Fluidos em Espaços Não Comutativos

Luiz Holender

29 de Novembro de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Luiz Holender

Fluidos em Espaços Não-Comutativos

Vítoria
2011

Fluidos em Espaços Não-Comutativos

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando

Co-Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio dos Santos

Resumo

Neste trabalho apresentaremos os resultados da nossa pesquisa sobre a generalização dos fluidos relativísticos na parametrização de Kähler para espaços não-comutativos aplicando métodos de teoria de campo. A nossa proposta se aplica a uma grande classe de fluidos parametrizados por duas funções arbitrárias suaves: a primeira que generaliza o potencial de Kähler definido na superfície dos potenciais complexos do fluido e a segunda que parametriza a equação de estado. Determinamos, também, os vínculos que os graus de liberdade dos fluidos devem satisfazer para que a teoria tenha as simetrias fundamentais da geometria não-comutativa e calcularemos as grandezas físicas do fluido não-comutativo.

Palavras chave: Teoria quântica dos campos em espaços não-comutativos. Fluidos em espaços não-comutativos.

Área de conhecimento: Teoria Quântica de Campos.

Abstract

In this work, we present the results of our research on the generalization of the relativistic fluids in the Kähler parametrization to noncommutative spaces by applying methods of field theory. Our proposal can be applied to a large class of fluid models parametrized by two arbitrary smooth functions that generalize the Kähler potential on the surface of complex potencials of fluids and the parameter function of the state equation, respectively. We determine the constraints that the degress of freedom of the fluid should satisfy in order to have the fundamental symmetries of the noncommutative geometry and calculate the physical quantities of the noncommutative fluid.

Contribuições Científicas do Autor

- L. Holender, M. A. Santos and I. V. Vancea
  Quantization of the Relativistic Fluid in Physical Phase Space on Kähler Manifolds
  Phys. Rev. D **77**, 045024 (2008), arXiv:0801.3032 [hep-th].

- L. Holender, M. A. Santos, M. T. Orlando and I. V. Vancea
  Noncommutative fluid dynamics in the Kähler parametrization
  Phys. Rev. D **84** 105024 (2011), arXiv:1109.1688 [hep-th].

- L. Holender, M. A. Santos, M. T. D. Orlando and I. V. Vancea
  Local Degrees of Freedom of the Relativistic Perfect Fluid on CP^1
  apresentado no Primeiro Encontro de Física Teórica da UFRRJ
  Seropédica, 26-28 de setembro de 2011.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O modelo de fluido é uma das ferramentas mais importantes disponíveis para o estudo de fenômenos físicos que ocorrem em longas distâncias em comparação com a escala de distância típica do sistema. Tais fenômenos ocorrem em áreas muito diversas da Física como: na descrição dos estados da matéria com ordem local e semi-local, a distribuição da matéria na Relatividade Geral e na Cosmologia, os jatos astrofísicos, as explosões de raios gama, as oscilações de neutrinos, a colisão de núcleos pesados, etc.

Todos os sistemas em que o modelo de fluido é aplicavel são caracterizados por um número grande de graus de liberdade. No entanto, os fenômenos físicos que acontecem nos fluidos são mais naturalmente descritos em termos de um número muito menor de graus de liberdade efetivos. As grandezas físicas típicas que caracterizam os fluidos são: as densidades escalares de matéria, de energia e de pressão, assim como os campos vetoriais de velocidade e os vórtices. Sistemas mais complexos incluem a viscosidade e o cisalhamento [1, 3]. Além disso, os fenômenos de longo alcance podem exibir a invariância de Lorentz ou Poincaré como é o caso de fluidos nucleares ou gravitacionais. Nestes casos, a simetria do espaço-tempo deve ser incorporada ao modelo para obter os fluidos relativísticos. Enquanto a dinâmica de fluidos pode estar relacionada com a Mecânica Estatística dos graus de liberdade originais, na maioria dos casos, o conhecimento da solução das equações de longo alcance dos fluidos é suficiente para a compreensão do comportamento macroscópico do sistema.

As equações de movimento do fluido são equações não-lineares de várias variáveis definidas em um número de dimensões determinado pela dimensão do espaço-tempo e pelos graus de liberdade relevantes do modelo. Em casos particulares os sistemas podem possuir simetrias ocultas e constantes de movimento que ajudam a construir as soluções, ou até mesmo a integrar as equações completamente. No entanto, o conhecimento completo das equações de movimento no caso geral é um problema notoriamente difícil. É comum em nossos dias tentar mapear as equações de fluidos em sistemas de equações obtidas a partir de outros modelos completamente através de uma rede conjecturada de mapeamentos, como por exemplo, em sistemas de D-branas usando o mapeamento AdS/CFT [4].

No caso do fluido não-relativístico, as equações de movimento incluem uma equação de continuidade para a densidade de matéria e a equação de Euler que expressa a lei da força [1]. A simplificação destas equações é obtida para o fluido isentrópico, caso em que a entropia é constante e a pressão é uma função somente da densidade. A simplificação pode ser feita desprezando a dissipação e considerando a força proporcional ao gradiente da pressão.

Podemos obter as equações dos fluidos com as simetrias desejadas de uma forma sistemática, pelo menos nos casos mais simples, invocando o princípio variacional na formulação Lagrangiana ou Hamiltoniana [4]. A abordagem em termos da funcionl ação dos fluidos é importante para a generalização das equações não-relativísticas aos sistemas com a simetria de Poincaré. Outras aplicações destes formalismos são os fluidos que contêm um grande número de cargas com simetrias de calibre locais [4] e o estudo da fase fluida de sistemas supersimétricos [20].

Talvez, um dos resultados mais intrigantes das formulações Lagrangiana e Hamiltoniana é que elas permitem aplicar métodos de teoria de campos para investigar novas propriedades quânticas dos fluidos. Em certo sentido, este é o reverso da construção inicial em que os graus de liberdade microscópicos foram substituidos por poucos graus de liberdade efetivos. No entanto, este método abre a possibilidade de construir novas Lagrangianas quânticas bem como para determinar interessantes propriedades quânticas dos fluidos clássicos que, de outra forma, estariam ocultos nos graus de liberdade de partículas constituintes. Um exemplo de tais propriedades é a quantização das cargas topológicas [16].

O objetivo desta tese é explorar as propriedades físicas de novas classes de fluidos relativísticos perfeitos definidos em espaços não-comutativos usando métodos de teoria de campos não-comutativos.

A motivação inicial para a formulação de uma teoria de fluidos não-comutativo é a observação de que a teoria abeliana não-comutativa de Chern-Simons ao nível n é equivalente a teoria de Laughlin ao nível $1/n$ [7, 8], o que estabelece uma conexão entre as teorias dos fluidos não-comutativos, a dinâmica dos fluidos, o efeito Hall quântico e a teoria das matrizes. A relação entre o efeito Hall quântico fracionário e a teoria de campos não-comutativa foi estudada em [9]. O modelo de fluido não-comutativo de [7] foi usado para determinação das flutuações de densidade em [10] e o estudo da ordem topológica do efeito Hall fracionário em [11] (vide, para uma revisão [12]).

Uma motivação diferente para o estudo dos fluidos não-comutativos é dada pela seguinte observação. Sabe-se que as transformações que preservam o volume (ou transformações de volume) deixam invariante a estrutura não-comutativa do espaço de configurações assim como as equações de movimento dos fluidos Lagrangianos não-abelianos [13, 14, 15, 16]. É natural, então, perguntar neste contexto se existe uma descrição de fluido do escoamento no espaço de configurações não-comutativo.

Recentemente, vários modelos de fluido foram estudados no contexto de teorias de gauge $U(1)$ em espaços curvos não comutativos [17] e no estudo das perturbações cosmológicas do fluido perfeito [18]. Em [19], os autores propuseram uma generalização da estrutura simplética de dois modelos de fluidos não-comutativos e não-relativísticos irrotacional e rotacional, respectivamente.

Certamente, ao estudar os fluidos não-comutativos é preciso investigar modelos que se reduzem aos fluidos relativísticos no limite comutativo do espaço-tempo. Esta tarefa é simplificada pela existência de uma formulação em termos de ação de uma grande classe de fluidos perfeitos relativísticos. Nesta formulação, os graus de liberdade são os potenciais do fluido interpretados como campos de uma Lagrangiana de primeira ordem tanto na parametrização real de Clebsch [4] quanto na parametrização complexa de Kähler [20]. Não existe até agora uma prova da equivalência das duas parametrizações. Porém, ambas permitem a remoção da obstrução de definir uma Lagrangiana consistente que surge na teoria devido ao termo de Chern-Simons necessário para descrever a vorticidade não-nula. Este termo pode ser generalizdo aos fluidos supersimétricos [20, 21].

A parametrização complexa dos potenciais do fluido tem duas propriedades interessantes. Em primeiro lugar, existe uma infinidade de cargas conservadas para todos os potenciais de Kähler que caracterizam uma variedade complexa geodesicamente completa. Em segundo lugar, a dinâmica Hamiltoniana é governada por um conjunto simples de vínculos de segunda-classe. Em particular, a estrutura dos vínculos permitiu uma análise detalhada da dinâmica dos meta-fluidos em [22], a formulação dos fluidos conformes, em [23] e a quantização de uma classe grande de fluidos não-supersimétricos em [24]. Também, a parametrização de Kähler foi usada para a formulação da hidrodinâmica supersimétrica em [26] e a construção das equações de Navier-Stokes nos modelos baseados na relação entre AdS/CFT e os fluidos [27].

A idéia de espaço-tempo não-comutativo é bastante antiga. Ela foi proposta pela primeira vez por Heisenberg numa carta endereçada a Peierels com o intuito de resolver o problema das integrais divergentes em Teoria Quântica de Campos. Mais tarde, esta idéia foi repassada por Pauli a Oppenheimer. Em 1947 Snyder, naquela época orientado por Oppenheimer, publicou a primeira proposta de teoria de campos em espaçõs não-comutativos.

A geometria não-comutativa é baseada na seguinte idéia [6]. A estrutura geométrica de uma variedade diferenciavel comum M pode ser codificada algebricamente na álgebra $(A, \cdot) = (C^\infty(M), \cdot)$ das funções suaves definidas sobre M com o produto $\cdot$ da álgebra sendo a multiplicação comutativa das funções. A geometria não-comutativa pode ser definida de forma similar atráves de uma estrutura algébrica de funções, uma vez que falta uma descrição intuitiva em termos diretamente geométricos das variedades não-comutativas. Portanto, a maneira mais simples de generalizar a álgebra comutativa A é de substituir o produto comutativo $\cdot$ por um novo produto $*_\hbar$tal que

$$f *_\hbar g = fg + \hbar P(f,g) + \cdots \,, \tag{1.1}$$

onde P é uma aplicação ou mapeamento bilinear $P : A \times A \to A$. Nesta notação $\hbar$ sugere uma analogia com a Mecânica Quântica. Para $\hbar \to 0$, a álgebra não comutativa $\mathcal{A} = (A, *)$ se aproxíma da álgebra comutativa $(A, \cdot)$.

A idéia da substituição da operação de multiplicação por uma operação não-comutativa é bastante simples. Porém, não conhecemos nenhum exemplo de construção formalmente correta de variedades não-comutativas a partir da deformação dada na equação (1.1) de variedades arbitrárias. A construção geral segue um caminho mais abstrato e complicado que não pretendemos seguir neste trabalho.

A formulação mais simples da não-comutatividade do espaço é dada em termos de coordenadas x^μ que obedecem as relações de comutação

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = i\lambda^{\mu\nu}, \tag{1.2}$$

onde $\lambda^{\mu\nu}$ são os elementos de uma matriz constante, real e anti-simétrica e, para todos os fins, a constante de Planck reduzida pode ser absorvida em $\lambda^{\mu\nu}$. As relações (3.5) aparecem na literatura com várias denominações. Alguns autores as chamam de *canônicas*, pois aplicando as transformações de Darboux para as coordenadas λ, podem ser escritas na forma canônica (dependendo também do rank da matriz). Porém, é mais comum encontrar na literatura denominações que contenham combinações dos nomes de Weyl, Wigner, Grönwold e Moyal. Esta escolha é feita com base na relação entre os comutadores e o produto - $*$ (ou *twisted product*) de Weyl e von Neumann que foi usado por Wigner para introduzir as transformações de Wigner. O trabalho de Wigner levou Moyal a definir os *parenteses de Moyal*

$$[f \overset{*}{,} g] = f * g - g * f. \tag{1.3}$$

Um exemplo clássico de sistema que apresenta propriedades não-comutativas, é o efeito Hall quântico.

A classe dos fluidos que serão estudados neste trabalho é parametrizada por duas funções arbitrárias $K(z, \bar{z})$ e $f(\rho)$ que dependem dos potenciais do fluido e representam a generalização não-comutativa do potencial de Kähler da superfície parametrizada pelos campos complexos $z(x)$ e $\bar{z}(x)$ e uma função de densidade que determina a equação de estado do fluido. Apresentaremos uma *nova Lagrangiana de fluidos não-comutativos* e calcularemos as equações de movimento usando o cálculo não-comutativo padrão. Mostraremos, também, que a densidadede de corrente não recebe qualquer correção não-comutativa e é conservada sob a ação dos geradores comutativos P_{μ} do espaço-tempo. Um resultado interessante é que o tensor energia-momento não se conserva para as soluções das equações de movimento. Portanto, vínculos são necessários para que a conservação do tensor energia-momento não divirja. Determinaremos estes vínculos em primeira ordem no parâmetro não-comutativo constante do espaço-tempo. Finalmente, particularizaremos a teoria para o caso em que os potenciais complexos do fluido são caracterizados por uma deformação do plano complexo e mostraremos que este modelo tem importantes características do fluido comutativo tais como: uma infinidade de correntes conservadas e uma corrente axial conservada que no caso comutativo está associada ao número de ligação topológico que se conserva.

Este trabalho tem a seguinte estrutura. No Capítulo 2 faremos uma breve revisão do formalismo canônico do fluido relativístico nas suas duas formulações Lagrangiana e Hamiltoniana, respectivamente, seguindo [1, 4]. No Capítulo 3 revisaremos alguns conceitos básicos de geometria não-comutativa e do cálculo no espaço não-comutativo e suas aplicações na teoria de campos. No Capítulo 4 apresentaremos a nossa Lagrangiana de fluido em espaços não-comutativos. A construção desta Lagrangiana obedece um princípio de correspondência de acordo com qual o fluido não-comutativo deve coincidir com o fluido comutativo na parametrização de Kähler no limite zero do parâmetro não-comutativo. A Lagrangiana proposta descreve uma classe grande de fluidos não-comutativos parametrizados por duas funcionais arbitrárias que dependem dos potenciais dos fluidos. Para analisar esta ação, truncaremos os campos aos termos lineares no parâmetro não-comutativo. O argumento geral que justifica esta aproximação é que os efeitos fenomenológicos da não-comutatividade do espaço-tempo, caracterizados pelo parâmetro não-comutativo, devem ser da ordem da escala de Planck, o que torna os termos não-lineares despresíveis. No restante do Capítulo 4 estudaremos as equações de movimento da teoria linearizada e as divergências das correntes e do tensor energia-momento que são as equações cruciais para os fluidos perfeitos. Através do cálculo direto, concluiremos que a corrente tem divergência nula enquanto que o tensor energia-momento é divergente. Para garantir a invariância do tensor energia-momento as componentes comutativas dos operadores de momento no espaço não-comutativo, determinaremos um conjunto de vínculos a serem satisfeitos pelos campos (os potencias) do fluido. Porém, a invariância mais importante de uma teoria formulada no espaço não-comutativo não é em relação às transformações de Poincaré, mas sim em relação às transformações que preservam o volume, ou transformações de volume, neste espaço [4]. Levando em consideração este fato, estudaremos a invariância do fluido relativístico às transformações de volume e concluiremos que para que este fato aconteça, novos vínculos devem ser impostos aos campos do fluido. Para obtermos uma imagem mais intuitiva das equações obtidas no caso geral, escolheremos na classe de fluidos um sistema que generaliza os potenciais de Kähler no plano complexo. Neste caso, as equações gerais tomam uma forma muito mais simples que generaliza o fluido comutativo em todos seus aspectos. Na última parte do Capítulo 4 discutiremos a generalização da corrente axial e das cargas topológicas para o caso não-comutativo. Os resultados apresentados neste capítulo são originais e foram apresentados pela primeira vez no trabalho publicado [25]. Concluiremos este trabalho no Capítulo 5 onde apresentaremos um resumo do que foi feito e as perspectivas.

Capítulo 2

Formulação Lagrangiana e Hamiltoniana dos Fluidos

Neste Capítulo, apresentamos aspectos básicos da Teoria dos Fluidos Relativísticos. Discutiremos as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana do fluido ideal, ou seja, cuja viscosidade pode ser desprezada, mas que apresenta vorticidade não nula. Em sequência, discutiremos duas parametrizações dos potenciais (campos) do fluido: a parametrização em termos de campos reais de Clebsh, e a parametrização complexa de Kähler. A nossa apresentação seguirá as referências [1, 2, 3, 4].

2.1 O Modelo de Fluido

O fluido é definido como sendo a substância (como um líquido ou gás) que tende a escoar ou a se adaptar a forma do recipiente que a contém. A característica física mais importante do fluido é que ele é composto de partículas que têm facilidade de se movimentar e mudar suas posições relativas sem que isso leve a separação da massa. Esta propriedade conduz ao aparecimento da pressão o que gera o escoamento. O modelo mais aceito atualmente da Física é o Modelo Padrão que representa a descrição moderna do conceito de "substância". O Modelo Padrão contém um número relativamente pequeno de classes de partículas elementares: leptons, quarks e bosons vetoriais de escala (os portadores das interações fundamentais). Cada partícula elementar é quântica em sua natureza, mas as equações de Einstein requerem trajetórias explícitas. Por outro lado, alguns sistemas macroscópicos como as estrelas de nêutrons, os jatos astrofísicos e as galáxias são sistemas relativísticos compostos por um número grande de partículas clássicas. Nas duas situações, quântica e clássica, não é prático resolver as equações de movimento para cada partícula. O modelo de fluido é construido de tal forma que o comportamento mecânico quântico/clássico é calculado de maneira estatística para poder ser incluido de forma consistente nas equações de Einstein.

Um conceito crucial para o modelo de fluido é o de "partícula de fluido"ou "elemento de fluido"ou ainda "de partícula material"[1, 3]. Esta partícula denota uma "caixa"local imaginária infinitezimalmente pequena em relação ao sistema como um todo mas grande o suficiente para conter um grande número de partículas físicas (número de Avogadro).

Um objeto de comprimento característico D é modelado como um fluido que contém M elementos de fluido. Cada elemento de fluido tem o comprimento característico L. Para que a descrição de fluido seja válida é necessário que $1 \ll N \ll M$ e $L \ll D$ [3]. Formalizando o modelo, seus limites podem ser considerados com $L \to 0$ e $M \to \infty$ mas com o número total de partículas finito.

Concluimos que os fluidos são compostos de vários elementos de fluido e cada elemento contém um número grande de partículas. O estado da matéria em cada elemento de fluido é determinado pelas Leis da Termodinâmica. Assim sendo, apenas um número pequeno de parâmetros é monitorado durante a evolução dos elementos de fluido. Em geral, não todas as variáveis termodinâmicas são independentes. Elas são relacionadas através da equação de estado. O número de variáveis independentes pode ser reduzido mais ainda se o sistema tem uma propriedade global de aditividade. As trajetorias que entram nas equações de Einstein são dos elementos de fluido e não das partículas elementares. Da mesma forma, as grandezas físicas definidas para o fluido, como o campo de velocidades, se referem aos elementos de fluido.

A dinâmica não-relativística da distribuição de densidade $\rho(t, \boldsymbol{r})$ e do campo vetorial de velocidades $v(t, \boldsymbol{r})$ em dimensões arbitrárias é descrita por um conjunto de equações de movimento que incluem uma equação de continuidade para a densidade de matéria e a equação de Euler, respetivamente,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t, \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\rho(t, \boldsymbol{r})\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r})\big) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r}) + \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}). \tag{2.2}$$

Usaremos a notação $\rho\boldsymbol{v}$ para a densidade de corrente $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{f}$ para a densidade de força. Reconhecemos na equação (2.2) a forma local da equação de Euler conhecida da Termodinâmica

$$E = TS - pV + \mu N. \tag{2.3}$$

No caso do fluido isentrópico, a entropia é constante e não aparece na teoria. Se o fluido é não-dissipativo, a força é determinada somente pelo gradiente da pressão p. Para o movimento isentrópico p é uma função apenas de ρ. Segue que a força $\boldsymbol{f}$ pode ser escrita como

$$\boldsymbol{f} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P = -\boldsymbol{\nabla}V'(\rho), \tag{2.4}$$

onde $'$denota a derivada em relação ao argumento, $V'(\rho)$ é a entalpia

$$\rho V'(\rho) - V(\rho) = p(\rho) \tag{2.5}$$

e $\sqrt{p'(\rho)}$ é a velocidade do som no fluido.

No caso do fluido relativístico, a dinâmica resumida nas equações acima e a definição da força podem ser apresentadas na forma da equação de continuidade do tensor de energia-momento. A densidade de energia, representada pela componente

$\varepsilon = T^{00}$ juntamente com o fluxo de energia obedecem as seguintes equações de continuidade

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + V(\rho) = T^{00}, \tag{2.6}$$

$$\rho v^i(\frac{1}{2}v^2 + V') = T^{i0}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0. \tag{2.8}$$

Da mesma forma, a densidade de momento, que na teoria não-relativística coincide com a densidade de corrente, é representada pelas componentes não-diagonais do tensor energia-momento

$$p^i = \rho v^i = T^{0i} \tag{2.9}$$

O tensor das tensões T^{ij} é relacionado á densidade de momento através das seguintes equações de continuidade

$$\delta^{ij}(\rho V' - V) + \rho v^i v^j = \delta^{ij} p + \rho v^i v^j = T^{ij}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{0i} + \partial_j T^{ji} = 0. \tag{2.11}$$

Observemos que o tensor energia-momento não tem um carater tensorial propriamente dito devido a falta de simetria de suas componentes não-diagonais que é consequência da falta de invariância às transformações de Lorentz. Contudo, $T^{ij} = T^{ji}$ sendo o tensor invariante às rotações espaciais

$$T^{0i} \neq T^{i0}, \quad T^{ij} = T^{ji}. \tag{2.12}$$

A vorticidade do fluido é definida pela seguinte relação

$$\omega_{ij} \equiv \partial_i v^j - \partial_j v^i. \tag{2.13}$$

No caso irrotacional a vorticidade é zero. Pois então, a velocidade pode ser dada em termos do potencial de velocidade descrito pela função real θ

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\theta. \tag{2.14}$$

Segue que a equação de Euler pode ser substituída pela equação de Bernoulli

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{v^2}{2} = -V'(\rho). \tag{2.15}$$

A vorticidade do fluido pode ser definida em qualquer número de dimensões. Em três dimensões, o objeto matemático associado à vorticidade é um pseudo-vetor e em duas dimensões ele é um pseudo-escalar.

2.2 A Dinâmica do Fluido

A dinâmica de qualquer sistema mecânico pode ser apresentada de forma mais econômica na formulação canônica quando uma funcional ação está disponível. As equações de movimento são o resultado da extremização da ação de acordo com o princípio variacional. No caso do fluido discutido na seção anterior, as equações de movimento podem ser obtidas calculando os parenteses de Poisson da densidade de materia e da velocidade com a Hamiltoniana que, por sua vez, é a integral da densidade de energia do fluido

$$H = \int \mathrm{d}r \left(\tfrac{1}{2}\rho v^2 + V(\rho)\right), \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \{H, \rho\}, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} = \{H, \boldsymbol{v}\}. \tag{2.18}$$

As relações acima levam a dinâmica correta desde que os parentese das variáveis ρ e v tomados a tempos iguais obedeçam as seguintes igualdades

$$\{v^i(\boldsymbol{r}), \rho(\boldsymbol{r}')\} = \partial_i\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \tag{2.19}$$

$$\{v^i(\boldsymbol{r}), v^j(\boldsymbol{r}')\} = -\frac{\omega_{ij}(\boldsymbol{r})}{\rho(\boldsymbol{r})}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{2.20}$$

Uma representação equivalente da mesma álgebra é dada em termos de densidades de momentos e tem a forma familiar conhecida em teoria de campos [4]

$$\{\mathcal{P}^i(\boldsymbol{r}), \rho(\boldsymbol{r}')\} = \rho(\boldsymbol{r})\partial_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{2.21}$$

$$\{\mathcal{P}^i(\boldsymbol{r}), \mathcal{P}^j(\boldsymbol{r}')\} = \mathcal{P}^j(\boldsymbol{r})\partial_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \mathcal{P}^i(\boldsymbol{r}')\partial_j\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{2.22}$$

Surge a pergunta se existe uma Lagrangiana cuja transformada de Legendre seja a Hamiltoniana (2.16) e cujas variáveis canônicas satisfaçam os parenteses de Poisson (2.19) e (2.20). A existência de tal Lagrangiana pode ser demonstrada usando o método de Faddeev-Jackiw que estabelece uma relação entre uma Lagrangiana de primeira ordem no tempo e a Hamiltoniana correspondente dada pela transformação de Legendre. Segundo [4], podemos escrever

$$L = a_i(\varphi)\dot{\varphi}^i - H(\varphi), \tag{2.23}$$

onde φ^i denota, de uma forma geral ás variáveis do sistema. As equações de Euler-Lagrange derivadas a partir da Lagrangiana (2.23) são

$$f_{ij}(\varphi)\dot{\varphi}^j = \frac{\partial H(\varphi)}{\partial \varphi^i}, \tag{2.24}$$

onde

$$f_{ij}(\varphi) = \frac{\partial a_j(\varphi)}{\partial \varphi^i} - \frac{\partial a_i(\varphi)}{\partial \varphi^j}. \tag{2.25}$$

O primeiro termo da equação (2.23) determina a forma canônica

$$a_i(\varphi)\dot{\varphi}^i\,\mathrm{d}t = a_i(\varphi)\,\mathrm{d}\xi^i, \tag{2.26}$$

enquanto que $f_{ij}(\varphi)$ são as componentes da forma simplética

$$\mathrm{d}a_i(\xi)\,\mathrm{d}\xi^i = \tfrac{1}{2} f_{ij}(\varphi)\,\mathrm{d}\xi^i\,\mathrm{d}\xi^j\,. \tag{2.27}$$

As equações de movimento (2.24) podem se escritas a partir da Hamiltoniana

$$\dot{\varphi}^i = \{H(\varphi), \varphi^i\} = -\{\varphi^i, \varphi^j\}\frac{\partial H(\varphi)}{\partial \varphi^j}, \tag{2.28}$$

se postularmos a seguinte expressão para os parenteses de Poisson

$$\{\varphi^i, \varphi^j\} = -f^{ij}(\varphi). \tag{2.29}$$

Segue da equação (2.29) que os parenteses de Poisson entre as variáveis fundamentais são

$$\{F_1(\varphi), F_2(\varphi)\} = -\frac{\partial F_1(\varphi)}{\partial \varphi^i} f^{ij}(\varphi) \frac{\partial F_2(\varphi)}{\partial \varphi^j}. \tag{2.30}$$

No caso quando a matriz $f_{ij}(\varphi)$ é singular e não tem inversa, o sistema apresenta vínculos e a estrutura álgebrica se torna mais difícil de analisar [5].

Por outro lado, no caso dos fluidos é preciso resolver o problema inverso. De fato, sabendo a forma da matriz $f^{ij}(\varphi)$ e as identidades de Jacobi, e usando a álgebra (2.19)-(2.20) ou (2.21) e (2.22), podemos determinar a inversa $f_{ij}(\varphi)$ e as funções $a_i(\varphi)$ da equação (2.25). Sendo a Hamiltoniana conhecida da equação (2.16), podemos construir com facilidade a Lagrangiana (2.23). Porém, se existe uma grandeza $C(\varphi)$ que satisfaz a seguinte equação

$$\{\varphi^i, C(\varphi)\} = 0, \tag{2.31}$$

ou seja, $f^{ij}(\varphi)$ tem autovalores nulos

$$f^{ij}(\varphi)\frac{\partial}{\partial \xi^j} C(\xi) = 0, \tag{2.32}$$

concluimos que sua inversa $f_{ij}(\varphi)$ não existe. Assim sendo, a existência das funções $C(\varphi)$ representa uma obstrução à construção do formalismo canônico que, no caso mais simples do fluido perfeito, pode ser contornada escolhendo uma parametrização adequada para os campos do fluido.

As grandezas $C(\varphi)$ são similares aos invariantes de Casimir. Elas comutam com todas as variáveis dinâmicas e, em particular, com a Hamiltoniana. Consequentemente, $C(\varphi)$ se conservam. Mas a semalhança termina neste ponto, pois as funções $C(\varphi)$ não são associadas a simetria alguma da Hamiltoniana, nem geram transformações infinitesimais dos campos φ^i com quais comutam. Na formulação Lagrangiana dos fluidos, as funções $C(\varphi)$ são relacionadas à invariância à reparametrização do formalismo.

2.3 A Parametrização de Clebsch

Para descrever a vorticidade do fluido não-relativístico, usa-se a parametrização deste em termos dos potenciais reais de Clebsch. Neste caso, a álgebra dos parenteses de Poisson dada pelas relações (2.19) e (2.20) tem um autovalor nulo, pois os parenteses de Poisson de

$$C(\boldsymbol{v}) \equiv \int \mathrm{d}r\, \varepsilon^{ijk} v^i \partial_j v^k = \int \mathrm{d}r\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{2.33}$$

com as variáveis fundamentais ρ e $\boldsymbol{v}$ são zero. Consequentemente, a matriz f^{ij} não tem inversa. Como comentado na seção anterior, este fato representa uma obstrução à derivação da dinâmica do fluido.

Para contornar este problema, introduzimos três funções escalares reais $\{\theta(x), \alpha(x), \beta(x)\}$ que parametrizam o vetor velocidade

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\theta + \alpha\boldsymbol{\nabla}\beta, \tag{2.34}$$

onde (α, β) são os potenciais de Gauss. O potencial θ é escolhido de tal forma que no caso irrotacional ele seja canonicamente conjugado à variável ρ

$$\{\theta(\boldsymbol{r}), \rho(\boldsymbol{r}')\} = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{2.35}$$

Nesta parametrização, a vorticidade toma a seguinte forma

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla}\alpha \times \boldsymbol{\nabla}\beta. \tag{2.36}$$

Usando as relações acima, podemos escrever a Lagrangiana do fluido como

$$L = -\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \rho(\dot{\theta} + \alpha\dot{\beta}) - H_{\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\nabla}\theta+\alpha\boldsymbol{\nabla}\beta}. \tag{2.37}$$

As variáveis ρ e θ continuam sendo conjugadas canônicas no caso rotacional. Porém, podemos definir um novo par de variáveis canônicas $(\rho\alpha, \beta)$. O espaço de fases é quadri-dimensional e corresponde as quatro variáveis ρ e $\boldsymbol{v}$. Um cálculo simples mostra que os parenteses de Poisson (2.19) e (2.20) são satisfeitos com $\boldsymbol{v}$ parametrizado como na relação (2.34).

A parametrização de Clebsch resolve a obstrução porque o $C(\boldsymbol{v}) = C$ é dado pela relação

$$C = \int \mathrm{d}r\, \varepsilon^{ijk}\, \partial_i\theta\, \partial_j\alpha\, \partial_k\beta \tag{2.38}$$

que é nada mais do que uma integral total de superfície

$$C = \int \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot (\theta\boldsymbol{\omega}). \tag{2.39}$$

Nesta forma, C não contribui aos termos que resultam do cálculo no volume e não apresenta obstáculos a construção da forma simplética f_{ij} em termos de θ, α e β que são definidos no volume.

Verifica-se que a Lagrangiana do fluido pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \int \mathrm{d}r\big(\rho T(\boldsymbol{v}) - \rho(\dot{\theta} + \alpha\dot{\beta}) - \rho\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\theta + \alpha\boldsymbol{\nabla}\beta)\big) \\ &= \int \mathrm{d}r\big(\rho T(\boldsymbol{v}) - j^{\mu}(\partial_{\mu}\theta + \alpha\partial_{\mu}\beta)\big), \end{aligned} \tag{2.40}$$

onde $T(\boldsymbol{v})$ é a energia cinética. Na última linha da equação acima expressamos os termos na linguagem de quadri-vetores introduzindo o quadri-vetor corrente através da seguinte identificação

$$j^{\mu} = (c\rho, \rho\boldsymbol{v}). \tag{2.41}$$

O operador gradiente é definido pela relação

$$\partial_{\mu} = (\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}) \tag{2.42}$$

Estas expressões formam o ponto de partida da formulação canônica do fluido relativístico.

2.4 A Parametrização de Kähler

Na parametrização de Kähler, os potenciais reais de Clebsch apresentados na seção anterior $\{\theta(x), \alpha(x), \beta(x)\}$ são substituidos pelos potenciais de Kähler representados pelo conjunto de campos escalares $\{\theta(x), z(x), \bar{z}(x)\}$ que são funções suaves de $\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{C}\}$. O potencial $\theta(x)$ é puramente real, o campo $z(x)$ é complexo e $\bar{z}(x)$ é seu complexo conjugado. A classe de fluidos do nosso interesse é parametrizada pelas funções $K(z, \bar{z})$ que representa o potencial de Kähler associado à variedade complexa bidimensional parametrizada pelas coordenadas z e $\bar{z}$ e a função arbitrária $f(\rho)$ que depende da densidade local do fluido ρ. O fluido relativístico é caracterizado pela equação de estado que envolve a pressão local p e a densidade de energia ε. A dinâmica conserva o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ e a corrente de densidade de fluido j^μ, e é descrita pelas equações de Euler-Lagrange derivadas a partir de uma Lagrangiana de primeira ordem, como foi visto na seção anterior. A Lagrangiana tem duas simetrias relacionadas à parametrização dos potenciais do fluido e a uma simetria axial. As cargas correspondentes a estas simetrias geram uma infinidade de correntes J_μ e a carga conservada topologicamente ω que descreve o número de vórtices ligados formados no fluido, respectivamente, [20, 24].

A Lagrangiana proposta na referência [20] é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[j^\mu, \theta, \bar{z}, z] &= -j^\mu a_\mu - f(\rho) \\ &= -j^\mu \left(\partial_\mu \theta + iK_z \partial_\mu z - iK_{\bar{z}} \partial_\mu \bar{z}\right) - f\left(\sqrt{-j^2}\right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Aqui, $K(z, \bar{z})$ é o potencial de Kähler e é uma função real. K_z and $K_{\bar{z}}$ são as derivadas parciais em relação as variáveis z e $\bar{z}$, e f é função arbitrária de $\rho = \sqrt{-j^2}$.

As equações de movimento derivadas a partir da relação (2.43) são

$$\begin{aligned} & f' \frac{j_\mu}{\sqrt{-j^2}} = \partial_\mu \theta + iK_z \partial_\mu z - iK_{\bar{z}} \partial_\mu \bar{z}, \qquad \partial \cdot j = 0, \\ & -2iK_{z\bar{z}}\, j \cdot \partial z = 2iK_{z\bar{z}}\, j \cdot \partial \bar{z} = 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

A invariância na translação da ação construida a partir de $\mathcal{L}$ leva a conservação do tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left(f' \sqrt{-j^2} - f \right) + f' \, \frac{j_\mu j_\nu}{\sqrt{-j^2}}, \qquad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \tag{2.45}$$

onde f' é a derivada de $f(\rho)$ em relação ao seu argumento ρ. Escrevendo para $j_\mu = \rho u_\mu$, o tensor energia-momento toma a forma dada na relação bem conhecida com

$$\varepsilon = f(\rho), \qquad p = \rho f'(\rho) - f(\rho). \tag{2.46}$$

As relações acima mostram que a pressão é a negativa da transformação de Legendre da densidade de energia específica em relação a densidade ρ. Observa-se que a relação linear entre a pressão e a energia específica corresponde a uma lei de potência

$$\varepsilon = f(\rho) = \alpha \rho^{(1+\eta)} \quad \Rightarrow \quad p = \eta \varepsilon. \tag{2.47}$$

No formalismo canônico podemos definir os momentos canonicamente conjugados aos campos dos fluidos, segundo Carter [2]

$$\pi_\mu = \left. \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u^\mu} \right|_\rho = \rho \left(\partial_\mu \theta + i K_z \partial_\mu z - i K_{\bar{z}} \partial_\mu \bar{z} \right). \tag{2.48}$$

O potencial vetor auxiliário a_μ é relacionado à densidade de momento $\pi_\mu = \rho a_\mu$, onde

$$\begin{aligned} a_\mu &= \partial_\mu \theta + i K_z \partial_\mu z - i K_{\bar{z}} \partial_\mu \bar{z} = f' \, \frac{j_\mu}{\sqrt{-j^2}} = f' u_\mu, \\ \pi_\mu &= \rho f' u_\mu = (p + \varepsilon) u_\mu. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Das relações acima, resulta que existe uma corrente axial definida cujas componentes são definidas pela seguinte relação

$$k^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \, a_\nu \partial_\kappa a_\lambda. \tag{2.50}$$

Como pode ser verificado facilmente, a corrente k^μ tem divergência zero

$$\partial_\mu k^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \, \partial_\mu a_\nu \, \partial_\kappa a_\lambda = 0. \tag{2.51}$$

A k^μ podemos associar uma carga ω definida pela integral da componente na direção temporal da corrente

$$\omega = \int d^3x\, k^0 = \int d^3x\, \varepsilon^{ijk}\, a_i \partial_j a_k. \tag{2.52}$$

Usando a equação (2.51) podemos demonstrar que ω se conserva. Além disso, calculando as integrais por partes, podemos ver que ω é uma grandeza topológica definida na superfície

$$\omega = \int d^3x\, \partial_i \left[i\varepsilon^{ijk}\theta\, \partial_j (K_{\bar{z}} \partial_k \bar{z} - K_z \partial_k z) \right] = -2i \int d^3x\, \partial_i \left[\varepsilon^{ijk}\theta\, K_{\bar{z}z} \partial_j \bar{z}\, \partial_k z \right]. \tag{2.53}$$

Outra propriedade interessante dos fluidos na parametrização de Kähler é a existência de um conjunto infinito de cargas conservadas $Q[G]$ associadas à simetria de reparametrização dos potencias [20]. Elas são dadas pela integral espacial da componente temporal das correntes de reparametrização

$$Q[G] = \int d^3x\, J^0[G],$$

onde

$$J_\mu[G] = -2G(\bar{z}, z) j_\mu. \tag{2.54}$$

A divergência de $J_\mu[G]$ se anula como resultado das equações de movimentos dos potenciais complexos z e $\bar{z}$

$$\partial \cdot J[G] = -2\Big(G_z j \cdot \partial z + G_{\bar{z}} j \cdot \partial \bar{z} \Big) = 0. \tag{2.55}$$

O potencial de Kähler é não-singular para todos os casos quando $K_{z\bar{z}}$ é a métrica de uma variedade geodesicamente completa como, por exemplo, o plano complexo com $K(z, \bar{z}) = z\bar{z}$.

A dinâmica no formalismo canônico pode ser descrita no espaço de fases reduzido, determinado pelas equações (2.48) e (2.49). Particularizando as funções $K(z, \bar{z})$ e $f(\rho)$ para o fluido ideal no plano complexo, podemos mostrar que este modelo pode ser quantizado aplicando métodos de quantização canônica [20, 24].

Capítulo 3

Cálculo em Espaços Não-Comutativos

Neste capítulo, faremos uma breve apresentação dos conceitos básicos de espaços não-comutativos que serão usados para derivar os resultados do próximo capítulo. Nossa motivação aqui é definir a geometria não-comutativa de forma mais intuitiva e lembrar as regras básicas do cálculo não-comutativo usadas na construção de teorias de campo não-comutativas.

3.1 Formalismo de Weyl e Produto de Moyal

Como mencionamos na introdução, a geometria não-comutativa pode ser obtida pela substituição da álgebra comutativa das funçoes suaves definidas na variedade M com a álgebra não-comutativa com produto modificado

$$(A, \cdot) \equiv (C^{\infty}(M), \cdot) \longrightarrow \mathcal{A} \equiv (A, *) = (C^{\infty}(M), *). \tag{3.1}$$

onde

$$f * g = fg + P(f, g) + \cdots , \tag{3.2}$$

e P é uma aplicação ou mapeamento bilinear $P : A \times A \to A$. As relações de comutação diferentes de zero lembram o espaço de fases de uma partícula quântica

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu, \tag{3.3}$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = [\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 0. \tag{3.4}$$

As relações de comutação do espaço-tempo não-comutativo análogas as relações da Mecânica Quântica (3.3) e (3.4)

$$[x^\mu, x^\nu] = i\lambda^{\mu\nu}, \tag{3.5}$$

onde $\lambda^{\mu\nu}$ são os elementos de uma matriz constante, real e anti-simétrica e, para todos os fins, a constante de Planck reduzida pode ser absorvida em $\lambda^{\mu\nu}$.

Ao postular que as equações (3.5) representam as coordenadas do espaço-tempo, obtemos um conjunto de relações de incerteza

$$\triangle x^\mu \triangle x^\nu \geq \frac{1}{2} \left|\lambda^{\mu\nu}\right|. \tag{3.6}$$

Segue que, as distâncias menores que o parâmetro não-comutativo $|\lambda^{\mu\nu}|$, a geometria conhecida não pode ser usada para descrever o espaço-tempo. De fato, existem boas razões para achar que as distâncias da ordem da escala de Planck ou menor, a geometria do espaço-tempo deve ser substituida por um nova Física devido aos efeitos da gravitação quântica que, possivelmente, aparecerão. Quando o parâmetro quântico se anula, a geometria comutativa é reencontrada.

A paralela entre a geometria não-comutativa e o espaço de fases da Mecânica Quântica pode ser continuada. Sabemos que existe uma correspondência entre as funções que dependem das variáveis x^μ e p_μ do espaço de fases e os operadores associados escritos em termos dos operadores quânticos $\hat{x}^\mu$ e $\hat{p}_\mu$. De maneira análoga, podemos construir um mapeamento entre a álgebra de funções comutativas no $\mathbb{R}^d$ e a álgebra não-comutativa dos operadores gerados pelas coordenadas que abedecem a relação (3.5). Este mapeamento pode ser construido formalmente usando a transformada de Weyl.

Para definir a transformada de Weyl, escolhemos pela sua simplicidade o espaço $\mathbb{R}^2$. Associamos às variáveis $\{x^1, x^2\}$ os operadores $\{\hat{x}^1, \hat{x}^2\}$ e a relação (3.5) que se escreve como

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\lambda^{12}, \qquad \lambda^{12} = \lambda. \tag{3.7}$$

A transformada de Weyl associa a cada função $f(x^1, x^2)$ um operador $\hat{W}_f(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ via a transformada de Fourier da f

$$\hat{W}_f(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \int \frac{d^2x}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k_1, k_2) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} = \int d^2x f(x^1, x^2) \hat{\triangle}(x^1, x^2), \tag{3.8}$$

onde a escolhemos a convenção para a transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k_1, k_2) = \int d^2x f(x^1, x^2) e^{ik_\mu x^\mu}. \tag{3.9}$$

O mapeamento procurado é definido pelo operador hermitiano

$$\hat{\triangle}(x^1, x^2) = \int \frac{d^2x}{(2\pi)^2} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{-ik_\mu x^\mu}. \tag{3.10}$$

O operador $\hat{\triangle}(x^1, x^2)$ é interpretado como uma base mista para os operadores e os campos no espaço $\mathbb{R}^2$. No limite comutativo $\lambda \to 0$ ele se reduz a

$$\lim_{\lambda \to 0} \hat{\triangle}(x^1, x^2) = \delta^{(2)}(\hat{x} - x). \tag{3.11}$$

Um objeto matemático importante é o traço do operador de Weyl que dá a integral da função correspondente sobre o espaço bi-dimensional

$$Tr\left[\hat{W}_f(\hat{x}^1, \hat{x}^2)\right] = \int d^2x f(x^1, x^2), \qquad Tr\left[\hat{\triangle}(x^1, x^2)\right] = 1. \tag{3.12}$$

Podemos mostrar que a transformada de Weyl tem inversa e representa uma correspondência bijetiva entre os operadores de Weyl e as distribuições de Wigner. Usando esta inversa, as funções podem ser escritas em função de operadores como

$$f(x^1, x^2) = Tr\left[\hat{W}_f(\hat{x}^1, \hat{x}^2) \hat{\triangle}(x^1, x^2)\right]. \tag{3.13}$$

Em consequência deste fato, existe um produto não-comutativo entre as funções da álgebra comutativa que é nada mais nada menos que a imagem do produto de operadores de Weyl através do mapeamento inverso de $\hat{\triangle}$. De fato, usando a relação

$$\hat{\triangle}(x^1,x^2)\hat{\triangle}(y^1,y^2) = \frac{1}{\pi^2\left|\det\lambda\right|}\int d^2z\hat{\triangle}(\hat{z}^1,\hat{z}^2)\exp\left[-2i\lambda^{-1}_{\mu\nu}\left(x-z\right)^{\mu}\left(y-z\right)^{\nu}\right], \tag{3.14}$$

resulta que

$$Tr\left[\hat{W}_f(\hat{x}^1,\hat{x}^2)\hat{W}_g(\hat{x}^1,\hat{x}^2)\hat{\triangle}(x^1,x^2)\right] = \frac{1}{\pi^2\left|\det\lambda\right|}\int d^2yd^2zf(x^1,x^2)g(y^1,y^2) \times\exp\left[-2i\lambda^{-1}_{\mu\nu}\left(x-z\right)^{\mu}\left(y-z\right)^{\nu}\right]. \tag{3.15}$$

Ou seja, o produto entre dois operadores de Weyl é mapeado no produto não-comutativo das funções correspondents

$$\hat{W}_f(\hat{x}^1,\hat{x}^2)\hat{W}_g(\hat{x}^1,\hat{x}^2) = \hat{W}_{f*g}(\hat{x}^1,\hat{x}^2), \tag{3.16}$$

onde o produto - $*$ não-comutativo (de Moyal) é dado pela seguinte relação

$$f(x)*g(x) = f(x)\exp[\frac{i}{2}\lambda^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_{\mu}\overrightarrow{\partial}_{\nu}]g(x). \tag{3.17}$$

No limite comutativo $\lambda\rightarrow 0$ o produto de Moyal se reduz ao produto comutativo comum.

As propriedades fundamentais do produto de Moyal são:

1) Associatividade:

$$f(x)*(h(x)*g(x)) = (f(x)*h(x))*g(x). \tag{3.18}$$

2) Fechamento em relação à conjugação complexa:

$$\overline{(f(x)*h(x))} = \overline{f(x)}*\overline{h(x)}. \tag{3.19}$$

3) Invariância em relação à integração cíclica:

$$\sum_{P\in\Pi(1,2,\cdots,N)}\int d^2xf_{P(1)}(x)*\cdots*f_{P(N)}(x) = 0, \tag{3.20}$$

onde $\Pi(1,2,\cdots,N)$ denota o conjunto de permutações cíclicas de $\{1,2,\cdots,N\}$.

3.2 Teoria de Campos Não-Comutativa

A generalização mais natural das teorias de campos para a geometria não-comutativa se obtem substituindo o produto comutativo pelo produto de Moyal na ação. Outras generalizações são possíveis se no limite comutativo $\lambda^{\mu\nu} \to 0$ obtem-se a teoria comutativa original.

Para os nossos fins, a generalização natural é suficiente. De modo geral, ela oferece ferramentas analíticas para calcular as grandezas de interesse físico, mas também apresenta a maioria das características típicas das outras generalizações não-comutativas. Ilustraremos, a seguir, o método da deformação natural para os casos mais simples de teorias de campo.

3.2.1 Teoria de Campo Livre

Da propriedade de invariância em relação à integração cíclica do produto de Moyal dada na relação (3.20) resulta que o produto - $*$ de duas funções arbitrárias é equivalente ao produto comutativo comum. Logo todos os termos quadráticos na ação não sofrem correções não-comutativas, o que mostra que a deformação natural das teorias de campo livres são idênticas às teorias originais. Uma consquência importante da invariância dos termos quadráticos às deformações não-comutativas é que os propagadores livres em qualquer teoria não-comutativa são iguais aos propagadores calculados no limite $\lambda^{\mu\nu} \to 0$, ou seja na teoria original.

3.2.2 Interações Não-Comutativas

Se a teoria inicial tem um termo de interação de n - campos, sua deformação natural para a geometria não-comutativa é modificada por um fator de fase que resulta do produto de Moyal. Na representação dos momentos

$$\varphi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \varphi(k) \exp\left(ik_\mu x^\mu\right), \tag{3.21}$$

podemos escrever a interação como

$$S_{int}^{(n)} = \int \prod_{j=1}^{n} \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} V(k_1, \cdots, k_n)\varphi(k_1)\cdots\varphi(k_n), \tag{3.22}$$

onde o operador vértice é definido através da relação

$$V(k_1, \cdots, k_n) = \delta^{(D)} \sum_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{i}{2}\lambda^{\mu\nu}k_\mu k_\nu\right). \tag{3.23}$$

A relação de invariância cíclica (3.20) neste caso revela que o fator de fase do operador vértice é invariante às permutações cíclicas dos momentos. Os fatores de fases modificam em geral as regras de Feynman que são sensíveis à ordem dos momentos em cada vértice.

3.2.3 Teoria φ^4

O exemplo mais simples de deformação natural é da teoria φ^4 que é descrita pela seguinte ação

$$S[\varphi] = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi * \varphi - \frac{g}{12}\varphi * \varphi * \varphi * \varphi\right), \tag{3.24}$$

onde g é a constante de acoplamento do campo escalar. Os primeiros dois termos são, sendo quadráticos em φ, descrevem a teoria livre comutativa. O termo de interação é dado pela relação (3.22) que neste caso se escreve como

$$\begin{aligned} S_{int}[\varphi] &= -\frac{g}{4!}\int d^4x\varphi * \varphi * \varphi * \varphi \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{16}}\frac{g}{4!}\int \prod_{j=1}^{4} d^4k_j V(k_1, k_2, k_3, k_4)\varphi(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)\varphi(k_4). \end{aligned} \tag{3.25}$$

O operador de vértice $V(k_1, k_2, k_3, k_4)$ tem a seguinte estrutura de fase

$$\begin{aligned} V(k_1, k_2, k_3, k_4) =& (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ & \times \left[\cos\left(\frac{\lambda k_1 k_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda k_3 k_4}{2}\right) + \cos\left(\frac{\lambda k_1 k_3}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda k_2 k_4}{2}\right)\right. \\ & \left. + \cos\left(\frac{\lambda k_1 k_4}{2}\right)\cos\left(\frac{\lambda k_2 k_3}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $\lambda k_i k_j = \lambda^{\mu\nu}(k_i)_\mu(k_j)_\nu$.

3.3 Cálculo Não-Comutativo

O cálculo não-commutativo é construido sobre as álgebras de funções suaves $\mathcal{A} = \mathcal{F}(M_\lambda)$ que dependem das variáveis não-comutativas x^μ. Um exemplo estudado extensivamente na literatura ocorre quando M é o espaço de fases de um sistema clássico, ou uma variedade de Poisson, e

$$P(f,g) = \{f,g\}_{PP}, \tag{3.27}$$

onde $\{f,g\}_{PP}$ denotam os parenteses de Poisson definidos na álgebra $\mathcal{A}$. Consideremos, também, que $M = \mathbb{R}^{2n}$. Neste caso, o produto de Moyal, apresentado na sua forma geral na equação (1.3) pode ser extendido de polinômios para séries de potências. Explicitamente, se as funções $f(x)$ e $g(x)$ são analíticas de $\mathcal{A}$, seu produto naturalmente deformado (3.2) pode ser escrito como

$$f *_\lambda g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\lambda^n}{n!} P_n(f,g), \tag{3.28}$$

onde

$$P_n(f,g) = \prod_{i=1}^{n} P^{\mu_i \nu_i} \left(\nabla_{\mu_i} f\right) \left(\nabla_{\nu_i} g\right). \tag{3.29}$$

As condições iniciais para que a série (3.28) represente uma deformação do produto comutativo são

$$a_0 = a_1 = 1. \tag{3.30}$$

Rigorosamente falando, o termo direito da relação (3.28) faz sentido somente se o produto deformado não é apenas bem definido termo por termo, mas também é convergente no conjunto $\mathcal{A}$.

Observemos que o produto de Moyal é um caso particular de produto - $*$ deformado. Para valores pequenos do parâmetro não-comutativo $\lambda^{\mu\nu}$ a série que define o produto de Moyal é dominada pela aproximação linear

$$f(x) * g(x) = f(x)g(x) + \frac{i}{2}\lambda^{\mu\nu}\partial_\mu f(x)\partial_\nu g(x) + \cdots \tag{3.31}$$

Da equação acima podemos derivar a relação de comutação entre as coordenadas dada pela equação (3.5).

Em geral, a álgebra $\mathcal{A}$ não contem elementos suficientes para os objetivos da Teoria Quântica de Campos. Por outro lado, se as funções $f(x), g(x) \in \mathcal{A}$ admitem transformadas de Fourier $\hat{f}(k), \hat{g}(k)$, então vimos que

$$f(x)*g(x) = \int d^4k \int d^4q \, \hat{f}(k)\hat{g}(q) \exp[i(k \cdot x + q \cdot x - k\lambda q/2)], \tag{3.32}$$

onde, no caso da deformação do espaço-tempo relativístico, o produto - $\cdot$ é calculado com a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ e $p\lambda q := p_\mu \lambda^{\mu\nu} q_\nu$. A relação 3.32 pode ser usada como a definição do produto - $*$.

Neste trabalho, aplicaremos o cálculo diferencial não-deformado definido na álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ pelas seguintes relações

$$\partial_{x^\mu} * x^\nu = \delta^\nu_\mu + x^\nu * \partial_{x^\mu}, \tag{3.33}$$

$$[\partial_{x^\mu} \overset{*}{,} \partial_{x^\nu}] = 0. \tag{3.34}$$

Com o intuito de simplificar as relações matemáticas, não mais escreveremos o símbolo $*$ ao lado da derivada. As definições dos operadores diferenciais levam a seguinte regra de integração

$$\int d^4x f(x) * g(x) = \int d^4x f(x) g(x), \tag{3.35}$$

válida especialmente para todas as funções $f(x)$,$g(x)$ $\in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. É fácil demonstrar que o Teorema de Stokes se aplica da mesma forma que no cálculo comutativo e que

$$\int dx^4 \, g * f(x) = g * \int dx^4 \, f(x), \qquad \text{se } g \text{ independe de } x. \tag{3.36}$$

Capítulo 4

Dinâmica de Fluidos Não-Comutativos

Neste capítulo, estudaremos uma nova funcional de ação de primeira ordem para uma classe de sistemas que generaliza os fluidos perfeitos relativísticos na parametrização de Kähler para variedades do tipo espaço-tempo não-comutativos. A ação não comutativa é parametrizada por duas funções arbitrárias $K(z, \bar{z})$ e $f(\rho)$ que dependem dos potenciais do fluido e representam a generalização do potencial de Kähler da superfície complexa parametrizada por z e $\bar{z}$, respectivamente, e a função característica de cada modelo. Calcularemos as equações de movimento para os potenciais de fluido e o tensor energia-momento na primeira ordem no parâmetro não-comutativo.

4.1 Ação do Fluido Não-Comutativo

Como visto no segundo capítulo, a classe dos fluidos perfeitos relativísticos no espaço quadri-dimensional de Minkowski M pode ser descrito em termos de potenciais escalares $\{\theta(x), z(x), \bar{z}(x)\}$ que são funções suaves de $\mathcal{C}^{\infty}(M) = \{f : M \to \mathbb{C}\}$. A classe é parametrizada pelas funções arbitrárias $K(z, \bar{z})$ e $f(\rho)$.

Consideremos o espaço não-comutativo M_λ com a álgebra de funções complexas $\mathcal{F}(M_\lambda)$. Uma propriedade bem conhecida [28] é que esta estrutura algébrica é isomórfica à álgebra $(\mathcal{C}^\infty(M), *)$ onde $* : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ é o produto de Moyal definido

$$f * g = f e^{\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu} g. \tag{4.1}$$

Usando o cálculo descrito no capítulo anterior, o comutador dos vetores do espaço tangente é definido pela relação

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0. \tag{4.2}$$

Devido a estrutura algébrica semelhante de $(\mathcal{C}^\infty(M), \cdot)$ e $(\mathcal{C}^\infty(M), *)$ o fluido perfeito no espaço não-comutativo deve ser caracterizado pelos mesmos potenciais $\{\theta(x), z(x), \bar{z}(x)\}$. Contudo, a presença do produto-$*$ indica que a interação dos potenciais do fluido não-comutativo recebe correções dos parâmetros $\lambda^{\mu\nu}$. Levando em consideração este fato e impondo a condição de que, no limite comutativo $\lambda^{\mu\nu} \to 0$ o fluido relativístico não-comutativo seja idêntico ao modelo descrito no Capítulo 2 na parametrização de Kähler, estamos propondo a seguinte ação [1]

$$S[j^\mu, \theta, z, \bar{z}] = \int d^4x \left[-j^\mu * (\partial_\mu\theta + i\partial_z K * \partial_\mu z - i\partial_{\bar{z}} K * \partial_\mu \bar{z})\right] - f\left(\sqrt{-j^\mu * j_\mu}\right). \tag{4.3}$$

A Lagrangiana da relação (4.3) descreve uma classe grande de fluidos não comutativos parametrizados pelas funções arbitrárias $K(z, \bar{z})$ e $f\left(\sqrt{-j^\mu * j_\mu}\right)$. É importante estudar a ação $S[j^\mu, \theta, z, \bar{z}]$ para o campo não-comutativo j^μ arbitrário porque, a priori, as variáveis não-comutativas da funcional ação não devem ser relacionadas a grandezas físicas de fluidos, uma vez que falta uma fenomenologia física em espaços não-comutativos. Mas, para verificar o princípio de correspondência usado na construção da $S[j^\mu, \theta, z, \bar{z}]$, consideraremos no final deste capítulo a generalização da

[1] Neste capítulo usaremos as notações $\partial_z K$, $\partial_{\bar{z}} K$, etc. no lugar das notações K_z, $K_{\bar{z}}$, etc. usadas no Capítulo 2 para realçarmos a diferença entre as derivadas em relação às funções (derivadas funcionais) e as derivadas em relação às coordenadas.

relação ρu^μ à teoria não-comutativa. Em geral, $K(z,\bar{z})$ não é associado à nenhuma variedade de Kähler, ao contrário no caso comutativo. As variedades de Kähler não-comutativas podem ser interpretadas como sendo deformações de variadades de Kähler comutativas (vide as referências [29, 30, 31]). Esta situação representa um caso particular quando se trata da ação dada na equação (4.3) onde podemos dizer apenas que o setor comutativo da função $K(z,\bar{z})$ seja o potencial de Kähler do setor comutativo da variedade parametrizada por $(z,\bar{z})$. No restante deste capítulo, usaremos as derivadas parciais da função $K(z,\bar{z})$ na ordem zero da expansão em séries de potências em $\lambda_{\mu\nu}$. Isso nos permite aplicar a regra de Leibniz. Por outro lado, se termos de ordem superior em $\lambda_{\mu\nu}$ são considerados no formalismo, a regra de Leibniz deixa de ser válida. A função $f\left(\sqrt{-j^\mu * j_\mu}\right)$ deve coincidir com $f\left(\sqrt{-j^\mu j_\mu}\right)$ no limite comutativo $\lambda_{\mu\nu} \to 0$. Desta forma, o princípio de correspondência entre o fluido não-comutativo definido pela ação (4.3) e o fluido perfeito estudado em [20, 24] é estabelecido. Para valores infinitesimais do parâmetro $\lambda_{\mu\nu}$, podemos linearizar a Lagrangiana da equação (4.3) a seguir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[j^\mu,\theta,z,\bar{z}\right] = & -j^\mu\left(\partial_\mu\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\mu z - i\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_\mu\bar{z}\right) \\
& + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^\mu\left(\partial_\alpha\partial_z K\cdot\partial_\beta\partial_\mu z - \partial_\alpha\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_\beta\partial_\mu\bar{z}\right) \\
& - \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha j^\mu\cdot\partial_\beta\left(\partial_\mu\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\mu z - i\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_\mu\bar{z}\right) \\
& - f\left(\sqrt{-j^2 - \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha j^\mu\partial_\beta j_\mu}\right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A primeira diferença a ser notada entre os fluidos comutativo e não-comutativo é que a corrente j^μ se propaga no caso não-comutativo. Observemos, também, que até na ordem mais baixa no parâmetro não-comutativo, a Lagrangiana contém derivadas superiores dos campos. As equações de Euler-Lagrange podem ser obtidas aplicando o princípio variacional à ação dada pela relação (4.3) com valores nulos dos campos de suas derivadas sobre o contorno. As equações de movimento no caso não-comutativo são de segunda ordem

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}\varphi\right)}\right)+\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{2}_{\alpha\beta}\varphi\right)}\right)=0. \tag{4.5}$$

Calculando a relação (4.5) para o potencial $\theta(x)$ obtemos a equação de movimento

$$\partial_{\mu}j^{\mu}=0. \tag{4.6}$$

As equações de movimento das componentes da corrente j^{μ} tomam a seguinte forma

$$\begin{aligned} f'\frac{j_{\mu}}{\sqrt{-j^{2}-\frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\nu}\partial_{\beta}j_{\nu}}} &= \left(\partial_{\mu}\theta+i\partial_{z}K\cdot\partial_{\mu}z-i\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\left(\partial_{\alpha}\partial_{z}K\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z-\partial_{\alpha}\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Aqui, f' denota a derivada de f em relação a sua variável. A equação de movimento do potencial $z(x)$ é derivada particularizando a relação (4.5) e tem a seguinte expressão

$$\begin{aligned} &2ij^{\mu}\partial^{2}_{z\bar{z}}K\cdot\partial_{\mu}\bar{z}+\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\mu}\left(\partial_{z}\partial_{\alpha}\partial_{z}K\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z-\partial_{z}\partial_{\alpha}\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\ &+\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu}\cdot\left(\partial_{z}\partial_{\beta}\partial_{z}K\cdot\partial_{\mu}z-\partial_{z}\partial_{\beta}\partial_{\bar{z}}K\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\ &+\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left[j^{\mu}\left(\partial^{2}_{zz}K\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z-\partial^{2}_{z\bar{z}}K\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right)\right] \\ &+\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\left[\partial_{\alpha}j^{\mu}\left(\partial^{2}_{zz}K\cdot\partial_{\mu}z-\partial^{2}_{z\bar{z}}K\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right)\right] \\ &+\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial^{2}_{\beta\mu}\left(j^{\mu}\partial_{\alpha}\partial_{z}K\right)+\frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu}\cdot\partial^{2}_{\beta\mu}\partial_{z}K=0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

A equação de movimento de $\bar{z}(x)$ pode ser obtida a partir da equação (4.8) substituindo as derivadas em relação a z pelas derivadas em relação a $\bar{z}$, ou usando a relação (4.5). O resultado é

$$
\begin{aligned}
&- 2ij^{\mu}\partial^2_{\bar{z}z}K \cdot \partial_{\mu}z + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\mu}\left(\partial_{\bar{z}}\partial_{\alpha}\partial_{z}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\mu}z - \partial_{\bar{z}}\partial_{\alpha}\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu} \cdot \left(\partial_{\bar{z}}\partial_{\beta}\partial_{z}K \cdot \partial_{\mu}z - \partial_{\bar{z}}\partial_{\beta}\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\mu}\bar{z}\right) \\
&- \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\left[j^{\mu}\left(\partial^2_{z\bar{z}}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\mu}z - \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\beta}\left[\partial_{\alpha}j^{\mu}\left(\partial^2_{z\bar{z}}K \cdot \partial_{\mu}z - \partial^2_{\bar{z}\bar{z}}K \cdot \partial_{\mu}\bar{z}\right)\right] \\
&- \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial^2_{\beta\mu}\left(j^{\mu} \cdot \partial_{\alpha}\partial_{\bar{z}}K\right) - \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu} \cdot \partial^2_{\beta\mu}\partial_{\bar{z}}K = 0. \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

Observemos que as derivadas em relação as coordenadas do espaço-tempo não comutam com as derivadas em relação aos campos complexos z e $\bar{z}$, respectivamente.

A primeira equação de movimento (4.6) tem uma interpretação simples. Ela mostra que a corrente j^{μ} é invariante às transformaçoes geradas pelos operadores $P_{\mu} = \partial_{\mu}$. Esta equação não recebe correções não-comutativas e ela respeita a generalização do grupo de translações definido pela equação (4.2). As outras equações de movimento não têm interpretações tão simples, mas através de cálculos mais elaborados pode-se mostrar que elas correspondem as equações de movimento do fluido comutativo. Em particular, as equações (4.8) e (4.9) não apoiam a idéia de que existam uma infinidade de correntes conservadas associadas à invariância de reparametrização da superfície de Kähler. Retornaremos a discutir este ponto numa seção posterior.

4.2 Tensor Energia-Momento

A classe de fluidos perfeitos no espaço-tempo de Minkowski que são generalizados ao espaço-tempo não-comutativo pela ação proposta na relação (4.3) é caracterizada pela corrente de densidade de divergência nula e pelo tensor energia-momento de divergência nula, também. Estas propriedades são relacionadas com as equações de movimento do fluido e, também, com a invariância da Lagrangiana às translações.

Como vimos na seção anterior, a densidade de corrente do fluido não-comutativo tem a divergência zero e, identificando os geradores da translação com as derivadas ∂_μ, a corrente pode ser relacionada à invariância de translação, também.

O tensor energia-momento do fluido não-comutativo pode ser definido acoplando-o ao tensor métrico que é uma c - função $g_{\mu\nu}(x)$ e tomando em seguida a derivada da ação em relação à métrica. Deste modo obtem-se a relação

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Big[& -j^\gamma \left(\partial_\gamma\theta + i\partial_z K \cdot \partial_\gamma z - i\partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\gamma \bar{z}\right) + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta} j^\gamma \left(\partial_\alpha \partial_z K \cdot \partial_\beta \partial_\gamma z - \partial_\alpha \partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\beta \partial_\gamma \bar{z}\right) \\
& - \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha j^\gamma \cdot \partial_\beta \left(\partial_\gamma\theta + i\partial_z K \cdot \partial_\gamma z - i\partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\gamma \bar{z}\right) - f\left(\sqrt{-j^\mu j_\mu + \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha j^\mu \cdot \partial_\beta j_\mu}\right)\Big] \\
& + 2 j_\mu \left(\partial_\nu\theta + i\partial_z K \cdot \partial_\nu z - i\partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\nu \bar{z}\right) - \lambda^{\alpha\beta} j_\mu \left(\partial_\alpha \partial_z K \cdot \partial_\beta \partial_\nu z - \partial_\alpha \partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\beta \partial_\nu \bar{z}\right) \\
& + i\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha j_\mu \cdot \partial_\beta \left(\partial_\nu\theta + i\partial_z K \cdot \partial_\nu z - i\partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\nu \bar{z}\right) - f' \cdot \left(j_\mu j_\nu + \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_\alpha j_\mu \cdot \partial_\beta j_\nu\right).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Em geral, a divergência do tensor energia-momento dado pela relação acima não é zero. Para que isso aconteça, é necessário impormos vínculos aos campos. Usando as equações de movimento (4.22) e (4.23) resulta que o tensor energia-momento terá divergência zero para as soluções das seguinte equações

$$\partial_\nu \left(f' \frac{j^\mu j_\mu}{\sqrt{-j^2 - \frac{i}{2}\lambda^{\beta\gamma}\partial_\beta j^\nu \partial_\gamma j_\nu}} - f \right) - j_\mu \partial^\mu \left(f' \frac{j_\nu}{\sqrt{-j^2 - \frac{i}{2}\lambda^{\beta\gamma}\partial_\beta j^\nu \partial_\gamma j_\nu}} \right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_\nu \partial_\alpha j^\mu \cdot \partial_\beta \left(\partial_\mu\theta + i\partial_z K \cdot \partial_\mu z - i\partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\mu \bar{z}\right) \\
& - \partial_\alpha j_\mu \cdot \partial^\mu \partial_\beta \left(\partial_\nu\theta + i\partial_z K \cdot \partial_\nu z - i\partial_{\bar{z}} K \cdot \partial_\nu \bar{z}\right) + \partial_\alpha j_\mu \cdot \partial^\mu \partial_\beta j_\nu = 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Na forma dada pela equação (4.10), não fica claro qual é a generalização do fluido perfeito relativístico ao espaço não-comutativo. Podemos entender melhor a relação entre os dois casos se escolhermos para o campo não-comutativo j^μ a seguinte forma que generaliza naturalmente a corrente do fluido comutativo

$$j^{\mu} = \rho * u^{\mu}, \tag{4.13}$$

onde $u^{\mu} = dx^{\mu}/d\tau$ depende somente do parâmetro τ. Verifica-se que

$$f\left(\sqrt{-j^{\mu}j_{\mu} + \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu} \cdot \partial_{\beta}j_{\mu}}\right) = f\left(\sqrt{-j^{\mu}j_{\mu}}\right). \tag{4.14}$$

Simplificando os termos correspondentes e usando a equação de movimento do j^{μ} (4.22), podemos mostrar que o tensor energia-momento tem a seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}p(\lambda) + \left[\varepsilon(\lambda) + p(\lambda)\right]u_{\mu}u_{\nu} + i\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\rho \cdot u_{\mu}\partial_{\beta}\left(\partial_{\nu}\theta + i\partial_{z}K \cdot \partial_{\nu}z - i\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\nu}\bar{z}\right), \tag{4.15}$$

onde

$$\begin{aligned} p(\lambda) =& \rho f' - f - j^{\gamma}\left(\partial_{\gamma}\theta + i\partial_{z}K \cdot \partial_{\gamma}z - i\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\gamma}\bar{z}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\gamma}\left(\partial_{\alpha}\partial_{z}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\gamma}z - \partial_{\alpha}\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\gamma}\bar{z}\right) \\ &- \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\gamma} \cdot \partial_{\beta}\left(\partial_{\gamma}\theta + i\partial_{z}K \cdot \partial_{\gamma}z - i\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\gamma}\bar{z}\right), \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda) =& f + j^{\gamma}\left(\partial_{\gamma}\theta + i\partial_{z}K \cdot \partial_{\gamma}z - i\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\gamma}\bar{z}\right) \\ &- \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\gamma}\left(\partial_{\alpha}\partial_{z}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\gamma}z - \partial_{\alpha}\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\beta}\partial_{\gamma}\bar{z}\right) \\ &+ \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\gamma} \cdot \partial_{\beta}\left(\partial_{\gamma}\theta + i\partial_{z}K \cdot \partial_{\gamma}z - i\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\gamma}\bar{z}\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

As relações acima mostram que a ação (4.3) generaliza o fluido perfeito ao caso não-comutativo como pode ser visto nas equações (4.15), (4.16) e (4.17) que se reduzem, no limite $\lambda^{\alpha\beta} \to 0$, as relações conhecidas do tensor energia-momento, da pressão e da densidade de energia obtidas na referência [20]. A pressão do fluido descrito pela ação (4.3) é a generalização da transformada de Legendre da energia específica do fluido não-comutativo. A divergência zero do tensor energia-momento pode ser calculada à partir da equação (4.15) onde nota-se, também, que o último termo envolve o produto entre a velocidade e uma combinação de potenciais que inclui a vorticidade não-nula. Este termo é parecido com o termo dissipativo que é consequência da estrutura não-comutativa do espaço-tempo. Se impormos a condição de que a densidade de momento seja gerada somente pelo escoamento da densidade de energia, como no caso comutativo, resulta que

$$\lambda^{\alpha\beta} j^{\mu} \partial_{\alpha} j_{\mu} \cdot \partial_{\beta} \left(\partial_{\nu}\theta + i\partial_{z}K \cdot \partial_{\nu} z - i\partial_{\bar{z}}K \cdot \partial_{\nu}\bar{z} \right) = 0. \tag{4.18}$$

Se generalizarmos este modelo ainda mais, para incluir outras cargas conservadas, podemos usar a equação (4.18) para definir u^{μ} que terá um papel análogo a um referencial preferencial do fluido comutativo.

4.3 Simetria de Volume

A estrutura não-comutativa do espaço-tempo dada pela equação (3.5) é invariante às seguintes transformações que generalizam as transformações que preservam o volume (*simetria de volume*) [4]

$$\delta x_{\mu} = \left[x_{\mu}, h \right], \tag{4.19}$$

onde o parâmetro $h(x)$ é uma função contínua e arbitrária de x^{μ}. Os parenteses obtidos a partir da equação acima envolvem o produto de Moyal e tomam a seguinte forma em primeira ordem em $\lambda^{\mu\nu}$

$$[f, g] = i\lambda^{\mu\nu} \partial_{\mu} f \cdot \partial_{\nu} g. \tag{4.20}$$

Em geral, a Lagrangiana dada na relação (4.4) não é invariante às transformações (4.19) devido a arbitrariedade das funções $\theta(x)$, $z(x)$, $\bar{z}(x)$, $K(z, \bar{z})$ e $f(x)$. A consistência da teoria, ou seja a necessidade de garantir a invariância à simetria de volume, exige a imposição de novos vínculos sobre as funções $\theta(x)$, $z(x)$, $\bar{z}(x)$, $K(z, \bar{z})$ e $f(x)$ que serão determinados em seguida.

Como pode ser verificado facilmente, os campos do fluido se transformam em relação à equação (4.19) como

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= [\varphi, h]\,,\\ \delta\psi^{\mu} &= [\psi^{\mu}, h]\,,\\ \delta\left(\partial_\mu\varphi\right) &= [\partial_\mu\varphi, h] + [\varphi, \partial_\mu h]\,,\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde φ e ψ^{μ} representam os campos escalares e vetorias, respectivamente. A transformação das derivadas são as mesmas dos campos vetoriais. Variando a Lagrangiana (4.4) em relação à transformação (4.19) obtemos um bi-polinómio nas potências m da matriz antisimétrica $\lambda^{\mu\nu}$ e nos graus n das derivadas do parâmetro arbitrário $h(x)$. Consequêntemente, a invariância da Lagrangiana é garantida se os termos de sua variação se anulam para cada m e n, respectivamente. Observando esta organização da variação, obtemos para os termos lineares em $\lambda^{\mu\nu}$ as seguintes equações

$$f' \frac{j^{\mu}\partial_\alpha j_\mu}{\sqrt{-j^2 - \frac{i}{2}\lambda^{\beta\gamma}\partial_\beta j^{\nu}\partial_\gamma j_\nu}} = -\partial_\alpha\left[j^{\mu}\left(\partial_\mu\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\mu z - i\partial_{\bar z}K\cdot\partial_\mu\bar z\right)\right], \tag{4.22}$$

$$j^{\mu}\left(\partial_\alpha\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\alpha z - i\partial_{\bar z}K\cdot\partial_\alpha\bar z\right) = 0. \tag{4.23}$$

Os termos quadráticos em $\lambda^{\mu\nu}$ envolvem derivadas de segunda e terceira ordem em h. As derivadas de segunda ordem se acoplam com $\lambda^{\mu\nu}$ e j^{μ} e os acoplamentos diferentes geram vínculos independentes. O resultado pode ser resumido no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}&\partial_\gamma j^{\mu}\partial_\alpha\left(\partial_\mu\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\mu z - i\partial_{\bar z}K\cdot\partial_\mu\bar z\right) + \partial_\alpha j^{\mu}\partial_\gamma\left(\partial_\mu\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\mu z - i\partial_{\bar z}K\cdot\partial_\mu\bar z\right)\\ &+ 2j^{\mu}\left[\partial_{[\alpha}\partial_z K\cdot\partial_{\gamma]}\partial_\mu z - (z\leftrightarrow\bar z)\right] = 0,\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\partial_\alpha j^{\mu}\left[\partial_\gamma\partial_\beta\theta + i\partial_\beta\partial_z K\cdot\partial_\gamma z + i\partial_z K\cdot\partial_\gamma\partial_\beta z - (z\leftrightarrow\bar z)\right] + j^{\mu}\left[\partial_\alpha\partial_z K\cdot\partial_\gamma\partial_\mu z - (z\leftrightarrow\bar z)\right] = 0, \tag{4.25}$$

$$\partial_\alpha j^{\mu}\left(\partial_\gamma\theta + i\partial_z K\cdot\partial_\gamma z - i\partial_{\bar z}K\cdot\partial_\gamma\bar z\right) + j^{\mu}\left(\partial_\alpha\partial_z K\cdot\partial_\gamma z - \partial_\alpha\partial_{\bar z}K\cdot\partial_\gamma\bar z\right) = 0. \tag{4.26}$$

onde usaremos a antisimetrização padrão em relação aos indices espaço-temporais

$$a_{[\mu}b_{\nu]} = \frac{1}{2}\left(a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu\right).$$

Os vínculos de ordem maior nas potências de $\lambda^{\mu\nu}$ resultam de correções de ordem superior da Lagrangiana. Se a não-comutatividade do espaço-tempo é válida às altas energias, somente os termos lineares da matriz antisimétrica se tornam relevantes para nossa teoria. Assim sendo, a invariância da Lagrangiana às transformações de volume é determinada somente pelos vínculos (4.22) e (4.23), respectivamente. Maiores simplificações deste conjunto de equações ocorrerão se a teoria for estudada na folha de massa.

4.4 Um Modelo Simples

Dada a arbitrariedade das funções $K(z,\bar{z})$ e $f(\sqrt{-j^\mu * j_\mu})$, podemos concluir que os fluidos perfeitos discutidos neste capítulo formam uma classe bastante geral. De fato, a única exigência que $K(z,\bar{z})$ e $f(\sqrt{-j^\mu * j_\mu})$ devem satisfazer é a diferenciabilidade até uma ordem arbitrária. Esta generalidade faz com que a dinâmica destes modelos seja bastante complicada até em primeira ordem do parâmetro não-comutativo.

Um modelo ligeiramente mais simples pode ser obtido à partir das seguintes relações

$$K(z,\bar{z}) = z * \bar{z}, \quad f(\sqrt{-j^\mu * j_\mu}) = \frac{c}{2}\rho^2 = -\frac{c}{2}j^2, \tag{4.27}$$

onde c é um c-número constante. Neste modelo, a função $K(z,\bar{z})$ representa a generalização do potencial de Kähler do plano complexo e, em primeira ordem no parâmetro não-comutativo, gera uma deformação não-comutativa do plano. A forma particular escolhida para a função f é característica do fluido perfeito. A Lagrangiana (4.4) deste modelo particular pode ser escrita da seguinte forma em primeira ordem em $\lambda^{\alpha\beta}$

$$\mathcal{L} = - j^{\mu}\left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\cdot\partial_{\mu}z - iz\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right) + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\mu}\left(\partial_{\alpha}\bar{z}\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z - \partial_{\alpha}z\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right)$$
$$- \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu}\cdot\partial_{\beta}\left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\cdot\partial_{\mu}z - iz\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right) + \frac{c}{2}j^{2}. \quad (4.28)$$

As equações de movimento podem ser obtidas usando as relações (4.27) nas equações gerais (4.6)-(4.9) ou recalculando-as a partir da ação associada à Lagrangiana (4.28). O resultado é

$$\partial_{\mu}j^{\mu} = 0, \quad (4.29)$$

$$cj_{\mu} - \left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\cdot\partial_{\mu}z - iz\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right) + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}\left(\partial_{\alpha}\bar{z}\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z - \partial_{\alpha}z\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right) = 0, \quad (4.30)$$

$$j^{\mu}\partial_{\mu}\bar{z} = j^{\mu}\partial_{\mu}z = 0. \quad (4.31)$$

A primeira observação importante é que as equações de movimento dos potenciais θ, z e $\bar{z}$ não recebem correções não-comutativas. Em segundo lugar, pode-se observar que as relações (4.31) têm como resultado a existência de uma infinidade de correntes

$$J_{\mu}\left[G\right] = -2G(z,\bar{z})\cdot j_{\mu}, \quad (4.32)$$

onde os geradores $G(z,\bar{z})$ são funções arbitrárias comutativas. As correntes $J_{\mu}\left[G\right]$ têm divergência nula em ordem zero no parâmetro não-comutativo em consequência da relação de Leibniz. As correntes (4.32) correspondem às seguintes cargas conservadas

$$Q[G] = \int d^{3}xJ^{0}[G]. \quad (4.33)$$

Estas propriedades mostram que o modelo descrito pelas funções (4.27) têm as mesmas propriedades que a classe inteira de fluidos relativísticos perfeitos na parametrização de Kähler discutido no segundo capítulo e do regime especial dos fluidos supersimétricos estudados nas referências [20, 24].

Considerando a invariância à simetria de volume na folha de massa da Lagrangiana (4.28), as equações de vínculo (4.22) - (4.26) tomam a seguinte forma simplificada

$$cj^{\mu}\partial_{\alpha}j_{\mu} + \partial_{\alpha}\left(j^{\mu}\partial_{\mu}\theta\right) = 0, \tag{4.34}$$

$$j^{\mu}\left(\partial_{\alpha}\theta + i\bar{z}\partial_{\alpha}z - iz\partial_{\alpha}\bar{z}\right) = 0, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{\gamma}j^{\mu}\partial_{\alpha}\left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\partial_{\mu}z - iz\partial_{\mu}\bar{z}\right) + \partial_{\alpha}j^{\mu}\partial_{\gamma}\left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\partial_{\mu}z - iz\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\ &+ 2j^{\mu}\left[\partial_{[\alpha}\bar{z}\partial_{\gamma]}\partial_{\mu}z - (z \leftrightarrow \bar{z})\right] = 0, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\partial_{\alpha}j^{\mu}\left[\partial_{\gamma}\partial_{\beta}\theta + i\partial_{\beta}\bar{z}\cdot\partial_{\gamma}z + i\bar{z}\cdot\partial_{\gamma}\partial_{\beta}z - (z \leftrightarrow \bar{z})\right] + j^{\mu}\left[\partial_{\alpha}\bar{z}\cdot\partial_{\gamma}\partial_{\mu}z - (z \leftrightarrow \bar{z})\right] = 0, \tag{4.37}$$

$$\partial_{\alpha}j^{\mu}\left(\partial_{\gamma}\theta + i\bar{z}\partial_{\gamma}z - iz\partial_{\gamma}\bar{z}\right) + j^{\mu}\left(\partial_{\alpha}\bar{z}\cdot\partial_{\gamma}z - \partial_{\alpha}z\cdot\partial_{\gamma}\bar{z}\right) = 0. \tag{4.38}$$

Analisando estas relações, podemos ver que o tensor energia-momento passa a ser escrito da seguinte forma

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}p(\lambda) + \left[\varepsilon(\lambda) + p(\lambda)\right]u_{\mu}u_{\nu} + i\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\rho\cdot u_{\mu}\partial_{\beta}\left(\partial_{\nu}\theta + i\bar{z}\partial_{\nu}z - iz\partial_{\nu}\bar{z}\right), \tag{4.39}$$

onde

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \rho f' - f - j^{\mu}\partial_{\mu}\theta + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\mu}\left(\partial_{\alpha}\bar{z}\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z - \partial_{\alpha}z\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\ &\quad - \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu}\cdot\partial_{\beta}\left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\cdot\partial_{\mu}z - iz\cdot\partial_{\mu}\bar{z}\right), \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\lambda) &= f + j^{\mu}\partial_{\mu}\theta - \frac{1}{2}\lambda^{\alpha\beta}j^{\mu}\left(\partial_{\alpha}\bar{z}\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}z - \partial_{\alpha}z\cdot\partial_{\beta}\partial_{\mu}\bar{z}\right) \\ &\quad + \frac{i}{2}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}j^{\mu}\cdot\partial_{\beta}\left(\partial_{\mu}\theta + i\bar{z}\partial_{\mu}z - iz\partial_{\mu}\bar{z}\right). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Estas equações mostram que o modelo simplificado representa uma generalização do fluido relativístico perfeito que tem uma infinidade de correntes conservadas associadas à invariância à reparametrização da variedade complexa descrita pelos potenciais z e $\bar{z}$ em ordem zero no parâmetro não-comutativo.

4.5 Cargas Topológicas

Uma quantidade física importante que se conserva no caso comutativo é a corrente axial que é relacionada ao número de ligação dos vórtices cuja conservação é garantida por considerações topológicas como visto na seção 2.4 [20]. Portanto, é preciso verificar se os fluidos não-comutativos têm correntes axiais de divergência nula. Para este fim, generalizamos a corrente axial k_μ dada pela relação (2.50) aplicando o princípio da correspondência adotado neste trabalho

$$K^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\xi\lambda}\left(\partial_\nu\theta + i\partial_z K * \partial_\nu z - i\partial_{\bar{z}} K * \partial_\nu \bar{z}\right) * \partial_\xi\left(\partial_\lambda\theta + i\partial_z K * \partial_\lambda z - i\partial_{\bar{z}} K * \partial_\lambda \bar{z}\right), \tag{4.42}$$

onde $\varepsilon^{\mu\nu\xi\lambda}$ é o tensor antisimétrico constante quadri-dimensional com $\varepsilon^{0123} = 1$. Se calcularmos a divergência de K^μ em primeira ordem em $\lambda^{\mu\nu}$ podemos constatar, após longos cálculos, que ela é igual a

$$\begin{aligned}
&-2i\varepsilon^{\mu\nu\xi\lambda}\lambda^{\alpha\beta}\left(\partial^2_{z\bar{z}}K\partial_\mu\bar{z}\partial_\alpha\partial_\nu z + \partial_{\bar{z}}\partial^2_z K\partial_\mu\bar{z}\partial_\alpha z\partial_\nu z + \partial^2_{\bar{z}}\partial_z K\partial_\mu\bar{z}\partial_\alpha\bar{z}\partial_\nu z + \partial^2_{z\bar{z}}K\partial_\mu\partial_\alpha\bar{z}\partial_\nu z\right)\\
&\times\left(\partial^2_{z\bar{z}}K\partial_\xi\bar{z}\partial_\beta\partial_\lambda z + \partial_{\bar{z}}\partial^2_z K\partial_\xi\bar{z}\partial_\beta z\partial_\lambda z + \partial^2_{\bar{z}}\partial_z K\partial_\xi\bar{z}\partial_\beta\bar{z}\partial_\lambda z + \partial^2_{z\bar{z}}K\partial_\xi\partial_\beta\bar{z}\partial_\lambda z\right)\\
&-i\varepsilon^{\mu\nu\xi\lambda}\lambda^{\alpha\beta}\partial_{z\bar{z}}K\partial_\mu\bar{z}\partial_\nu z\left(\partial^2_z K\partial_\xi\partial_\alpha z\partial_\beta\partial_\lambda z - \partial^2_{\bar{z}}K\partial_\xi\partial_\alpha\bar{z}\partial_\beta\partial_\lambda\bar{z}\right).
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Esta relação mostra que, em geral, K^μ não se conserva sem a imposição de outros vínculos sobre o sistema. Porém, repedindo os mesmos cálculos para o modelo simplificado apresentado na seção anterior, obtemos

$$\partial_\mu K^\mu = 0. \tag{4.44}$$

Podemos concluir que o fluido não-comutativo que generaliza o potencial de Kähler do plano complexo e o fluido perfeito relativístico comutativo têm o maior número de caracteristicas físicas idênticas.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Neste trabalho apresentamos a ação (4.3) que descreve uma grande classe de fluidos não-comutativos que generalizam os fluidos perfeitos formulados na parametrização de Kähler ao espaço-tempo não-comutativo. Os fluidos não-comutativos descritos pelo nosso modelo são caracterizados pelas funções arbitrárias $K(z,\bar{z})$ e $f(\sqrt{-j^{\mu} * j_{\mu}})$ que generalizam as funções correspondentes do caso comutativo. Esta generalização é resultado da restrição das derivadas parciais ao termo de ordem zero no parâmetro não-comutativo $\lambda^{\mu\nu}$ garantida pela propriedade de Leibniz para as derivadas parciais. Sem esta propriedade, contribuições de ordem superior em $\lambda^{\mu\nu}$ são geradas nas relações características do modelo.

A partir da ação (4.3) linearizada em primeira ordem em $\lambda^{\mu\nu}$, derivamos as equações de movimento e calculamos o tensor energia-momento. A equação do campo θ (4.6) não recebe correções não-comutativas e representa a equação da divergência nula da densidade de corrente j^{μ} como no caso comutativo. Porém, o tensor energia-momento tem divergência diferente de zero o que não acontece no caso comutativo. A consequência deste fato é que $T_{\mu\nu}$ não é invariante às translações geradas pelos operadores duais comutativos $P_\mu = \partial_\mu$. Para sanar esta dificuldade, determinamos duas equações de vínculo (4.11) e (4.12), respectivamente, que garantem a invariância do tensor energia-momento.

Certamente, a pesquisa em fluidos em espaços não-comutativos justifica-se plenamente, por um lado, pela nova proposta de modelo quântico, e por outro lado, pela possibilidade de haver fases fluidas de campos quânticos na escala de Planck onde a estrutura não-comutativa do espaço-tempo, se existir, tornaria-se relevante.

Podemos, assim, projetar várias linhas de investigações futuras dos fluidos não-comutativos apresentados neste trabalhos. Um dos problemas mais importante é descrever modelos concretos que preservam a simetria de Poincaré não-comutativa. Este problema pode ser abordado particularizando a variedade M_λ ao espaço-tempo κ - Minkowski. Neste caso, a generalização não-comutativa dos operadores de translação satisfaz a equação (4.2). Sendo assim, todas as conclusões derivadas à partir desta equação, como a invariância da densidade de corrente e o tensor energia-momento devem continuar válidas.

Outro problema interessante é analisar os fluidos que podem ser obtidos sem a regra de Leibniz para as derivadas parciais e trabalhar com a estrutura matemática não-comutativa completa. Espera-se, neste caso, que as equações de movimento e de vínculos sejam modificadas pela presença de outros termos proporcionais a $\lambda^{\mu\nu}$. Porém, estas modificações não devem afetar a relação entre o fluido não-comutativo e seu limite comutativo.

Finalmente, seria interessante estudar a estrutura simplética no espaço de fases do fluido induzida pela estrutura não-comutativa do espaço-tempo.

Bibliografia

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, vol. 6 of Course of Theoretical Physics, (Pergamon; Addison-Wesley, London, U.K.; Reading, U.S.A., 1959).

[2] B. Carter, *Covariant Theory of Conductivity in Ideal Fluid or Solid Media*, in A. Anile and M. Choquet-Bruhat, eds., *Relativistic Fluid Dynamics*, Lectures presented at 1^{st} Session of 1987 of Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Noto, Italia, 25 of May 3 of June 1987, vol. 1385 of Lecture Notes in Mathematics, 164, (Springer, Berlin, Germany; New York, U.S.A., 1989).

[3] N. Anderson and G. L. Comer, *Relativistic Fluid Dynamics: Physics for Many Different Scales*, Living Rev. Relativity, **10**, 1, (2007).

[4] R. Jackiw, *A Particle field theorist's lectures on supersymmetric, non-Abelian fluid mechanics and d-branes*, arXiv:physics/0010042.

[5] L. Faddeev and R. Jackiw, Phys. Rev. Lett . **60**, 1692 (1988).

[6] J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 257, Cambridge University Press, (2002).

[7] L. Susskind, *The Quantum Hall fluid and noncommutative Chern-Simons theory*, arXiv:hep-th/0101029.

[8] S. Bahcall and L. Susskind, Int. J. Mod. Phys. **B5**, 2735-2750 (1991).

[9] A. El Rhalami, E. M. Sahraoui and E. H. Saidi, JHEP **0205**, 004 (2002).

[10] J. L. F. Barbon and A. Paredes, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 3589 (2002), [arXiv:hep-th/0112185].

[11] J. L. F. Barbon and D. Gerber, Int. J. Mod. Phys. A **22**, 5287 (2007).

[12] A. P. Polychronakos, *Noncommutative fluids*, arXiv:0706.1095 [hep-th].

[13] R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, Annals Phys. **301**, 157 (2002).

[14] R. Jackiw, *Lochlainn O'Raifeartaigh, fluids, and noncommuting fields*, arXiv:physics/0209108.

[15] R. Jackiw, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **127**, 53 (2004).

[16] R. Jackiw, V. P. Nair, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, J. Phys. A **37**, R327 (2004).

[17] S. A. Alavi, Chin. Phys. Lett. **23**, 10 (2006).

[18] A. De Felice, J. M. Gerard and T. Suyama, Phys. Rev. D **81**, 063527 (2010).

[19] M. V. Marcial, A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira and F. I. Takakura, Phys. Lett. **A374**, 3608-3613 (2010).

[20] T. S. Nyawelo, J. W. van Holten and S. GrootNibbelink, Phys. Rev. D **68**, 125006 (2003).

[21] R. Jackiw and A. P. Polychronakos, Phys. Rev. D **62**, 085019 (2000).

[22] D. Baleanu, Czech. J. Phys. **55**, 473 (2005).

[23] P. D. Jarvis and J. W. van Holten, Nucl. Phys. B **734**, 272 (2006).

[24] L. Holender, M. A. Santos and I. V. Vancea, Phys. Rev. D **77**, 045024 (2008).

[25] L. Holender, M. A. Santos, M. T. Orlando and I. V. Vancea, Phys. Rev. D **84** 105024 (2011).

[26] T. S. Nyawelo, Nucl. Phys. B **672**, 87 (2003).

[27] P. A. Grassi, A. Mezzalira and L. Sommovigo, *Supersymmetric Fluid Dynamics*, arXiv:1107.2780 [hep-th].

[28] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[29] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka *Poincaré-Cartan Class and Deformation. Quantization of Kähler Manifolds* preprint KSTS/RR-97/003, (1997).

[30] N. Reshetikhin and L. A. Takhtajan, in L.D. Faddeev's Seminar on Mathematical Physics, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **Vol.201**, 257-276 (2000).

[31] M. Schlichenmaier, Adv. Math. Phys. **2010**, 927280 (2010).