soluções são definidas como “puro calibre”. Daqui vemos que a teoria de Chern–Simons não possuem graus de liberdade locais, se propagando. Os graus de liberdade só podem ser globais, associados à topologia não trivial da teoria.

Da mesma forma que o P , a forma CS é por construção invariante de difeomorfismos pois ela é definida como uma 3-forma cuja integral no espaço é independente da escolha do sistema de coordenadas. Além disso não se faz uso de métrica nenhuma na sua definição. As teorias com esta particularidade são conhecidas como teorias topológicas, e mais especificamente topológicas tipo Schwartz na qual também pertencem as teorias BF[59]. Outros tipos de teorias topológicas que não serão consideradas no presente trabalho são as teorias tipo Witten. Para uma revisão detalhada sobre teorias de campo topológicas tipo Schwartz e Witten, recomendamos [56]. O fato destas teorias não possuírem graus de liberdade locais e sim globais é uma consequência da natureza topológicas das mesmas.

2.2.2 Invariância de calibre

Note que a teoria de Chern–Simons é construída basicamente a partir do campo de calibre A . Considere então transformações de calibre infinitesimais do tipo

$$\delta A(x) = D_A \lambda(x) = d\lambda(x) + [A(x), \lambda(x)]. \quad (2.71)$$

É simples mostrar que a ação (2.69) é invariante sobre estas transformações,

$$\delta S_{CS} = -\kappa \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr}(F\delta A) = \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr}(FD_A \lambda) = - \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr}(D_A F \lambda) = 0,$$

onde a integração por partes é possível devido ao fato que $\partial\mathcal{M}_3 = 0$, e $DF = 0$ — a identidade de Bianchi.

No caso das transformações de calibre finitas gerais da forma

$$A(x) \mapsto g^{-1}(x)A(x)g(x) + g^{-1}(x)dg(x), \quad (2.72)$$

acontece que a ação de CS não é invariante, pois pode-se mostrar que

$$S_{CS} \mapsto S_{CS} + \kappa \int_{\mathcal{M}_3} d(\text{Tr}(dgg^{-1}A)) + 8\pi^2\kappa W(g) = S_{CS} + 8\pi^2\kappa W(g),$$

onde

$$W(g) \equiv \frac{1}{24\pi^2} \int_{\mathcal{M}_3} \text{Tr}(g^{-1}dg g^{-1}dg g^{-1}dg). \quad (2.73)$$

é o “número de voltas” (*winding number*) da transformação de calibre $g(x)$ [60, 61]. Repare que o segundo termo é descartado uma vez que ele é uma derivada total, portanto nula no caso $\partial\mathcal{M}_3 = 0$. É possível mostrar o número de voltas se transforma como

$$W(g_1) \mapsto W^{g_2}(g_1) = W(g_1) + W(g_2), \quad (2.74)$$

onde g_1 e g_2 são dois elementos do grupo. No caso em que o grupo é compacto e Abeliano, o *winding number* é um número inteiro [60, 61].

Nota sobre a quantização de κ . Lembre-se que a teoria quântica pode ser definida através da integral funcional da exponencial da ação. Então se desejamos que o setor quântico seja invariante de calibre devemos impor a regra de quantização sobre a nível da teoria:

$$\kappa = \frac{\nu}{4\pi}, \text{ com } \nu \in \mathbb{Z}$$

Justificaremos a quantização de κ do ponto de vista da quantização canônica mais em diante.

2.2.3 Invariância de difeomorfismo

Não foi enfatizado no momento de se definir a ação (2.135) de CS, mas uma vez que ela é definida integralmente na linguagem das formas diferenciais, então ela é manifestamente invariante de fundo e de difeomorfismos. Uma pergunta poderia ser se existem vínculos associados com os difeomorfismos. Vimos na (seção 2.1.2.3) que no caso da gravitação em 4D a resposta é afirmativa. No caso da teoria de CS em 3D acontece uma situação comum nas teorias topológicas: a simetria de calibre é suficientemente grande para conter os difeomorfismos. Vamos ver como isso é possível.

Um difeomorfismo infinitesimal com parâmetro vectorial ξ é obtido como a derivada de Lie na direção de ξ , segundo a definição $\mathcal{L}_\xi = \iota_\xi d + d\iota_\xi$, onde ι_ξ é a derivada interior que atua sob as formas por contração com ξ , *i.e.* $\iota_\xi A \equiv \xi^\mu A_\mu$. Então temos que

$$\delta_\xi^{\text{Diff}} A = \mathcal{L}_\xi A = D_A(\iota_\xi A) + \iota_\xi F. \quad (2.75)$$

Daqui vemos que a derivada de Lie é equivalente a uma transformação de calibre infinitesimal com parâmetro $\eta \equiv \iota_\xi \mathbf{A}$, módulo equações de movimento. Assim, escrevemos

$$\delta_\xi^{\text{Diff}} A = \delta_{\iota_\xi A}^{\text{Gauge}} A + \text{eq. movimento.} \quad (2.76)$$

os difeomorfismos infinitesimais podem ser entendidos como um tipo de transformações de calibre. Este resultado, particular a este tipo de teorias topológicas, é um indicativo da estreita relação entre as teorias de calibre e a gravitação 3D, pois a gravitação 3D é uma teoria invariante de difeomorfismos[27].

No que se refere à dinâmica da teoria, vimos que Hamiltoniano (2.90) é puramente vinculado, o que significa que a dinâmica é “puro” calibre. Certamente, numa teoria invariante de difeomorfismos, a dinâmica se traduz no deslocamento de Σ (as folhas espaciais) no tempo, isto é, pelos difeomorfismos temporais, mas estes últimos são obtidos a partir das transformações de calibre.

2.2.4 Análise canônico da teoria de Chern–Simons

Nosso objetivo é chegar ao formalismo Hamiltoniano da teoria de Chern–Simons. Com experiência adquirida no estudo da teoria de YM e a gravitação, a análise da teoria de CS é mais direta.

Suponha que \mathcal{M}_3 tem a topologia $\Sigma_2 \times \mathbb{R}$, onde Σ_2 é uma variedade 2-dimensional que representa o espaço físico, e \mathbb{R} representa o tempo. Separamos a conexão em componentes temporal e espacial:

$$A = A_t dt + A_a dx^a = A_t dt + \mathbf{A}. \quad (2.77)$$

(Lembramos que denotamos com $\mathbf{A} = A_a dx^a$ (em negrito) a componente puramente espacial da 1-forma conexão). Substituindo (2.77) na ação (2.69) obtemos o seguinte

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_2} \text{Tr}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A} + 2A_t \mathbf{F}_A), \\ &= -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_2} d^2x k_{IJ} \varepsilon^{ab} (\dot{A}_a^I A_b^J + A_t^I F_{ab}^J), \end{aligned} \quad (2.78)$$

onde $\mathbf{F}_A = \mathbf{dA} + \mathbf{A}^2$ é a curvatura puramente espacial, o ponto acima das formas representa a derivada temporal $\dot{\mathbf{A}} = \partial_t \mathbf{A}$, e por último $k_{IJ} \equiv \text{Tr}(\tau_I \tau_J)$ é a forma quadrática invariante não degenerada do grupo.

Do termo cinético da ação (2.78) obtemos de imediato os momentos canônicos

$$P_I^t = 0, \quad P_I^a = -\frac{\kappa}{2} k_{IJ} \varepsilon^{ab} A_b^J. \quad (2.79)$$

Notamos que não é possível resolver as velocidades em termos dos momentos, portanto eles definem vínculos primários dados por

$$\chi_I^t \equiv P_I^t \approx 0, \quad \chi_I^a \equiv P_I^a + \frac{\kappa}{2} k_{IJ} \varepsilon^{ab} A_b^J \approx 0. \quad (2.80)$$

As coordenadas do espaço de fase inicial são as componentes dos campos A_μ^I e P_J^ν . Os colchetes de Poisson fundamentais neste espaço são postulados da forma usual,

$$\{A_t^I(\mathbf{x}), P_J^t(\mathbf{y})\} = \delta_J^I \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \{A_a^I(\mathbf{x}), P_J^b(\mathbf{y})\} = \delta_J^I \delta_a^b \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.81)$$

A dimensão deste espaço é $2 \times d \times 3$ (d a dimensão do grupo).

Antes estudar a estabilidade dos restantes vínculos primários, é conveniente determinar a álgebra dos vínculos primários. É imediato que o vínculo χ_J^t na (2.80) comuta com os outros vínculos (ele só depende do momento conjugado P^t , mas nenhum dos outros vínculos dependem de A_t). Assim, os colchetes não triviais são

$$C_{IJ}^{ab}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \{\chi_I^a(\mathbf{x}), \chi_J^b(\mathbf{x}')\} = \kappa k_{IJ} \varepsilon^{ab} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (2.82)$$

É uma matriz não singular, nem sequer fracamente nula, portanto esses vínculos são de segunda classe, segundo a definição na (seção 2.1.2.1). Antes de analisar a estabilidade dos vínculos primários é conveniente introduzir já os colchetes de Dirac nesta fase precoce, para reduzir o espaço de fase já no nível dos vínculos primários. Pode-se entender isto como a redução do espaço de fase inicial sem levar em conta a dinâmica. Então a análise de estabilidade é retomada no espaço reduzido e com a estrutura simpléctica dada pelos colchetes de Dirac²⁰. A inversa da matriz de vínculos (2.82) é

$$(C^{-1})_{ab}^{IJ} \equiv C_{ab}^{IJ}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{\kappa} k^{IJ} \varepsilon_{ab} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.83)$$

onde k^{IJ} é a inversa de k_{IJ} . C^{-1} é a inversa (no sentido da convolução “*”) de C :

$$(C_{IL}^{ac} * C_{cb}^{LJ})(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{\Sigma_2} d^2x \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}') \delta^2(\mathbf{y}', \mathbf{x}') \delta_b^a \delta_J^I d^2y' = \delta_b^a \delta_J^I \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Da definição (2.7) temos que os colchetes de Dirac se definem como

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} + \frac{1}{\kappa} k^{IJ} \varepsilon_{ab} \{f, \chi_I^a\} * \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') * \{\chi_J^b, g\}. \quad (2.84)$$

Uma vez introduzidos os colchetes de Dirac, podemos escrever os vínculos de segunda classe como igualdades fortes e resolvê-los:

$$\chi_I^a = P_I^a + \frac{\kappa}{2} k_{IJ} \varepsilon^{ab} A_b^J = 0 \quad \Rightarrow \quad P_I^a = -\frac{\kappa}{2} k_{IJ} \varepsilon^{ab} A_b^J. \quad (2.85)$$

Vemos desta equação que uma parte das componentes da conexão faz o papel de momentos conjugados, devido a isto daqui em diante não vamos precisar mais dos

²⁰Este procedimento é uma variante do método padrão que estipula começar com análise de estabilidade até esgotar todos a geração de novos vínculos, e logo determinar quais vínculos são de segunda classe. Podemos afirmar, pelos menos no caso da teoria de CS, que o resultado final é indiferente da escolha do método.

P 's. A consequência importante deste resultado é que o espaço de fase inicial foi reduzido à metade.

Da definição (2.84), se mostra que o colchete de Dirac entre as componentes da conexão são:

$$\{A_a^I(\mathbf{x}), A_b^J(\mathbf{x}')\}_D = -\frac{1}{\kappa} k^{IJ} \varepsilon_{ab} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.86)$$

que vai substituindo o segundo dos colchetes na (2.81).

Retomamos neste ponto, como já foi indicado, a análise de estabilidade dos vínculos. Primeiramente, a partir da ação (2.78) fazemos a transformação de Legendre e obtemos Hamiltoniano densidade

$$\mathcal{H} = \frac{\kappa}{2} \int_{\Sigma_2} d^2x (k_{IJ} \varepsilon^{ab} A_t^I F_{ab}^J + \lambda_t^I \chi_t^I). \quad (2.87)$$

Da experiência adquirida na (seção 2.1.2.2) reparamos de imediato que χ_t^I é o típico vínculo primário que conduz ao vínculo de Gauss:

$$\chi_t^I = \{\chi_t^I, \mathcal{H}\}_D = \frac{\kappa}{2} k_{IJ} \varepsilon^{ab} F_{ab}^J \equiv \mathcal{G} \approx 0, \quad (2.88)$$

que já faz parte do Hamiltoniano, onde identificamos os campo A_t^I como multiplicadores de Lagrange. Na forma ponderada o vínculo de Gauss se escreve

$$\mathcal{G}(\eta) = \int_{\Sigma_2} d^2x \frac{\kappa}{2} k_{IJ} \varepsilon^{ab} \eta^I F_{ab}^J. \quad (2.89)$$

Daqui se evidencia que o Hamiltoniano da teoria é puramente vinculado, *i.e*

$$\mathcal{H} = \mathcal{G}(\eta). \quad (2.90)$$

Observe que descartamos o vínculo χ_t^I , a partir do momento em que “descobrimos” que A_t^I são simplesmente multiplicadores de Lagrange.

O vínculo de Gauss é estável desde que o colchete de Dirac entre dois vínculos de Gauss seja fechado. De fato isso é verdade, como se verifica de

$$\{G(\eta), G(\eta')\}_D = G(\eta \times \eta'), \quad (\eta \times \eta')^K \equiv f^K_{IJ} \eta^I \eta'^J. \quad (2.91)$$

Portanto a álgebra é fechada, e o vínculo de Gauss é de primeira classe. Sendo um vínculo de primeira classe ele gera transformações de calibre infinitesimais:

$$\delta_\eta^G A = \{G(\eta), A_a^I(x)\} = \partial_a \eta^I(x) + f^I_{JK} A_a^J(x) \eta^K(x),$$

justamente a transformação de calibre infinitesimal da conexão com função teste η .

Resumindo, no formalismo canônico da teoria de CS, o espaço de fase tem como coordenadas os campos A_a^I , dos quais a metade representam as variáveis de configuração e a outra metade os momentos. Os campos A_t^I são simplesmente multiplicadores de Lagrange, associado com o vínculo de Gauss (2.89) de primeira classe. A estrutura simpléctica é dada pelos colchetes de Dirac (2.86)²¹. A dimensão do espaço de fase é $2 \times d \times \infty$, onde d é a dimensão do grupo de calibre.

²¹A partir deste ponto, e desde que não voltamos mais a utilizar os colchetes de Poisson nem os momentos P , retiramos o subíndice “D” dos colchetes de Dirac.

2.2.5 Cociclo

Um outro aspecto da teoria de Chern–Simons que é muito interessante e será de especial relevância no momento de se discutir o aspecto quântico do modelo é o referente ao “cociclo” [62]. Vamos revisar este conceito nesta seção.

Considere um grupo G com elementos g que satisfazem a regra de composição $g_1g_2 = g_{12}$. Se q é uma variável de configuração (por exemplo a conexão A), então denotamos por q^g a ação do grupo sob q (por exemplo $A^g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg$). Considere agora uma função genérica $\Psi = \Psi(q)$, e $U(g)$ a ação do grupo sobre estas funções que se escreve

$$U(g)\Psi(q) = \Psi(q^g). \quad (2.92)$$

A regra de composição $g_{12} = g_1g_2$ induz a regra de composição nos operadores U

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_{12}). \quad (2.93)$$

Uma possível generalização a esta construção consiste em permitir a introdução de uma fase em (2.92)

$$U(g)\Psi(q) = e^{i2\pi\alpha_1(q;g)}\Psi(q^g). \quad (2.94)$$

Uma quantidade que depende de um só elemento do grupo, como é o caso de $\alpha_1(q; g)$, é chamado “1-cociclo”. A regra de composição (2.93) aplicada a (2.94) implica que o 1-cociclo deve cumprir com a regra

$$\Delta\alpha_1 \equiv \alpha_1(q^{g_1}; g_2) - \alpha_1(q; g_{12}) + \alpha_1(q; g_1) = 0 \pmod{\text{inteiro}}. \quad (2.95)$$

Chamamos Δ o “operador co-borda”, e dizemos que α_1 é fechado em relação a esse operador.

O 1-cociclo é dito trivial se é a co-borda de um 0-cociclo, *i.e*

$$\Delta\alpha_0 \equiv \alpha_1(q; g) = \alpha_0(q^g) - \alpha_0(q). \quad (2.96)$$

A generalização do operador co-borda aplicado a um n -cociclo é (veja por exemplo [60])

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_n \equiv & \alpha_n(q^{g_1}; g_2, \dots, g_{n+1}) - \alpha_n(q; g_1g_2, g_3, \dots, g_{n+1}) + \dots \\ & + (-1)^{m+1}\alpha_n(q; g_1, g_2, g_3, \dots, g_mg_{m+1}, \dots, g_{n+1}) + \dots \\ & + (-1)^{n+1}\alpha_n(q; g_1, g_2, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Daqui é possível verificar que o operador co-borda é nilponte: $\Delta^2 = 0$. Considere como um exemplo o 0-cociclo temos, temos então

$$\begin{aligned} \Delta^2\alpha_0 &= (\Delta\alpha_0)(q^{g_1}; g_2) - (\Delta\alpha_0)(q; g_{12}) + (\Delta\alpha_0)(q; g_1) \\ &= \alpha_0((q^{g_1})^{g_2}) - \alpha_0(q^{g_1}) - \alpha_0(q^{g_{12}}) + \alpha_0(q) + \alpha_0(q^{g_1}) - \alpha_0(q) \\ &= 0 \end{aligned}$$

A vantagem do 1-cociclo ser trivial é que podemos fazer a redefinição

$$\tilde{\Psi}(q) \equiv e^{i2\pi\alpha_0(q)}\Psi(q) \quad (2.97)$$

$$\tilde{U}(g) \equiv e^{i2\pi\alpha_0(q)}U(g)e^{-i2\pi\alpha_0(q)}, \quad (2.98)$$

de tal forma que 1-cociclo é removido na lei de transformação, pois se verifica que

$$\tilde{U}(g)\tilde{\Psi}(q) = \tilde{\Psi}(q^g) \quad (2.99)$$

Outras generalizações na realização do grupo conduzem a cociclos de ordem superior. Por exemplo, na regra de composição $U(g_1)U(g_2) = U(g_{12})$ se pode permitir uma fase do tipo $U(g_1)U(g_2) = e^{i2\pi\alpha_2(q;g_1,g_2)}U(g_{12})$. Neste caso $\alpha_2(q;g_1,g_2)$, que depende de dois elementos do grupo, é chamado de 2-cociclo. Neste trabalho estamos interessados somente no 1-cociclo.

1-cociclo na teoria de Chern–Simons. O 1-cociclo surge naqueles sistemas físicos nos quais a Lagrangiana não é invariante frente a uma transformação de simetria, por exemplo as transformações de calibre. Vimos na (seção 2.2.2) que a lagrangiana da teoria de Chern–Simons, no caso mais geral, não é invariante de calibre por causa do *winding number* (veja (2.73)). Consideremos novamente as transformações de calibre mas desta vez do ponto de vista do formalismo canônico. Então, de (2.78) a densidade Lagrangiana se escreve

$$L_{CS} = -\frac{\kappa}{2}\text{Tr}(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A} + 2A_t\mathbf{F}_A) = -\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{ab}\text{Tr}(\dot{A}_a A_b + A_t F_{ab}).$$

No termo cinético, $(\kappa/2)\varepsilon^{ab}\text{Tr}(\dot{A}_a A_b)$, temos que fazer a distinção entre a variáveis de configuração e os momentos canônicos, isto quer dizer que temos que adotar uma “polarização”. Por exemplo assumimos que A_x^J são os “ q ’s”, e A_y^I os “ p ’s”, temos assim

$$L_{CS} = -\frac{\kappa}{2}\text{Tr}(\dot{A}_x A_y - \dot{A}_y A_x) = -\frac{\kappa}{2}\text{Tr}(\dot{A}_x A_y) - \frac{\kappa}{2}\frac{d}{dt}\text{Tr}(A_x A_y) \sim \dot{q}p + \frac{d}{dt}f(q, p)$$

Definimos a Lagrangiana

$$\tilde{L}_{CS} = L_{CS} + \frac{\kappa}{2}\frac{d}{dt}\text{Tr}(A_x A_y) = -\kappa\text{Tr}(\dot{A}_x A_y + A_t F_{xy}), \quad (2.100)$$

que difere da original por uma derivada total e portanto não modifica as equações de movimento.

Aplicando as transformações de calibre (2.72) sob \tilde{L}_{CS} obtemos o seguinte:

$$\tilde{L}_{CS}^g = \tilde{L}_{CS} + \frac{d}{dt}2\pi\alpha_1(A_x; g), \quad (2.101)$$

$$\alpha_1(A_x; g) \equiv -\frac{\kappa}{2\pi} \int_{\Sigma_2} d^2x \left(\text{Tr}(2A_x \partial_y g g^{-1} + g^{-1} \partial_x g g^{-1} \partial_y g) - 8\pi^2 w^t(g) \right) \quad (2.102)$$

onde $w^t(g)$ é definido a partir do *winding number* (2.73) como

$$W(g) = \int_{\Sigma_2} d^2x w^t(g). \quad (2.103)$$

Acontece que $\alpha_1(A_x; g)$ é justamente o 1-cociclo, sendo que ele entra na ação (2.101) como uma derivada total, não têm efeito nenhum nas equações de movimento. Porém, vamos ver mas adiante (seção 5.1.1) que o 1-cociclo reaparece no setor quântico da teoria na forma de uma fase na lei de transformação da função de onda (veja a equação (2.94)). Como um argumento simples para nos convencer do surgimento da fase, lembre que na aproximação eikonal da mecânica quântica a função de onda se escreve $\psi \sim \exp(iS)$, portanto após a transformação de calibre temos $\psi^g \sim \exp(iS + 2\pi i\alpha_1)$. Na seção dedicada à quantização da teoria de Chern–Simons estuda-se em detalhe essa “anomalia”.

Verifica-se por cálculo direto que o 1-cociclo (2.102) satisfaz a condição (2.95)

$$\Delta\alpha_1(A_x, g) \equiv \alpha_1(A_x^g; g_2) - \alpha_1(A_x; g_1g_2) + \alpha_1(A_x; g_1) = 0 \pmod{\text{inteiro}}.$$

Queremos agora determinar se o 1-cociclo é trivial. Para isso, seja a solução particular $A'_x = 0$, e seja

$$A_x^h = h^{-1}\partial_x h \equiv A_x \quad (2.104)$$

uma transformação de calibre desta solução. Se α_1 é trivial ele se escreve

$$\alpha_1(0; g) = \alpha_0(A_x^h) - \alpha_0(A'_x) = \alpha_0(h^{-1}\partial_x h) - \alpha_0(0) = \alpha_0(A_x),$$

onde $\alpha_0(0) \equiv 0$. Portanto o 0-cociclo é

$$\begin{aligned} \alpha_0(A_x) &= \frac{\kappa}{2\pi\gamma} \int_{\Sigma_2} d^2x \left(8\pi^2 w^t(h) - \text{Tr}(A_x h^{-1}\partial_y h) \right) \\ &\equiv \frac{\kappa}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{3} S_{\text{WZ}} - S_\sigma \right), \end{aligned} \quad (2.105)$$

onde $h \in G$ é o funcional não local definido na (5.6). O primeiro termo no α_0 , conhecido também como a ação de Wess–Zumino, é proporcional ao *winding number* de h (segundo (2.103) e (2.73)), portanto é um termo multi-avaliado. O segundo termo em (2.105) é conhecido como a ação do modelo σ . Como um todo α_0 é conhecida como a ação de Wess–Zumino–Witten. Aplicando o operador co-borda sob α_0 é possível mostrar que o resultado é justamente α_1 .

A vantagem do 1-cociclo ser trivial esta na possibilidade de eliminar a fase na lei de transformação dos funcionais de A_x (conforme equações (2.94) e (2.98)). Isto também se manifesta na formulação Lagrangiana, como estudaremos agora. Para isso, voltamos à ação \tilde{L}_{CS} definida em (2.100), da lei de transformação temos

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\text{CS}}^g &= \tilde{L}_{\text{CS}} + 2\pi \frac{d}{dt} \alpha_1(A_x, g) = \tilde{L}_{\text{CS}} + 2\pi \frac{d}{dt} (\alpha_0(A_x^g) - \alpha_0(A_x)) \\ \Rightarrow L_{\text{CS}}^{\text{inv}} &\equiv \tilde{L}_{\text{CS}} - 2\pi \frac{d}{dt} \alpha_0(A_x^g) = \tilde{L}_{\text{CS}} - 2\pi \frac{d}{dt} \alpha_0(A_x) \end{aligned} \quad (2.106)$$

onde usamos o fato que α_1 é trivial. Escrevemos agora a derivada total como

$$\frac{d}{dt}\alpha_0(A_x) = \int_{\Sigma_2} d^2x \frac{\delta\alpha_0(A_x)}{\delta A_x^I} \dot{A}_x^I. \quad (2.107)$$

Para avaliar esta expressão determinamos a variação funcional de α_0 :

$$\delta\alpha_0[A_x] = \frac{\kappa}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{3} \delta S_{WZ} - \delta S_\sigma \right).$$

A variação do primeiro termo é

$$\delta S_{WZ} = 3 \int_{\Sigma_2} d^2x \text{Tr}([A_x, \omega_y] h^{-1} \delta h),$$

onde $\omega_y \equiv h^{-1} \partial_y h$, enquanto a variação do segundo é

$$\delta S_\sigma = \int_{\Sigma_2} d^2x \text{Tr}((-2\partial_y A_x + [A_x, \omega_y]) h^{-1} \delta h).$$

Consequentemente temos

$$\delta\alpha_0 = -\frac{\kappa}{\pi} \int_{\Sigma_2} d^2x \text{Tr}(\tau_I \tau_J) \omega_y^I \delta A_x^J = -\frac{\kappa}{\pi} \int_{\Sigma} d^2x k_{IJ} \omega_y^I \delta A_x^J.$$

O resultado final é

$$\frac{\delta\alpha_0(A_x)}{\delta A_x^I} = -\frac{\kappa}{\pi} k_{IJ} \omega_y^J = -\frac{\kappa}{\pi} k_{IJ} (h^{-1} \partial_y h)^J.$$

Substituindo este resultado na (2.107) e em seguida na (2.106) obtemos finalmente

$$L^{\text{inv}} = -2\kappa \int_{\Sigma_2} d^2x \text{Tr}(\dot{A}_x W_y + A_t F_{xy})$$

onde introduzimos

$$W_y \equiv A_y - h^{-1} \partial_y h,$$

que se transforma da forma

$$W_y^g = g^{-1} W_y g \quad \text{se} \quad h^g = hg. \quad (2.108)$$

L^{inv} é por construção invariante de calibre frente as transformações gerais do campo de calibre, em particular, é manifestamente invariante frente as transformações independentes do tempo

$$A_t \mapsto g^{-1}(\mathbf{x}) A_t g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A} \mapsto g^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{A} g(\mathbf{x}) + g^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{d}g(\mathbf{x}).$$

2.3 Gravitação em 3D como uma teoria de Chern–Simons

A teoria de Chern–Simons em 3D é uma teoria independente do fundo e invariante de difeomorfismos. Neste sentido semelhante com as teorias da gravitação. Agora bem, uma escolha certa do grupo de calibre pode fazer desta teoria genérica uma teoria da gravitação em 3D. O grupo de simetria que faz o trabalho é o grupo de Poincaré $\text{ISO}(2,1)$, com conexão de Poincaré definida como²²

$$\Omega = e + \omega = e_{\mu}^I P_I dx^{\mu} + \omega_{\mu}^{IJ} \frac{1}{2} M_{IJ} dx^{\mu}, \quad (2.109)$$

onde e e ω são o *co-frame* e a conexão de spin, respectivamente, e P_I , M_{IJ} os geradores das translações e das transformações de Lorentz do grupo de Poincaré que satisfazem as regras de comutação da álgebra $\mathfrak{iso}(2,1)$ como será detalhado mais adiante. Quando a conexão (2.109) é substituída na definição da curvatura (2.9) o resultado é (veja (2.119))

$$F = (de + [\omega, e]) + (d\omega + \omega^2) = T + R, \quad (2.110)$$

onde T é a torção e R a curvatura. Desde que as equações de campo da teoria de Chern–Simons são $F = 0$, isto implica $T = 0$ e $R = 0$, justamente as equações da gravitação em 3D! Estamos assim de frente a uma potencial generalização da gravitação.

No entanto existe uma dificuldade: a forma de Killing do grupo $\text{ISO}(2,1)$ é degenerada, então ela não pode ser usada na definição do produto interno na álgebra do grupo, requisito indispensável para construir a teoria de CS. Porém em 3D existe uma saída. É possível escrever uma forma quadrática não degenerada associada com o invariante de Casimir do grupo $\epsilon^{IJK} P_I M_{JK}$. Usando esta forma quadrática a gravitação em 3D é obtida a partir da teoria de Chern–Simons. Contudo, substituindo o grupo Poincaré pelo grupo de de Sitter $\text{SO}(3,1)$, o que se obtém é gravitação em 3D com constante cosmológica não nula. As surpresas não terminam aqui, acontece que o grupo $\text{SO}(3,1)$ além do operador de Casimir acima considerado, possui também o operador de Casimir $\frac{1}{\Lambda} P_I P^I + \frac{1}{2} M_{IJ} M^{IJ}$, uma consequência que desta vez a métrica de Killing do grupo é não degenerada. Isto quer dizer que, em princípio, a gravitação em 3D pode ser descrita em princípio por duas teorias. Este notável resultado é válido só no caso 3D.

A descoberta sutil que a gravitação em 3D pode ser interpretada como uma teoria de Chern–Simons foi apontada pela primeira vez por Achúcarro e Townsend [26], mas uma compreensão mais profunda foi apresentada posteriormente no extenso trabalho do Witten [27]. O objeto desta seção é estudar em detalhe a relação entre a teoria de Chern–Simons e a gravitação em 3D, para isso nos baseamos principalmente no trabalho original de Witten acima citado.

²²Os índices de grupo nesta seção são índices de Lorentz 3D, *i.e.* $I, J, \dots = 0, 1, 2$.

2.3.1 Primeira forma quadrática

O ponto de partida é a ação de Chern–Simons²³

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} \langle \Omega, d\Omega + \frac{2}{3}\Omega^2 \rangle, \quad (2.111)$$

O link entre a gravitação em 3D e a teoria Chern–Simons é o grupo de simetria local de Poincaré $ISO(1,2)$. A conexão de Poincaré é dada por (2.109), onde os geradores do grupo são P_I , que representam as translações, e M_{IJ} , que representam os geradores do grupo de Lorentz. Introduzimos o gerador dual $J_I \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_I{}^{JK}M_{JK}$ com o fim de simplificar a notação. Note que em 3D o dual de um tensor de Lorentz é um vetor, o que implica, por exemplo, que o número de translações é igual ao número de rotações.

Os geradores formam uma base da álgebra de Lie $\mathfrak{iso}(2,1)$. Eles satisfazem as regras de comutação

$$[J_I, J_J] = \epsilon_{IJ}{}^K J_K, \quad [J_I, P_J] = \epsilon_{IJ}{}^K P_K, \quad [P_I, P_J] = 0. \quad (2.112)$$

Precisamos também definir uma forma quadrática invariante na álgebra. Uma escolha natural é a forma de Killing diagonal, k^{IJ} , que esta relacionada com o operador de Casimir através de $k^{IJ}(\alpha P_I P_J + \beta J_I J_J)$. No caso do grupo $ISO(2,1)$ esta forma quadrática é degenerada, como se verifica por substituição nas relações de comutação (2.112). Afortunadamente em 3D, e só em 3D, existe uma outra possibilidade, correspondendo ao operador de Casimir

$$C_1 \equiv \epsilon^{IJK} P_I M_{JK} = 2\eta^{IJ} P_I J_J, \quad (2.113)$$

A forma quadrática invariante associada com este operador de Casimir é dada por

$$\ell \langle J_I, P_J \rangle_1 = \eta_{IJ}, \quad \langle J_I, J_J \rangle_1 = \langle P_I, P_J \rangle_1 = 0, \quad (2.114)$$

onde ℓ é uma escala de comprimento (nas unidades naturais $c = 1$, $\hbar = 1$) necessária para que a métrica η_{IJ} na álgebra seja definida sem dimensões. No caso da gravitação clássica pura não se conhece uma escala natural de comprimento, em breve veremos como identificar ℓ .

Com tudo isto podemos escrever a ação de CS como a ação da RG a menos de uma derivada total:

$$S_1 = -\frac{\kappa}{\ell} \int_{\mathcal{M}_3} \left[\eta_{IJ} e^I R^J + d(\eta_{IJ} e^I \omega^J) \right]. \quad (2.115)$$

²³Fazemos duas modificações importantes da notação. A primeira é escrever a conexão com o símbolo Ω , por razões que serão esclarecidas mais adiante. A segunda é que optamos por escrever $\langle T_I, T_J \rangle$ em vez de $\text{Tr}(T_I T_J)$, pois temos a intenção de considerar formas quadráticas mais gerais que a forma de Killing, as quais não necessariamente são obtidas como o traço dos geradores da álgebra.

Se considerarmos um espaço-tempo \mathcal{M}_3 tal que $\partial\mathcal{M}_3 = 0$, isto é, sem borda, vemos que a equivalência entre a RG e a teoria de CS é imediata. É interessante comentar que, da mesma forma que no formalismo de primeira ordem, na teoria de Chern–Simons é possível ter soluções que no formalismo métrico se interpretam como singulares. Portanto num sentido rigoroso, a gravitação, no formalismo de Chern–Simons, é uma teoria mais geral do que a gravitação no formalismo métrico (veja a interessante discussão ao respeito no [28]).

Podemos ir além do que isso e incluir a constante cosmológica positiva (negativa) Λ simplesmente deformando a simetria de calibre para o grupo (anti) de Sitter $\text{SO}(1,3)$ ($\text{SO}(2,2)$ respectivamente). Um caso mais geral consiste em considerar uma métrica no espaço interno da forma $\eta_{IJ} = \text{diag}(\sigma, 1, 1, \dots)$, onde $\sigma = \pm 1$ corresponde ao caso Lorentziano e Riemanniano, respectivamente. Em resumo, os grupos de simetria em consideração são:

		Λ		
		-1	0	1
σ	-1	$\text{SO}(2,2)$	$\text{ISO}(2,1)$	$\text{SO}(3,1)$
	1	$\text{SO}(3,1)$	$\text{ISO}(3)$	$\text{SO}(4)$

Em qualquer caso os geradores do grupo satisfazem as regras de comutação da álgebra de Lie deformada dada por

$$[J_I, J_J] = \epsilon_{IJ}{}^K J_K, \quad [J_I, P_J] = \epsilon_{IJ}{}^K P_K, \quad [P_I, P_J] = \sigma \Lambda \epsilon_{IJ}{}^K J_K. \quad (2.116)$$

Uma primeira observação importante no modelo com $\Lambda \neq 0$ é que neste caso a teoria clássica vem incorporada com uma escala de comprimento natural que se define como

$$\ell \equiv \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}}, \quad (2.117)$$

o raio de curvatura do Universo.

Usando a forma quadrática $C_1 = \eta^{IJ} P_I J_J$, que ainda comuta com a álgebra deformada, e usando a definição de ℓ (2.117), a ação (2.111) se escreve

$$S_1 = -\kappa \sqrt{|\Lambda|} \int_{\mathcal{M}_3} \left(\eta_{IJ} e^I R^J + \frac{\Lambda}{6} \epsilon_{IJK} e^I e^J e^K \right). \quad (2.118)$$

Note que a curvatura da conexão (2.109) se divide em duas componentes, uma com gerador P e a outra com gerador J :

$$\begin{aligned} F &= d\Omega + \Omega^2 \\ &= de + [e, \omega] + d\omega + \omega^2 + e^2 \\ &\equiv T^I P_I + (R + e^2)^I J_I, \end{aligned} \quad (2.119)$$

onde $T \equiv de + [\omega, e] = D_\omega e$ e $R \equiv d\omega + \omega^2$ são a torção e a curvatura, respectivamente. Repare também que estamos definindo a derivada covariante²⁴ $D_\omega \equiv d + [\omega, \]$. As equações de movimento $F = 0$ na teoria de CS (veja (2.70)) implicam que

$$0 = T^I = de^I + \epsilon^I{}_{JK}\omega^J e^K, \quad (2.120)$$

$$0 = R^I + \frac{1}{2}[e, e]^I = \epsilon^I{}_{JK}\omega^J \omega^K + \epsilon^I{}_{JK}\Lambda e^J e^K, \quad (2.121)$$

onde utilizamos a identidade $\omega^2 = \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ (análogo para e^2) e as relações de comutação (2.116). São precisamente as equações da gravitação em 3D com constante cosmológica não nula. É claro que as mesmas equações são obtidas pela variação da ação (2.118).

Porém, obter as mesmas equações de campo não é suficiente para estabelecer a equivalência entre a teoria de CS e a gravitação, ainda resta estabelecer como se traduz a invariância de calibre da gravitação. Para começar, a transformação de calibre infinitesimal (2.71) no caso da conexão (2.109) é

$$\delta\Omega = d\lambda + [e + \omega, \lambda] = \delta e + \delta\omega, \quad (2.122)$$

decompondo o parâmetro infinitesimal $\lambda = \rho^I P_I + \tau^I J_I$, obtemos

$$\begin{aligned} \delta e^I &= \delta_\rho e^I + \delta_\tau e^I = D_\omega \rho^I + \epsilon^I{}_{JK} e^J \tau^K, \\ \delta\omega^I &= \delta_\rho \omega^I + \delta_\tau \omega^I = \Lambda \epsilon^I{}_{JK} e^J \rho^K + D_\omega \tau^I. \end{aligned} \quad (2.123)$$

No caso $\Lambda \neq 0$ vemos que ω possui um setor (tipo Yang–Mills) que se transforma como a conexão de spin $SO(2, 1)$ com parâmetro τ , e possui também o setor “topológico” onde se transforma na adjunta com parâmetro ρ . Da mesma forma acontece com e , ele possui um setor que se transforma na adjunta com parâmetro τ , e tem o setor topológico onde se transforma não homoganeamente. Repare que as transformações topológicas de ω dependem de e e vice versa. Estas relações são idênticas às que se têm na teoria BF, com e fazendo o papel do campo B .

Do estudado na seção 2.2.3 referente aos difeomorfismos na teoria de CS, vimos que existe uma relação íntima entre os difeomorfismos e as transformações de calibre dada por (2.75). Usando este resultado juntamente com (2.123) vemos que

$$\delta_\xi^{\text{diff}} e^I = D_\omega(\xi^\mu e_\mu^I) + \epsilon^I{}_{JK} e^J(\xi^\mu \omega_\mu^K) \quad (2.124)$$

$$\delta_\xi^{\text{diff}} \omega^I = \Lambda \epsilon^I{}_{JK} e^J(\xi^\mu e_\mu^K) + D_\omega(\xi^\mu \omega_\mu^I) \quad (2.125)$$

Esta equação se lê da seguinte forma: um difeomorfismo com parâmetro vetorial ξ dos campos e e ω é equivalente à transformação de calibre com parâmetros $\rho = \xi^\mu e_\mu$ e $\tau = \xi^\mu \omega_\mu$, correspondendo às transformações topológicas e do tipo Yang–Mills, respectivamente. Este resultado notável fecha o círculo entre a gravitação e a teoria

²⁴Ao longo deste trabalho se introduzem diversas derivadas covariantes, dependendo da conexão com a que se trabalha. Em cada caso isto se enfatiza com um subíndice, por exemplo, D_A, D_ω , etc.

de Chern–Simons e, o mais importante, a formulação da gravitação como uma teoria de calibre, neste caso, topológica. Isto não acontece no caso da gravitação 3+1 pois o grupo de calibre não é suficientemente “amplo” para conter os difeomorfismos.

Nota acerca das unidades. Nesta breve nota determinamos a relação entre κ , Λ e G_N na formulação da gravitação como uma teoria de Chern–Simons. Da ação geral (2.5) no formalismo de primeira ordem, escrevemos a ação no caso 2+1 tendo como resultado

$$S_{\text{EP}} = \frac{1}{8\pi G_N} \int_{\mathcal{M}_3} \left(\eta_{IJ} e^I R^J + \frac{\Lambda}{6} \epsilon_{IJK} e^I e^J e^K \right), \quad (2.126)$$

onde usamos a definição $R^I \equiv \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} R^{JK}$. Da comparação entre S_{EP} e S_1 na (2.118) vemos que

$$\kappa = -\frac{1}{8\pi\sqrt{\Lambda}G_N}. \quad (2.127)$$

Repare que na teoria com $\Lambda = 0$ não temos a nossa disposição uma escala de comprimento natural na teoria clássica, então a identificação entre a teoria de CS e a gravitação é a menos de uma constante multiplicativa.

2.3.2 Segunda forma quadrática.

No caso $\Lambda \neq 0$, os grupos de simetria local podem ser $\text{SO}(2,2)$, $\text{SO}(3,1)$ ou $\text{SO}(4)$, cada um deles possui um outro operador de Casimir que se escreve

$$C_2 = \eta^{IJ} \left(\frac{\sigma}{\Lambda} P_I P_J + J_I J_J \right). \quad (2.128)$$

Usando as regras de comutação (2.116) verifica-se que este operador comuta com todos os geradores do grupo. Então associa-se a este operador o produto interno definido como

$$\langle J_I, P_J \rangle_2 = 0, \quad \langle P_I, P_J \rangle_2 = \sigma \Lambda \eta_{IJ}, \quad \langle J_I, J_J \rangle_2 = \eta_{IJ}. \quad (2.129)$$

Repare que este produto interno é diagonal quando comparado com $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ na (2.114) que é anti-diagonal.

A ação que resulta quando se aplica a segunda forma quadrática é [27]

$$S_2 = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} \eta_{IJ} (\sigma \Lambda e^I T^J + \omega^I d\omega^J + \frac{1}{3} \omega^I [\omega, \omega]^J), \quad (2.130)$$

$$= -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \left(\frac{\sigma \Lambda}{2} \eta_{IJ} e_\rho^I T_{\mu\nu}^J + \eta_{IJ} \omega_\rho^I \partial_\mu \omega_\nu^J + \frac{1}{3} \epsilon_{IJK} \omega_\rho^I \omega_\mu^J \omega_\nu^K \right) \varepsilon^{\rho\mu\nu}. \quad (2.131)$$

Surpreendentemente, esta ação fornece as mesmas equações de movimento (2.121) que a ação “padrão” S_1 (2.118). Do ponto de vista das equações de movimento as teorias que se derivam das ações S_1 e S_2 são indistinguíveis. Além disso, é

claro que ambas teorias compartilham também as mesmas simetrias pois elas estão baseadas no mesmo grupo de calibre. A teoria que se deriva da ação S_2 é denominada gravitação “exótica”, seguindo a terminologia original de Witten [27]. No entanto, existe uma diferença importante no que se refere à estrutura simpléctica do espaço de fase que será estudada no próximo parágrafo.

Sendo que em 3D a gravitação possui duas possíveis formulações, Witten propõe considerar a teoria mais geral como a soma dos dois termos, cada um com uma constante de acoplamento diferente, isto é

$$S = S_1 - \frac{1}{\gamma} S_2 \quad (2.132)$$

Comparemos agora esta ação como ação de Palatini–Holst (2.28) da gravitação em 4D. O parecido não é só coincidência, pois repare também a semelhança dos produtos internos (2.114), (2.129) com aqueles da gravitação em 4D, (2.38). Certamente do ponto de vista matemático trata-se da mesma ambiguidade: é uma consequência do grupo $SO(3, 1)$ ter dois operadores de Casimir. Neste contexto, o termo de Holst na gravitação em 4D na verdade é a ação “exótica” topológica, só que neste modelo o termo de Holst por si só não fornece as equações de movimento da teoria. Ele não é suficiente para descrever a gravitação. Podemos dizer que o modelo em 3D é “degenerado” pois tanto a ação padrão como o termo exótico são termos topológicos, cada um deles fornecendo as mesmas equações de campo.

A analogia entre o termo de Holst, e conseqüentemente com o parâmetro de Barbero–Immirzi foi assinalado no recente trabalho de Bonzom e Livine [33]. Nesse trabalho eles estudam em detalhe a proposta de Witten, desenvolvendo o formalismo canônico da ação geral (2.132), onde γ é um parâmetro arbitrário tipo Barbero–Immirzi. Eles também quantizam o modelo utilizando o formalismo da teoria quântica de laços (LQG pelas siglas em inglês), mas restringido ao caso da gravitação Riemanniana.

2.3.3 Modelo de Bonzom–Livine: Análise canônica

Bonzom e Livine desenvolvem em [33] a proposta de Witten de considerar (2.132) como a ação mais geral da gravitação. Nesta subseção fornecemos uma revisão do formalismo canônico clássico do modelo de Bonzom e Livine.

Para a análise canônica da ação (2.132) novamente assumimos que o espaço–tempo possui a topologia $\mathcal{M}_3 = \Sigma_2 \times \mathbb{R}$. A separação dos campos em componentes espaciais e componentes temporais da conexão é $\Omega = e^I P_I + \omega^I J_I$, onde

$$e^I = e^I_\mu dx^\mu = \mathbf{e}^I + e^I_t dt, \quad \mathbf{e}^I = e^I_a dx^a, \quad (2.133)$$

$$\omega^I = \omega^I_\mu dx^\mu = \boldsymbol{\omega}^I + \omega^I_t dt, \quad \boldsymbol{\omega}^I = \omega^I_a dx^a. \quad (2.134)$$

Denotamos em **negrito** a componente espacial das formas diferenciais espaciais. As

ações S_1 e S_2 se escrevem:

$$S_1 = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} \eta_{IJ} \left[\dot{e}^I \omega^J + \dot{\omega}^I e^J + 2e_t^I (\mathbf{R} + \mathbf{e}^2)^J + 2\omega_t^I \mathbf{T}^J \right], \quad (2.135)$$

$$S_2 = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} \eta_{IJ} \left[\sigma \Lambda \dot{e}^I e^J + \dot{\omega}^I \omega^J + 2\sigma \Lambda e_t^I \mathbf{T}^J + 2\omega_t^I (\mathbf{R} + \mathbf{e}^2)^J \right], \quad (2.136)$$

onde

$$\mathbf{R} = (\mathbf{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega])^I J_I = \frac{1}{2}(\partial_a \omega_b^I - \partial_b \omega_a^I + \epsilon^I{}_{JK} \omega_a^J \omega_b^K) P_I dx^a dx^b, \quad (2.137)$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{d}e + [\omega, e])^I P_I = (\partial_a e_b^I + \epsilon^I{}_{JK} \omega_a^J e_b^K) J_I dx^a dx^b. \quad (2.138)$$

Portanto a ação total é

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} d^2x \eta_{IJ} \varepsilon^{ab} \left[\dot{e}_a^I (\omega_b^J - \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} e_b^J) + \dot{\omega}_a^I (\omega_b^J - \frac{1}{\gamma} e_b^J) \right] + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \sigma \Lambda} \int_{\mathbb{R}} \left[\mathcal{G}_1(\omega_t - \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} e_t) + \mathcal{G}_2(e_t - \frac{1}{\gamma} \omega_t) \right], \quad (2.139)$$

onde se define

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(\lambda) &\equiv -\frac{\kappa}{2} \frac{\gamma^2 - \sigma \Lambda}{\gamma^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} d^2x \eta_{IJ} \lambda^I T_{ab}^J \varepsilon^{ab}, \\ \mathcal{G}_2(\lambda) &\equiv -\frac{\kappa}{2} \frac{\gamma^2 - \sigma \Lambda}{\gamma^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} d^2x \eta_{IJ} \lambda^I (R_{ab}^J + \epsilon^J{}_{KL} e_a^K e_b^L) \varepsilon^{ab}. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Os momentos canônicos são obtidos a partir da variação do termo cinético, eles definem os vínculos primários que se escrevem

$$\begin{aligned} \chi_{(e)I} &\equiv P_{(e)I}^t \approx 0, \\ \chi_{(\omega)I}^t &\equiv P_{(\omega)I}^t \approx 0, \\ \chi_{(e)I}^a &\equiv P_{(e)I}^a + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{ab} \eta_{IJ} (\omega_b^J - \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} e_b^J) \approx 0, \\ \chi_{(\omega)I}^a &\equiv P_{(\omega)I}^a + \frac{\kappa}{2} \varepsilon^{ab} \eta_{IJ} (e_b^J - \frac{1}{\gamma} \omega_b^J) \approx 0. \end{aligned} \quad (2.141)$$

A análise canônica não é muito diferente da análise feita para a teoria de Chern–Simons (veja a [seção 2.2.4](#)). Não é necessário repetir a análise toda, por exemplo, identificamos diretamente $\rho \equiv \omega_t - \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} e_t$ e $\tau \equiv e_t - \frac{1}{\gamma} \omega_t$ na (2.139) como multiplicadores de Lagrange onde \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são os vínculos de Gauss que resultam da análise de estabilidade dos vínculos primários $\chi_{(e)I}^t$ e $\chi_{(\omega)I}^t$. Os demais vínculos são de segunda classe como pode ser verificado a partir da matriz de vínculos

$$C_{IJ}^{ab} = \{\chi, \chi\}_{IJ}^{ab} = \kappa \eta_{IJ} \varepsilon^{ab} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \Lambda}{\gamma} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \kappa \eta_{IJ} \varepsilon^{ab} \Delta \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.142)$$

onde

$$\Delta \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\Lambda}{\gamma} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta^{-1} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \sigma\Lambda} \begin{pmatrix} \frac{\sigma\Lambda}{\gamma} & 1 \\ 1 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}. \quad (2.143)$$

A inversa (no sentido da convolução) de C é

$$(C^{-1})_{ab}^{IJ} = -\kappa^{-1}\eta^{IJ}\varepsilon_{ab}\Delta^{-1}\delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (2.144)$$

Define-se agora os colchetes de Dirac

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \chi_I^b\}(C^{-1})_{ab}^{IJ}\{\chi_J^b, g\}, \quad (2.145)$$

$$= \{f, g\} - \eta^{IJ}\varepsilon_{ab}\{f, \chi_I^a\}\Delta^{-1} * \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') * \{g, \chi_J^b\}. \quad (2.146)$$

Seguidamente fazemos dos vínculos de segunda classe igualdades fortes, $\chi = 0$, e resolvendo-os eliminamos os momentos $P_{(e)I}^a$ e $P_{(\omega)J}^b$ em favor de e_a^I e ω_b^J . Como consequência disto o espaço de fase inicial é reduzido à metade. Os campos e_a^I e ω_a^I definem os pontos do novo espaço de fase onde a estrutura simpléctica é dada pelos colchetes de Dirac fundamentais²⁵

$$\begin{aligned} \{e_a^I(\mathbf{x}), e_b^J(\mathbf{x}')\} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{ab}\eta^{IJ}\frac{\gamma}{\sigma\Lambda - \gamma^2}\delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \\ \{\omega_a^I(\mathbf{x}), \omega_b^J(\mathbf{x}')\} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{ab}\eta^{IJ}\frac{\sigma\Lambda\gamma}{\sigma\Lambda - \gamma^2}\delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \\ \{e_a^I(\mathbf{x}), \omega_b^J(\mathbf{x}')\} &= \frac{1}{\kappa}\varepsilon_{ab}\eta^{IJ}\frac{\gamma^2}{\sigma\Lambda - \gamma^2}\delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (2.147)$$

Usando estes colchetes, mostra-se que os vínculos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 definidos na (2.140) formam uma álgebra fechada dada por

$$\begin{aligned} \{\mathcal{G}_1(\rho), \mathcal{G}_1(\tau)\} &= \sigma\mathcal{G}_1(\rho \times \tau) + \frac{\sigma\Lambda}{\gamma}\mathcal{G}_2(\rho \times \tau), \\ \{\mathcal{G}_1(\tau), \mathcal{G}_2(\rho)\} &= \mathcal{G}_1(\tau \times \rho) + \frac{\sigma\Lambda}{\gamma}\mathcal{G}_2(\tau \times \rho), \\ \{\mathcal{G}_2(\tau), \mathcal{G}_2(\rho)\} &= \mathcal{G}_2(\tau \times \rho) + \frac{1}{\gamma}\mathcal{G}_1(\tau \times \rho), \end{aligned} \quad (2.148)$$

com $(\rho \times \tau)^I \equiv \varepsilon^I{}_{JK}\rho^J\tau^K$, e os parâmetros das transformações definidos como

$$\rho(\mathbf{x}) \equiv \rho^I(\mathbf{x})(P_I + \frac{\sigma\Lambda}{\gamma}J_I), \quad \tau(\mathbf{x}) \equiv \tau^I(\mathbf{x})(J_I + \frac{1}{\gamma}P_I),$$

sendo estes uma mistura de translações e transformações de Lorentz. Uma vez que estes vínculos são de primeira classe, estes consequentemente geram transformações

²⁵Daqui em diante suprimimos o índice D. (Veja a [Nota de rodapé 21](#)).

de calibre infinitesimais dos campos:

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{G}_1(\rho), \omega_a^I(\mathbf{x})\} &= D_a \rho^I(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma} (e_a \times \rho)^I(\mathbf{x}), \\
\{\mathcal{G}_1(\rho), e_a^I(\mathbf{x})\} &= (e_a \times \rho)^I(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma} D_a \rho^I(\mathbf{x}), \\
\{\mathcal{G}_2(\tau), \omega_a^I(\mathbf{x})\} &= (e_a \times \tau)^I(\mathbf{x}) + \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} D_a \tau^I(\mathbf{x}), \\
\{\mathcal{G}_2(\tau), e_a^I(\mathbf{x})\} &= D_a \tau^I(\mathbf{x}) + \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} (e_a \times \tau)^I(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{2.149}$$

A álgebra dos vínculos (2.148) e as transformações (2.149) geradas por estes certamente são uma versão não diagonal da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ ($\mathfrak{so}(4)$) em cada ponto do espaço, com as transformações de calibre sendo uma mistura dos setores tipo YM e topológicos. A escolha dos vínculos \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 é aparentemente justificada pela simplicidade destes (são os vínculos usuais da gravitação em 3D), apesar do fato que estes satisfazem uma álgebra pouco convencional.

Finalmente, a dinâmica da teoria é puro calibre, como se aprecia do Hamiltoniano completamente vinculado escrito como

$$H = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{G}_1(\omega_t - \frac{\sigma \Lambda}{\gamma} e_t) + \mathcal{G}_2(e_t - \frac{1}{\gamma} \omega_t) \right]. \tag{2.150}$$

Para fechar esta seção, repare primeiramente que no limite $\gamma \rightarrow \infty$, o termo exótico desaparece e recuperamos a estrutura canônica da gravitação em 3D padrão. Por exemplo de (2.147) se observa que o único colchete não trivial é $\{\omega, e\}$. No limite $\gamma \rightarrow 0$ o termo exótico é dominante, neste caso os colchetes de Dirac não triviais são $\{e, e\}$ e $\{\omega, \omega\}$ (este caso deve-se analisar desde a definição da Lagrangiana). Finalmente temos o caso $\Lambda = 0$, que implica que a conexão “comuta” a respeito do colchete de Dirac).

Comentários finais sobre a gravitação e sua relação com a teoria de Chern–Simons. O termo exótico $\eta_{IJ} e^I T^J$ da gravitação em 3D, e o termo termo de Holst $e_I e_J R^{IJ}$ da gravitação em 4D surgem também como a generalização da gravitação de Lovelock no caso das “séries torcionais” [?]. Os termos exóticos estão intimamente relacionados com os invariantes topológicos de Chern–Pontryagin e Nieh–Yan, respectivamente.

Por outro lado, é importante mencionar que na literatura existe a teoria chamada “Gravitação massiva topológica” (TMG) ou “Gravitação de Chern–Simons” [22] definida como a ação de Hilbert Einstein mais um termo de Chern–Simons:

$$\begin{aligned}
S_{\text{mass}} &= S_{\text{HE}} + m S_{\text{CS}} = \int_{\mathcal{M}_3} \eta_{IJ} e^I R^J(e) + m CS(\omega(e)), \\
CS(\omega) &= \eta_{IJ} (\omega^I d\omega^J + \frac{1}{3} \omega^I [\omega, \omega]^J).
\end{aligned}$$

À primeira vista esta ação equivale à ação geral (2.132) quando $\gamma \equiv -1/m$, e $\Lambda = 0$. Porém, note que na S_{mass} a conexão de spin é compatível com o *co-frame*. Em outras palavras, a TMG é para o modelo de Bonzom–Livine o que a ação de Einstein–Hilbert é para a ação de Einstein–Palatini, sendo que a primeira se apresenta no formalismo de segunda ordem enquanto a segunda no de primeira.

É possível estender a ideia original da TMG no caso da teoria de Einstein–Cartan [63, 64, 65], onde além do termo de Chern–Simons usual, se adiciona também um termo de Chern–Simons “translacional” $CS^{\text{trans}} = \eta_{IJ} e^I T^J$. A ação desta classe de teorias é

$$S_{\text{EC+mass}} = \int_{\mathcal{M}_3} eR + \alpha_1 e^3 + \alpha_2 CS(\omega) + \alpha_3 CS^{\text{trans}}(\omega, e).$$

É importante mencionar que, dependendo das constantes de acoplamento α_i , ($i = 1, 2, 3$), $T = 0$ não é necessariamente uma equação de movimento. O modelo de Bonzom–Livine pode ser considerado o caso particular desta classe de teorias onde $\alpha_1 = \Lambda$, $\alpha_2 = -\Lambda/\gamma$ e $\alpha_3 = -1/\gamma$.

3 Calibre axial

Tomando como ponto de partida o modelo de Bonzom–Livine [33] exposto no capítulo anterior, propomos um esquema alternativo para a análise canônica deste modelo. A estratégia consiste basicamente de duas etapas. A seguinte análise é sempre feita no caso $\Lambda \neq 0$. Na primeira etapa, seção 3.1, separamos as componentes dos campos que correspondem ao setor não compacto do grupo de calibre $SO(3,1)$, e os campos que correspondem ao setor compacto do grupo. O setor não compacto é associado aos “*boosts*” de de Sitter, sendo estes três em total: duas correspondendo às transformações de Lorentz e uma translação (não compacta) na direção da componente temporal. O setor compacto do grupo corresponde às “rotações” de de Sitter, correspondendo a uma rotação espacial e duas translações espaciais. O setor compacto dos campos forma uma conexão $SO(3)$ (ou $SU(2)$). Os vínculos são escritos numa base não diagonal na qual, apesar destes terem uma forma complicada, tem a vantagem que sua álgebra é simples. Na segunda etapa, guiados pelo formalismo de Ashtekar–Barbero da gravitação em 3+1 dimensões [29, 38], propomos na seção 3.2 um novo conjunto de variáveis canônicas que simplificam significativamente a forma dos vínculos da gravitação em 3D no segundo o modelo de Bonzom–Livine. No caso particular em que $\sigma = \gamma^2$ (onde $\sigma = \pm 1$ separa os casos Lorentziano e Riemanniano, e γ é o parâmetro de Barbero–Immirzi), a gravitação em 3D adota a forma de uma teoria complexificada de Chern–Simons com grupo de calibre compacto $SO(3)$. Para evitar a dificuldade que implica trabalhar com uma teoria complexificada, restringimos o caso $\gamma \in \mathbb{R}$. O passo crucial, feito na seção 3.3, para simplificar o modelo no caso $\gamma \in \mathbb{R}$, é dado através de uma fixação de calibre axial que reduz a simetria $SO(3,1)$ da gravitação em 3D a uma teoria de Chern–Simons rela com grupo compacto $SO(3)$.

3.1 Variante da análise canônica do modelo de Bonzom–Livine.

Para fins práticos especializamos o caso $\Lambda > 0$, o caso $\Lambda < 0$ segue em essência a mesma linha de raciocínio. Mantemos aberta a possibilidade de trocar entre os modelos Lorentziano e Riemanniano através do parâmetro $\sigma = \pm 1$. Com estas convenções o grupo de calibre é $SO(3,1)$ no caso $\sigma = -1$ e $SO(4)$ no caso $\sigma = 1$.

Considere novamente a ação geral (2.132)

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} \langle \Omega, d\Omega + \frac{2}{3}\Omega^2 \rangle_1 + \frac{\kappa}{2\gamma} \int_{\mathcal{M}_3} \langle \Omega, d\Omega + \frac{2}{3}\Omega^2 \rangle_2. \quad (3.1)$$

Em vez de escrever a conexão como $\Omega = e + \omega$ consideramos a seguinte variante

$$\Omega = A^i L_i + B^i K_i = A^i_\mu L_i dx^\mu + B^i_\mu K_i dx^\mu, \quad (3.2)$$

com L_i os geradores das “rotações” e K_i os geradores dos “*boosts*” do grupo de Sitter. Nesta fórmula $i, j, \dots = 1, 2, 3$ e são levantados e baixados com a delta de Kronecker, δ_{ij} . Os geradores do grupo satisfazem as relações de comutação da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ij}{}^k L_k \quad [L_i, K_j] = \epsilon_{ij}{}^k K_k, \quad [K_i, K_j] = \sigma \epsilon_{ij}{}^k L_k. \quad (3.3)$$

Note que $\mathbf{A} = A^i L_i$ é identificada com uma conexão $SO(3)$ (ou $SU(2)$). Se comparamos a conexão \mathbf{A} com a conexão de spin $\boldsymbol{\omega} = \omega^I J_I$, a primeira tem a vantagem de ser definida sobre um grupo compacto. As relações entre as variáveis (\mathbf{A}, \mathbf{B}) e $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e})$ são

$$(L_1, L_2, L_3) = (P_2/\sqrt{\Lambda}, -P_1/\sqrt{\Lambda}, \sigma J_0), \quad (3.4)$$

$$(K_1, K_2, K_3) = (J_2, -J_1, P_0/\sqrt{\Lambda}), \quad (3.5)$$

$$(A^1, A^2, A^3) = (\sqrt{\Lambda}e^2, -\sqrt{\Lambda}e^1, \sigma\omega^0), \quad (3.6)$$

$$(B^1, B^2, B^3) = (\omega^2, -\omega^1, \sqrt{\Lambda}e^0). \quad (3.7)$$

Na seção [seção 2.3](#) vimos que o grupo $SO(3, 1)$ possui duas formas quadráticas na álgebra cada uma relacionada com um dos operadores de Casimir do grupo. Na base (L, K) as formas quadráticas se leem¹

$$\begin{aligned} \langle \Omega, \Omega' \rangle_1 &= \langle A + B, A' + B' \rangle_1 = A \cdot B' + B \cdot A' \\ \langle \Omega, \Omega' \rangle_2 &= \langle A + B, A' + B' \rangle_2 = A \cdot A' + \sigma B \cdot B'. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substituindo as formas quadráticas (3.8) na ação geral (3.1) obtemos o seguinte:

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} \left(2B \cdot F_A + \frac{\sigma}{3} B \cdot (B \times B) \right) + \frac{\kappa}{2\gamma} \int_{\mathcal{M}_3} (CS(A) + \sigma B \cdot D_A B), \quad (3.9)$$

onde

$$\begin{aligned} F_A &\equiv dA + \frac{1}{2} A \times A, & D_A B &\equiv dB + A \times B, \\ CS(A) &\equiv A \cdot dA + \frac{1}{2} A \cdot (A \times A). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Seguindo com a análise, aplicamos as técnicas desenvolvidas no [capítulo 2](#) no que se refere ao formalismo canônico. Tínhamos visto que o primeiro passo é separar a

¹Dado que os índices de grupo são contraídos com a métrica dada pela δ -Kronecker, resulta vantajoso adotar uma notação vetorial: $A \cdot B = \delta_{ij} A^i B^j$, $(A \times B)_i = \epsilon_{ijk} A^j B^k$, etc.

conexão numa parte temporal e outra espacial, i.e. $\Omega = \Omega_t + \mathbf{\Omega}$. Fazendo isto, a ação adquire a forma

$$\Omega = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_2} \left(\langle \dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega} \rangle_1 + 2\langle \Omega_t, \mathbf{F}\mathbf{\Omega} \rangle_1 - \frac{1}{\gamma} \langle \dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega} \rangle_2 - \frac{2}{\gamma} \langle \Omega_t, \mathbf{F}\mathbf{\Omega} \rangle_2 \right), \quad (3.11)$$

Usando novamente as formas quadráticas definidas em (3.8) temos que

$$S = \int_{\mathbb{R}} dt (\mathcal{L}_{\text{kin}} - \mathcal{G}(A_t) - \mathcal{G}_0(B_t)), \quad (3.12)$$

onde definimos as quantidades

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} \equiv -\frac{\kappa}{2} \int_{\Sigma_2} \left(\dot{\mathbf{B}} \cdot \left(\mathbf{A} - \frac{\sigma}{\gamma} \mathbf{B} \right) + \dot{\mathbf{A}} \cdot \left(\mathbf{B} - \frac{1}{\gamma} \mathbf{A} \right) \right), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{G}(A_t) \equiv \kappa \int_{\Sigma_2} A_t \cdot \left(\mathbf{D}\mathbf{B} - \frac{1}{\gamma} (\mathbf{F}\mathbf{A} + \frac{\sigma}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{B}) \right), \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G}_0(B_t) \equiv \kappa \int_{\Sigma_2} B_t \cdot \left(\mathbf{F}\mathbf{A} + \frac{\sigma}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{B} - \frac{\sigma}{\gamma} \mathbf{D}\mathbf{B} \right), \quad (3.15)$$

junto com as definições já conhecidas $\mathbf{F}\mathbf{A} = \mathbf{d}\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ e $\mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{d}\mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

O passo seguinte na análise não difere muito do que foi feito na (seção 2.3.3). Observamos diretamente que a teoria definida em (3.12) é completamente vinculada. Os momentos conjugados $\Pi_i^{(A_t)}$ e $\Pi_i^{(B_t)}$ de A_t^i e B_t^i são vínculos primários ((seção 2.1.2) e (seção 2.2.4)), enquanto que $\mathcal{G}(A_t)$ e $\mathcal{G}_0(B_t)$ são vínculos secundários que resultam da estabilidade de $\Pi_i^{(A_t)}$ e $\Pi_i^{(B_t)}$. Segue-se então que A_t^i e B_t^i são multiplicadores de Lagrange na teoria. Entretanto, também temos os vínculos primários que envolvem os momentos conjugados de A_a^i e B_a^i . Comparando aos termos cinéticos de (3.12) com (2.139) notamos que a estrutura simplética mantém a mesma estrutura mas com as substituições $\sigma\Lambda \rightarrow \sigma$, $e_a \rightarrow B_a$, $\omega_a \rightarrow A_a$, portanto, escrevemos diretamente a estrutura simplética do espaço reduzido²:

$$\begin{aligned} \{A_a^i(\mathbf{x}), B_b^j(\mathbf{x}')\} &= \frac{1}{\kappa} \varepsilon_{ab} \delta^{ij} \frac{\gamma^2}{\sigma - \gamma^2} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \\ \{A_a^i(\mathbf{x}), A_b^j(\mathbf{x}')\} &= \frac{1}{\kappa} \varepsilon_{ab} \delta^{ij} \frac{\sigma\gamma}{\sigma - \gamma^2} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \\ \{B_a^i(\mathbf{x}), B_b^j(\mathbf{x}')\} &= \frac{1}{\kappa} \varepsilon_{ab} \delta^{ij} \frac{\gamma}{\sigma - \gamma^2} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Destas relações vemos que as 12 componentes que conformam os campos \mathbf{A} e \mathbf{B} são divididas em 6 variáveis de configuração e 6 momentos conjugados. Comparando (3.16) com (2.147) notamos que elas tem a mesma estrutura, mas repare que no presente caso a métrica interna é δ^{ij} enquanto que no segundo caso é a métrica

²Lembre que estes colchetes são, na verdade, de Dirac (veja Nota de rodapé 21).

de Minkowski η^{IJ} . Além disso, os campos \mathbf{A} e \mathbf{B} são combinações de *co-frames* e conexões de spin (veja (3.4)).

Realizando a transformação de Legendre usual, obtemos o Hamiltoniano clássico completamente vinculado

$$H = \mathcal{G}(A_t) + \mathcal{G}_0(B_t), \quad (3.17)$$

com A_t e B_t os multiplicadores de Lagrange.

Note que a definição dos vínculos \mathcal{G} e \mathcal{G}_0 resulta pouco atrativa. Por exemplo, comparando com (2.140), podemos definir os vínculos como

$$\tilde{\mathcal{G}}(\lambda) = \kappa \int_{\Sigma_2} \lambda \cdot (\mathbf{F}_A + \frac{\sigma}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_0(\rho) = \kappa \int_{\Sigma_2} \rho \cdot \mathbf{D}_A \mathbf{B}. \quad (3.19)$$

Contudo, estes vínculos satisfazem uma álgebra sob os colchetes de Dirac não diagonal (veja (2.148)). Não é o caso dos vínculos \mathcal{G} e \mathcal{G}_0 , eles satisfazem a álgebra simples,

$$\{\mathcal{G}(\varepsilon), \mathcal{G}(\varepsilon')\} = \mathcal{G}(\varepsilon \times \varepsilon'), \quad (3.20)$$

$$\{\mathcal{G}(\varepsilon), \mathcal{G}_0(\varepsilon')\} = \mathcal{G}_0(\varepsilon \times \varepsilon'), \quad (3.21)$$

$$\{\mathcal{G}_0(\varepsilon), \mathcal{G}_0(\varepsilon')\} = \sigma \mathcal{G}(\varepsilon \times \varepsilon'). \quad (3.22)$$

Podemos reconhecer aqui a estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3, 1)$ (ou $\mathfrak{so}(4)$), em total acordo com o fato que os vínculos de primeira classe gerarem as transformações de calibre locais. Da mesma forma, as transformações de calibre infinitesimais geradas pelos vínculos são (compare com (2.149))

$$\delta_{\mathcal{G}(\varepsilon)} \mathbf{A} = \{\mathbf{A}, \mathcal{G}(\varepsilon)\} = \mathbf{D}\varepsilon, \quad (3.23)$$

$$\delta_{\mathcal{G}(\varepsilon)} \mathbf{B} = \{\mathbf{B}, \mathcal{G}(\varepsilon)\} = \mathbf{B} \times \varepsilon;$$

$$\delta_{\mathcal{G}_0(\varepsilon)} \mathbf{A} = \{\mathbf{A}, \mathcal{G}_0(\varepsilon)\} = \sigma \mathbf{B} \times \varepsilon,$$

$$\delta_{\mathcal{G}_0(\varepsilon)} \mathbf{B} = \{\mathbf{B}, \mathcal{G}_0(\varepsilon)\} = \mathbf{D}\varepsilon,$$

com $\mathbf{D} = \mathbf{d} + \mathbf{A} \times$.

As transformações de calibre estão relacionadas, *on-shell*, como os difeomorfismos locais. Isto pode se pode mostrar se aplicamos a derivada de Lie, $\mathcal{L}_\xi = \mathbf{d}\iota_\xi + \iota_\xi \mathbf{d}$, aos campos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \mathbf{A} &= \mathbf{D}(\iota_\xi \mathbf{A}) + \sigma \mathbf{B} \times (\iota_\xi \mathbf{B}) + \text{Eq. de movimento}, \\ \mathcal{L}_\xi \mathbf{B} &= \mathbf{D}(\iota_\xi \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\iota_\xi \mathbf{A}) + \text{Eq. de movimento}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Por comparação com (3.23) identificamos em (3.24) as transformações de calibre infinitesimais com parâmetros $(\varepsilon, \varepsilon') = (\iota_\xi \mathbf{A}, \iota_\xi \mathbf{B})$, módulo equações de campo. É ilustrativo escrever então

$$\delta_\xi^{\text{Diff}} \mathbf{A} \approx \delta_{\mathcal{G}(\iota_\xi \mathbf{A})} \mathbf{A} + \delta_{\mathcal{G}_0(\iota_\xi \mathbf{B})} \mathbf{A}, \quad (3.25)$$

$$\delta_\xi^{\text{Diff}} \mathbf{B} \approx \delta_{\mathcal{G}(\iota_\xi \mathbf{A})} \mathbf{B} + \delta_{\mathcal{G}_0(\iota_\xi \mathbf{B})} \mathbf{B}. \quad (3.26)$$

Em resumo, a análise canônica apresentada nesta seção difere em dois aspectos importantes da análise apresentada no modelo de Bonzom e Livine. A primeira é que combinamos as componentes do *co-frame* e a conexão de spin de tal forma que obtemos uma conexão \mathbf{A} definida sobre um grupo compacto $SU(2)$. A segunda diferença é a escolha não diagonal dos vínculos em favor de uma álgebra simples.

Nota sobre a base na proposta de Bonzom e Livine. É possível escrever os vínculos definidos por Bonzom e Livine na base não diagonal, temos assim

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}}_1(e_t) &= -\kappa \int_{\Sigma_2} \eta_{IJ} e_t^I \left((\mathbf{R} + \mathbf{e}^2)^J - \frac{\sigma\Lambda}{\gamma} \mathbf{T}^J \right), \\ \tilde{\mathcal{G}}_2(\omega_t) &= -\kappa \int_{\Sigma_2} \eta_{IJ} \omega_t^I \left(\mathbf{T}^J - \frac{1}{\gamma} (\mathbf{R} + \mathbf{e}^2)^J \right).\end{aligned}$$

Pode-se interpretar esta base como uma “rotação” dos vínculos originais em (2.140):

$$\tilde{\mathcal{G}} = \frac{1}{\det \Delta} \Delta \mathcal{G},$$

onde Δ foi definida em (2.142). Na base “til” a álgebra é “diagonal”:

$$\begin{aligned}\{\tilde{\mathcal{G}}_2(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_2(\eta')\} &= \tilde{\mathcal{G}}_2(\eta \times \eta'), \\ \{\tilde{\mathcal{G}}_1(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_2(\eta')\} &= \tilde{\mathcal{G}}_1(\eta \times \eta'), \\ \{\tilde{\mathcal{G}}_1(\eta), \tilde{\mathcal{G}}_1(\eta')\} &= \sigma\Lambda \tilde{\mathcal{G}}_2(\eta \times \eta'),\end{aligned}$$

e as transformações de infinitesimais são

$$\begin{aligned}\{\tilde{\mathcal{G}}_1(\varepsilon), \mathbf{e}\} &= D\varepsilon, & \{\tilde{\mathcal{G}}_1(\varepsilon), \boldsymbol{\omega}\} &= \sigma\Lambda\varepsilon \times \mathbf{e}, \\ \{\tilde{\mathcal{G}}_2(\varepsilon'), \mathbf{e}\} &= \varepsilon' \times \mathbf{e}, & \{\tilde{\mathcal{G}}_2(\varepsilon'), \boldsymbol{\omega}\} &= D\varepsilon'.\end{aligned}$$

3.2 Troca de variáveis

Compare o termo cinético da ação (3.12) na gravitação em 3D e o termo cinético na ação (2.42). Compare também os vínculos (3.14) e (3.15) com os vínculos vetoriais (2.45) e escalar (2.46) no caso em 4D. A semelhança é mais que evidente. Baseados nesta fato, definamos então a seguinte transformação dos campos:

$$\mathcal{A} \equiv \mathbf{A} - \gamma \mathbf{B}, \tag{3.27}$$

$$\mathcal{B} \equiv \mathbf{B}. \tag{3.28}$$

O interessante destas variáveis é que \mathcal{A} e \mathcal{B} “comutam” com relação aos colchetes de Dirac, como é verificado do seguinte

$$\{\mathcal{A}_a^i(\mathbf{x}), \mathcal{B}_b^j(\mathbf{x}')\} = 0, \tag{3.29}$$

$$\{\mathcal{A}_a^i(\mathbf{x}), \mathcal{A}_b^j(\mathbf{x}')\} = \frac{\gamma}{\kappa} \varepsilon_{ab} \delta^{ij}, \tag{3.30}$$

$$\{\mathcal{B}_a^i(\mathbf{x}), \mathcal{B}_b^j(\mathbf{x}')\} = \frac{1}{\kappa} \varepsilon_{ab} \delta^{ij} \frac{\gamma}{\sigma - \gamma^2} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{3.31}$$

Em termos destas variáveis, a forma da ação e dos vínculos também são simplificados significativamente,

$$S = \frac{\kappa}{2\gamma} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} (\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} + (\sigma - \gamma^2) \dot{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{B}) - \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{G}(A_t) + \mathcal{G}(B_t)), \quad (3.32)$$

e os vínculos são (enfatizamos que os multiplicadores de Lagrange não são variáveis caligráficas!)

$$\mathcal{G}(A_t) \equiv -\frac{\kappa}{\gamma} \int_{\Sigma_2} A_t \cdot \left(\mathcal{F}_{\mathcal{A}} + (\sigma - \gamma^2) \frac{1}{2} \mathcal{B} \times \mathcal{B} \right), \quad (3.33)$$

$$\mathcal{G}_0(B_t) \equiv \kappa \int_{\Sigma_2} B_t \cdot \left(\mathcal{F}_{\mathcal{A}} - \frac{1}{\gamma} (\sigma - \gamma^2) \mathcal{D}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} - \frac{1}{2} (\sigma - \gamma^2) \mathcal{B} \times \mathcal{B} \right), \quad (3.34)$$

onde

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \mathbf{d}\mathcal{A} + \frac{1}{2} \mathcal{A} \times \mathcal{A}, \quad (3.35)$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = \mathbf{d}\mathcal{B} + \mathcal{A} \times \mathcal{B}. \quad (3.36)$$

Note a semelhança do termo cinético nesta ação com a que se tem no formalismo de Ashtekar–Barbero (2.47). Também repare que os vínculos \mathcal{G} e \mathcal{G}_0 são praticamente os mesmos que os vínculos vetoriais e escalar (2.50), (2.51).

Temos uma chance de simplificar notavelmente os vínculos fazendo a escolha $\sigma = \gamma^2$, e definindo $\mathcal{A}_t = A_t - \gamma B_t$. Temos então

$$S = \frac{\kappa}{2\gamma} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} (\dot{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{A} + 2\mathcal{A}_t \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{A}}). \quad (3.37)$$

No modelo Euclidiano isto significa que $\gamma = 1$ entretanto no modelo Lorentziano temos $\gamma = i$, neste último caso a teoria se torna complexificada. Reconhecemos nesta ação a teoria de Chern–Simons definida sobre o grupo compacto $\text{SO}(3)$ ou $\text{SU}(2)$. Este resultado é o análogo 2+1 dimensional da ação (2.52). Uma conexão deste tipo, apesar de muito interessante padece das mesmas dificuldades da conexão de Ashtekar em 3+1 dimensões, basicamente no referente à medida de integração no grupo, como será detalhado no capítulo 4.

Para levar a analogia ainda além das variáveis de Ashtekar devemos manter γ arbitrário e eliminar o setor não compacto dos geradores através de uma escolha apropriada de calibre, tal como foi feita na seção 2.1.3 para a gravitação em 4D, onde o calibre temporal faz o trabalho desejado. Qual o calibre, se existir, no caso 2+1 que reduz o grupo $\text{SO}(3,1)$ a $\text{SO}(3)$? Repare que o efeito importante na escolha $\sigma = \gamma^2$ é o desaparecimento de todos os termos que envolvem \mathcal{B} . Isto representa um indício do calibre buscado. Considere por exemplo a fixação $\mathcal{B}_y^i = 0$, ela consiste em três condições de calibre, uma para cada setor não compacto do grupo $\text{SO}(3,1)$. Agora, pelo fato que estamos em duas dimensões espaciais os termos do tipo $(\mathcal{B} \times \mathcal{B})^i = \epsilon^{ijk} \mathcal{B}_a^j \mathcal{B}_b^k \epsilon^{ab} dx^2$ são automaticamente removidos, como é desejado. Analisaremos em detalhe esta ideia na próxima seção.

3.3 Calibre axial

Queremos fixar o calibre parcialmente de tal maneira que a simetria residual seja compacta, isto é $SO(3)$. A seguinte análise é válida para o caso em que o grupo de calibre é $SO(3,1)$. A condição de calibre $B_y^i \approx 0$ deve ser compatível com o procedimento de Dirac³: a fixação envolve simplesmente variáveis do espaço de fase e conduz à presença de vínculos de segunda classe tal que o número deles é o dobro das condições da calibre. O esquema consiste em acrescentada a condição de calibre à ação como um novo vínculo. Temos assim um novo conjunto de vínculos aos quais devemos aplicar o formalismo de sistemas vinculados como é a análise de estabilidade, a identificação dos vínculos de segunda classe e finalmente a introdução dos colchetes de Dirac (seção 2.1.2.1). Veremos que a fixação reduz a simetria do grupo da forma desejada.

A ideia básica do calibre axial pode ser entendida de forma simples como segue. Lembre a ação (3.32) em termos das variáveis caligráficas,

$$S = \frac{\kappa}{2\gamma} \int_{\Sigma_2} (\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} + (\sigma - \gamma^2) \dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{B}) - \mathcal{G}(A_t) - \mathcal{G}(B_t) \quad (3.38)$$

com $\mathcal{G}(A_t)$ e $\mathcal{G}(B_t)$ dados pelas equações (3.33) e (3.34). No calibre axial $B_y^i = 0$ temos

$$\mathcal{A}_x^i = A_x^i - B_x^i, \quad (3.39)$$

$$\mathcal{A}_y^i = A_y^i, \quad (3.40)$$

$$\mathcal{B}_x^i = B_x^i. \quad (3.41)$$

Dado que esta condição de calibre é algébrica, pode ser, em primeira instância, diretamente aplicada na Lagrangiana. Fazendo isso obtemos

$$S = \frac{\kappa}{2\gamma} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Sigma_2} (\dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} + 2A_t \cdot \mathcal{F}_{\mathcal{A}}) + \int_{\mathbb{R}} \mathcal{G}_0(B_t), \quad (3.42)$$

onde

$$\mathcal{G}_0(B_t) = \kappa \int_{\Sigma_2} B_t \cdot \left(\mathcal{F}_{\mathcal{A}} - \frac{1}{\gamma} (\sigma - \gamma^2) D_{\mathcal{A}} \mathbf{B} \right) \quad (3.43)$$

$$= \kappa \int_{\Sigma_2} B_t \cdot \left(\partial_x A_y - \partial_y (A_x - \frac{\sigma}{\gamma} B_x) + (A_x - \frac{\sigma}{\gamma} B_x) \times A_y \right). \quad (3.44)$$

O primeiro termo na ação (3.42) corresponde a uma teoria de Chern–Simons definida sobre um grupo compacto $SU(2)$. O segundo termo, $\mathcal{G}_0(B_t)$, antes um vínculo de primeira classe responsável de gerar os “*boost*”, é agora necessariamente de segunda classe pois se ele fosse de primeira classe ele geraria transformações de calibre em B_y^i , o que não é permitido. Então o vínculo $\mathcal{G}_0(B_t)$ deve ser em princípio

³Estamos seguindo a terminologia de [66].

resolvido de tal forma que um dos campos A_x , A_y e B_x seja escrito em termos dos restantes campos. Por exemplo, $B_x = B_x(A_x, A_y)$. Uma vez feito isto podemos fazer $\mathcal{G}_0(B_t) = 0$ na ação. A teoria final é uma teoria de Chern–Simons com conexão real $SU(2)$.

Para proceder com a demonstração rigorosa, escrevamos o Hamiltoniano (3.17) acrescentando a condição de calibre como um novo vínculo

$$B_y^i \approx 0, \quad (3.45)$$

usando o (campo) multiplicador de Lagrange $\mu(x)$:

$$H = \mathcal{G}(A_t) + \mathcal{G}_0(B_t) + \int_{\Sigma_2} dx^2 \mu_i(\mathbf{x}) B_y^i(\mathbf{x}). \quad (3.46)$$

Acontece que o vínculo dado pela fixação de calibre junto com o vínculo \mathcal{G}_0 definido em (3.15) são de segunda classe, pois a matriz formada pelos colchetes de Poisson,

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{pmatrix} \{\mathcal{G}_0^i(\mathbf{x}), \mathcal{G}_0^j(\mathbf{x}')\} & \{\mathcal{G}_0^i(\mathbf{x}), B_y^j(\mathbf{x}')\} \\ \{B_y^i(\mathbf{x}), \mathcal{G}_0^j(\mathbf{x}')\} & \{B_y^i(\mathbf{x}), B_y^j(\mathbf{x}')\} \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (\delta_{ij} \partial_y + \epsilon_{ijk} A_y^k) \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.48)$$

é (fracamente) não singular. Seguindo a prescrição de Dirac–Bergman, introduzimos o colchete de Dirac (seção 2.1.2)

$$\{M, N\}_D = \{M, N\} - \{M, \chi_\alpha\} * (C^{-1})^{\alpha\beta} * \{\chi_\beta, N\}, \quad (3.49)$$

onde M e N são duas funções do espaço fase, χ_α , $\alpha = 1, 2$ são os dos vínculos de segunda classe e C^{-1} denota a inversa, no sentido da convolução “*”, da matriz (3.48). Por construção, os colchetes de Dirac entre os vínculos de segunda classe e qualquer função do espaço de fase são identicamente nulos. Aqueles com os campos A_a^i são iguais aos seus colchetes de Poisson (veja (3.16)):

$$\begin{aligned} \{A_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\}_D &= \{A_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\} - \{A_x^i(\mathbf{x}), B_y^k(\mathbf{z})\} * C_{kl}^{-1} * \{\mathcal{G}_0^l(\mathbf{z}'), A_y^j(\mathbf{x}')\} \\ &\quad - \{A_x^i(\mathbf{x}), \mathcal{G}_0^l(\mathbf{z})\} * C_{kl}^{-1} * \{B_y^k(\mathbf{z}'), A_y^j(\mathbf{x}')\}, \\ &= \{A_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\}, \\ &= \frac{1}{\kappa} \delta^{ij} \frac{\sigma\gamma}{\sigma - \gamma^2} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\{\mathcal{G}_0, A_y\} \sim B_y$ (veja (3.23)), sendo portanto nulo no calibre em consideração, e $\{B_y, A_y\} = 0$ (veja (3.16)). De forma similar, e pelos mesmos argumentos, calculamos

$$\begin{aligned} \{B_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\}_D &= \{B_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\} - \{B_x^i(\mathbf{x}), B_y^k(\mathbf{z})\} * C_{kl}^{-1} * \{\mathcal{G}_0^l(\mathbf{z}'), A_y^j(\mathbf{x}')\} \\ &\quad - \{B_x^i(\mathbf{x}), \mathcal{G}_0^l(\mathbf{z})\} * C_{kl}^{-1} * \{B_y^k(\mathbf{z}'), A_y^j(\mathbf{x}')\}, \\ &= \{B_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\}. \end{aligned}$$

O último colchete não trivial a calcular é

$$\begin{aligned} \{B_x^i(\mathbf{x}), A_x^j(\mathbf{x}')\}_D &= \{B_x^i(\mathbf{x}), A_x^j(\mathbf{x}')\} - \{B_x^i(\mathbf{x}), B_y^k(\mathbf{z})\} * C_{kl}^{-1} * \{\mathcal{G}_0^l(\mathbf{z}'), A_x^j(\mathbf{x}')\} \\ &\quad - \{B_x^i(\mathbf{x}), \mathcal{G}_0^l(\mathbf{z})\} * C_{kl}^{-1} * \{B_y^k(\mathbf{z}'), A_x^j(\mathbf{x}')\}. \end{aligned}$$

Estes colchetes não podem ser simplificados usando os argumentos que funcionaram bem no caso dos outros colchetes. Isto não representa obstáculo nenhum, pois lembre que agora \mathcal{G}_0 é um vínculo de segunda classe, portanto ele deve ser fortemente nulo, *i.e.*

$$\partial A_x^i - D_y(A_x^i - \frac{\sigma}{\gamma} B_x^i) \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.50)$$

Em princípio podemos resolver esta equação para B_x^i em termos de A_x^i e A_y^i . Desta forma B_x^i não é uma variável independente, e seu colchete de Dirac com os outros campos não é relevante.

Escrevemos então os únicos colchetes não triviais que são:

$$\{A_x^i(\mathbf{x}), A_y^j(\mathbf{x}')\}_D = \frac{1}{\kappa} \delta^{ij} \frac{\sigma\gamma}{\sigma - \gamma^2} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.51)$$

As variáveis introduzidas em (3.28), no calibre axial $B_y^i = 0$, se escrevem agora como

$$\mathcal{A}_x = A_x - \gamma B_x, \quad \mathcal{A}_y = A_y. \quad (3.52)$$

Usando os colchetes de Dirac (3.51) podemos verificar que estas variáveis formam um par canônico conjugado:

$$\{\mathcal{A}_x^i(\mathbf{x}), \mathcal{A}_y^j(\mathbf{x}')\}_D = \frac{\gamma}{\kappa} \delta^{ij} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (3.53)$$

A Hamiltoniana fica simplesmente

$$H = \mathcal{G}_A(A_t), \quad (3.54)$$

onde o vínculo de primeira classe \mathcal{G}_A é dado por

$$\mathcal{G}_A(\eta) = -\frac{\kappa}{\gamma} \int_{\Sigma_2} d^2x \eta_i(\mathbf{x}) \mathcal{F}_A^i \approx 0, \quad (3.55)$$

com a 2-forma curvatura associada a \mathcal{A} definida como

$$\mathcal{F}_A^i = \partial_x \mathcal{A}_y^i - \partial_y \mathcal{A}_x^i + \varepsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_x^j \mathcal{A}_y^k. \quad (3.56)$$

Pode-se reconhecer em H a Hamiltoniana da teoria de Chern–Simons com conexão \mathcal{A} real definida sobre um grupo compacto $SU(2)$. O vínculo \mathcal{G}_A satisfaz uma álgebra de primeira classe, que se escreve

$$\{\mathcal{G}_A(\eta), \mathcal{G}_A(\eta')\} = \mathcal{G}_A(\eta \times \eta'), \quad (3.57)$$

e gera as transformações de calibre infinitesimais da conexão:

$$\{\mathcal{A}_a^i, \mathcal{G}_A(\eta)\}_D = \partial_a \eta^i + \varepsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_a^j \eta^k. \quad (3.58)$$

Tivemos sucesso em demonstrar que o calibre axial reduz a gravitação 3D com constante cosmológica diferente de zero, e parâmetro de Barbero–Immirzi, a uma teoria de Chern–Simons com conexão $SU(2)$. De fato, as novas variáveis caligráficas podem ser consideradas como as variáveis análogas às variáveis de Ashtekar–Barbero na gravitação em 4D, sendo o calibre axial a contrapartida do o calibre temporal na teoria em 4D. Em ambos casos o setor não compacto da teoria é congelada

Nota sobre os difeomorfismos após a fixação de calibre. É interessante notar que a fixação de calibre $B_y = 0$ também fixa parte da invariância de difeomorfismos espaciais, deixando como invariância residual os difeomorfismos gerados pelos vetores $\xi = (\xi^x, \xi^y)$ com ξ^y uma função independente de y . De fato, sendo $B_y = 0$, então, usando a definição da derivada de Lie temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}B_y &= \partial_y(\xi^b B_b) + \xi^b(\partial_b B_y - \partial_y B_b) \\ &= \partial_y(\xi^x B_x) - \xi^x \partial_y B_x \\ &= \partial_y \xi^x B_x, \end{aligned}$$

que é estável só se $\partial_y \xi^x = 0$. Contudo, a teoria de Chern–Simons em termos da conexão \mathcal{A} (3.52) é novamente completamente invariante de difeomorfismos, como consequência da invariância de calibre sob transformações 3.58, como foi mostrada na (seção 2.2.3), (2.76) (pode consultar também [39]).

Caso anti-de Sitter na gravitação Riemanniana. O formalismo apresentado acima é válido também para $\sigma = -1$ e $\Lambda < 0$, onde o grupo de simetria é $SO(2, 2)$. Após a fixação de calibre a teoria é reduzida a uma teoria de Chern–Simons com conexão real definida sobre o grupo não compacto $SO(2, 1)$. A desvantagem deste modelo é que de momento não é conhecida uma estratégia completa para quantizar uma teoria de calibre sobre um grupo não compacto no contexto da LQG (veja (capítulo 4)). É uma verdadeira lástima pois este modelo contém um dos objetos mais fascinantes na gravitação em 3D que é o buraco negro BTZ (pode consultar [67, 18] e as referências ali citadas). Porém, temos uma alternativa de estudar a quantização da teoria com $\Lambda < 0$, se consideremos $\sigma = 1$, que corresponde à gravitação Riemanniana com constante cosmológica negativa. Podemos denominar este modelo como AdS Riemanniano. O grupo de calibre é novamente do tipo $SO(3, 1)$, e portanto a imposição do calibre axial conduz novamente a uma teoria de Chern–Simons com grupo de calibre residual $SO(3)$ ou $SU(2)$.

Sendo mais específicos, consideremos a conexão (2.109), que escrevemos como

$$\Omega = \omega^i J_i + e^i P_i, \quad (3.59)$$

note que os índices de grupo i, j, \dots tomam os valores 1, 2, 3 e são levantados e baixados com a delta de Kronecker, δ_{ij} . A álgebra satisfeita por estes geradores é

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ij}{}^k J_k \quad [J_i, P_j] = \epsilon_{ij}{}^k P_k, \quad [P_i, P_j] = \Lambda \epsilon_{ij}{}^k J_k, \quad (3.60)$$

onde $\Lambda < 0$. Na gravitação AdS Riemanniana as componentes da conexão de spin ω^i são reconhecidas como as de uma conexão $SO(3)$ (ou $SU(2)$), trata-se do grupo de Lorentz Euclidiano. O setor não compacto, que corresponde aos “*boosts*” AdS, é conformado pelas componentes do *co-frame*. Assim, nesta teoria, as traslações “topológicas” são não compactas.

As formas quadráticas neste modelo se escrevem

$$\langle \omega_1 + e_1, \omega_2 + e_2 \rangle_1 = \sqrt{\Lambda}(\omega_1 \cdot e_2 + \omega_2 \cdot e_1), \quad (3.61)$$

$$\langle \omega_1 + e_1, \omega_2 + e_2 \rangle_2 = \omega_1 \cdot \omega_2 + \Lambda e_1 \cdot e_2, \quad (3.62)$$

onde o fator $\sqrt{\Lambda}$ na primeira forma quadrática garante que as unidades sejam as corretas (conforme (2.114) e (2.117)).

A ação para este modelo se escreve

$$S = -\frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}_3} \left[\dot{\omega} \cdot \left(e - \frac{1}{\gamma} \omega \right) + \dot{e} \cdot \left(\omega - \frac{\Lambda}{\gamma} e \right) \right] - \mathcal{G}(\omega_t) - \mathcal{G}_0(e_t). \quad (3.63)$$

O calibre axial se lê $e_y^i \approx 0$, uma relação muito similar ao que se tem no calibre temporal na teoria em 4D [32]. Finalmente, as novas variáveis análogas à (3.52) são

$$\mathcal{A}_x^i \equiv \omega_x^i - \gamma e_y^i, \quad (3.64)$$

$$\mathcal{A}_y^i \equiv \omega_y^i. \quad (3.65)$$

A teoria reduzida é uma teoria de Chern–Simons $SU(2)$ com conexão real \mathcal{A} definida acima.

Resumindo o que foi feito nesta seção, a fixação de calibre proposta tem o efeito de “congelar” os *boosts* de forma que a simetria original $SO(3, 1)$ é reduzida para $SO(3)$ ou $SU(2)$. O Hamiltoniano sofre também uma simplificação significativa, ficando simplesmente um Hamiltoniano de uma teoria de Chern–Simons. Uma vez mais destacamos a similitude com o formalismo das variáveis de Ashtekar–Barbero em 4D. O papel do calibre axial apresentado pode ser comparado ao calibre temporal da teoria em 4D.

A partir deste ponto podemos explorar as várias abordagens para quantizar a teoria de Chern–Simons com grupo de calibre $SO(3)$ ou $SU(2)$. Por exemplo, seguindo o espírito da quantização canônica, podemos mencionar o trabalho de Dunne, Jackiw e Trugenberger [62], também esta a proposta em [39] para uma abordagem inspirada nos métodos da LQG. Esta última é detalhada no próximo capítulo.

4 Gravitação quântica de laços

Neste capítulo é feita uma revisão geral da quantização de laços da gravitação em 4D [11, 68, 31, 69, 70, 32]. Na seção 4.1, com as técnicas da quantização canônica, consideramos a estratégia que consiste em quantizar primeiramente o espaço de fase não vinculado, para depois obter o espaço físico através da resolução dos vínculos no nível quântico. Depois, na seção 4.2, estudam-se duas possíveis representações. A primeira é a chamada representação da conexão, na qual o espaço de configurações é dado pelo espaço das conexões que tomam valores na álgebra do grupo. O problema com esta representação é que não se conhece uma medida de integração no espaço de configurações das conexões clássicas. A segunda representação considera como variáveis de configuração, em vez da conexão que assume valores na álgebra do grupo, a holonomia que assume valores no grupo. Veremos que neste caso, sendo o grupo de calibre $SU(2)$ compacto, a medida de Haar representa uma medida de integração natural no grupo. Logo na seção 4.3 construímos de forma sistemática o espaço de Hilbert físico, isto se faz em três etapas. Primeiramente definimos o espaço de Hilbert cinemático como o completamento do espaço das funções cilíndricas (funções das holonomias definidas sobre grafos orientados) quadrado integráveis. O vínculo de Gauss seleciona deste espaço aquelas funções das holonomias que são invariantes de calibre. Uma base no espaço das funções invariantes de calibre é dada pelas chamadas “redes de spin”. Finalmente os difeomorfismos são implementados através da técnica conhecida como “média do grupo”. Vamos ver como construir uma base no espaço físico, a partir das redes de spin, que dependem unicamente da classe de equivalência de grafos não orientados e links carregando uma representação de $SU(2)$ que se contraem nos vértices do grafo com tensores $SU(2)$ invariantes. Esta base é chamada base *s-knot*. Os vetores desta base são manifestamente invariantes de calibre e de difeomorfismos, além disso, a base no espaço de Hilbert físico é separável. O último vínculo a ser resolvido é o vínculo escalar, responsável pela evolução temporal da teoria. A resolução deste vínculo requer outras técnicas que não são consideradas nesta tese.

4.1 “Reduzir então quantizar” vs. “Quantizar então reduzir”

Queremos quantizar a teoria da gravitação 3+1 dimensional que, como vimos na seção 2.1.3, é descrita pelos vínculos de Gauss, vetorial e escalar, respectiva-

mente (veja as equações (2.64), (2.65) e (2.66))

$$\mathcal{G} = D_a \tilde{\mathcal{E}}^a, \quad (4.1)$$

$$V = \tilde{\mathcal{E}}^c \mathcal{F}_{ac}^i, \quad (4.2)$$

$$N = \epsilon_{ijk} \tilde{\mathcal{E}}_j^a \tilde{\mathcal{E}}_k^b \left(\mathcal{F}_{ab}^i - \frac{1}{\gamma} (\sigma - \gamma^2) D_{[a} B_{b]}^i - (\sigma - \gamma^2) \epsilon_{ilm} B_a^l B_b^m \right). \quad (4.3)$$

Para prosseguir com a quantização canônica desta teoria basicamente temos duas opções. Na primeira começamos reduzindo o espaço de fase cinemático clássico, impondo os vínculos classicamente, determinando assim o “espaço de fase físico” (o espaço das “órbitas de calibre”), logo quantizamos este espaço para obter a teoria quântica reduzida. Na segunda abordagem, quantizamos primeiramente o espaço de fase cinemático, obtendo assim a teoria quântica não reduzida, logo reduzimos a teoria impondo os vínculos como operadores quânticos. As teorias quânticas assim obtidas em cada caso não são necessariamente equivalentes, como se observa do diagrama não comutativo da Fig. 4.1

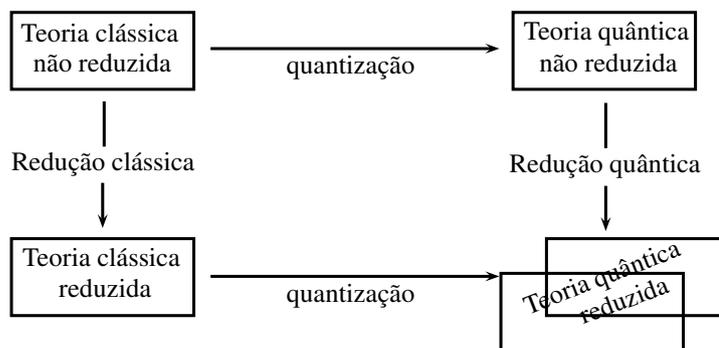


Figure 4.1: Diagrama não comutativo das duas estratégias de quantização canônica.

A primeira abordagem não contempla flutuações em torno dos graus de liberdade de calibre, só quantizamos os graus de liberdade físicos. Na segunda alternativa não só quantizamos os graus de liberdade físicos, mas também os graus de liberdade de calibre. Assim, está aberta a possibilidade de que a teoria quântica reduzida contenha efeitos ausentes no nível clássico¹.

Com estes argumentos em mente, adotamos a segunda estratégia que é conhecida como o “Programa de quantização de Dirac”. Nosso primeiro objetivo então é determinar o espaço de Hilbert cinemático que é a estrutura matemática básica a partir da qual se constrói a teoria quântica.

¹Como exemplo considere o caso de elétrons confinados classicamente a uma superfície espacial 2d. Após a quantização, eles podem vibrar fora da superfície! Se se considera o espaço de fase clássico reduzido, este efeito é negligenciado. (R. Loll, Quantum Gravity (Review) URL: <http://pirsa.org/C09046>, 2010, Perimeter Institute.)

4.2 Conexão vs. holonomia

4.2.1 Representação da conexão

Na representação de Schrödinger as variáveis canônicas são promovidas a operadores que obedecem às relações de comutação usuais, em correspondência com os colchetes de Poisson (ou Dirac, dependendo do caso) clássicos que foram determinados na [seção 2.1.3](#), equação (2.55),

$$\{\mathcal{A}_a^i(\mathbf{x}), \tilde{\mathcal{E}}_j^b(\mathbf{x}')\} = \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mapsto [\hat{\mathcal{A}}_a^i(\mathbf{x}), \hat{\tilde{\mathcal{E}}}_j^b(\mathbf{x}')] = i \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (4.4)$$

Fixamos agora uma polarização no espaço de fase. Isto consiste em identificar o espaço de configurações clássico, no caso particular de interesse, é o espaço das conexões suaves que denotamos por $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ (*i.e.* o espaço das conexões C^∞). Neste espaço as coordenadas são representadas por operadores que atuam multiplicativamente sobre os funcionais de onda $\Psi[\mathcal{A}]$, e os momentos se representam como derivadas funcionais, *i.e.*

$$\hat{\mathcal{A}}_a^i \Psi[\mathcal{A}] = \mathcal{A}_a^i \Psi[\mathcal{A}]; \quad \hat{\tilde{\mathcal{E}}}_i^a \Psi[\mathcal{A}] = \frac{\gamma}{i\kappa} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} \Psi[\mathcal{A}].$$

Estas relações definem a “representação da conexão”. O espaço de Hilbert cinemático se define então como o completamento do espaço formado pelos funcionais de onda quadrado integráveis a respeito do produto escalar formalmente definido como

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle = \int “\mathcal{D}\mu[\mathcal{A}]” \overline{\Psi[\mathcal{A}]} \Psi'[\mathcal{A}], \quad (4.5)$$

onde “ $\mathcal{D}\mu[\mathcal{A}]$ ” é a medida de integração finita e normalizada no espaço das conexões. Finalmente determinamos os estados físicos impondo que a versão quântica dos vínculos (4.1), (4.2) e (4.3), que em conjunto denotados como $\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{E}})$, aniquilam os estados físicos: $\hat{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, \hat{\mathcal{E}})\Psi[\mathcal{A}] = 0$. A expectativa é que aqueles estados que resolvem todos os vínculos formem o chamado “espaço de Hilbert físico” a partir do qual é possível extrair informação física invariante de calibre.

Porém, na prática existe uma dificuldade no momento de definir o produto escalar no caso das teorias de Yang–Mills. O problema com esta representação é que não é possível escrever uma medida de integração sobre o espaço das “conexões clássicas” que seja compatível a invariância de calibre. Portanto o programa é obstruído desde o começo². A ideia é buscar uma outra representação que resolva as dificuldades encontradas na representação da conexão.

4.2.2 Representação de holonomias e fluxos

O princípio físico (e filosófico) da Relatividade Geral é que o campo gravitacional é uma manifestação da geometria do espaço–tempo. A geometria é o ente físico

²Isto não quer dizer que seja impossível achar soluções particulares, como veremos no seguinte capítulo ([seção 5.1.1](#)).

a quantizar. Podemos imaginar então alegoricamente que a geometria quântica é descrita por uma sorte de “espuma quântica” (*quantum foam*)[10]. O contínuo não é mais fundamental, mas apenas uma aproximação semi clássica da geometria quântica.

A estratégia na LQG para tratar com o número infinito de graus de liberdade consiste em “disseminar” ou “ponderar” a conexão ao longo duma subvariedade 1-dimensional (*i.e.* uma curva α) do espaço Σ , de modo que a teoria é decomposta em um conjunto de teorias cada uma das quais depende de um número finitos de graus de liberdade. A tarefa de decompor o número infinito de graus de liberdade em um conjunto finito é feita pela holonomia. Assim, a proposta sugere que em vez de utilizar a conexão avaliada no ponto \mathbf{x} , é conveniente utilizar a holonomia avaliada na curva α . As holonomias representam então os blocos básicos para construir a espuma quântica.

No que segue introduzimos os blocos básicos para a construção do formalismo da LQG. A literatura padrão da LQG é o artigo de revisão de Ashtekar e Lewandowski [11], o livro de Rovelli [70] e o extenso tratado (matemático) de Thiemann [32]. Uma leitura crítica da LQG, desde a perspectiva de um especialista em teoria de cordas, é dada pelo artigo de revisão de Nicolai, Peeters e Zamaklar [69]. Também recomendamos a revisão de Corichi [68] para uma abordagem didática e intuitiva.

Holonomia e Fluxos. A holonomia é um elemento do grupo $G = \text{SU}(2)$ definido como

$$U(\alpha; \mathcal{A}) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\alpha} \mathcal{A}_a^i(x) \tau^i dx^a \right) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\alpha} \mathcal{A}_a^i(\alpha(s)) \tau^i \dot{\alpha}^a(s) ds \right), \quad (4.6)$$

onde $\alpha = \alpha(s)$, $s \in [0, 1]$ é uma curva analítica³ na variedade espacial Σ , $\dot{\alpha}^a \equiv dx^a(s)/ds$, e \mathcal{P} é uma “ordenação de produto do caminho”, que corresponde a tomar sempre os maiores valores de s da esquerda para à direita, finalmente \mathcal{A} é a conexão. Note que, desde que \mathcal{A} é uma 1-forma avaliada na álgebra de Lie do grupo, a integração ao longo de α é completamente natural e independente do fundo, além disso repare que a holonomia é uma função que toma valores no grupo. A holonomia satisfaz as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} U(\alpha_1 \circ \alpha_2) &= U(\alpha_1)U(\alpha_2), \\ U(\alpha^{-1}) &= U^{-1}(\alpha) \\ U(\alpha) &\longmapsto U^g(\alpha) = g^{-1}(x(0))U(\alpha)g(x(1)), \end{aligned} \quad (4.7)$$

a terceira propriedade é a resposta da holonomia às transformações de calibre. Note que a regra de transformação é homogênea, muito mais simples se se compara com a transformação de calibre da conexão. Além disso, como a holonomia é um elemento do grupo, existe uma medida de integração natural, a medida de Haar como veremos em breve, finita e invariante sob as transformações do grupo.

³Isto é, suave por peças.

Nada impede de se introduzir a holonomia como um campo independentemente da conexão. Define-se então como um campo (não local) que assume valores no grupo cujo argumentos são curvas analíticas na variedade espacial Σ , e que satisfazem as propriedades (4.7).

No mesmo espírito da holonomia, introduz-se agora o “fluxo” da 2-forma campo elétrico⁴:

$$\mathcal{E}(S; \mathcal{E}) \equiv \int_S \mathcal{E} = \int_S \mathcal{E}_{ab}^i \tau^i dx^a dx^b, \quad (4.8)$$

a integração é sobre uma superfície analítica S , que é completamente natural desde que \mathcal{E} seja uma 2-forma. A transformação de calibre do fluxo não é tão simples quanto a da holonomia,

$$\mathcal{E}(S; \mathcal{E}) \mapsto \mathcal{E}^g(S; \mathcal{E}) = \int_S g^{-1}(x) \mathcal{E}_{ab} g(x) dx^a dx^b. \quad (4.9)$$

A partir da definição da holonomia (4.6), e a definição clássica dos colchetes de Poisson fundamentais (4.4), mostra-se que o colchete de Poisson entre a holonomia e o fluxo resulta na inserção da matriz τ^i no ponto onde α e S se interceptam, então temos

$$\{U(\alpha), \mathcal{E}^i(S)\} = U(\alpha_1) \tau^i U(\alpha_2). \quad (4.10)$$

Nesta fórmula α_1 e α_2 são os pedaços da curva antes e depois a inserção do τ^i , tal que $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$. É esta estrutura a ser promovida a comutador fundamental na teoria quântica em substituição de (4.4):

$$[U(\alpha), \hat{\mathcal{E}}^i(S)] = iU(\alpha_1) \tau^i U(\alpha_2). \quad (4.11)$$

É possível reconstruir a conexão e o campo elétrico a partir das holonomias e fluxos, simplesmente temos que considerar estes objetos definidos sobre curvas e superfícies infinitesimais, respectivamente. Segue-se então a equivalência entre a representação da conexão e das holonomias e fluxos.

4.3 Espaço de Hilbert da LQG

A construção do espaço de Hilbert na representação das holonomias e fluxos é dividida sistematicamente em várias etapas. Começamos com algumas definições básicas.

⁴A relação entre a 2-forma campo elétrico \mathcal{E} e o vetor densidade campo elétrico foi dada na (2.54).

Grafos. Um grafo finito Γ é uma coleção $\{e_i, 1 = 1, \dots, N\}$ de links orientados independentes, no sentido que eles só se intersectam uns com outros nos pontos inicial ou final, esses pontos de intercessão sendo chamados de vértices. O grafo é “fechado” se não existem links que tenham alguns de seus extremos livres.

Considere agora o conjunto de todos os grafos possíveis no espaço Σ . Existe uma relação de ordenamento parcial “ \succ ” no seguinte sentido: Um grafo Γ é “maior” que o grafo Γ' , que escrevemos como $\Gamma \succ \Gamma'$, se Γ contém Γ' , *i.e.*, todos os links de Γ' estão contidos no grafo Γ . A relação \succ é parcialmente ordenada pois existem grafos que simplesmente não tem relação alguma entre si.

A definição de grafos dada neste parágrafo não faz referência nenhuma a uma escala ou parâmetro de rede relacionado com o “comprimento” dos links. O motivo de introduzir grafos é que eles serão o “esqueleto” sob o qual se constroem funções das holonomias.

Funções cilíndricas. Seja o grafo $\Gamma = \{e_i, i = 1, \dots, N\}$, e $\{U(e_i), i = 1, \dots, N\}$ as holonomias definidas sobre os links do Γ . Seja f uma função complexa no $SU(2)^{\times N}$ que depende de N holonomias. O par (Γ, f) define um funcional de \mathcal{A} que se escreve

$$\Psi_{\Gamma, f}[\mathcal{A}] \equiv f(U(e_1), \dots, U(e_N)). \quad (4.12)$$

O conjunto de todos os funcionais $\Psi_{\Gamma, f}[\mathcal{A}]$ baseados no grafo Γ formam um espaço linear que denotamos por Cyl_{Γ} . As funções neste espaço são chamadas “funções cilíndricas a respeito de Γ ”. O espaço Cyl_{Γ} depende de um número finito de graus de liberdade, no presente caso, de N graus de liberdade, um por cada link. Para capturar o número infinito de graus de liberdade da teoria definimos $\text{Cyl} = \bigoplus_{\Gamma} \text{Cyl}_{\Gamma}$ como o espaço formado por todas as funções cilíndricas definidas sobre todos os grafos possíveis na variedade do espaço Σ .

Nota sobre o espaço de configurações clássico e quântico. Classicamente o espaço de configurações é o espaço das conexões suaves $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$. As holonomias são definidas como funcionais destas conexões suaves. Uma generalização consiste em considerar holonomias definidas sobre conexões gerais não necessariamente suaves (distribuições temperadas). O espaço de configuração das conexões generalizadas é denotado $\mathcal{C}_{\overline{\mathcal{A}}}$. Resulta que na teoria de campos o espaço de configurações clássico deve ser substituído pelo espaço das conexões generalizadas, às vezes chamado de “espaço de configurações quântico”[11]. Este alargamento do espaço de configurações é próprio da teoria quântica de campos, não existe análogo no caso da mecânica quântica de sistemas com número finito graus de liberdade.

A medida de Haar de SU(2) Em geral, a medida de Haar $d\mu$ de um grupo compacto G é definida através das propriedades (pode consultar [71])

$$\int_G d\mu = 1, \quad \int_G f(gh)d\mu(h) = \int_G f(h)d\mu(h).$$

A primeira é a propriedade de normalização, a segunda a invariância sob a ação do grupo.

No caso de interesse particular, a medida do grupo $SU(2)$ é

$$\int_{SU(2)} f(g) d\mu(g) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(\theta, \phi, \chi)) \frac{\sin \theta}{8\pi^2} d\theta d\phi d\chi, \quad (4.13)$$

onde θ, ϕ e χ (uma parametrização de $SU(2)$) são os ângulos de Euler .

A medida de Haar do grupo $SU(2)$ é de suma importância no formalismo da LQG, pois representa uma medida de integração natural no espaço de configurações na representação das holonomias. Uma medida semelhante não é conhecida na representação da conexão.

Produto escalar no Cyl_Γ Sejam as funções cilíndricas $\Psi_{\Gamma,f}[\mathcal{A}]$ e $\Psi_{\Gamma,f'}[\mathcal{A}]$ a respeito do grafo $\Gamma = \{e_i, i = 1, \dots, N\}$. O produto escalar se define como

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\Gamma,f} | \Psi_{\Gamma,f'} \rangle &= \int_{SU(2)^{\times N}} d\mu_1 \cdots d\mu_N \overline{f(U_1, \dots, U_N)} f'(U_1, \dots, U_N), \\ &\equiv \int_{SU(2)^{\times N}} d\mu_\Gamma \overline{f(U_1, \dots, U_N)} f'(U_1, \dots, U_N), \end{aligned} \quad (4.14)$$

com $d\mu$ a medida de Haar no grupo, \bar{f} o conjugado de f , e $d\mu_\Gamma \equiv d\mu_1 \cdots d\mu_N$ a medida de Haar associada ao grafo Γ (o “elemento de volume” no espaço $SU(2)^{\times N}$).

Com estas definições estamos prontos para o passo seguinte que é construir o espaço de Hilbert cinemático.

4.3.1 Espaço de Hilbert cinemático

O espaço de Hilbert cinemático associado a um grafo Γ é definido como o completamento de Cauchy, $\mathcal{H}_{\text{kin}}^\Gamma = \overline{Cyl_\Gamma}$, do espaço Cyl_Γ munido do produto escalar (4.14)⁵.

O espaço de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{kin} é definido como a soma direita

$$\mathcal{H}_{\text{kin}} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_{\text{kin}}^\Gamma \quad (4.15)$$

de todos os espaços de Hilbert individuais associados a cada um dos grafos finitos Γ . Por definição o “vetor nulo” $\Psi_\emptyset = 1$, correspondendo ao grafo sem nenhum link $\Gamma = \emptyset$ (“ausência de geometria”), é incluído no \mathcal{H}_{kin} . Repare que este espaço não é separável pois o conjunto de todos os grafos possíveis é não numerável.

A construção de \mathcal{H}_{kin} só faz sentido se for possível estender a definição do produto escalar à funções cilíndricas do Cyl . Vamos ver que isto é possível desde que a medida de Haar seja finita. Sejam então os grafos Γ e Γ' e as funções cilíndricas associadas $\Psi_{\Gamma,f}$ e $\Psi_{\Gamma',f'}$, explicitando escrevemos

$$\Psi_{\Gamma,f} = f(U_1, \dots, U_N), \quad (N \text{ o número de links de } \Gamma) \quad (4.16)$$

$$\Psi_{\Gamma',f'} = f'(U_1, \dots, U_{N'}), \quad (N' \text{ o número de links de } \Gamma'). \quad (4.17)$$

⁵Em poucas palavras o completamento de Cauchy consiste em ampliar o espaço linear original de modo que se incluem o limite de todas as sequências de Cauchy (fechamento na norma [72]).

Caso um dos grafos esteja contido no outro, por exemplo $\Gamma \succ \Gamma'$, então o produto escalar é dado pela (4.14), porque uma função que é cilíndrica a respeito do grafo menor Γ' é também cilíndrica a respeito do grafo maior Γ ⁶. A situação mais geral é o caso em que Γ e Γ' não estão relacionados de forma alguma. O fato que o espaço Cyl contempla todos os grafos possíveis, faz com que sempre exista um grafo Υ (com N'' links) que contém Γ e Γ' . Então, como no caso prévio, $\Psi_{\Gamma,f}$ e $\Psi_{\Gamma',f'}$ são funções cilíndricas respeito de Υ (as quais denotamos por F e F' respetivamente), portanto o produto é dado por

$$\langle \Psi_{\Gamma,f} | \Psi_{\Gamma',f'} \rangle \equiv \langle \Psi_{\Upsilon,F} | \Psi_{\Upsilon,F'} \rangle,$$

Na verdade existe uma infinidade de grafos Υ que contém Γ e Γ' . A pergunta importante é se o produto interno é independente da escolha particular de Υ . A resposta é afirmativa graças ao fato que num grupo compacto a medida de Haar pode ser normalizada. Certamente, as funções cilíndricas a respeito de Υ se escrevem

$$\begin{aligned} \Psi_{\Upsilon,F} &= F(U_1, \dots, U_{L''}) = f(U_1, \dots, U_L) = \Psi_{\Gamma,f}, \\ \Psi_{\Upsilon,F'} &= F'(U_1, \dots, U_{L''}) = f'(U_1, \dots, U_{L'}) = \Psi_{\Gamma',f'}. \end{aligned}$$

O produto escalar no espaço Cyl_{Υ} então é

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\Upsilon,F} | \Psi_{\Upsilon,F'} \rangle &= \int_{\text{SU}(2)^{\times L''}} d\mu_{\Upsilon} \overline{F(U_1, \dots, U_{L''})} F'(U_1, \dots, U_{L''}), \\ &= \int_{\text{SU}(2)^{\times L''}} d\mu_{\Gamma \cup \Gamma'} d\mu_R \overline{f(U_1, \dots, U_L)} f'(U_1, \dots, U_{L'}), \end{aligned}$$

onde $d\mu_{\Gamma \cup \Gamma'}$ é a medida de Haar no grafo que resulta da união de Γ e Γ' , $d\mu_R$ é a medida de Haar formada a partir dos R links de Υ que não pertencem a Γ nem Γ' . Temos então

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\Upsilon,F} | \Psi_{\Upsilon,F'} \rangle &= \int_{\text{SU}(2)^{\times M}} d\mu_{\Gamma \cup \Gamma'} \overline{f(U_1, \dots, U_L)} f'(U_1, \dots, U_{L'}) \int_{G^{\times R}} d\mu_R \\ &= \int_{\text{SU}(2)^{\times M}} d\mu_{\Gamma \cup \Gamma'} \overline{f(U_1, \dots, U_L)} f'(U_1, \dots, U_{L'}), \end{aligned}$$

onde M é o número de links do grafo $\Gamma \cup \Gamma'$. O último passo é uma consequência da medida de Haar ser normalizada. Portanto o resultado não depende da escolha particular de Υ .

Decomposição ortonormal (Teorema de Peter–Weyl). O teorema de Peter–Weyl é uma generalização das séries de Fourier no círculo, *i.e.* funções $f(g)$ onde $g \in \text{U}(1)$, ao caso de grupos compactos não abelianos. O leitor pode consultar [73] para uma apresentação formal.

⁶É análogo a dizer que uma função $f(x)$ de \mathbb{R} é também uma função de \mathbb{R}^2 com $F(x, y) \equiv f(x)$.

Toda função no grupo $f(g)$, com $g \in \text{SU}(2)$, admite uma decomposição ortogonal do tipo

$$f(g) = \sum_j \sum_{m,n} f_j^{mn} R_{mn}^j(g), \quad (4.18)$$

$$f_j^{mn} = (2j+1) \int_{\text{SU}(2)} d\mu \overline{R_{mn}^j(g)} f(g) \equiv \langle R_{mn}^j(g) | f(g) \rangle, \quad (4.19)$$

onde $\overline{R_{mn}^j} \equiv (R_{nm}^j)^*$, com “*” sendo a conjugação complexa. A matriz R^j é a representação unitária irredutível de spin j do elemento de grupo g . Seus elementos de matriz satisfazem as relações de ortonormalidade

$$(2j+1) \int_{\text{SU}(2)} d\mu(g) \overline{R_{mn}^j(g)} R_{m'n'}^{j'}(g) = \delta^{jj'} \delta_{mm'} \delta_{nn'}. \quad (4.20)$$

No que segue, e por simplicidade, absorvemos o fator $(2j+1)$ na definição de R_{mn}^j . Na notação dos *ket's* (fazendo $g \equiv U$, as holonomias), escrevemos $R_{mn}^j(U)$ como $|j, m, n\rangle$, onde $R_{mn}^j(U) = \langle U | j, m, n \rangle$.

A generalização no caso de uma função $f(U_1, \dots, U_N)$ que depende de N elementos do grupo é direta,

$$\begin{aligned} f(U_1, \dots, U_N) &= \sum_{j_1, \dots, j_N} \sum_{m_1, \dots, m_N} \sum_{n_1, \dots, n_N} f_{j_1 \dots j_N}^{m_1 \dots m_N n_1 \dots n_N} R_{m_1 n_1}^{j_1}(U_1) \dots R_{m_N n_N}^{j_N}(U_N), \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_N} \sum_{m_1, \dots, m_N} \sum_{n_1, \dots, n_N} f_{j_1 \dots j_N}^{m_1 \dots m_N n_1 \dots n_N} \prod_{i=1}^N R_{m_i n_i}^{j_i}(U_i), \end{aligned}$$

onde os coeficientes da expansão são obtidos simplesmente projetando a função ao longo de cada componente $\prod_{i=1}^N R_{m_i n_i}^{j_i}(U_i)$, de modo que os coeficientes da expansão são

$$f_{\vec{j}}^{\vec{m}\vec{n}} = \int_{\text{SU}(2)^{\times N}} d\mu_{\Gamma} \prod_{i=1}^N \overline{R_{m_i n_i}^{j_i}(U_i)} f(U_1, \dots, U_N), \quad (4.21)$$

$$= \left\langle \prod_{i=1}^N R_{m_i n_i}^{j_i}(U_i) | f(U_1, \dots, U_N) \right\rangle. \quad (4.22)$$

Assim, os produtos de componentes das representações irreduzíveis $\prod_{i=1}^N R_{m_i n_i}^{j_i}(U_i)$, associados com os links $e_i \in \Gamma$, para todos os valores de spin j , e todos os valores de m e n tais que $-j \leq m, n \leq j$, e finalmente para todos os grafos Γ possíveis, formam uma base ortonormal de \mathcal{H}_{kin} . Na notação de Dirac os vetores de base se escrevem

$$|\Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \dots, j_N, m_1, \dots, m_N, n_1, \dots, n_N\rangle, \quad (4.23)$$

onde $\langle U | \Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}\rangle = \prod_{i=1}^N R_{m_i n_i}^{j_i}(U_i)$. Note que $j = 0$ não é permitido na soma, caso fosse, aqueles grafos com links carregando a representação irredutível $j = 0$

seriam equivalentes aos grafos com esse link removido, mas estes grafos já foram considerados quando somamos sobre todos os grafos, portanto estaríamos contando o mesmo grafo várias vezes. O único objeto que carrega spin $j = 0$ é o vetor nulo, $|\emptyset\rangle$, correspondendo a função de onda $\Psi_\emptyset = 1$.

A base satisfaz as relações de ortogonalidade

$$\langle \Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n} | \Gamma', \vec{j}', \vec{m}', \vec{n}' \rangle = \delta_{\Gamma\Gamma'} \delta_{\vec{j}\vec{j}'} \delta_{\vec{m}\vec{m}'} \delta_{\vec{n}\vec{n}'}. \quad (4.24)$$

O resultado destacável, como consequência de aplicar o teorema de Peter–Weyl, é que a base do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{kin}}^\Gamma$, que depende de j , m e n , é numerável e portanto separável. Assim, as funções cilíndricas a respeito de Γ dependem de um número finito de graus de liberdade. Observe que se um dos links é zero, acontece que $R^{j=0} = 1$, e portanto na (4.20) temos

$$\int_{\text{SU}(2)} d\mu(g) \overline{R_{mn}^j(g)} R_{m'n'}^0(g) = \int_{\text{SU}(2)} d\mu(g) \overline{R_{mn}^j(g)} = \delta^{j0} \delta_{mm'} \delta_{nn'} = 0. \quad (4.25)$$

Então a integral individual das matrizes R^j é identicamente nula. Em outras palavras, todos os vetores são ortogonais ao vetor nulo. Daqui se deduz que o produto escalar entre duas funções cilíndricas é zero se os grafos Γ e Γ' são diferentes, desde que o produto interno neste caso necessariamente tem termos do tipo (4.25). Se $\Gamma = \Gamma'$, o produto escalar pode ser diferente de zero, dependendo dos spins \vec{j} e os elementos de matriz \vec{m} , \vec{n} .

Repare que o resultado da ortogonalidade é verdade mesmo se $\Gamma' = \Gamma + \delta\Gamma$ é o grafo obtido a partir de uma deformação “infinitesimal” de Γ . Isto quer dizer que o “movimento” dos grafos no espaço se torna numa sequência de estados mutuamente ortogonais, e implica uma quebra da noção de continuidade no espaço, mesmo que o espaço Σ “portador” dos grafos seja uma variedade contínua. Neste resultado esta contida a natureza descontínua do espaço na LQG (veja a discussão no [69]). Por outro lado, repare a noção de dois grafos coincidirem ou não é puramente topológica, portanto perfeitamente compatível com a independência de fundo e difeomorfismos.

Finalmente, a decomposição ortogonal do espaço de Hilbert cinemático se escreve

$$\mathcal{H}_{\text{kin}} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_{\text{kin}}^\Gamma = \bigoplus_{\Gamma} \bigoplus_{\vec{j}} \mathcal{H}_{\Gamma, \vec{j}}.$$

\mathcal{H}_{kin} carrega uma representação natural de $\text{SU}(2)$ e o grupo de difeomorfismos Diff de Σ .

4.3.2 Vínculo de Gauss e redes de spin

O vínculo de Gauss esta relacionado com a invariância de calibre do tipo Yang–Mills. Assim, uma solução deste vínculo é dada pelos funcionais \mathcal{H}_{kin} invariantes de calibre, *i. e.*,

$$\Psi^g[\mathcal{A}] = \Psi[\mathcal{A}] \quad \mapsto \quad \hat{\mathcal{G}}(\lambda)\Psi[\mathcal{A}] = 0,$$

onde \mathcal{G} foi definido na (4.1). O caso do vínculo de Gauss (3.55) no modelo da gravitação em 3D é discutido em detalhe no próximo capítulo.

Os funcionais $\Psi_{\Gamma, f}$ que resolvem o vínculo de Gauss (4.1) são aqueles construídos a partir de funções f SU(2)-invariantes. Para isso, construímos primeiro uma base SU(2)-invariante simplesmente contraindo as holonomias com tensores SU(2)-invariantes localizados nos vértices dos grafos. Introduzem-se então as “redes de spin” como a base SU(2)-invariante definida como

$$|S\rangle = |\Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}\rangle \cdot v_{\vec{i}}^{\vec{m}, \vec{n}}, \quad (4.26)$$

onde $v_{\vec{i}}^{\vec{m}, \vec{n}}$ e $\vec{i} = \{i_1, \dots, i_V\}$ é uma notação simplificada que se refere a um conjunto de V tensores invariantes, chamados “*intertwiners*”, com índices (duais) \vec{m} e \vec{n} que se contraem com os índices \vec{m} e \vec{n} de $|\Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}\rangle$. Isto pode parecer muito abstrato, de modo que um exemplo breve ajuda a ilustrar esta construção.

Seja então o grafo mostrado na Fig. 4.2, com vértices carregando as representações de spin $j_1 = 1$, $j_2 = 1/2$, $j_3 = 1/2$. Neste caso o vetor $|\Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}\rangle$ é tal que $\vec{j} = \{1, 1/2, 1/2\}$, $\{\vec{m}, \vec{n}\} = \{i, A, B\}$ onde $i = 1, 2, 3$ (índices vetoriais) e $A, B = 1, 2$ (índices spinoriais). Então a base das redes de spin se escreve

$$\Psi_S[\mathcal{A}] \equiv \langle \mathcal{A} | S \rangle = \frac{1}{3} \sigma^{iAB} R_{ij}(U_1) R_{AC}(U_2) R_{BD}(U_3) \sigma^{jCD}. \quad (4.27)$$

Os *intertwiners* neste exemplo são $\sigma^{iAB}/\sqrt{3}$, onde σ^{iAB} são as componentes da

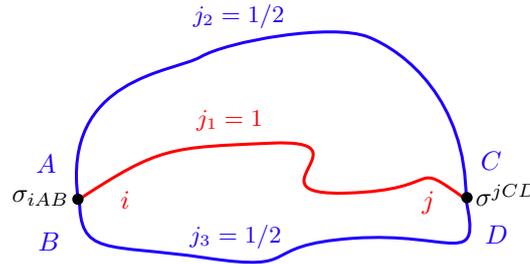


Figure 4.2: Grafo com nodos “trivalentes”

i -ésima matriz de Pauli, com definição análoga para $\sigma^{jCD}/\sqrt{3}$.

Funcionais SU(2)-invariantes gerais se constroem a partir da base por linearidade. O subespaço de $\mathcal{H}_{\text{kin}}^\Gamma$ formado pelos funcionais SU(2)-invariantes é denotado por $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}^\Gamma$. O espaço de todas as funções SU(2)-invariantes com respeito a todos os grafos possíveis é o espaço de Gauss total, $\mathcal{H}_{\text{Gauss}} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_{\text{Gauss}}^\Gamma$.

Nota sobre os laços de Wilson. Um exemplo de rede spin é dado pelo traço de laços fechados, $\Psi_{\text{O,Tr}}[\mathcal{A}] = \text{Tr}U(\alpha)$, conhecidos como “laços de Wilson”. Os produtos de laços de Wilson formam uma “base” conhecida na literatura como base *multi-loop* [74]. São os responsáveis para o nome da LQG. No entanto, esta “base” têm o problema de ser mais que completa, motivo pelo qual o formalismo da LQG se torna complicado nesta base. As redes de spin resolvem esse problema, pois elas formam uma base completa.

4.3.3 Implementação dos difeomorfismos do espaço

Idealmente os estados invariantes de difeomorfismos são aqueles que resolvem os vínculos vetoriais, “ \hat{V} ” $\Psi = 0$, onde \hat{V} é a versão quântica de (4.2). Estes estados deveriam formar um subespaço de $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$. Mas a perda da continuidade na LQG faz com que esta equação seja indefinida. Na verdade o único estado invariante de difeomorfismos no $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ é o vetor nulo $\Psi_\emptyset = 1$, que correspondente à ausência de “geometria”. No entanto, segundo a definição do produto escalar (4.24) entre os vetores base, não importa quanto infinitesimal seja a deformação $\delta\Gamma$ de um grafo, os vetores $|\Gamma\rangle$ e $|\Gamma + \delta\Gamma\rangle$ são automaticamente ortogonais. Pior ainda, quando $\delta\Gamma \rightarrow 0$, o produto escalar $\langle\Gamma|\Gamma + \delta\Gamma\rangle$ se anula, enquanto que $\langle\Gamma|\Gamma\rangle = 1$. Claramente um sinal da descontinuidade do espaço. Assim, é impossível obter estados invariantes de difeomorfismos além de $\Psi_\emptyset = 1$. Isto mostra que os estados invariantes de difeomorfismos não podem estar contidos no $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$. Se não estão contidos no $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ eles têm que estar contidos num espaço maior.

A solução para implementar os difeomorfismos se baseia num método conhecido como “média do grupo” (*group averaging method*) [11, 70, 32, 31]. Trata-se de um aperfeiçoamento do algoritmo de Dirac, razão pela qual é conhecida na literatura como “quantização refinada” (*refined quantization*).

Lembre que \mathcal{H}_{kin} foi obtido como o completamento de Cauchy do espaço das funções cilíndricas Cyl , portanto $\text{Cyl} \subset \mathcal{H}_{\text{kin}}$. O espaço dual de Cyl , denotado Cyl' , é o espaço das formas lineares Φ que atuam sob as funções cilíndricas Ψ tal que $\Phi(\Psi) \in \mathbb{C}$. O “triplo de Gel’fand” é a estrutura definida como $\text{Cyl} \subset \mathcal{H}_{\text{kin}} \subset \text{Cyl}'$. Seja agora o triplo de Gel’fand

$$S_\circ \subset \mathcal{H}_{\text{Gauss}} \subset S'_\circ, \quad (4.28)$$

onde S_\circ é o espaço das funções cilíndricas invariantes de calibre tal que seu completamento de Cauchy é $\mathcal{H}_{\text{Gauss}} = \overline{S_\circ}$. S'_\circ é o espaço dual de S_\circ . Vamos ver que os estados invariantes de difeomorfismos pertencem à S'_\circ .

Considere agora a “média do grupo” do estado $|\Psi_1\rangle \in S_\circ$ (o valor médio de $|\Psi_1\rangle$),

$$P_{\text{diff}}|\Psi_1\rangle \equiv \int_{\text{diff}} “d\phi” U_\phi |\Psi_1\rangle, \quad (4.29)$$

onde U_ϕ é uma representação unitária dos difeomorfismos, e “ $d\phi$ ” é uma medida de integração no grupo. P_{diff} , é chamado de “projedor”, mas na verdade ele não projeta os estados sobre um subespaço de S_\circ , mas os tira fora dele. $P_{\text{diff}}|\Psi_1\rangle$ é por construção invariante sob difeomorfismos,

$$U_{\phi'} P_{\text{diff}}|\Psi_1\rangle = \int_{\text{diff}} “d\phi” U_{\phi'} U_\phi |\Psi_1\rangle = \int_{\text{diff}} “d\phi” U_{\phi' \circ \phi} |\Psi_1\rangle = P_{\text{diff}}|\Psi_1\rangle. \quad (4.30)$$

Definamos agora o produto escalar. Sejam as formas lineares Φ_1, Φ_2 no S'_\circ . Definimos o produto escalar como

$$\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle_{\text{diff}} = \langle\Phi_1, \Psi_2\rangle = \langle P_{\text{diff}}\Psi_1, \Psi_2\rangle, \quad (4.31)$$

onde estamos utilizando a notação de Schwartz's $\langle \Phi, \Psi \rangle$ para denotar a ação da forma linear $\Phi \in S'_0$ sob o vetor “teste” $\Psi \in S_0$. Mais concretamente, sejam Γ e Γ' dos grafos dados, então temos que

$$\langle P_{\text{diff}}\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'} \rangle = \int_{\text{diff}} “d\phi” \langle U_\phi \Psi_\Gamma | \Psi_{\Gamma'} \rangle.$$

Para calcular a integral notamos que uma grande parte da integração é aniquilada pelo fato que dois estados são ortogonais se eles estão baseados em diferentes grafos. Então só um subconjunto dos difeomorfismos que levam Γ para Γ' sobrevivem. A integral se escreve então

$$\langle P_{\text{diff}}\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'} \rangle = \sum_k \int_{\text{diff}} “d\phi” \delta_{\Gamma\Gamma'} \langle U_{\phi_k} \Psi_\Gamma | \Psi_{\Gamma'} \rangle = \sum_k \int_{\text{diff}^*} “d\phi” \langle U_{\phi_k} \Psi_\Gamma | \Psi_{\Gamma'} \rangle$$

onde $\delta_{\Gamma\Gamma'}$ é 1 se $\Gamma = \Gamma'$ e zero se $\Gamma \neq \Gamma'$, U_{ϕ_k} são os difeomorfismos discretos que só intercambiam os links ou a orientação do grafo, e diff^* e subgrupo dos difeomorfismos que levam Γ para Γ' . Podemos tirar o produto escalar fora da integral, desde que Γ é levado para Γ' de tal forma que não depende mais de ϕ , sobrando simplesmente a integral da medida do grupo, $\int_{\text{diff}} “d\phi”$, que é assumida finita. Temos finalmente

$$\langle P_{\text{diff}}\Psi_\Gamma, \Psi_{\Gamma'} \rangle = \sum_k \langle U_{\phi_k} \Psi_\Gamma | \Psi_{\Gamma'} \rangle. \quad (4.32)$$

Os estados invariantes de difeomorfismos assim construídos formam um espaço de Hilbert separável, $\mathcal{H}_{\text{diff}}$, uma vez que a enorme redundância de difeomorfismos foi eliminada.

A dedução apresenta é formal, em particular, repare que não temos um argumento convincente que garanta que $\int_{\text{diff}} “d\phi”$ seja finito. No seguinte capítulo considera-se uma definição alternativa que fornece o mesmo resultado final.

Vetores s-knot. Da mesma forma que as redes de spin formam uma base no espaço $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$, desejamos construir agora uma base invariante de difeomorfismos no espaço físico $\mathcal{H}_{\text{diff}}$. Considere então a definição (4.32) aplicada à base das redes de spin

$$\langle s, s' \rangle = \langle S | P_{\text{diff}} | S' \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } \Gamma' \neq [\Gamma] \\ \sum_k \langle S | U_{\phi_k} | S' \rangle & \text{if } \Gamma' = [\Gamma] \end{cases}, \quad (4.33)$$

onde $U_{\phi_k} | S' \rangle$ é a rede de spin obtida a partir de $| S' \rangle$ por uma troca na orientação ou ordem dos links, e $[\Gamma]$ denota a classe de equivalência do grafo Γ sob a ação do grupo discreto finito de difeomorfismos U_{ϕ_k} de Γ . Então os estados $| s \rangle$ são baseados em grafos não orientados $K \equiv [\Gamma]$ chamados “knots”. Escrevemos $| s \rangle = | K, \vec{c} \rangle$, onde \vec{c} representa a “cor” do knot. Dois estados s-knot são equivalentes se eles estão “atados” e coloridos da mesma forma, quer dizer, tem a mesma topologia e os mesmos números quânticos. Tudo agora é contável numerável. A invariância de difeomorfismos conserta a não separabilidade do espaço $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$.

Até este ponto temos desenvolvido o formalismo da LQG para resolver os vínculos de Gauss e de difeomorfismos espaciais. O restante vínculo a aplicar é o vínculo escalar (4.3). Este vínculo permanece sendo um desafio na gravitação em 4D. Não discutimos neste trabalho a resolução deste vínculo. Como referências citamos por exemplos os trabalhos nos modelos “espumas de spin” (*spin foams*) e o “programa do vínculo maestro” (*master constraint programe*).

5 Quantização de laços da gravitação Lorentziana em 3D

Vimos que a gravitação Lorentziana em 3D com constante cosmológica positiva e parâmetro de Barbero–Immirzi pode se reformular como uma teoria de Chern–Simons com grupo de calibre $SU(2)$. Neste capítulo aplicamos um esquema de quantização já existente da teoria de Chern–Simons inspirada na LQG [39]. Na [seção 5.1.1](#) estudamos a representação da conexão, onde é assumido que o espaço tem a topologia de um cilindro. Esta topologia induz uma polarização na qual a componente x da conexão representa a variável de configuração, enquanto que a componente y representa o momento canônico. Existe uma solução física particular da teoria nesta representação [62]. A solução geral é obtida como o produto entre a solução particular e um funcional invariante de calibre, esta última é construída, [seção 5.1.2](#), usando as ferramentas da LQG. O vínculo de Gauss seleciona funções das holonomias invariantes de calibre, resultando ser estas “ciclos” com coordenada y constante. A invariância de difeomorfismos ao longo de y , que foi quebrada pela escolha da polarização do espaço de fase, é restaurada aplicando a técnica da média do grupo. O resultado final é um espaço de Hilbert físico separável, cuja base é representada por classes de equivalência de grafos não orientados independentes da coordenada y . Para enriquecer o modelo, na [seção 5.2](#), é construído um observável parcial definido a partir de uma regularização apropriada de um observável clássico invariante de calibre. Este observável é local. Para exportar este observável ao espaço físico, ele deve ser “deslocalizado”. O limite clássico deste observável é estudado na [seção 5.3](#), onde descobrimos com surpresa que ele é identicamente nulo, mesmo que seu espectro quântico seja, em geral, diferente de zero. Fechamos este capítulo com a [seção 5.4](#), onde se mostra, por argumentos topológicos, que as constantes fundamentais da teoria, *i.e.* G_N , Λ e γ se combinam de tal forma que o resultado é um número inteiro.

5.1 Quantização canônica

5.1.1 Representação da conexão

Tendo em vista os resultados do capítulo anterior, vamos fazer aqui uma revisão rápida da quantização da teoria de CS com grupo de calibre $G = SU(2)$ sobre uma variedade 3-dimensional orientada no tempo, $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma_2$. Desde este momento assumimos que o espaço Σ_2 tem a topologia de um cilindro. Esta seção segue

essencialmente [62][39].

As variáveis canônicas são definidas como operadores satisfazendo, em correspondência com os colchetes de Dirac (3.51), as regras de comutação

$$\{\mathcal{A}_x^i(\mathbf{x}), \mathcal{A}_y^j(\mathbf{x}')\} = \frac{\gamma}{\kappa} \delta^{ij} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rightarrow [\hat{\mathcal{A}}_x^i(\mathbf{x}), \hat{\mathcal{A}}_y^j(\mathbf{x}')] = \frac{i\gamma}{\kappa} \delta^{ij} \delta^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (5.1)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ são os índices de grupo $SU(2)$.

Escolhemos uma polarização tal que $\hat{\mathcal{A}}_x^i$ seja multiplicativa e $\hat{\mathcal{A}}_y^i$ seja uma derivada funcional¹ atuando sobre os funcionais $\Psi[\mathcal{A}_x] \equiv \langle \mathcal{A}_x | \Psi \rangle$:

$$\hat{\mathcal{A}}_x^i \Psi[\mathcal{A}_x] = \mathcal{A}_x^i \Psi[\mathcal{A}_x]; \quad \hat{\mathcal{A}}_y^i \Psi[\mathcal{A}_x] = \frac{\gamma}{i\kappa} \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_x^i} \Psi[\mathcal{A}_x]. \quad (5.2)$$

O vínculo de Gauss (3.55) nesta representação se escreve

$$\hat{\mathcal{G}} \Psi[\mathcal{A}_x] \equiv \left[i \left(\partial_x \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_x^i} + \epsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_x^j \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_x^k} \right) + \frac{\kappa}{\gamma} \partial_y \mathcal{A}_x^i \right] \Psi[\mathcal{A}_x] = 0. \quad (5.3)$$

Uma vez que

$$\epsilon^{ijk} (\mathcal{A}_x^j \hat{\mathcal{A}}_y^k - \hat{\mathcal{A}}_y^k \mathcal{A}_x^j) \Psi[\mathcal{A}_x] = 0,$$

não há ambiguidade de ordenamento na definição do vínculo de Gauss quântico.

Uma solução particular da equação (5.3) é dada pela fase [62]

$$\Psi_0[\mathcal{A}_x] = \exp(2\pi i \alpha_0), \quad (5.4)$$

onde α_0 é a ação de Wess–Zumino–Witten definida na (2.105) da seção 2.2.5,

$$\alpha_0 = \frac{\kappa}{2\pi\gamma} \left(\frac{1}{3} S_{WZ} - S_\sigma \right), \quad (5.5)$$

onde $h[\mathcal{A}_x] \in SU(2)$ é o funcional não local de \mathcal{A}_x (5.6) dado por

$$\mathcal{A}_x = h^{-1} \partial_x h. \quad (5.6)$$

Para nos convencer de que Ψ_0 é uma solução particular do vínculo de Gauss procedemos da seguinte forma. Para começar lembre que a ação das transformações finitas dos funcionais de onda carrega uma fase, o 1-cociclo α_1 definido na (2.94) da seção 2.2.5,

$$\Psi^g[\mathcal{A}_x] \equiv U(g) \Psi(\mathcal{A}_x) = e^{2\pi i \alpha_1(\mathcal{A}_x; g)} \Psi(\mathcal{A}_x^g), \quad (5.7)$$

onde

$$U(g) \equiv \exp \int \lambda^i \hat{\mathcal{G}}. \quad (5.8)$$

¹Usamos tanto a representação funcional ou bem os *kets* abstratos de Dirac. A relação entre eles é dada por $\Psi_\alpha[\mathcal{A}_x] = \langle \mathcal{A}_x | \alpha \rangle$, onde α representa os números quânticos que definem o estado.

Se $\Psi[\mathcal{A}_x]$ é uma solução do vínculo de Gauss, então ela deve ser tal que

$$\Psi^g[\mathcal{A}_x] = \Psi[\mathcal{A}_x],$$

comparando este resultado com (5.7) vemos que um funcional “invariante” satisfaz a regra de transformação

$$\Psi[\mathcal{A}_x^g] = e^{2\pi i \alpha_1[\mathcal{A}_x, g]} \Psi[\mathcal{A}_x]. \quad (5.9)$$

Por sua vez, vimos na seção 2.2.5 que o 1-cociclo na teoria de CS é trivial, então ele se escreve como a co-borda de um 0-cociclo

$$\alpha_1[\mathcal{A}_x, g] = \alpha_0[\mathcal{A}_x^g] - \alpha_0[\mathcal{A}_x],$$

onde o 0-cociclo é justamente (5.5). Escrevendo a exponencial de α_1 e reagrupando os termos temos

$$e^{2\pi i \alpha_0[\mathcal{A}_x^g]} = e^{2\pi i \alpha_1[\mathcal{A}_x, g]} e^{2\pi i \alpha_0[\mathcal{A}_x]} \quad \text{ou bem} \quad \Psi_0[\mathcal{A}_x^g] = e^{2\pi i \alpha_1[\mathcal{A}_x, g]} \Psi_0[\mathcal{A}_x].$$

Comparando com (5.9) identificamos $\Psi = \Psi_0[\mathcal{A}_x]$ como uma solução particular do vínculo de Gauss.

Podemos também verificar isto por substituição direta de Ψ_0 na (5.3), para fazer isso precisamos antes determinar a ação de $\hat{\mathcal{A}}_y^i$ sob Ψ_0 ,

$$\hat{\mathcal{A}}_y^i \Psi_0 = \frac{\gamma}{i\kappa} \frac{\delta \Psi_0[\mathcal{A}_x]}{\delta \mathcal{A}_x^i} = 2\pi \frac{\gamma}{\kappa} \frac{\delta \alpha_0[\mathcal{A}_x]}{\delta \mathcal{A}_x^i} \Psi_0[\mathcal{A}_x]. \quad (5.10)$$

A variação funcional de α_0 foi calculada na seção 2.2.5, o resultado foi²:

$$\frac{\delta \alpha_0(\mathcal{A}_x)}{\delta \mathcal{A}_x} = \frac{\kappa}{2\pi} \omega_y = \frac{\kappa}{2\pi} h^{-1} \partial_y h. \quad (5.11)$$

Finalmente, substituindo este resultado na (5.10), obtemos a equação

$$\hat{\mathcal{A}}_y^i \Psi_0 = (h^{-1} \partial_y h) \Psi_0. \quad (5.12)$$

Este resultado, junto com a definição (5.6), conduz ao resultado

$$\hat{\mathcal{A}} \Psi_0 = (h^{-1} \mathbf{d}h) \Psi_0 = \boldsymbol{\omega} \Psi_0, \quad \boldsymbol{\omega} = h^{-1} \mathbf{d}h. \quad (5.13)$$

Portanto $\hat{\mathcal{A}}$ atua diagonalmente sob a solução particular Ψ_0 .

Aplicando o vínculo de Gauss a Ψ_0 , utilizando a equação (5.13), e usando o fato que $\boldsymbol{\omega}$ é por construção uma conexão plana, chegamos ao resultado esperado

$$\hat{\mathcal{G}} \Psi_0 = (\partial_x \hat{\mathcal{A}}_y - \partial_y \mathcal{A}_x + \mathcal{A}_x \times \hat{\mathcal{A}}_y) \Psi_0 = (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x + \omega_x \times \omega_y) \Psi_0 = 0.$$

²Adotamos a notação padrão $\text{Tr}(\tau^i \tau^j) \equiv -\frac{1}{2} \delta^{ij}$, como nas referências [62, 39]

A partir da solução particular se postula que a solução geral de (5.3) se escreve na forma

$$\Psi[\mathcal{A}_x] = \Psi_0[\mathcal{A}_x]\psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]. \quad (5.14)$$

Substituindo isto na equação (5.3), e tendo em mente que $\hat{\mathcal{A}}_y^i$ satisfaz a regra de Leibniz como derivada funcional, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{\mathcal{G}}^i(\Psi_0[\mathcal{A}_x]\psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]) \\ &= \left[(\partial_x \hat{\mathcal{A}}_y^i + \epsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_x^j \hat{\mathcal{A}}_y^i) - \partial_y \mathcal{A}_x^i \right] (\Psi_0[\mathcal{A}_x]\psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]) \\ &= \psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x] \hat{\mathcal{G}}^i \Psi_0[\mathcal{A}_x] + (\partial_x \hat{\mathcal{A}}_y^i + \epsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_x^j \hat{\mathcal{A}}_y^i) \psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Daqui se deduz que $\psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]$ satisfaz o vínculo de Gauss restrito (x -Gauss)

$$0 = \left(\partial_x \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_x^i} + \epsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_x^j \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_x^k} \right) \psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x] \equiv \hat{\mathcal{G}}_x \psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]. \quad (5.16)$$

Esta última equação nos diz basicamente que ψ^{inv} é invariante sob as transformações de x -calibre

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon^{(x)} \mathcal{A}_x^i &\equiv [\mathcal{A}_x^i, \hat{\mathcal{G}}_x(\varepsilon)] = D_x \varepsilon^i, \\ \delta_\varepsilon^{(x)} \psi^{\text{inv}} &= [\psi^{\text{inv}}, \hat{\mathcal{G}}_x(\varepsilon)] = \hat{\mathcal{G}}_x(\varepsilon) \psi^{\text{inv}} = 0, \end{aligned}$$

o que explica o sufixo “inv”.

Fechamos esta seção com alguns comentários importantes.

1. O problema com a fase na (5.9) é que os estados físicos são multi-avaliados, pois vimos que α_1 é multi-valuado (veja o comentário justo após a definição (2.102) de α_1). Esta dificuldade é superada facilmente pelo requerimento que $4\pi\kappa/\gamma$ seja um inteiro, o que conduz à regra de quantização bem conhecida do nível da teoria [75, 61], que no presente contexto se escreve como

$$\frac{\kappa}{\gamma} = \frac{n}{4\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.17)$$

2. O 1-cociclo α_1 em (5.9) sendo trivial pode ser absorvido através da redefinição dos funcionais de onda (segundo (2.98) na seção 2.2.5) $\tilde{\Psi} \equiv e^{-2\pi i \alpha_0} \Psi$. É fácil verificar que estes estados são invariantes de calibre,

$$\tilde{\Psi}^g[\mathcal{A}_x] = \tilde{\Psi}[\mathcal{A}_x^g] = \tilde{\Psi}[\mathcal{A}_x].$$

$\tilde{\Psi}$ é justamente ψ^{inv} introduzido na (5.14).

3. $\Psi_0 = \exp(2\pi i S_{\text{WZW}})$, o exponencial da ação de Wess–Zumino–Witten, definida na variedade espacial Σ_2 , é uma solução particular da teoria de CS na representação da conexão (e por tanto da gravitação em 3D segundo nosso esquema).

Uma situação parecida acontece na gravitação em 4D com constante cosmológica positiva, no formalismo de Ashtekar: uma solução particular que resolve todos os vínculos é $\Psi_0 = \exp(\frac{2\pi i}{\Lambda} S_{\text{CS}})$, onde S_{CS} é a ação de Chern–Simons em 3D definida na borda espacial da variedade 4D original! Este estado é conhecido como estado de Kodama [51]. Mais interessante ainda é que o estado de Kodama é também uma solução particular da teoria de Yang–Mills ([69] e as referências ali citadas).

O passo seguinte natural na quantização do modelo é a construção do espaço de Hilbert. Para isso é preciso definir um produto escalar, que formalmente se escreve

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle = \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{A}}} \mathcal{D}\mu[\mathcal{A}] \overline{\Psi[\mathcal{A}_x]} \Psi'[\mathcal{A}_x].$$

Como já foi mencionado no capítulo 4 o problema com esta definição é que a medida de integração $\mathcal{D}\mu[\mathcal{A}]$ é definida só de maneira formal, na prática não se conhece uma medida no espaço de configurações das conexões. Esta dificuldade é superada na representação de laços, que é o tema da seguinte seção.

5.1.2 Representação de laços

Apresentamos agora o formalismo de laços na teoria de Chern–Simons (LQ-CS). Esta representação foi proposta pela primeira vez por Constantinidis, Luchini e Piguet no [39], como uma continuação do trabalho de Dunne, Jackiw e Trugenberger [62].

Seguindo o espírito da LQG (conforme as motivações discutidas na seção 4.2.2) em vez de considerar funcionais de $\mathcal{A}_x(\mathbf{x})$, que se transformam in-homogeneamente sob as transformações de calibre e que dependem de um número infinito de graus de liberdade, consideramos funcionais das holonomias, $U(\alpha)$, definidas ao longo de caminhos orientados $\alpha_y = [x_1, x_2]$ em Σ_2 com coordenada y constante,

$$U(\alpha_y, x_1, x_2) = \mathcal{P} e^{\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{A}_x^i \tau_i dx},$$

que respondem às transformações de calibre homogeneamente,

$$U(\alpha_y, x_1, x_2) \mapsto g^{-1}(y, x_2) U(\alpha_y, x_1, x_2) g(y, x_1). \quad (5.18)$$

Note que a holonomia é definida a partir unicamente da componente \mathcal{A}_x da conexão. É por isso que restringimos os caminhos α_y serem constantes em y , caso contrário as holonomias dependeriam de $\hat{\mathcal{A}}_y$ que não é uma variável de configuração.

O colchete entre $U(\alpha, \mathcal{A}_x)$ e \mathcal{A}_y^i é [76]

$$\begin{aligned} \{U(\alpha, \mathcal{A}_x), \mathcal{A}_y^i(\mathbf{x})\} &= \frac{\delta U(\alpha, \mathcal{A}_x)}{\delta \mathcal{A}_x(\mathbf{x})} \\ &= \frac{\gamma}{\kappa} \int ds \dot{\alpha}(s) \delta^2(\alpha(s), \mathbf{x}) [U(\alpha_2, \mathcal{A}_x) \tau^i U(\alpha_1, \mathcal{A}_x)], \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde $\alpha = \alpha(s)$, $s \in [0, 1]$ é a curva original, α_1 e α_2 , duas curvas tais que $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha$, são os pedaços de α antes e depois da inserção da matriz τ^i no ponto onde $\mathcal{A}_y^i(\mathbf{x})$ atua sobre U . Repare nesta fórmula que a integração é 1-dimensional, mas o argumento da integração tem uma distribuição δ^2 , portanto o resultado da integral deve ser proporcional a uma distribuição δ . Nas teorias de Yang–Mills isto se resolve utilizando o fluxo do campo elétrico em vez do campo eléctrico, conforme se fez na [seção 4.2.2](#). No presente caso da teoria ser 2d podemos definir o “fluxo” de \mathcal{A}_y^i como

$$A^i(\beta) \equiv \int_{\beta} dt \dot{\beta}(t) \mathcal{A}_y^i(x, y(t)), \quad (5.20)$$

onde $\beta(s)$, $t \in [0, 1]$ é uma curva com coordenada x constante. Usando (5.19) o colchete de Dirac–Poisson entre a holonomia e o “fluxo” de \mathcal{A}_y^i é

$$\{U(\alpha, \mathcal{A}_x), A^i(\beta)\} = \frac{\gamma}{\kappa} U(\alpha_2, \mathcal{A}_x) \tau^i U(\alpha_1, \mathcal{A}_x), \quad (5.21)$$

com α_1 e α_2 definidas acima, após (5.19). (Compare este resultado com seu análogo (4.10) na gravitação em 4D.) A rigor, na verdade não existe algo similar ao “fluxo” de uma conexão, $A^i(\beta)$ se apresenta como a “circulação” da componente \mathcal{A}_y ao longo de β e neste sentido similar a uma holonomia. O problema com $A^i(\beta)$ é que se transforma in-homogeneamente sob as transformações da calibre. Mais adiante se constrói a partir de \mathcal{A}_y^i um operador que se transforma de forma análoga ao fluxo nas teorias de Yang–Mills.

Às vezes nós nos permitimos escrever simplesmente $U(\alpha)$ sem explicitar a dependência funcional a respeito de \mathcal{A}_x para enfatizar a semelhança com $A^i(\beta)$. De fato, pense na holonomia como um campo não local no grupo (sem fazer referência à conexão) que depende de uma curva α em Σ_2 . Podemos então escrever a álgebra de holonomias e “fluxos” completa como

$$\begin{aligned} \{U(\alpha), U(\alpha')\} &= 0, \\ \{U(\alpha), A^i(\beta)\} &= \frac{\gamma}{\kappa} U(\alpha_2) \tau^i U(\alpha_1), \\ \{A^i(\beta), A^j(\beta')\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde α_1 e α_2 foram definidas acima, após (5.19). Da discussão no final da [seção 4.2.2](#), sabemos que é possível reconstruir a representação da conexão a partir das holonomias e dos fluxos. Assim, estas representações são equivalentes. Promovemos então a álgebra de holonomias e fluxos (5.22) a operadores que obedecem as regras de comutação:

$$\begin{aligned} [U(\alpha), U(\alpha')] &= 0, \\ [U(\alpha), \hat{A}^i(\beta)] &= i \frac{\gamma}{\kappa} U(\alpha_2) \tau^i U(\alpha_1), \\ [\hat{A}^i(\beta), \hat{A}^j(\beta')] &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

As holonomias são adequadas para a construção de um espaço de Hilbert com um produto escalar bem definido (seção 4.3), uma vez que tratam-se de elementos do grupo, e dessa forma temos a nossa disposição a medida de Haar no grupo $SU(2)$ como medida de integração (4.13).

Espaço Cilíndrico Cyl e espaço \mathcal{H}_{kin} . Definimos agora funções complexas que dependem de um número finito de holonomias. Baseados na seção 4.3, construímos o espaço cilíndrico Cyl cujos elementos são (veja (5.14))

$$\Psi_{\Gamma,f}[\mathcal{A}_x] = \Psi_0[\mathcal{A}_x]\psi_{\Gamma,f}^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x],$$

onde $\psi_{\Gamma,f}^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x] = f(U(\alpha_{y_1}, x_1, x'_1), \dots, U(\alpha_{y_K}, x_K, x'_K))$,

$\Gamma = \{\alpha_{y_k}, x_k, x'_k, k = 1, \dots, K\}$ é um grafo definido como um conjunto finito de K y -constante caminhos em Σ_2 , e f é uma função em $SU(2)^{\times K}$ com valores complexos. Um vetor assim definido é denotado por $|\Gamma, f\rangle$. Uma vez que os funcionais de onda são escritos em termos de um número finito de holonomias, que são elementos do grupo, pode-se utilizar a medida de Haar $d\mu_k$ do grupo para definir o produto interno no Cyl como foi feito na (4.14), temos assim

$$\langle \Gamma, f | \Gamma', f' \rangle = \int \prod_{k=1}^N d\mu_k \overline{f(U_1, \dots, U_N)} f'(U_1, \dots, U_N). \quad (5.24)$$

O espaço de Hilbert cinemático \mathcal{H}_{kin} é definido como o completamento de Cauchy de Cyl a respeito do produto interno acima definido.

Decomposição ortogonal. Na seção 4.3 encontramos uma base ortonormal em virtude do teorema de Peter–Weyl. Vimos que uma base $|\Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle$, com $\vec{j} = j_1, \dots, j_K$, etc. para \mathcal{H}_{kin} é:

$$\Psi_{\Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}} = \Psi_0[\mathcal{A}_x] \langle \mathcal{A}_x | \Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n} \rangle = \Psi_0[\mathcal{A}_x] \prod_{k=1}^K R_{m_k n_k}^{j_k}(U(\alpha_{y_k}, x_k, x'_k)),$$

onde $R_{m_k n_k}^{j_k}(U)$ denota o elemento matricial (m_k, n_k) na representação de spin j da holonomia U . Note que excluímos o valor $\vec{j} = 0$, e completamos a base com o “vetor nulo” $|\emptyset\rangle$,

$$\langle \mathcal{A}_x | \emptyset \rangle = \Psi_0[\mathcal{A}_x] \quad (5.25)$$

correspondendo ao grafo vazio. Como já foi visto na seção 4.3.1, estes vetores formam uma base ortonormal:

$$\langle \Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n} | \Gamma', \vec{j}', \vec{m}', \vec{n}' \rangle = \delta_{\Gamma\Gamma'} \delta_{\vec{j}, \vec{j}'} \delta_{\vec{m}, \vec{m}'} \delta_{\vec{n}, \vec{n}'}.$$

Vemos que cada caminho $(\alpha_{y_k}, x_k, x'_k)$ do grafo Γ tem associado uma representação spin j de $SU(2)$. Vetores associados a diferentes grafos são automaticamente ortogonais. Note também que o espaço de Hilbert não é separável: é a soma direta

$$\mathcal{H}_{\text{kin}} = \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{H}_{\text{kin}}^{\Gamma},$$

sobre todos os grafos possíveis, onde $\mathcal{H}_{\text{kin}}^\Gamma$ é o espaço de Hilbert separável associado ao grafo Γ . Um vetor $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\text{kin}}$ se escreve como a expansão em termos da base dada por

$$|\Psi\rangle = \sum_{\Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}} c_{\Gamma, \vec{j}, \vec{m}, \vec{n}} |\Gamma, \vec{j}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle,$$

a soma nos Γ é sobre um subconjunto finito de grafos.

Invariância de Calibre SU(2), espaço $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$. Antes de implementar o vínculo de Gauss (5.3) vamos especificar a topologia da variedade 2-dimensional espacial Σ_2 como sendo de um cilindro infinito. Topologicamente equivalentes ao cilindro são, por exemplo, um plano infinito furado ou uma esfera com os polos furados. A independência de fundo métrico nos permite representar os grafos em qualquer uma dessas superfícies.

A fixação da topologia das seções espaciais nos permite impor o vínculo na forma de invariância de ψ^{inv} sob todas as transformações de x -calibre finitas, implicando, como pode ser visto facilmente de (5.18), que as funções devem ser reduzidas a traços das holonomias ao longo de caminhos fechados (ciclos ou laços de Wilson, *i.e.* seções y -constante do cilindro)

$$U(y) \equiv \text{Tr}U(\alpha c_y, x_1, x'_1).$$

Deste modo, cada ciclo é caracterizado por sua “altura”, e os grafos são agora conjuntos C de “ciclos” C_y . Isto define o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}^C$ associado ao grafo C , cuja base é o conjunto ortonormal de vetores “redes de spin” $|C, \vec{j}\rangle$, dados por

$$\Psi_{C, \vec{j}}[\mathcal{A}_x] = \Psi_0[\mathcal{A}_x] \prod_{n=1}^N \chi^{j_n}(U_{y_n}), \quad \text{com} \quad \chi^j(U_y) = \text{Tr}R^j(U_y),$$

onde \vec{j} significa (j_1, \dots, j_K) . Estes vetores são ortonormais, no sentido que

$$\langle C, \vec{j} | C', \vec{j}' \rangle = \delta_{C, C'} \delta_{\vec{j}, \vec{j}'}$$

Agora considere o espaço S_o de todas as combinações finitas das redes de spin, sendo $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ seu completamento de Cauchy. É a soma direta $\bigotimes_C \mathcal{H}_{\text{Gauss}}^C$, onde $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}^C$ é o espaço de Hilbert associado ao grafo C , que é separável. Não é o caso de $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$, uma vez que os grafos estão indexados por arranjos arbitrários (ciclos com alturas y arbitrárias) de números reais.

Também é plausível considerar grafos mais gerais sobre o cilindro em vez de simplesmente ciclos y -constante, tal como se faz na LQG em 3+1 dimensões. Classicamente isto é factível pois é possível definir holonomias gerais em qualquer direção, não só aquelas com y constante. Porém, lembre-se que a curvatura é nula neste modelo, portanto todos os laços fechados que encerram uma região simplesmente conexa valem 1 em virtude do teorema de Stokes não Abeliano [77, 78]. No final

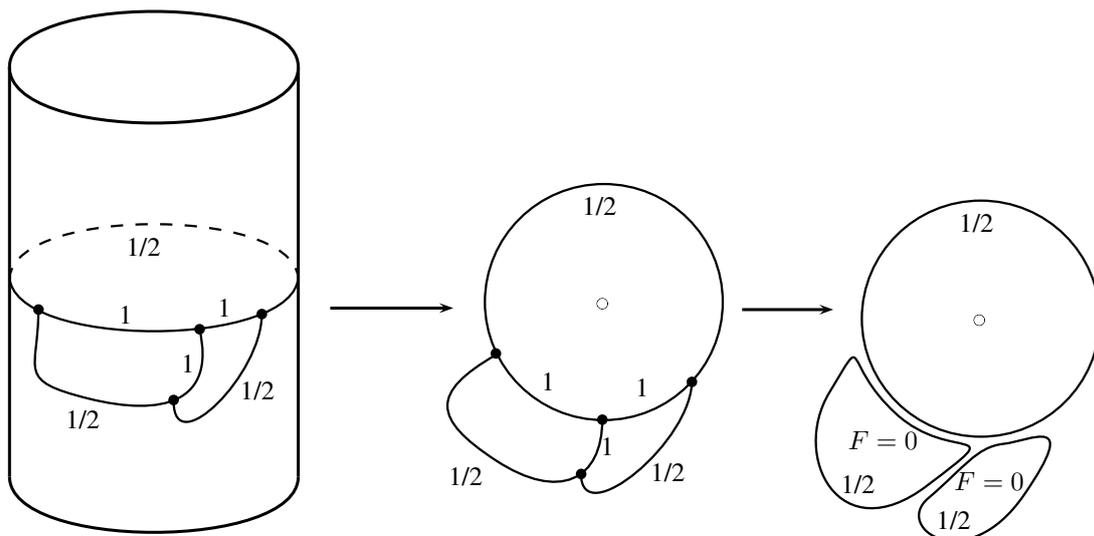


Figure 5.1: Um cilindro infinito representando o espaço Σ , e um grafo particular definido sobre ele. Após projetar o cilindro num plano infinito, onde foi removida a origem, se separa a parte não trivial do grafo onde só sobrevivem os ciclos não contraíveis, embora aqueles laços que encerram uma região simplesmente conexa valem 1.

das contas todo grafo se reduz a uma composição de ciclos não triviais y -constante que não podem ser contraídos a um ponto (veja a Fig. 5.1) No nível quântico as holonomias são definidas como funcionais só da componente \mathcal{A}_x sobre curvas com y constante. Observe, contudo, que temos à nossa disposição a conexão “auxiliar”

$$\omega = h^{-1}dh = h^{-1}\partial_x h dx + h^{-1}\partial_y h dy,$$

dependendo somente de \mathcal{A}_x onde h é dado por (5.6), e com a qual é possível definir holonomias gerais. Mas, o resultado final é o mesmo que antes, pois ω é, por construção, uma conexão de curvatura nula.

Invariância de difeomorfismos, espaço físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ e estados s -knot. Uma vez que $|C, \vec{j}\rangle$ depende da coordenada y , os elementos de $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ não são invariantes de difeomorfismo. (Mas eles são x -invariantes de difeomorfismos, pois os laços de Wilson são integrais de uma 1-forma ao longo de um ciclo.) Classicamente o vínculo de Gauss era suficiente para dar conta dos difeomorfismos, mas na teoria quântica existe uma quebra manifesta dos y -difeomorfismos, como consequência da escolha de polarização. A invariância local representada por y -difeomorfismo não foi contemplada quando o vínculo de Gauss foi resolvido. Para entender o porquê disso, lembre que um difeomorfismo ao longo da coordenada y

$$y' = y'(z), \quad x' = x,$$

gerado pelo campo vetorial

$$\xi = (0, \xi^y),$$

atua sobre a variável de configuração \mathcal{A}_x na forma

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_x = D_x(\xi^y \mathcal{A}_y) = \partial_x(\xi^y \mathcal{A}_y) + \mathcal{A}_x \times (\xi^y \mathcal{A}_y),$$

i.e. como uma transformação de calibre com parâmetro $\xi^y \mathcal{A}_y$. Contudo, quando aplicado a um funcional de onda deve-se substituir \mathcal{A}_y por o operador definido em (5.2). Este tipo de “transformação de calibre” não foi contemplado quando resolvemos o vínculo de Gauss. Portanto, ainda precisamos implementar este setor da invariância de difeomorfismos. A invariância mais geral sob os difeomorfismos gerados pelos vetores da forma $\xi = (\xi^x, \xi^y)$ vai ser evidente em vista do resultado manifestamente invariante que vamos obter em breve.

Para começar note que o único estado físico que resolve o vínculo de Gauss incluindo a invariância sob todos os difeomorfismos espaciais é dado pelo vetor nulo $|\emptyset\rangle$ representado pelo funcional $\Psi_0[\mathcal{A}_x]$ dado por (5.4), que descreve a ausência de “geometria”. De fato, suponhamos que Ψ_{phys} seja um estado físico no $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ diferente de Ψ_0 . Seja também ϕ um difeomorfismo que desloca os ciclos que conformam Ψ_{phys} na direção y . Visto que o produto interno entre duas funções cilíndricas baseados em diferentes grafos é automaticamente zero, chegamos à conclusão que Ψ_{phys} é ortogonal consigo mesmo, coisa que não faz sentido. Vemos assim que se quisermos ter uma chance de encontrar estados físicos devemos considerar um espaço maior do que $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$. Fazemos isso no que segue adaptando à gravitação em 3D a técnica da “média do grupo” que foi descrita formalmente na seção 4.3.3 para o caso da gravitação em 4D, e que agora é feita de forma explícita.

O ponto de partida é o triplo de Gel’fand $S_\circ \subset \mathcal{H}_{\text{Gauss}} \subset S'_\circ$, sendo S'_\circ o dual do espaço das redes de spin S_\circ denso no $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$. Os elementos de S'_\circ são definidos pela ação sobre as funções teste $\Psi \in S_\circ$:

$$\begin{aligned} \Phi : S_\circ &\rightarrow \mathbb{C}, \\ \Psi &\mapsto \Phi(\Psi) \equiv \langle \Phi, \Psi \rangle, \end{aligned} \tag{5.26}$$

onde, usamos a notação de Schwartz $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar os funcionais lineares.

Vimos que o produto interno (5.24) no $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ é invariante por difeomorfismos (não depende de altura dos ciclos que formam dois estados envolvidos no produto), então é possível implementar o difeomorfismo ϕ através um operador unitário U_ϕ , tal que a sua ação sobre funcionais no S_\circ é

$$\langle U_\phi \Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, U_{\phi^{-1}} \Psi \rangle.$$

Os estados invariantes de y -difeomorfismos resultam ser elementos do espaço dual construído a partir de qualquer vetor da rede de spin Ψ pela “projecção” funcional

$$P_{\text{diff}} : S_\circ \rightarrow S'_\circ$$

definido por

$$\langle P_{\text{diff}}\Psi, \Psi' \rangle = \sum_{\Psi''} \langle \Psi'' | \Psi' \rangle, \quad \forall |\Psi' \rangle \in S_{\circ}, \quad (5.27)$$

onde a soma é feita sobre todos os vetores $|\Psi'' \rangle$ no S_{\circ} obtidos de $|\Psi \rangle$ através de um y -difeomorfismo, *i.e.*

$$|\Psi'' \rangle = U_{\phi} |\Psi \rangle.$$

Uma vez que duas funções cilíndricas a respeito de diferentes grafos são mutuamente ortogonais, uma consequência da relação de ortogonalidade da base (4.24), a imensa maioria de difeomorfismos contínuos colapsam na soma finita em (5.27) que corresponde aos difeomorfismos discretos dos grafos coloridos. Em uma dimensão só temos dois elementos neste grupo: a identidade e a reflexão que inverte a ordem dos ciclos (*i.e.* o difeomorfismo $y \mapsto -y$). As formas lineares $\Phi = P_{\text{diff}}\Psi$ geram o espaço de Hilbert físico $\mathcal{H}_{\text{phys}}$, com um produto interno induzido a partir do que se têm $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ (veja (4.31)):

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle_{\text{diff}} = \langle \Phi_1, \Psi_2 \rangle = \langle P_{\text{diff}}\Psi_1, \Psi_2 \rangle, \quad (5.28)$$

onde $|\Psi_1 \rangle, |\Psi_2 \rangle \in S_{\circ}$.

Uma base ortonormal no espaço de Hilbert físico, que é dada pelos estados “*s-knot*” introduzidos em (4.33), é obtida pela projeção da base de redes de spin $|C, \vec{j} \rangle$:

$$\begin{aligned} |\vec{J} \rangle &\equiv |j_1, j_2, \dots, j_N \rangle = P_{\text{diff}} |C, \vec{j} \rangle, \\ \langle \vec{J} | \vec{J}' \rangle &= \delta_{\vec{J}\vec{J}'} = \delta_{j_1 j'_1} \cdots \delta_{j_N j'_N}, \quad j_k = 1/2, 1, 3/2, \dots \end{aligned} \quad (5.29)$$

a base é completada com o vetor nulo $|\emptyset \rangle$. Eles são soluções do vínculo de Gauss e são invariantes sob os difeomorfismos espaciais. A partir desta base podemos construir qualquer vetor físico em $\mathcal{H}_{\text{phys}}$.

Os vetores de $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ dependem unicamente das classes de equivalência dos vetores rede de spin sob a ação dos y -difeomorfismos. Em particular, o vetor $|\vec{J} \rangle$, não depende da altura particular nem da ordem y_k dos ciclos, mas só do número de tais ciclos e do valor do spin associado a cada um deles³

Repare que os estados *s-knot* são completamente caracterizados por arranjos de semi-inteiros $\vec{J} = \{j_1, \dots, j_N\}$. Um vetor deste tipo não guarda memória nenhuma da altura dos ciclos do grafo a partir do qual foi construído, portanto completamente independente de qualquer sistema de coordenadas locais em Σ_2 . A invariância sob todos os difeomorfismos espaciais é manifesta.

Uma vez que o conjunto de *s-knots* é contável, o espaço de Hilbert físico da gravitação em 3D com constante cosmológica positiva, e parâmetro de Barbero–Immirzi real, é separável.

³Na terminologia da LQG tais classes de equivalência de grafos recebem o nome de *knots*, conforme a seção 4.3.3.

5.2 Observável

O operador mais simples de se escrever é o laço de Wilson definido como o traço de uma holonomia fechada, $\hat{U}(\alpha) \equiv \text{Tr}U(\alpha)$. Ele atua sobre os funcionais de onda multiplicativamente simplesmente adicionando um novo ciclo ao grafo. O operador $\hat{U}(\alpha)$ é interpretado também como um operador de criação de “geometria”. Por exemplo, quando aplicado sobre o vetor nulo obtemos:

$$\hat{U}(\alpha)\Psi_0[\mathcal{A}_x] = \text{Tr}U(\alpha)\Psi_0[\mathcal{A}_x] \equiv \Psi_{\circlearrowleft}[\mathcal{A}_x],$$

onde denotamos Ψ_{\circlearrowleft} a excitação do vetor nulo que resulta num novo grafo com um ciclo.

Na LQG existe um operador associado com a quantidade geométrica área, cuja ação é bem definida no espaço cinemático [12, 79, 11, 70]. Ele atua diagonalmente nos vetores (portanto ele é auto-adjunto), e tem um espectro discreto. O operador de área não é invariante por difeomorfismos, pois ele não comuta com os geradores de difeomorfismos espaciais, neste sentido se diz que o observável é “parcial”.

Seguindo então os passos da LQG no que se refere ao operador área, procuramos um operador diagonal na base *s-knot* do espaço de Hilbert físico para nosso modelo de gravitação em 3D.

Para começar, a álgebra dos colchetes de Dirac entre a holonomia e o “fluxo” de \mathcal{A}_y , dada por (5.21), é promovida ao estatuto de álgebra operadores,

$$[U(\alpha), \hat{A}^i(\beta)] = i \frac{\gamma}{\kappa} U(\alpha_2) \tau^i U(\alpha_1), \quad (5.30)$$

com α, β duas curvas com y constante e x constante, respectivamente, e α_1 e α_2 como foram definidas anteriormente (veja explicação após (5.19)). $\hat{A}^i(\beta)$ é definido como a versão operador de (5.20):

$$\hat{A}^i(\beta) = \int dt \dot{\beta}(t) \hat{\mathcal{A}}_y^i(x, y(t)). \quad (5.31)$$

A equação (5.30) também é verificada usando a polarização escolhida (5.2), na qual $\hat{\mathcal{A}}_y$ atua como derivada funcional a respeito de \mathcal{A}_x . É possível mostrar então que (a demonstração é análoga a (5.19))

$$\hat{A}^i(\beta)U(\alpha) = i \frac{\gamma}{\kappa} U(\alpha_1) \tau^i U(\alpha_2).$$

O operador \hat{A}^i herda duas propriedades nada atrativas de $\hat{\mathcal{A}}_y$. A primeira é que \hat{A}^i se transforma in-homogeneamente sob as transformações de calibre, a segunda é que sua ação sobre os funcionais de onda é complicada. Mostramos isto no caso de $\hat{\mathcal{A}}_y^i$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}}_y \Psi &= \hat{\mathcal{A}}_y(\Psi_0 \psi^{\text{inv}}) \\ &= (\hat{\mathcal{A}}_y \Psi_0) \psi^{\text{inv}} + \Psi_0 \hat{\mathcal{A}}_y \psi^{\text{inv}} \\ &= \omega_y \Psi + \Psi_0 \hat{\mathcal{A}}_y \psi^{\text{inv}}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde utilizamos $\hat{\mathcal{A}}_y \Psi_0 = \omega_y \Psi_0$ na (5.12), junto com a definição $\omega_y = h^{-1} \partial_y h$ em (5.10). Note da última equação (5.32) que o operador definido como

$$\hat{W}_y(\mathcal{A}_x, \hat{\mathcal{A}}_y) \equiv \hat{\mathcal{A}}_y - \omega_y = \hat{\mathcal{A}}_y - h^{-1} \partial_y h, \quad (5.33)$$

aplicado sobre ao funcional $\Psi = \Psi_0 \psi^{\text{inv}}$ atua como $\hat{\mathcal{A}}_y^i$ sobre ψ^{inv} , *i.e.*

$$\hat{W}_y^i \Psi[\mathcal{A}_x] = \Psi_0 \hat{\mathcal{A}}_y^i \psi^{\text{inv}}[\mathcal{A}_x]. \quad (5.34)$$

A vantagem de \hat{W}_y sobre $\hat{\mathcal{A}}_y$ é que o primeiro se transforma como um vetor de SU(2):

$$\hat{W}_y \mapsto \hat{W}_y^g = g^{-1}(\mathbf{x}) \hat{W}_y g(\mathbf{x}),$$

pois é definido como a diferença de dois objetos que se transformam como conexões. Isto se mostra, no caso das transformações infinitesimais, calculando o comutador com o vínculo de Gauss:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \hat{W}_y^i \Psi &= [\hat{W}_y, \hat{\mathcal{G}}(\lambda)] \Psi \\ &= \hat{W}_y (\hat{\mathcal{G}}(\lambda) \Psi) - \hat{\mathcal{G}}(\lambda) (\hat{W}_y \Psi) \\ &= \hat{W}_y (\Psi_0 \hat{\mathcal{G}}_x(\lambda), \psi^{\text{inv}}) - \hat{\mathcal{G}}(\lambda) (\Psi_0 \hat{\mathcal{A}}_y \psi^{\text{inv}}) \\ &= \Psi_0 \hat{\mathcal{A}}_y \hat{\mathcal{G}}_x(\lambda) \psi^{\text{inv}} - \hat{\mathcal{G}}_x(\lambda) \hat{\mathcal{A}}_y \psi^{\text{inv}} \\ &= \Psi_0 [\hat{\mathcal{A}}_y, \hat{\mathcal{G}}_x(\lambda)] \psi^{\text{inv}}, \end{aligned}$$

onde usamos (5.15) e (5.34) com $\hat{\mathcal{G}}_x$ definido em (5.16). Temos então, usando (5.34), que

$$\delta_\lambda \hat{W}_y^i \Psi = \Psi_0 \epsilon^{ijk} \lambda^j \hat{\mathcal{A}}_y^k \psi^{\text{inv}} = \epsilon^{ijk} \lambda^j \hat{W}_y^k \Psi.$$

Finalmente, para evitar ter que trabalhar com distribuições, define-se, em analogia com (5.31), o “fluxo” de \hat{W}_y

$$\hat{W}(\beta) \equiv \int_\beta dt \dot{\beta}(t) \hat{W}_y^i(\mathcal{A}_x(t), \hat{\mathcal{A}}_y(t)), \quad (5.35)$$

ao longo da curva x -constante finita $\beta(t)$ na variedade espacial Σ_2 onde $t \in [0, 1]$. Este operador representa um bom objeto para começar a construir observáveis invariantes de calibre.

Para definir a ação de $\hat{W}(\beta)$ sobre os funcionais de onda, é suficiente considerar a ação sobre um funcional de onda de spin j particular,

$$\Psi^{(j)}[\alpha, \mathcal{A}_x] = \Psi_0[\mathcal{A}_x] U^{(j)}(\alpha, \mathcal{A}_x), \quad \text{com} \quad U^{(j)}(\alpha_y; \mathcal{A}_x) \equiv R^{(j)}(U(\alpha; \mathcal{A}_x)),$$

correspondendo à holonomia ao longo de um ciclo y -constante $x = \alpha(s)$, $s \in [0, 1]$ no espaço Σ_2 , que na representação de spin j é dada pela matriz $R^{(j)}$. A ação de

$\hat{W}(\beta)$ sob este funcional é diferente de zero se β intersepta α , dando como resultado: (a demonstração é completamente análoga ao caso clássico na (5.21))

$$\hat{W}^i(\beta)\Psi^{(j)} = \frac{\gamma}{i\kappa}\Psi_0[\mathcal{A}_x]U(\alpha_2, \mathcal{A}_x)\tau^{(j)i}U(\alpha_1, \mathcal{A}_x), \quad (5.36)$$

onde a curva α foi dividida nas partes α_1 (antes) e α_2 (depois) da sua interseção com β , e resultando na inserção da matriz $\tau^{(j)i}$ (a representação matricial de spin j do gerador τ^i) no ponto em que β corta α .

Define-se então o operador quadrático

$$\hat{W}^2(\beta) \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{W}^i(\beta)\hat{W}^i(\beta), \quad (5.37)$$

que, em virtude do resultado anterior, atua sobre o mesmo $\Psi^{(j)}$ diagonalmente. Para mostrar isto, suponha que em vez de $\hat{W}^2(\beta)$ temos o operador

$$\hat{W}^2(\beta_x, \beta_{x'}) \equiv \sum_{i=1}^3 \hat{W}^i(\beta_{x'})\hat{W}^i(\beta_x),$$

onde $\beta_x \neq \beta_{x'}$ são duas curvas x -constante tal que $x' < x$ (o caso $x' > x$ completamente análogo). Aplicando este operador a $\Psi^{(j)}$ temos

$$\sum_{i=1}^3 \hat{W}^i(\beta_{x'})\hat{W}^i(\beta)\Psi^{(j)} = -\frac{\gamma^2}{\kappa^2}\Psi_0[\mathcal{A}_x] \sum_{i=1}^3 U(\alpha_3, \mathcal{A}_x)\tau^{(j)i}U(\alpha_2, \mathcal{A}_x)\tau^{(j)i}U(\alpha_1, \mathcal{A}_x),$$

onde a curva α é dividida nos pedaços α_1 , α_2 e α_3 , com as respectivas inserções, segundo a regra em (5.36). No limite $x' \rightarrow x$, α_2 se encolhe até um ponto e portanto $U(\alpha_2, \mathcal{A}_x) \rightarrow \mathbb{I}$. Assim temos

$$\hat{W}^2(\beta)\Psi^{(j)} = \frac{\gamma^2}{\kappa^2}j(j+1)\Psi^{(j)}, \quad (5.38)$$

onde usamos a representação de spin j do operador de Casimir de SU(2) dada por

$$\sum_{i=1}^3 \tau^{(j)i}\tau^{(j)i} = -j(j+1) \times \mathbb{I}^{(j)}.$$

Por último, podemos tirar a raiz quadrada de $\hat{W}^2(\beta)$, e definir

$$\hat{L}(\beta) \equiv \sqrt{\hat{W}^2(\beta)}. \quad (5.39)$$

O espectro deste operador é simplesmente a raiz quadrada do espectro de $\hat{W}(\beta)$:

$$\hat{L}(\beta)\Psi^{(j)} = \frac{\gamma}{\kappa}\sqrt{j(j+1)}\Psi^{(j)}. \quad (5.40)$$

Infelizmente este resultado elegante é eclipsado pelo fato que a presença da integral na definição de $\hat{W}^i(\beta)$ obstrui a invariância de calibre de $\hat{W}^2(\beta)$ e subsequentemente de $\hat{L}(\beta)$. Porém, vamos ver que numa regularização apropriada, $\hat{L}(\beta)$ pode ser escrito como o limite de um operador invariante de calibre.

A fim de aplicar este operador a um vetor rede de spin geral, precisamos introduzir uma regularização. Similarmente ao operador de área na LQG [12, 13, 11, 70, 32], uma regularização é disponível para $\hat{L}(\beta)$. Em linhas gerais a ideia é seguinte:

Regularização. Começamos com um objeto clássico (uma função das variáveis do espaço de fase) definido como uma integral. O esquema de regularização consiste em 1) aproximar a integral por uma soma de Riemann e 2) logo substituir esta por uma soma de operadores quânticos.

$$\mathcal{O}_K = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_k^K \mathcal{O}_k \Rightarrow \hat{\mathcal{O}}_K = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_k^K \hat{\mathcal{O}}_k, \quad (5.41)$$

onde K é o parâmetro de regularização ou refinamento. Verifica-se que a ação dos operadores $\hat{\mathcal{O}}_k$ sobre os vetores de $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$ é bem definida. 3) Finalmente, a ação do operador regularizado é implementada como um limite de uma sequência $\{\hat{\mathcal{O}}_K\}$. A sequência eventualmente se torna independente do refinamento. Em particular o espectro torna-se “estacionário” (existe um refinamento K' tal que para qualquer $K > K'$, o espectro permanece inalterado). O sucesso em todos estes passos permite afirmar que o limite $K \rightarrow \infty$ é bem definido.

Então, considere o grafo C de um vetor $|C, \vec{j}\rangle$ de redes de spin que envolve vários ciclos C_n , $n = 1, \dots, N$, dotados com representações de spin j_n . Um subconjunto destes ciclos cruzam o caminho β a diferentes alturas y_m ($m = 1, \dots, M$) (veja Fig. 5.2). O esquema de regularização consiste em subdividir o caminho β em K

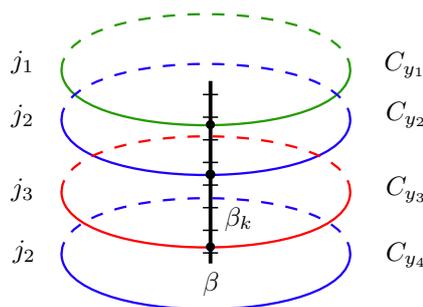


Figure 5.2: Regularização: A curva β é dividida em segmentos β_k de tal forma que cada segmento é interceptado, como máximo, por um ciclo. Repare também que um dos ciclos não intercepta β .

segmentos β_k , $k = 1, \dots, K$, tal que cada ciclo cruze no máximo um dos segmentos

β_k . Para cada um destes segmentos podemos definir \hat{L}_k como

$$\hat{L}_k \equiv \sqrt{\hat{W}^2(\beta_k)}.$$

Então o operador regularizado total é a soma de todas as peças

$$\hat{L}_K(\beta) = \sum_{k=1}^K \hat{L}_k. \quad (5.42)$$

Aplicamos \hat{L}_K sobre um vetor da base e, segundo a prescrição na (5.41), tomamos o limite $K \rightarrow \infty$:

$$\hat{L}(\beta)|C, \vec{j}\rangle = \lim_{K \rightarrow \infty} \hat{L}_K|C, \vec{j}\rangle \quad (5.43)$$

$$= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \hat{L}_k|C, \vec{j}\rangle. \quad (5.44)$$

É claro que existe um valor K' no refinamento tal que cada segmento β_k é cortado só por um ciclo ou por nenhum ciclo. A partir deste ponto a soma se estende unicamente sobre aqueles segmentos com interseção, *i.e*

$$\begin{aligned} \hat{L}(\beta)|C, \vec{j}\rangle &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \hat{L}_m|C, \vec{j}\rangle \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \frac{\gamma}{\kappa} \sqrt{j_m(j_m + 1)}|C, \vec{j}\rangle \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde M é o número de ciclos que compõem o grafo C . Repare que na última linha utilizamos a equação (5.40) que descreve a ação de \hat{L}_m sobre um ciclo individual. Então fica claro a partir deste momento que o espectro de $\hat{L}(\beta)$ não depende mais do refinamento K , este permanece estacionário, e portanto temos que

$$\hat{L}(\beta)|C, \vec{j}\rangle = L_{C, \vec{j}}|C, \vec{j}\rangle, \quad L_{C, \vec{j}}(\beta) \equiv \frac{\gamma}{\kappa} \sum_{m=1}^M \sqrt{j_m(j_m + 1)}. \quad (5.46)$$

O espectro só depende do número M de ciclos que cruzam o caminho β e de suas representações $SU(2)$ associadas. Repare que o resultado também depende do grafo C , motivo pelo qual incluímos um subíndice C no autovalor. É importante esclarecer que existe a possibilidade de que alguns dos ciclos do grafo C sejam excluídos da soma (5.46), como se mostra na Fig. 5.2, isto quer dizer que em geral $N \geq M$.

Assim, tivemos sucesso em construir $\hat{L}(\beta)$ como o limite em (5.45). Isso define um “observável parcial”, isto é, um operador auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$, obedecendo a equação de autovalor

$$\hat{L}(\beta)|C, j\rangle = L_{C, j}|C, j\rangle. \quad (5.47)$$

Uma pergunta óbvia é se é possível estender a definição deste observável parcial a um observável genuíno, *i.e.*, um operador auto-adjunto $\hat{L}_{\text{phys}}(\beta)$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{phys}}$. Para qualquer curva finita dada β , a resposta é negativa, como veremos em seguida.

Da [seção 4.3.3](#) lembre que os estados físicos foram definidos “fora” do espaço $\mathcal{H}_{\text{Gauss}}$. O estados físicos, $\Phi \in \mathcal{H}_{\text{phys}} \subset S'_o$, são definidos como formas lineares que atuam sobre os vetores de redes de spin $\Psi \in S_o$ (veja (5.26)). Portanto, uma extensão natural de $\hat{L}(\beta)$ como um operador atuando no S'_o , com domínio em $\mathcal{H}_{\text{phys}}$, é dado por

$$\hat{L}'(\beta)\Phi(\Psi) \equiv \langle \hat{L}'(\beta)\Phi, \Psi' \rangle = \langle \Phi, \hat{L}(\beta)\Psi' \rangle, \quad \forall \Psi' \in S_o, \quad (5.48)$$

onde $\Phi \in \mathcal{H}_{\text{phys}}$ é obtido pela “projeção” $\Phi = P_{\text{diff}}\Psi$ de algum vetor $\Psi \in S_o$ segundo a definição (5.27). Por linearidade, é suficiente especializar em elementos da base de redes de spin de S_o :

$$\Phi \text{ substituído por } \Phi_{\vec{j}} = P_{\text{diff}}\Psi_{C,\vec{j}}$$

$$\Psi' \text{ substituído por } \Psi_{C',\vec{j}'},$$

sendo C e C' dois grafos genéricos. Temos então

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle &= \langle P_{\text{diff}}\Psi_{C,\vec{j}}, \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle, \\ &= \sum_{C'' \in [C]} \langle \Psi_{C'',\vec{j}} | \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle, \\ &= \begin{cases} \delta_{\vec{j},\vec{j}'} & \text{if } C' \in [C], \\ 0 & \text{if } C' \notin [C], \end{cases} \quad \forall C', j', \end{aligned} \quad (5.49)$$

onde denotamos por $[C]$ a classe de equivalência formada por todos os grafos equivalentes ao grafo C através de um y -difeomorfismo. A última igualdade se segue da ortonormalidade da base rede de spin. Usando a definição (5.48) e a equação de autovalores (5.47), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}'(\beta)\Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle &= \langle \Phi_{\vec{j}}, \hat{L}(\beta)\Psi_{C',\vec{j}'} \rangle \\ &= \sum_{C'' \in [C]} \langle \Psi_{C'',\vec{j}} | \hat{L}(\beta)\Psi_{C',\vec{j}'} \rangle \\ &= L_{C',\vec{j}'}(\beta) \sum_{C'' \in [C]} \langle \Psi_{C'',\vec{j}} | \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle \\ &= L_{C',\vec{j}'}(\beta) \begin{cases} \delta_{\vec{j},\vec{j}'} & \text{if } C' \in [C], \\ 0 & \text{if } C' \notin [C], \end{cases} \\ &= L_{C',\vec{j}'}(\beta) \langle \Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle, \quad \forall C', j'. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Finalmente obtemos

$$\langle \hat{L}'(\beta)\Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle = \langle L_{C',\vec{j}'}(\beta)\Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C',\vec{j}'} \rangle,$$

nesta dedução usamos a equação de autovalores (5.47). O problema com este resultado é que $L_{C', \vec{j}}$, do lado direito da fórmula, depende do grafo C' que define a rede de spin $|C', \vec{j}\rangle$ da função teste $\Psi_{C', \vec{j}}$, mas do lado esquerdo o vetor *s-knot* $|\vec{j}\rangle$, em virtude da invariância dos difeomorfismos, não depende de nenhum grafo específico, portanto $|\vec{j}\rangle$ não pode ser auto-vetor de $\hat{L}(\beta)$. Ainda pior, os “autovalores” de $\hat{L}(\beta)$ na base *s-knot* (veja (5.29)), não são sequer invariantes sob y -difeomorfismos! De fato, um y -difeomorfismo atuando sobre os estados físicos Φ resulta num deslocamento dos ciclos que interceptam β (por exemplo pode deslocar arbitrariamente os ciclos que formam o grafo, como se mostra na Fig. 5.3), mas deixa a curva β inalterada⁴, modificando assim o número de intersecções entre os ciclos e β . A conclusão é que o operador $L(\beta)$ não pode ser um observável físico.

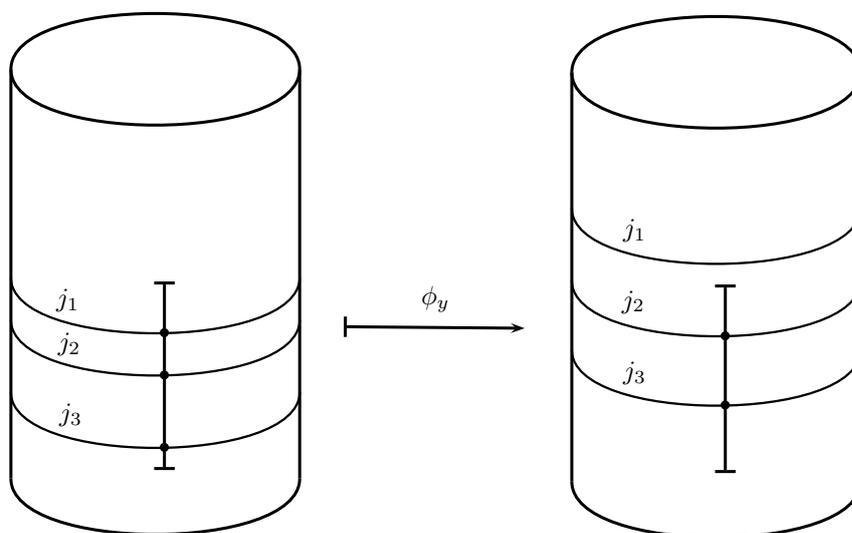


Figure 5.3: Um difeomorfismo ativo atua sobre os ciclos deslocando-os, mas deixando a curva β fixa.

A não viabilidade de promover $\hat{L}(\beta)$ no espaço de Hilbert físico é uma consequência de querermos construir um observável a partir de um objeto puramente geométrico local. Sabemos que nossa teoria, por ser de natureza topológica, só pode ter observáveis globais. Então para curar $\hat{L}(\beta)$ simplesmente temos que “deslocalizá-lo”. Isto é conseguido fazendo β uma curva infinita, como veremos logo.

Queremos mostrar que se, em vez das curvas finitas β , considerarmos curvas infinitas $\beta_\infty = \{x, y | x = \text{constante}, -\infty < y < \infty\}$, chegamos a um observável físico bem definido, *i.e.*, um operador auto-adjunto \hat{L}_{phys} no $\mathcal{H}_{\text{phys}}$. Certamente, em

⁴Entende-se que os difeomorfismos são ativos, portanto só atuam sob os estados mas não sob a variedade. É uma variante do clássico “problema do buraco” de Einstein (para uma discussão pode consultar [70]).

primeiro lugar, (5.46) torna-se

$$\hat{L}(\beta_\infty)|C, \vec{j}\rangle = L_{\vec{j}}|C, \vec{j}\rangle, \quad \text{com} \quad L_{\vec{j}} = \frac{\gamma}{\kappa} \sum_{n=1}^N \sqrt{j_n(j_n + 1)}, \quad (5.51)$$

onde a soma é efetuada agora sobre todas as interseções da curva β_∞ com o grafo C , portanto sobre todos os ciclos do grafo C . Por consequência, o auto-valor $L_{\vec{j}}$ é independente do grafo C escolhido na classe de equivalência $[C]$, caracterizada por ter N ciclos com as cores $\vec{j} = (j_1, \dots, j_N)$. Observe que, mesmo que β sendo uma curva infinita, o resultado é um espectro finito, desde que o número de ciclos seja finito. Note também que os auto-valores são independentes da posição x da curva β_∞ , naturalmente. Como exemplo considere novamente o caso descrito na Fig. 5.3, se β é uma curva infinita é claro que não importa qual o difeomorfismo em y o número de ciclos do grafo C que cortam β_∞ é sempre o mesmo. A invariância sob todos os difeomorfismos espaciais do espectro é agora manifesta.

Indo para o nível do espaço de Hilbert físico, $\mathcal{H}_{\text{phys}}$, podemos definir \hat{L}_{phys} a partir de $\hat{L}(\beta_\infty)$ seguindo o raciocínio da (5.50)

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_{\text{phys}} \Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C', \vec{j}'} \rangle &= \langle \Phi_{\vec{j}}, \hat{L}(\beta_\infty) \Psi_{C', \vec{j}'} \rangle \\ &= \sum_{C'' \in [C]} \langle \Psi_{C'', \vec{j}} | \hat{L}(\beta_\infty) \Psi_{C', \vec{j}'} \rangle \\ &= L_{\vec{j}'} \sum_{C'' \in [C]} \langle \Psi_{C'', \vec{j}} | \Psi_{C', \vec{j}'} \rangle \\ &= L_{\vec{j}} \begin{cases} \delta_{\vec{j}\vec{j}'} & \text{if } C' \in [C], \\ 0 & \text{if } C' \notin [C], \end{cases} \\ &= \langle L_{\vec{j}} \Phi_{\vec{j}}, \Psi_{C', \vec{j}'} \rangle, \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde $L_{\vec{j}}$ foi definido por equação (5.51). Concluimos finalmente que

$$\hat{L}_{\text{phys}}|\vec{j}\rangle = \frac{\gamma}{\kappa} \sum_{n=1}^N \sqrt{j_n(j_n + 1)}|\vec{j}\rangle, \quad (5.53)$$

o que mostra que \hat{L}_{phys} é real diagonal na base *s-knot* de $\mathcal{H}_{\text{phys}}$, e daí, define um operador auto-adjunto, *i.e.* um observável como foi anunciado.

5.3 Limite clássico: O espectro de zero não é zero

O procedimento usual para definir observáveis na teoria quântica consiste em promover um observável clássico a um de operador auto-adjunto, e em seguida implementar o esquema de regularização descrito on page 99. Ainda não definimos o observável clássico que corresponde a \hat{L}_{phys} , não fizemos isso pois ele apresenta uma peculiaridade que é explicada agora.

Considere primeiramente o objeto clássico

$$L(\beta) = \int_{\beta} dt \dot{\beta} \sqrt{\sum_{i=1}^3 W_y^i W_y^i} \equiv \int_{\beta} dt \dot{\beta} \sqrt{W_y^2}, \quad (5.54)$$

SU(2) invariante, onde

$$W_y^i \equiv A_y^i - h^{-1} \partial_y h, \quad (5.55)$$

é o análogo clássico de (5.33), que se transforma como um vetor SU(2). Seja $\beta = \bigcup_{k=1}^K \beta_k$ a decomposição da curva β , a soma de Riemann de (5.54) com esta decomposição se escreve

$$L(\beta) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \Delta\beta \sqrt{W_y^2(\bar{y}_k)}, \quad (5.56)$$

onde $\Delta\beta$ é o comprimento (no sistema de coordenadas auxiliar y) do segmento β_k , *i.e.* $\Delta\beta = y_{k+1} - y_k$, e $\bar{y}_k \in \beta_k$ é um ponto representativo do segmento β_k ($y_k \leq \bar{y}_k \leq y_{k+1}$).

Considere agora a versão clássica de (5.35) definida ao longo de um dos segmentos β_k , isto é

$$W^i(\beta_k) \equiv \int_{\beta_k} dt \dot{\beta} W_y^i(\beta(t)) \sim \Delta\beta W_y^i(\bar{y}_k), \quad (5.57)$$

onde o último passo é o valor médio da integral no intervalo $[y_k, y_{k+1}]$. Portanto,

$$L(\beta) = \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \sqrt{\sum_{i=1}^3 W^i(\beta_k) W^i(\beta_k)} \equiv \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K L_k(\beta_k). \quad (5.58)$$

Usando (5.57) é fácil se convencer que (5.58) coincide com (5.56), que era a soma de Riemann de um objeto invariante de calibre. Temos assim a definição clássica de $L(\beta)$. Repare que justamente esta definição foi utilizada no esquema de regularização na (5.42).

A segunda questão importante é interpretar fisicamente $L(\beta)$. Surpreendentemente vamos mostrar que, para uma curva finita β , e daí para a curva β_{∞} no limite, o invariante de calibre clássico $L(\beta)$ é nulo! A fim de mostrar isto, notemos que a conexão $\mathcal{A} = \mathcal{A}_a dx^a$, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (\mathcal{A}_x - \lambda^{-1} \partial_x \lambda) dx + \lambda^{-1} d\lambda \\ &= \lambda^{-1} (\lambda \mathcal{A}_x \lambda^{-1} - \partial_x \lambda \lambda^{-1}) \lambda + \lambda^{-1} d\lambda \end{aligned}$$

onde λ é um funcional de \mathcal{A}_y definido pela equação $\lambda^{-1} \partial_y \lambda = \mathcal{A}_y$. Isto mostra que a conexão é equivalente de calibre à

$$\mathcal{A} = \lambda (\mathcal{A}_x - \lambda^{-1} \partial_x \lambda) \lambda^{-1} dx \equiv E dx.$$

Usando esta conexão no vínculo de Gauss (3.55) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x \mathcal{A}_y - \partial_y \mathcal{A}_x + \mathcal{A}_x \times \mathcal{A}_y \\ &= -\partial_y E(x, y). \end{aligned}$$

Isto significa que $E = E(x)$ é independente de y . Com este resultado a conexão se escreve

$$\mathcal{A} = E(x)dx.$$

Como corolário, no calibre em que a última equação é válida, necessariamente $\mathcal{A}_y = 0$. Aplicando este resultado em (5.6) que define h como funcional de \mathcal{A}_x , inferimos que $h = h[E_x(x)]$ é independente de y neste calibre. Por último, da versão clássica (5.55) de W_y descobrimos que

$$W_y = \mathcal{A}_y - h^{-1} \partial_y h = 0.$$

Visto que a quantidade clássica $L(\beta)$ definida por (5.58) é invariante de calibre, concluímos que $L(\beta) = 0$, e daqui também $L(\beta_\infty)$ no limite $\beta \rightarrow \infty$, como foi anunciado. A nossa conclusão então é que a não trivialidade do observável quântico \hat{L}_{phys} é um efeito puramente quântico. Temos a situação em que o espectro não nulo de um operador quântico corresponde a um observável clássico identicamente nulo.

Nota: $L(\beta)$ é *global*. É de se esperar que o objeto invariante de calibre $L(\beta) = 0$ seja nulo, pois a teoria topológica é caracterizada pela ausência de observáveis invariantes locais. $L(\beta)$ claramente é local pois depende de x e das extremidades de β . No limite da curva β indo até o infinito, segue-se também a nulidade de $L(\beta_\infty)$, embora este último seja de fato global. Não é claro que $L(\beta_\infty)$ seja global à primeira vista, em princípio poderia depender da coordenada x da curva β_∞ , mas o fato da curvatura \mathcal{F}_{ab} ser nula, junto com o teorema de Stokes não Abelianano [77, 78], nos permite mostrar facilmente que $L(\beta_\infty)$ é independente de x .

5.4 Quantização das constantes fundamentais

Na seção 2.3 tínhamos determinado a relação entre κ , Λ e G_N . A relação é (desta vez escrevemos também a velocidade da luz)

$$\frac{c^3}{8\pi G_N \sqrt{\Lambda}} = -\kappa. \quad (5.59)$$

Lembre agora que na (seção 4.2.1), vimos que o “nível” da teoria (a constante em frente da ação de CS) é quantizada por argumentos topológicos se o grupo de calibre subjacente é compacto e simplesmente conexo. No nosso caso o nível da teoria reduzida é κ/γ , portanto, segundo (5.17), temos

$$\frac{\kappa}{\gamma} = \frac{\hbar\nu}{(4\pi)} \quad \text{com } \nu \in \mathbb{Z}. \quad (5.60)$$

Comparando (5.59) e (5.60), e definindo $l_P = \hbar G_N / c^3$, o comprimento de Planck em 2+1 dimensões, obtemos uma regra de quantização das três constantes fundamentais da teoria:

$$\gamma l_P \sqrt{\Lambda} = \frac{1}{2\nu}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (5.61)$$

Todas as constantes se combinam de tal forma que o resultado final é um número inteiro ν .

Substituindo (5.61) na (5.51) o espectro do operador \hat{L}_{phys} se escreve finalmente como

$$L_{\vec{j}} = -\gamma 8\pi \sqrt{\Lambda} l_P \sum_{n=1}^N \sqrt{j_n(j_n + 1)} = \frac{4\pi}{\nu} \sum_{n=1}^N \sqrt{j_n(j_n + 1)}.$$

Daqui se infere que $L_{\vec{j}}$ é adimensional. Um operador com unidades de comprimento pode ser definido como $l_\Lambda \hat{L}_{\text{phys}}$, este último muito semelhante ao seu análogo operador área na gravitação 3+1 dimensional⁵.

⁵Com a diferença importante que em na gravitação 3+1 dimensional o operador de área é só um observável parcial, nem sequer invariante sob os difeomorfismos espaciais.

6 Conclusões

“...analogies, it is true, decide nothing, but they can make one feel more at home.”

Sigmund Freud, *New Introductory Lectures on Psychoanalysis*.

Neste trabalho, foi apresentada uma revisão da gravitação em 3D, no âmbito das teorias de calibre de Yang–Mills e as topológicas de Chern–Simons. A imagem física que surge desta formulação é a de teorias de calibre se propagando a respeito de outras teorias de calibre, desaparecendo assim qualquer referência a uma estrutura de fundo absoluta. Vimos também um fato curioso da gravitação em 3D, como foi a presença de duas ações que descrevem a teoria clássica. Este fato foi a origem da ambiguidade do parâmetro de Barbero–Immirzi, da qual já se tinha conhecimento na gravitação em 4D. Logo, na quantização, revisamos sistematicamente o modo de construir o espaço de Hilbert físico, no quadro da gravitação quântica de laços. Nesta teoria, a noção de continuidade é substituída por uma sorte de espuma quântica.

Com estas ferramentas foi estudada a quantização da gravitação em 3D. No que se segue, expomos os resultados da tese.

Resultados

O modelo de Bonzom e Livine (BL) é uma teoria da gravitação em 3D com constante cosmológica Λ e um parâmetro do tipo Barbero–Immirzi γ [33]. Nesta tese temos desenvolvido a quantização de laços do modelo BL Lorentziano com constante cosmológica positiva. Para isso, mostramos primeiramente que no formalismo clássico uma fixação de calibre axial conduz a uma redução do modelo a uma teoria de Chern–Simons com conexão real e definida sobre um grupo compacto $SO(3)$. Logo, a quantização foi feita seguindo um programa de quantização de laços já existente da teoria de Chern–Simons [39]. Completamos a teoria com a construção de um observável físico global.

De forma detalhada temos:

- A ambiguidade de Barbero–Immirzi na gravitação em 3D, tem sua origem no fato que é possível definir dois produtos internos invariantes não equivalentes na álgebra do grupo $SO(3,1)$. A mesma ambiguidade já era conhecida na gravitação em 4D, onde o grupo de calibre é também $SO(3,1)$, mas correspondendo

ao grupo das transformações de Lorentz em 4D, enquanto que no caso da gravitação em 3D, o grupo de calibre corresponde às transformações de Lorentz e translações em 3D. Assim, é de se esperar uma diferença qualitativa no momento de interpretar γ em cada um dos casos, mesmo que o grupo possua a mesma dimensão, isto é, 6.

- O parâmetro de Barbero–Immirzi na gravitação Lorentziana em 4D, resulta ser extremadamente benigno, pois permite uma extensão analítica do formalismo de Ashtekar vencendo assim a dificuldade de ter que trabalhar com variáveis complexas. Baseados nesta ideia, desenvolvemos uma análise detalhada do setor $\Lambda > 0$, do modelo BL Lorentziano, onde conseguimos reduzir o grupo de calibre de de Sitter $SO(3,1)$ ao seu subgrupo compacto $SO(3)$, graças a escolha de um calibre axial apropriado e a uma redefinição das variáveis canônicas. Estas variáveis podem ser consideradas as análogas às variáveis de Ashtekar–Barbero na gravitação em 4D, onde o calibre axial da teoria em 3D é comparado com o calibre temporal na teoria em 4D.
- O esquema desenvolvido é também válido no caso Lorentziano com $\Lambda < 0$. O grupo de calibre é o $SO(2,2)$ (grupo AdS). Após aplicar o esquema de redução, obtemos uma teoria de Chern–Simons, definida sobre o grupo não compacto $SO(2,1)$. O problema com este modelo é que a quantização de laços é bem definida unicamente no caso de grupos compactos. Alternativamente, podemos considerar a gravitação Riemanniana com $\Lambda < 0$, que tem grupo de calibre $SO(3,1)$ (o anti-de Sitter Euclidiano), após a redução, o grupo de calibre é o $SO(3)$.
- A quantização do modelo BL Lorentziano é feito seguindo o programa de quantização da teoria de Chern–Simons, com o grupo $SU(2)$ no caso de um espaço com a topologia de um cilindro [39]. A escolha de topologia permite a construção de laços fechados não triviais. Vamos denominar esta teoria como LQ-CS para diferenciá-la da LQG em 4D.
- Quando adaptada, a LQ-CS a nosso modelo, obtemos um espaço de Hilbert físico separável com uma base *s-knot*, que consiste de N ciclos fechados não orientados etiquetada por arranjos de spins $j = (j_1, \dots, j_N)$. Construimos um observável global \hat{L}_{phys} , diagonal na base *s-knot*:

$$\hat{L}_{phys}|j\rangle = -\gamma 8\pi\sqrt{\Lambda}L_P \sum_{n=1}^N \sqrt{j_n(j_n + 1)}|j\rangle$$

com um espectro bastante similar ao observável parcial “área” presente na gravitação 4D.

- Finalmente, apesar da não trivialidade do observável quântico \hat{L}_{phys} , descobrimos que a contrapartida clássica de $L(\beta)$ é trivial, na verdade nula. Atribuímos este resultado ao fato que um $L(\beta_\infty)$ não nulo, corresponde ao limite de

uma quantidade invariante de calibre local, portanto, de um observável local clássico $L(\beta)$. A existência deste último, estaria em contradição com a natureza topológica da teoria. Assim, o observável \hat{L}_{phys} , junto com seu espectro, aparentemente é o resultado de um efeito puramente quântico. Segundo o nosso conhecimento, não existe na literatura nenhum exemplo anterior de um observável cuja contrapartida clássica seja nula. Repare que zero é o autovalor de \hat{L}_{phys} :

$$\hat{L}_{\text{phys}}|\emptyset\rangle = 0|\emptyset\rangle,$$

onde o vector nulo $|\emptyset\rangle$ corresponde ao grafo vazio¹.

- Um último resultado, que consideramos interessante por razões topológicas, é a quantização das constantes fundamentais da teoria: $\gamma l_P \sqrt{\Lambda} = 1/2\nu$, onde $\nu \in \mathbb{Z}$.

Discussão y perspectivas

Um primeiro ponto que gostaríamos de discutir aqui é acerca da interpretação física do modelo estudado. Para isso, considere as soluções clássicas da gravitação em 3D com constante cosmológica positiva e partículas pontuais acopladas [20]. É sabido que na gravitação pura com constante cosmológica positiva, as seções espaciais têm a topologia de uma esfera: $\Sigma = S^2$. O resultado de colocar uma partícula puntual num dos polos, por exemplo, é uma singularidade tipo “cônica”, que consiste em remover uma cunha da esfera e identificar as bordas resultantes. Esta construção necessariamente induz uma outra singularidade cônica no polo oposto. A topologia das seções espaciais são agora $\Sigma = S^1 \times \mathbb{R}$, justamente a topologia de um cilindro. É plausível que nosso modelo corresponda a esta situação física. É um tema a ser investigado em trabalhos posteriores.

Seguindo com as partículas puntuais, os autores em [80] estudam um modelo cosmológico Riemanniano em 3D, com $\Lambda > 0$ e duas partículas puntuais. Os autores deste trabalho sinalam que nesta teoria contem um horizonte cosmológico, ao qual é possível associar uma entropia (e por tanto uma temperatura) análoga à entropia de Hawking dos buracos negros. De forma similar, os autores em [81] chegam a um resultado similar, mas dessa vez, para o caso do buraco negro BTZ, numa teoria de gravitação Riemanniana com $\Lambda < 0$ (caso anti-de Sitter Riemanniano). O que nosso formalismo pode dizer sobre estes modelos? Vimos que nosso esquema de quantização é aplicável nas situações acima mencionadas, pois os grupos de calibre são $SO(4)$ e $SO(3,1)$, respetivamente. Seria muito interessante interpretar o significado do observável \hat{L}_{phys} e seu espectro no contexto dos modelos considerados neste parágrafo.

Trocando de tema, uma restrição na quantização da LQG é que a topologia do espaço é predeterminada e fixada. Não temos conhecimento de um mecanismo que

¹Agradecemos a Alejandro Perez por esta última observação.

contemple uma topologia variável. Contudo, o primeiro passo nesta direção é a generalização do modelo desenvolvido ao caso de outras topologias, para dar um exemplo, temos um toro de n asas.

Temos apontado (item 3 na página 89) uma semelhança entre o estado de Kodama $\Psi_K = \exp(\frac{2\pi i}{\Lambda} S_{CS})$ da gravitação em 4D, e a solução particular $\Psi_0 = \exp(2\pi S_{WZW})$, correspondente ao vetor nulo $|\emptyset\rangle = \Psi_0|0\rangle$. Ambas soluções resolvem todos os vínculos de suas respectivas teorias. Existe uma outra coisa em comum, ambas soluções resolvem também a equação de Hamilton-Jacobi da teoria clássica. Isto é mostrado para o estado de Kodama em [51]. No caso de Ψ_0 , isto resulta evidentemente do fato que a equação de Hamilton-Jacobi tem a mesma forma funcional que o vínculo de Gauss quântico. Pode isso significar que a solução Ψ_0 é uma solução semiclássica da teoria?

Um ponto delicado é o referente aos difeomorfismos temporais. Não é claro exatamente o que acontece com estes difeomorfismos ou como podemos obtê-los. É possível que a restauração das variáveis originais, isto é, e e ω , possa nos ajudar neste problema.

No contexto da LQG, é bem sabido que a compacticidade do grupo de calibre — ou então, do grupo residual após a fixação parcial de calibre — é crucial, pelo menos até agora. Além da gravitação Riemanniana, o grupo compacto é obtido para a gravitação Lorentziana em 4D, no caso do calibre temporal [11, 31, 70, 32], válido unicamente em quatro dimensões. Um progresso significativo foi obtido pelos autores de [40], que conseguiram reduzir o grupo de calibre da gravitação Lorentziana D -dimensional, ao grupo compacto $SO(D-1)$ — mas a técnica funciona unicamente para o formalismo Hamiltoniano. Nosso caso é diferente em três aspectos: em três dimensões não precisamos de seus vínculos de simplicidade (veja o segundo artigo em [40]), respaldamo-nos firmemente na existência do parâmetro tipo Barbero–Immirzi, introduzido por Bonzom e Livine, uma marca característica particular à essa dimensão; além disso, começamos com um formalismo Lagrangiano existente.

Sem o direcionamento dos experimentos, é possível que nossos esforços por entender a natureza “atômica” do espaço-tempo não seja muito diferente dos esforços dos filósofos Gregos da antiguidade, para entender a natureza atômica da matéria. Afinal de contas, no momento só temos, no que se refere à quantização da gravitação, um conjunto de teorias matemáticas e modelos extremadamente simples quando comparados com o mundo real. Isto não quer dizer que nossos esforços sejam inúteis, pois o problema da quantização da gravitação há estimulado e enriquecido outros ramos da física e a matemática. É possível que no futuro só algumas das ideias que temos sobre a gravitação quântica sejam corretas, no mesmo sentido que hoje sabemos que os Gregos estavam no caminho correto sobre a existência dos átomos, mas que os detalhes sejam completamente diferentes do que nós conseguimos imaginar.

Bibliography

- [1] S. Liberati and L. Maccione, “Quantum Gravity phenomenology: achievements and challenges,” *J.Phys.Conf.Ser.*, vol. 314, p. 012007, 2011.
- [2] G. Amelino-Camelia and J. Kowalski-Glikman, eds., *Planck Scale Effects in Astrophysics and Cosmology (Lecture Notes in Physics)*. Springer, softcover reprint of hardcover 1st ed. 2005 ed., 11 2010.
- [3] D. Oriti, ed., *Approaches to Quantum Gravity: Toward a New Understanding of Space, Time and Matter*. Cambridge University Press, 4 2009.
- [4] C. Rovelli, “Notes for a brief history of quantum gravity,” no. gr-qc/0006061, 2000.
- [5] S. Mukhi, “String theory: a perspective over the last 25 years,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 28, p. 153001, 2011.
- [6] C. Rovelli, “Loop quantum gravity: the first twenty five years,” no. 1012.4707, 2010.
- [7] A. Ashtekar, “Introduction to Loop Quantum Gravity,” no. 1201.4598, 2012.
- [8] C. Rovelli, “Zakopane lectures on loop gravity,” no. 1102.3660, 2011.
- [9] A. Perez, “The Spin Foam Approach to Quantum Gravity,” no. 1205.2019, 2012.
- [10] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, J. Wheeler, and K. Thorne, *Gravitation (Physics Series)*. W. H. Freeman, first edition ed., 9 1973.
- [11] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Background independent quantum gravity: A status report,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 21, p. R53, 2004.
- [12] C. Rovelli and L. Smolin, “Discreteness of area and volume in quantum gravity,” *Nucl.Phys.*, vol. B442, pp. 593–622, 1995.
- [13] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Quantum theory of geometry. 1: Area operators,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 14, pp. A55–A82, 1997.
- [14] T. Thiemann, “A Length operator for canonical quantum gravity,” *J.Math.Phys.*, vol. 39, pp. 3372–3392, 1998.

-
- [15] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Quantum theory of geometry. 2. Volume operators,” *Adv.Theor.Math.Phys.*, vol. 1, pp. 388–429, 1998.
- [16] A. Ashtekar and P. Singh, “Loop Quantum Cosmology: A Status Report,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 28, p. 213001, 2011.
- [17] M. Bojowald, “Loop Quantum Gravity and Cosmology: A dynamical introduction,” 2011.
- [18] S. Carlip, *Quantum Gravity in 2+1 Dimensions (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 12 2003.
- [19] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, “Three-Dimensional Einstein Gravity: Dynamics of Flat Space,” *Annals Phys.*, vol. 152, p. 220, 1984.
- [20] S. Deser and R. Jackiw, “Three-Dimensional Cosmological Gravity: Dynamics of Constant Curvature,” *Annals Phys.*, vol. 153, pp. 405–416, 1984.
- [21] P. de Sousa Gerbert and R. Jackiw, “Classical and Quantum Scattering on a Spinning Cone,” *Commun.Math.Phys.*, vol. 124, p. 229, 1989.
- [22] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Three-Dimensional Massive Gauge Theories,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 48, pp. 975–978, 1982.
- [23] S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, “Topologically Massive Gauge Theories,” *Annals Phys.*, vol. 140, pp. 372–411, 1982.
- [24] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “The Black hole in three-dimensional space-time,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 69, pp. 1849–1851, 1992.
- [25] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Geometry of the (2+1) black hole,” *Phys.Rev.*, vol. D48, pp. 1506–1525, 1993.
- [26] A. Achucarro and P. K. Townsend, “A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories,” *Phys. Lett.*, vol. B180, p. 89, 1986.
- [27] E. Witten, “(2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System,” *Nucl. Phys.*, vol. B311, p. 46, 1988.
- [28] H.-J. Matschull, “On the relation between 2+1 Einstein gravity and Chern-Simons theory,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 16, pp. 2599–2609, 1999.
- [29] J. F. Barbero G., “Reality conditions and Ashtekar variables: A Different perspective,” *Phys.Rev.*, vol. D51, pp. 5498–5506, 1995.
- [30] G. Immirzi, “Real and complex connections for canonical gravity,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 14, pp. L177–L181, 1997.

- [31] M. Han, W. Huang, and Y. Ma, “Fundamental structure of loop quantum gravity,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. D16, pp. 1397–1474, 2007.
- [32] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 1 ed., 12 2008.
- [33] V. Bonzom and E. R. Livine, “A Immirzi-like parameter for 3d quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 25, p. 195024, 2008.
- [34] A. Ashtekar, “New Variables for Classical and Quantum Gravity,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 57, pp. 2244–2247, 1986.
- [35] A. Ashtekar and R. S. Tate, *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity (Advanced Series in Astrophysics and Cosmology)*. World Scientific Pub Co Inc, 5 1991.
- [36] J. Samuel, “A Lagrangian basis for Ashtekar’s formulation of canonical gravity,” *Pramana*, vol. 28, pp. L429–L432, 1987.
- [37] T. Jacobson and L. Smolin, “Covariant Action for Ashtekar’s Form of Canonical Gravity,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 5, p. 583, 1988.
- [38] S. Holst, “Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action,” *Phys.Rev.*, vol. D53, pp. 5966–5969, 1996.
- [39] C. P. Constantinidis, G. Luchini, and O. Piguet, “The Hilbert space of Chern-Simons theory on the cylinder. A Loop Quantum Gravity approach,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, p. 065009, 2010.
- [40] N. Bodendorfer, T. Thiemann, and A. Thurn, “New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions I. Hamiltonian Analysis,” no. 1105.3703, 2011.
- [41] N. Bodendorfer, T. Thiemann, and A. Thurn, “New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions II. Lagrangian Analysis,” no. 1105.3704, 2011.
- [42] N. Bodendorfer, T. Thiemann, and A. Thurn, “New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions III. Quantum Theory,” no. 1105.3705, 2011.
- [43] N. Bodendorfer, T. Thiemann, and A. Thurn, “New Variables for Classical and Quantum Gravity in all Dimensions IV. Matter Coupling,” no. 1105.3706, 2011.
- [44] M. Ferraris, M. Francaviglia, and C. Reina, “Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 "Palatini’s method" discovered by Einstein in 1925,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 14, pp. 243–254, 1982.

-
- [45] J. Zanelli, “Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition,” no. hep-th/0502193, 2008.
- [46] H. Arcos and J. Pereira, “Torsion gravity: A Reappraisal,” *Int.J.Mod.Phys.*, vol. D13, pp. 2193–2240, 2004.
- [47] A. Perez and C. Rovelli, “Physical effects of the Immirzi parameter,” *Phys.Rev.*, vol. D73, p. 044013, 2006.
- [48] P. A. M. Dirac and Physics, *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover Publications, 3 2001.
- [49] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, 8 1994.
- [50] I. Bengtsson, “Yang–Mills theory and general relativity in three–dimensions and four–dimensions,” *Phys.Lett.*, vol. B220, p. 51, 1989.
- [51] L. Smolin, “Quantum gravity with a positive cosmological constant,” no. hep-th/0209079, 2002.
- [52] T. Thiemann, “QSD 4: (2+1) Euclidean quantum gravity as a model to test (3+1) Lorentzian quantum gravity,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 15, pp. 1249–1280, 1998.
- [53] A. Sen, “Gravity as a spin system,” *Phys.Lett.*, vol. B119, pp. 89–91, 1982.
- [54] J. F. Plebanski, “On the separation of Einsteinian substructures,” *J.Math.Phys.*, vol. 18, pp. 2511–2520, 1977.
- [55] K. Krasnov, “Plebanski Formulation of General Relativity: A Practical Introduction,” *Gen.Rel.Grav.*, vol. 43, pp. 1–15, 2011.
- [56] D. Birmingham, M. Blau, M. Rakowski, and G. Thompson, “Topological field theory,” *Phys.Rept.*, vol. 209, pp. 129–340, 1991.
- [57] R. M. Wald, *General Relativity*. University Of Chicago Press, 1st ed., 6 1984.
- [58] M. Bojowald, *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. Cambridge University Press, first edition ed., 2 2011.
- [59] G. T. Horowitz, “Exactly Soluble Diffeomorphism Invariant Theories,” *Commun.Math.Phys.*, vol. 125, p. 417, 1989.
- [60] R. Jackiw, “Chern–Simons terms and cocycles in physics and mathematics,” no. MIT-CTP-1230, C84/10/31, 1984.
- [61] S. Coleman, *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. Cambridge University Press, 2 1988.

- [62] G. V. Dunne, R. Jackiw, and C. Trugenberger, “Chern-Simons Theory in the Schrodinger Representation,” *Annals Phys.*, vol. 194, p. 197, 1989. In Memorium Heinz Pagels.
- [63] P. Baekler, E. W. Mielke, and F. W. Hehl, “Dynamical symmetries in the topological gauge model of gravity with torsion,” *Phys.Rev.D*, 1991.
- [64] E. W. Mielke and P. Baekler, “Topological gauge model of gravity with torsion,” *Phys.Lett.*, vol. A156, pp. 399–403, 1991.
- [65] P. Baekler, E. Mielke, and F. Hehl, “Dynamical symmetries in topological 3-D gravity with torsion,” *Nuovo Cim.*, vol. B107, pp. 91–110, 1992.
- [66] A. Bassetto, G. Nardelli, and R. Soldati, *Yang-Mills Theories in Algebraic Non-Covariant Gauges: Canonical Quantization and Renormalization*. World Scientific Pub Co Inc, 9 1991.
- [67] S. Carlip, “The (2+1)-Dimensional black hole,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 12, pp. 2853–2880, 1995.
- [68] A. Corichi, “Loop quantum geometry: A Primer,” *J.Phys.Conf.Ser.*, vol. 24, pp. 1–22, 2005.
- [69] H. Nicolai, K. Peeters, and M. Zamaklar, “Loop quantum gravity: An Outside view,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 22, p. R193, 2005.
- [70] C. Rovelli, *Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 12 2007.
- [71] W. Ruhl, *The Lorentz group and harmonic analysis (The Mathematical physics monograph series)*. W. A. Benjamin, 1st ed., 1970.
- [72] M. Mastroeni, “An axiomatic formulation of quantum mechanics,” Master’s thesis, Ithaca College, 2009.
- [73] A. O. Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*. World Scientific Publishing Company, 2 revised ed., 11 1986.
- [74] C. Rovelli and L. Smolin, “Spin networks and quantum gravity,” *Phys.Rev.*, vol. D52, pp. 5743–5759, 1995.
- [75] S. Treiman, *Current Algebra And Anomalies*. Singapore: World Scientific, 1986.
- [76] J. Lewandowski, E. Newman, and C. Rovelli, “Variations of the parallel propagator and holonomy operator and the Gauss law constraint,” *J.Math.Phys.*, vol. 34, pp. 4646–4654, 1993.
- [77] I. Y. Aref’eva, “Non-Abelian stokes formula,” *Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 43, pp. 353–356, 1980. 10.1007/BF01018469.

- [78] M. Hirayama and S. Matsubara, “Stokes theorem for loop variables of non-Abelian gauge field,” *Prog.Theor.Phys.*, vol. 99, pp. 691–706, 1998.
- [79] A. Ashtekar and J. Lewandowski, “Quantum theory of geometry. 1: Area operators,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 14, pp. A55–A82, 1997.
- [80] M. Banados, T. Brotz, and M. E. Ortiz, “Quantum three-dimensional de Sitter space,” *Phys.Rev.*, vol. D59, p. 046002, 1999.
- [81] A. Corichi and A. Gomberoff, “On a space-time duality in (2+1) gravity,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 16, pp. 3579–3598, 1999.