

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PEDRO OTAVIO SOUZA BAQUI

**CORREÇÕES DE PRESSÃO NA DINÂMICA DE FLUIDOS  
NEWTONIANA E COMPARAÇÃO COM A TEORIA DA  
RELATIVIDADE GERAL**

VITÓRIA-ES  
2016

PEDRO OTAVIO SOUZA BAQUI

**CORREÇÕES DE PRESSÃO NA DINÂMICA DE FLUIDOS NEWTONIANA E  
COMPARAÇÃO COM A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL**

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella (Orientador).  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Júlio César Fabris (Co-Orientador)  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Sérgio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Zimdahl Winfried Ernst Wilhelm  
Universidade Federal do Espírito Santo

**VITÓRIA-ES**  
**2016**

**CORREÇÕES DE PRESSÃO NA DINÂMICA DE FLUIDOS  
NEWTONIANA E COMPARAÇÃO COM A TEORIA DA  
RELATIVIDADE GERAL**

PEDRO OTAVIO SOUZA BAQUI

**CORREÇÕES DE PRESSÃO NA DINÂMICA DE FLUIDOS  
NEWTONIANA E COMPARAÇÃO COM A TEORIA DA  
RELATIVIDADE GERAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

**ORIENTADOR: PROF. DR. OLIVER FABIO PIATTELLA**  
**COORIENTADOR: PROF. DR. JÚLIO CÉSAR FABRIS**

Vitória  
30 de março de 2016

© 2016, Pedro Otavio Souza Baqui.  
Todos os direitos reservados.

Souza Baqui, Pedro Otavio

D1234p      CORREÇÕES DE PRESSÃO NA DINÂMICA DE  
FLUIDOS NEWTONIANA E COMPARAÇÃO COM A  
TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL / Pedro Otavio  
Souza Baqui. — Vitória, 2016  
xi, 74 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do  
Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella

1. — Dissertações. 2. — Dissertações. I. Orientador.  
II. Título.

CDU 000.0\*00.00

## [Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:  
`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`  
onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:  
`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`  
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

*Dedico à minha alegre família !*



# Agradecimentos

Agradeço ao Grande Criador pela força e energia dada a mim para realizar esse trabalho. Agradeço a minha mãe Luciana e a meu pai Marcus por me apoiarem sempre nas minhas escolhas e pela força nos momentos mais difíceis. A minha irmã Mariana sempre alegre me fazendo dar risadas, assim como meus amigos. A minha namorada Jéssica por compartilhar os momentos felizes e os momento de aprendizagem. Aos meu Avós, tios, primos...a toda família !

Meus sinceros agradecimentos aos Professor Júlio Fabris e Oliver Piattella que acreditaram em mim e me receberam de braços abertos mesmo após algumas turbulências na pós-graduação. Pela oportunidade de trabalharmos juntos, pela paciência e alegria em nossos dias de encontro. Ao Adriano Oliveira pelas discussões muito proveitosas na dissertação e aos colegas da pós-graduação e graduação imprescindíveis.

Agradeço muito aos meus irmão da União Espirita de Jacaraípe que me acolheram e receberam na casa de forma tão fraternal e pela oportunidade de trabalho. Agradeço por fim a todos que contribuíram de uma forma ou de outra para a conclusão deste trabalho.

*“Qualquer árvore que queira tocar os céus precisa ter raízes tão profundas a ponto de tocar os infernos.”*

(Carl Jung)

# Resumo

O equilíbrio estelar e a cosmologia são ramos da física originadas num só tronco, a relatividade geral. Entretanto é possível descrevê-los sob certas condições utilizando hidrodinâmica newtoniana. O campo de atuação destas equações pode ser estendida com a introdução de um termo de pressão relativística, que atuará como fonte de campo gravitacional. Esse termo de correção ainda não é muito bem entendido de forma que recentemente Hwang e Noh o propuseram alternativamente às teorias hidrodinâmicas semi-relativísticas existentes. Estudaremos os resultados obtidos para as teorias newtonianas, neo-newtonianas e de Hwang-Noh assim como a própria relatividade aplicada a estrelas e cosmologia e os compararemos. Veremos que apesar da previsão de estrelas de nêutrons super gigantes no estudo do equilíbrio estelar, as equações hidrodinâmicas de Hwang-Noh nos trazem, em casos particulares, resultados semelhantes à Relatividade Geral quanto à evolução do universo.

# Abstract

Stellar equilibrium and cosmology are physical branches originating from one trunk, which are usually tackled using General Relativity as the background theory. However, it is possible to describe them under certain conditions using Newtonian hydrodynamics. Moreover, the validity of these equations can be extended with the introduction of a pressure term which acts as a source of gravitational field, as it happens for General Relativity. This correction has, in some instances, been put by hands, inspired by General Relativity. However, recently Hwang and Noh proposed a new set of neo-Newtonian equations. We will study the results for the Newtonian theory, neo-Newtonian and Hwang-Noh theories as well as the very general relativity applied to stars and cosmology and will compare their predictions. We will see that despite the forecast of super giant stars of neutrons in the study of stellar balance, the hydrodynamic equations of Hwang-Noh bring us in particular cases, results similar to General Relativity as the evolution of the universe.

# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>vi</b>
<b>Resumo</b>	<b>viii</b>
<b>Abstract</b>	<b>ix</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 FLUIDOS IDEAIS</b>	<b>5</b>
2.1 Fluidodinâmica Newtoniana . . . . .	5
2.2 A Equação de Continuidade . . . . .	6
2.3 A Equação de Euler . . . . .	7
2.3.1 Acoplamento Gravitacional . . . . .	8
2.3.2 Conservação de Entropia . . . . .	8
<b>3 FLUIDODINÂMICA E RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>10</b>
3.1 Aplicação das Equações Hidrodinâmicas em Relatividade Geral . . . . .	10
3.2 Correção Relativística . . . . .	14
3.3 Correções Alternativas . . . . .	16
<b>4 HIDRODINÂMICA NEWTONIANA COM CORREÇÕES DE PRESSÃO</b>	<b>18</b>
4.1 Métrica Perturbada . . . . .	18
4.1.1 O Limite Newtoniano . . . . .	20
4.2 Conservação do Tensor Momento-Energia . . . . .	21
4.2.1 O Limite Newtoniano das Equações Hidrodinâmicas . . . . .	23
4.3 Conservação da entropia . . . . .	27
4.4 Confirmação com a Relatividade Restrita . . . . .	28
<b>5 COSMOLOGIA</b>	<b>32</b>
5.1 A Dinâmica do Universo Segundo as Equações de Hwang-Noh . . . . .	32
5.2 Perturbações Cosmológicas . . . . .	38
<b>6 ESTRELAS COMPACTAS</b>	<b>42</b>

6.1	O Equilíbrio Estelar . . . . .	42
6.1.1	Correções Oriundas da Relatividade Geral . . . . .	45
6.2	Estrelas de Neutrôn . . . . .	48
6.2.1	Equação de Estado para Nêutrons não Interagentes . . . . .	49
6.2.2	Resultados Numéricos . . . . .	51
6.2.3	Equação de Estado para Nêutrons Interagentes . . . . .	56
6.2.4	Estabilidade . . . . .	58
6.2.5	Por que existe uma massa máxima ? . . . . .	61
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>62</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>65</b>
	<b>Apêndice A Programas</b>	<b>69</b>
A.1	Algoritmo Computacional . . . . .	69
	<b>Apêndice B Equações Fluidodinâmicas</b>	<b>73</b>
B.1	Equação de Euler . . . . .	73
B.2	Equações de Continuidade . . . . .	73
B.3	Equações de Poisson . . . . .	74

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

É de conhecimento de poucos, inclusive de físicos que não são da área é a surpreendente ideia de que podemos estudar o universo, assim como elementos que o compõem, através da fluidodinâmica. A fluidodinâmica é construída a partir das leis de Newton que desde o século XVII até o início do século XX, tinham sido à melhor base para modelos que desejavam explicar fenômenos naturais a partir da matemática [1]. Acontece que em 1905 com o advento da relatividade restrita, Einstein mostrou que no limite das altas velocidades, a física newtoniana já não era tão precisa.

Mais tarde, na tentativa de incluir a gravidade na teoria da relatividade restrita, Einstein propõe em 1916 as suas equações de campo, cujas soluções deram novos ramos à física. Com essas soluções conseguimos descrever a dinâmica do universo, descrever o equilíbrio estelar e buracos negros por exemplo. O problema de se trabalhar com essas equações de campo é a sua matemática complicada. O conjunto de resultados obtidos em 1916 pelas equações de Einstein chama-se Relatividade Geral e para seu bom entendimento e trabalho é fundamental o conhecimento em geometria Riemanniana .

Por outro lado a mecânica de Newton descreveu tão bem a natureza por muitos anos, que poderíamos investigar a descrição de sistemas relativísticos, de uma forma alternativa introduzindo pequenos termos de correções na mecânica newtoniana. Conseguimos através da fluidodinâmica contornar a complexa matemática da relatividade e obter localmente os mesmos resultados. Assim, como um primeiro estudo e aproximação, qualquer pessoa com conhecimentos de cálculo diferencial e integral poderia explorar a dinâmica do universo, quando dominado pela poeira, ou mesmo estudar anãs brancas [2].

As equações de Euler, Continuidade e Poisson, i.e. equações para fluidos obtidas a partir das leis de Newton, nos permitem o estudo de sistemas onde a pressão é pequena ou nula. Entretanto o próprio universo e muitos elementos que o compõem constituem sistemas que possuem pressão considerável, portando seria interessante incluir termos de correção de pressão em nossas equações de fluido a fim de estender o domínio da descrição newtoniana. Essas teorias que tentam incluir termos de pressão nas equações fluidodinâmicas são chamadas teorias neo-newtonianas.

Não existe uma forma natural para essa correção de pressão nas equações de fluido, sendo ainda hoje motivo de estudo. Recentemente Hwang e Noh [3] propuseram uma correção de pressão oriunda da relatividade geral totalmente diferente das propostas nas literaturas existentes [4] [5] [6].

Mesmo com todo avanço da física moderna a fluidodinâmica newtoniana ainda é utilizada em simulações numéricas sendo a relatividade geral utilizada apenas para termos de correções [7]. Nosso estudo pode contribuir talvez para um melhor refinamento dos resultados obtidos pelas simulações newtonianas e como uma alternativa, em primeira ordem, à relatividade geral. Por outro lado, também pode contribuir para desenvolvimento do estudo de colisões de íons [8].

Nessa dissertação nos preocuparemos em estudar as correções propostas por Hwang e Noh, aplica-las para um determinado sistema onde a pressão seja relevante e compara-las a alguns modelos existentes. Veremos também a partir de comparações qual teoria neo-newtoniana mais se aproxima da relatividade geral. O interessante dessas correções de pressão é que além de nos aproximar da relatividade geral, preservam também a estrutura matemática simples do espaço euclidiano, podendo assim contornar a complexidade matemática da relatividade geral.

Para o estudo das correções de pressão, primeiramente deduziremos as equações que regem um sistema composto por um fluido. São elas a equação de continuidade e de Euler. Em seguida acoplaremos um termo de força de origem gravitacional à equação de Euler afim de aplica-las à sistemas onde há interação gravitacional entre os elementos desse sistema. Com essas equações em mãos conseguimos descrever a evolução de sistemas onde a pressão é nula.

No caso do universo encontraremos as equações de Friedmann na época em que a poeira domina, i.e.  $p = 0$ . Isso nos motiva a procurar por equações de evolução que levam a pressão em conta. Os artigos [6] [7], por exemplo, propõem termos de correção de pressão, ambos obtido através de um *ansatz*<sup>1</sup>.

Nessa mesma linha, Hwang e Noh [3] propuseram uma correção de pressão oriundo da relatividade geral na equações newtonianas para fluidos. Os autores partem de uma métrica do tipo escalar-vetor perturbadas no contexto cosmológico em torno de Minkowski e para os calibres *shear* nulo  $\chi_i = 0$  que implica em métrica diagonal e para calibre espacial encontram os termos de correção no limite em que a velocidade da luz tende ao infinito exceto para pressão. Isso tudo é feito a partir do estudo da conservação de energia e momento, via formalismo ADM pelos autores. Tais equações estão em conformidade com a aproximação 1-Pós Newtoniana e com a relatividade restrita no limite das baixas velocidades. Também estão em conformidade com a teoria de perturbação cosmológica com calibre co-móvel, i.e.  $v := 0$ , no limite em que a pressão tenda a zero [3].

Uma vez dada uma breve abordagem de como encontramos as equações para fluido propostas por Hwang e Noh, de forma alternativa utilizando formalismo covariante, mostraremos explicitamente que estão em acordo com a relatividade restrita. A partir dessas

---

<sup>1</sup>*ansatz*: 1. abordagem, tentativa [9]



equações conseguimos descrever vários fenômenos onde a pressão possui um papel ativo como buracos negros análogos, cosmologia e suas perturbações, além de fenômenos quânticos. Nos concentraremos nessa dissertação em estudar a evolução do universo e o equilíbrio estelar dando ênfase às estrelas de nêutrons.

Sendo assim, a fim de descrever o universo com as equações de fluido, o consideraremos composto por um fluido perfeito uniformemente distribuído, de forma a possuir uma pressão  $p(t)$  e uma densidade de matéria  $\rho(t)$  iguais em cada ponto do universo em uma determinada época  $t$ .

Ainda no contexto de cosmologia construída a partir de fluidos, encontraremos equações análogas à de Friedmann que descrevem a evolução do universo assim como suas soluções. Veremos no caso de Hwang-Noh que o universo não possui solução para matéria escura, i.e,  $w = -1$ , no contexto de relatividade geral utilizando a equação de estado  $p = w\rho c^2$ . Veremos também que a matéria está intrinsecamente acoplada à curvatura de forma que não existe um universo vazio, cuja evolução seja dominada pela curvatura, como existe em relatividade geral. Nosso universo será governado por duas equações análogas de Friedmann. Uma para o caso em que  $w = -1/9$  e a outra para o caso em que  $w \neq -1/9$ . Observaremos que para a maioria dos parâmetros  $w$  e curvatura  $K$  presentes nas equações de Friedmann, assumindo valores negativos, positivos ou nulos, o universo se expandirá de forma desacelerada. Possuindo apenas expansão acelerada no caso em que tais parâmetro assumam valores positivos.

Existem situações particulares em que o modelo de Hwang-Noh descreve os mesmo resultados que a relatividade geral no contexto cosmológico. Um caso que curioso é o caso da equação de estado  $p = K\rho^\gamma$  semelhante ao gás de Chaplygin generalizado que nos permitirá a descrição da passagem de um universo em expansão desacelerada para um universo em expansão acelerada. Estudamos também o caso em que a equação de estado toma a forma  $p = w(t)\rho c^2$ .

Ainda no contexto cosmológico introduzimos perturbações nas equações para fluidos hidrodinâmicas estudadas afim de compara-las com a RG e a teoria newtoniana. Observaremos a presença de termos proporcionais à  $Hq^i/c^2$  nas equações de Euler e de Continuidade perturbadas. Isso nos impossibilita encontrar uma equação fechada para  $\delta$  como existentes na teoria newtoniana e na RG. Poderemos entretanto contornar esse problema se focamos nossa atenção à pequenas escalas.

No estudo sobre equilíbrio estelar encontraremos as equações análogas à TOV segundo as equações para fluido propostas por Hwang e Noh, assim como para os modelos newtoniano e neo newtoniano alternativos. Veremos no decorrer da dissertação que a definição de massa deve levar em conta em alguns casos enquanto que para o modelo oriundo da Relatividade Geral esse conceito de massa não é tão claro assim.

Uma vez deduzidas das equações de equilíbrio estelar podemos aplica-las à sistemas onde a pressão possua um papel de destaque. Um bom sistema para estudos de nossas equações seriam as estrelas de nêutrons uma vez que possuem pressão alta e as partículas que a compõem, baixas velocidades [10].

Uma vez encontrada a equação análoga à TOV segundo Hwang-Noh é necessário uma equação de estado para resolvê-la. Escreveremos essa equação para uma estrela constituída por um gás de nêutrons não interagentes entre si, composta por uma parte relativística e outra parte não-relativística  $\bar{\epsilon}(p) = A_{NR}\bar{p}^{3/5} + A_R\bar{p}$ . Os coeficientes  $A_R$  e  $A_{NR}$  serão encontrados através de uma curva esboçada a partir das expressões para pressão  $p(r)$  e para a densidade de energia  $\rho(r)$  para este sistema. A razão entre a pressão e a densidade de energia é transcendental, dessa forma utilizaremos o *Wolfram Mathematica 10.2* para desenvolver as contas.

Com a equação de estado em mãos analisaremos o raio máximo de cada estrela de nêutrons para uma dada pressão. Em seguida variaremos a pressão inicial  $p_0$  e para cada valor máximo de massa associada a essa pressão central  $p_0$  será esboçada num gráfico *MassaXRaio*. Faremos isso com o objetivo de comparar os modelos newtonianos e neo-newtonianos e observar quem mais se aproxima da relatividade geral. Discutiremos de forma breve condições de estabilidade e de uma forma argumentativa o porque da existência de uma massa máxima nesses gráficos esboçados.

Por fim introduziremos a interação nêutron-nêutron em nossa equação de estado e traçaremos o gráfico da massa  $M$  em função do raio  $R$  variando a pressão central  $p_0$ . Veremos que para este caso, o modelo de Hwang-Noh prevê estrelas de nêutrons com raios de característicos de estrelas super gigantes. Veremos também que o modelo newtoniano diverge para este caso.

Concluimos que o modelo de Hwang-Noh se aproxima menos do que teoria neo-newtoniana proposta em [7], no contexto de estrela de nêutrons, numa comparação com Relatividade Geral. E que por outro lado se aproxima mais da Relatividade Geral do que a teoria newtoniana.

Em suma, percebemos que apesar de bastante interessante a proposta de correção de pressão nas equações para fluidos, esta nos leva a uma cosmologia um pouco diferente da padrão obtida pela relatividade geral para a equação de estado  $p = wc^2\rho$  existindo por outro lado soluções idênticas à relatividade geral para equações de estado do tipo barotrópica  $p = w(t)c^2\rho$  e politrópica  $p = K\rho^\gamma$ . E no estudo sobre estrela de nêutrons, a proposta de Hwang-Noh se aproxima da equação de TOV relativamente mal, de forma que podemos afirmar que as equações para fluidos neo-newtonianas descrevem os sistemas estudados melhor para as partículas do sistema não interagente. Se levamos em consideração interação entre os nêutrons por outro lado, o caso torna-se ainda mais drástico, prevendo massas características de estrelas super gigantes.

## Capítulo 2

# FLUIDOS IDEAIS

### Introdução

Daremos uma breve revisão sobre fluidos ideais ao leitor neste capítulo. Definiremos o que é um fluido e como estudá-lo. Deduziremos também as equações básicas que regem esse sistema a fim de aplicá-las a relatividade geral.

### 2.1 Fluidodinâmica Newtoniana

Em mecânica clássica quando conhecemos a posição e a velocidade iniciais de uma partícula, podemos determinar a sua trajetória, caso a força que atua sobre esta seja constante. O estudo de trajetórias de partículas ficou conhecida por mecânica Lagrangiana e a partir dela as ciências exatas conseguiram grandes avanços no decorrer da história. Poderíamos portanto nos perguntar, como estudar os fluidos !?

Talvez pudéssemos dividi-lo em partes muito pequenas, de forma que cada uma dessas pequenas partes, composta por um grande número de moléculas, se comportasse como uma partícula. Poderíamos assim, sob certas condições determinar a trajetória de cada uma dessas partículas [11]. Essas partículas seriam suficientemente pequenas em comparação com a dimensão do sistema e neutras a fim de desprezarmos qualquer interação eletromagnética entre essas partículas [12]. Como são muito pequenas podemos também chamá-la de elemento de fluido<sup>1</sup>.

Acontece que se fazemos isto, teríamos uma infinidade de trajetórias para se calcular, além do mais, todas essas trajetórias não nos trariam uma informação relevante do sistema como um todo estudado. O que de fato fazemos é associar um campo vetorial velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  a cada ponto do fluido e analisar o seu comportamento conforme o tempo evolui. Esse campo, por construção, no referencial de laboratório deve satisfazer a segunda lei de Newton, como veremos mais adiante.

Ainda é necessário conhecer outras propriedades termodinâmicas do fluido para a determinação deste campo. Em particular para um fluido perfeito, basta conhecer a pressão

---

<sup>1</sup>Os termos partícula, ponto do fluido e elemento de volume são equivalentes nesta dissertação.

$p(\mathbf{r}, t)$  e a densidade de matéria  $\rho(\mathbf{r}, t)$ . Em outros casos, que não serão estudados aqui é necessário o conhecimento de outras grandezas além destas [11].

Um fluido perfeito dito aqui é aquele que não possui atrito interno (não viscoso), cujo movimento é adiabático (a entropia do elemento de volume possui um valor constante ao longo de sua trajetória). O meio estudado é composto por pequenos elementos de fluido que formam um meio contínuo, logo, seria possível então aplicar as leis conhecidas em Mecânica Clássica para esse conjunto de partículas que compõe líquidos ou gases denominado fluido. Em particular trabalharemos com a Lei de Conservação de Massa e com a Segunda Lei de Newton no decorrer da dissertação.

Como podemos observar este estudo do movimento dos fluidos é puramente macroscópico. Nos tópicos a seguir nos encarregaremos de deduzir as equações básicas da fluidodinâmica.

## 2.2 A Equação de Continuidade

As equações fundamentais da fluidodinâmica são baseadas em Leis. Estamos interessados aqui na Lei de Conservação de Massa aplicadas ao movimento do fluido.

Considere um cilindro longo, por exemplo. Ocupando uma parte restrita  $V_0$  deste cilindro, imagine um fluido, de forma que a massa total deste fluido seja  $\int_{V_0} \rho \cdot dV$  onde  $\rho$  é a densidade de matéria deste fluido. Se munimos o sistema de uma dinâmica, permitindo que este elementos de fluido escorram pelo interior do cilindro com uma velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  em cada ponto, então podemos definir o conceito de *fluxo*, isto é, a quantidades de matéria que atravessa o volume  $V_0$ , como

$$\oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a} = [\text{massa/segundo}] \quad . \quad (2.1)$$

Onde  $d\mathbf{a}$  é o elemento de área, orientado para fora, que delimitam o volume  $V_0$ . Por outro lado, o decréscimo de massa deste volume  $V_0$  pertencente ao cilindro pode ser calculado como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = [\text{massa/segundo}] \quad , \quad (2.2)$$

igualando as equações (2.1) e (2.2) encontraremos

$$\oint_{\partial V_0} \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV \quad . \quad (2.3)$$

Podemos, através do teorema do divergente [13], reescrever a equação acima da forma

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0 \quad . \quad (2.4)$$

Como essa relação é válida para todo volume, então

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0} \quad . \quad (2.5)$$

Esta é a chamada Equação de Continuidade. Portanto, se há conservação de massa no sistema então o fluido deve satisfazer esta equação.

### 2.3 A Equação de Euler

Outra equação que nos requer atenção é a equação de Euler que nada mais é do que a segunda Lei de Newton aplicada aos fluidos.

Considere um fluido escoando por um cilindro assim como no exemplo anterior, para a dedução da equação de continuidade. Além disso imaginemos uma força externa  $-\oint_{\partial V_0} p \cdot d\mathbf{a}$  atuando sobre o fluido. Transformando a integral de superfície em volumétrica encontraremos

$$-\oint_{\partial V_0} p \cdot d\mathbf{a} = - \int_{V_0} \nabla p \cdot dV \quad . \quad (2.6)$$

Observemos que isso é o mesmo que dizer que uma força  $-\nabla p \cdot dV$  atua sobre cada partícula que compõe o fluido, com isso podemos escrever uma equação de movimento para cada uma dessas partículas

$$\rho \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\nabla p \quad . \quad (2.7)$$

Temos uma derivada total agindo sobre o campo velocidade que depende da posição e do tempo, cuja posição também possui uma dependência no tempo, isto é,

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\alpha} \quad . \quad (2.8)$$

Logo reescrevemos (2.8) como

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho}} \quad . \quad (2.9)$$

Esta equação de movimento para fluidos é conhecida como Equação de Euler. Foi proposta pela primeira vez por L. Euler em 1755 e compõe juntamente a equação de continuidade umas das equações mais importantes da fluidodinâmica [12].

### 2.3.1 Acoplamento Gravitacional

Se o fluido está na presença de um campo gravitacional, um termo de força associada a este campo deve ser introduzido na equação de Euler. Sendo assim, uma força  $\rho\mathbf{g}$  atuará em cada partícula que compõe o fluido. Reescreveremos então a Equação de Euler como

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \phi = -\frac{\nabla p}{\rho}} \quad . \quad (2.10)$$

Deste modo introduzimos uma interação gravitacional entre os elementos do fluido, antes inexistente. O termo acoplado na equação acima ainda é motivo de estudos como veremos mais para frente. Na referência [12], assim como aqui, este termo é acoplado à mão de maneiras simples, satisfazendo a equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad . \quad (2.11)$$

Em outros casos, como pode-se observar na referências [7],  $\phi$  satisfaz uma equação de Poisson modificada como veremos nos capítulos seguintes.

### 2.3.2 Conservação de Entropia

Como dito anteriormente o movimento do elemento de fluido ideal é adiabático, isto é, a entropia por unidade de massa  $s$  permanece constante através de seu caminho ao longo do espaço. Podemos escrever essa condição em linguagem matemática como

$$\frac{ds(\mathbf{r}, t)}{dt} = 0 \quad , \quad (2.12)$$

Temos acima novamente uma derivada total. Podemos reescrevê-la como

$$\frac{\partial(s)}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)s = 0 \quad . \quad (2.13)$$

Podemos a partir da equação (2.13) juntamente a equação (2.5) encontrar a relação

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla[(\rho s)\mathbf{u}] = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Onde podemos definir o fluxo de entropia como  $\rho s \mathbf{u}$ .

## Capítulo 3

# FLUIDODINÂMICA E RELATIVIDADE GERAL

### Introdução

De uma forma alternativa é possível obter alguns resultados advindos da relatividade geral a partir das equações da hidrodinâmica. Partiremos das equações de continuidade e de Euler newtonianas e mostraremos que a medida em que vamos introduzindo termos de correção de pressão relativísticos a essas equações vamos nos aproximando de resultados mais gerais.

Não existe uma correção natural para tais equações. Algumas são simplesmente tentativas, outras possuem uma dedução, como veremos. Mas o que de fato acontece é que nenhuma delas prevê todos os resultados obtidos pela relatividade geral. Todos os modelos possuem vantagens em um aspecto e em outros nem tanto.

Apresentaremos neste capítulo algumas propostas de correção relativística trabalhadas atualmente para que em capítulos posteriores possamos aplicá-las em um ramo da relatividade geral a fim de compará-las.

### 3.1 Aplicação das Equações Hidrodinâmicas em Relatividade Geral

Desde sua formulação as leis de Newton conseguiram de uma forma muito simples explicação para os fenômenos de origem gravitacional assim como mecânicos. Isso aconteceu até o início do século XX, quando procurou-se estudar o movimento das partículas a altas velocidades com a relatividade restrita e com a aplicação desta na gravitação newtoniana. Essas ideias estudadas primeiramente por A. Einstein geraram uma grande revolução no pensamento científico que estendeu a física e abrangendo outros saberes [1].

Em meio a contração de espaço e dilatação do tempo, as ciências exatas tomaram novos rumos e a teoria newtoniana sendo substituída a medida que a relatividade ganhava espaço.



A teoria newtoniana por sua vez não faz as mesmas previsões que relatividade, mas por outro lado se impomos um certo limite a relatividade geral conseguimos encontrar a teoria newtoniana.

A relatividade geral possui uma matemática avançada, portanto inevitavelmente seus resultados carregaram consigo essa matemática, chegando a parecer impossível algum entendimento a qualquer pessoa que não seja da área. Contudo, talvez seja de conhecimento de poucos a ideia da possibilidade de que se é possível demonstrar vários resultados básicos da relatividade geral a partir de uma abordagem newtoniana.

Para abordagem tomaremos como palco para nossos eventos um espaço tridimensional plano e estático. Para descrever a evolução temporal dos acontecimentos neste espaço, temos um tempo universal. Com o auxílio da hidrodinâmica newtoniana e com algumas hipóteses *ad hoc* impostas ao sistema, conseguimos descrever análogos de buracos negros [14], buracos de minhoca acústicos [15], efeito análogo Aharonov-Bohm [16], teoria de perturbação cosmológica [17] [6], equilíbrio estelar [4] e cosmologia [7] [18].

Como exemplo, considere um universo esfericamente simétrico contido em  $\mathbb{R}^3$ , de raio  $a(t)$  centrado em um observador  $O$  na origem do sistema de coordenadas [19]. Composto por um fluido perfeito uniformemente distribuído em toda época  $t$ , a pressão  $p = p(t)$  e densidade  $\rho = \rho(t)$  dependentes apenas do tempo. As partículas deste fluido são essencialmente galáxias que se afastam uma das outras num movimento restritamente radial, de forma que uma galáxia a uma distância  $\mathbf{r}(t_0)$  no referencial do observador  $O$ , possui seu movimento descrito pela relação

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{r}(t_0) \quad . \quad (3.1)$$

Derivando a relação acima encontramos a Lei de Hubble que nos diz a cerca da velocidade nas quais as galáxias se afastam [20]

$$\mathbf{u}(t) = H(t)\mathbf{r}(t) \quad . \quad (3.2)$$

Onde definimos o parâmetro de Hubble como  $H(t) := \dot{a}(t)/a(t)$ . Ressaltamos que a expansão observada pelo observador  $O$  se deve a essas partículas que afastam-se uma das outras nesse espaço estático, diferentemente do que ocorre em teorias relativísticas. Nelas, as partículas estão fixas e temos um espaço-tempo que se expande.

Devemos chamar atenção para o fato de que o raio  $a(t)$  de nosso universo estudado pode ser extenso, mas não infinito a não ser que o potencial gravitacional da teoria satisfaça condições de contorno particulares [19]. Para observar isso, considere o potencial gravitacional newtoniano  $\varphi$  num ponto  $a(t_0) = A$

$$\phi(a_0, t_0) = -\frac{GM}{a_0} \quad \rightarrow \quad \phi(a_0, t_0) = -\frac{4}{3}\pi G\rho a_0^2 \quad . \quad (3.3)$$

Note que a medida em que  $a(t) \rightarrow \infty$ , o potencial diverge e a força exercida pelo fluido contida no interior desta casca esférica limitado por  $a(t_0)$  sobre o ponto  $A$  torna-se infinita. Admitiremos aqui que temos uma nuvem de gás finita entretanto isso nos levará a outro problema, agora com o princípio cosmológico.<sup>1</sup>

Se admitimos um universo de raio finito, admitimos também a existência de um único ponto no qual o universo é homogêneo e isotrópico, diferentemente de um universo infinito no qual qualquer ponto pode ser considerado como centro de um universo onde não há direções nem posições privilegiadas. Temos portanto uma limitação ao descrever o universo na forma newtoniana.

Para amenizar o problema e salvar o princípio cosmológico na descrição newtoniana, consideramos um universo arbitrariamente grande, mas não infinito. De forma que o raio limitado pela nossa distância astronômica, muito menor que o raio do universo, não nos pudesse permitir a detecção desta isotropia no universo mesmo com toda nossa bagagem tecnológica.

Uma vez construído um universo com algumas condições conhecidas atualmente, iremos agora investigar sobre sua dinâmica, i.e, procurar equações que nos permitam descrever como o universo evolui no decorrer do tempo. Para se chegar a tais equações devemos primeiramente encontrar uma solução para a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{d\rho}{dt} + 3\rho H(t) = 0 \quad . \quad (3.4)$$

Mas o parâmetro de Hubble pode ser definido em função do fator de escala como  $H(t) := \dot{a}(t)/a(t)$ , então substituindo-o na equação acima e a integrando

$$\int_{\rho(t)}^{\rho(t_0)} \frac{d\rho}{\rho} = -3 \int_{a(t)}^{a(t_0)} \frac{da}{a} \quad \rightarrow \quad \rho(t) = \rho_0 \frac{1}{a^3(t)} \quad . \quad (3.5)$$

Definindo  $a(t_0) := 1$ , encontraremos que a densidade de de poeira decai com o inverso de  $a^3(t)$ .

Nosso universo pode ser considerado em primeira aproximação como composto por um fluido perfeito, então é razoável que o substrato cosmológico deva satisfazer a equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{\nabla \rho}{\rho} + \nabla \phi = \left[ \frac{dH(t)}{dt} + H^2(t) \right] \mathbf{r} + \nabla \varphi = 0 \quad . \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>O princípio cosmológico nos afirma que não existem pontos ou direções privilegiadas no universo.

Tomando a divergência da equação acima encontraremos

$$\dot{H}(t) + H^2(t) = -\frac{4}{3}\pi\rho G \quad . \quad (3.7)$$

Podemos reescrever a equação acima em termos do fator de escala  $a(t)$  como

$$\frac{d}{dt} \left[ \dot{a}^2 - \frac{8}{3}\pi\rho a^2 \right] = 0 \quad , \quad (3.8)$$

e integrando essa equação diferencial encontraremos

$$\boxed{H^2(t) = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{Kc^2}{a^2}} \quad . \quad (3.9)$$

Onde  $Kc^2$  é uma constante de integração. Reescrevendo o fator de Hubble em função do fator de escala, também podemos obter da relação (3.7) a relação

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho} \quad . \quad (3.10)$$

As equações (3.9) e (3.10) constituem as equações de Friedman para um universo dominado pela poeira, i.e.  $p = 0$ . Portanto, conseguimos obter a partir de um modelo simples os mesmos resultados obtidos pela relatividade geral [21]. Podemos concluir então que as equações fluidodinâmicas newtonianas propostas, nos permitem descrever apenas um caso particular da cosmologia.

Notemos que  $a(t)$  é sempre positivo, pois consiste no raio do universo. Isso implica para equação (3.10) que  $\ddot{a} < 0$ , ou seja, que o universo possui aceleração negativa indo de encontro aos resultados observacionais [22] [23].

Apesar de muito elegante, a descrição newtoniana do universo possui suas limitações. O fato de que o modelo newtoniano apenas se aplica a sistemas infinitos é sério. Além do mais, a existência de pressão em nosso universo possui um papel fundamental na dinâmica do universo.

Curiosamente essa cosmologia só foi formulada na década de trinta por Milne [24], McCrea [24] e mais tarde por Harrison na década de cinquenta [25], i.e, após a formulação relativística do universo. Ou seja, uma descrição mais simples de um sistema veio após uma descrição mais complexa. Um fato não muito comum no meio da física.

### 3.2 Correção Relativística

Vimos no tópico anterior que a partir das relações fluidodinâmicas conseguimos encontrar as equações de Friedmann para poeira, i.e.  $p(t) = 0$ . Naturalmente, poderíamos nos perguntar se seria possível fazer uma correção de pressão nestas equações afim de encontrar um resultado mais abrangente obtido também pela relatividade geral. Em outras palavras, encontrar as equações de Friedmann para uma pressão  $p(t)$  qualquer. As teorias que tentam incorporar um termo de pressão nas equações hidrodinâmicas newtoniana são chamadas teorias neo-newtonianas. Veremos a seguir uma destas tentativas proposta em [7] que descrevem relativamente bem a evolução do universo.

Afim de avançar em caminho a relatividade geral devemos nos lembrar que energia e massa são equivalentes. Estabelecemos esta equivalência entre as duas grandezas através do termo  $c^2$ . Além disso admitiremos a possibilidade de redefinição do conceito de densidade de massa gravitacional passiva e ativa. Vejamos como isso pode ser feito a seguir.

Considere um observador  $O$  no centro de um universo em expansão, esféricamente simétrico composto por um fluido perfeito, uniformemente distribuído ao longo do tempo com densidade  $\rho(t)$  e pressão  $p(t)$ . Esse mesmo observador  $O$  descreve a aceleração de um objeto na posição  $\mathbf{r}(t)$ , segundo a lei de Hubble, como

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = [\dot{H}(t) + H^2(t)]\mathbf{r}(t) \quad . \quad (3.11)$$

Imagine agora um objeto de massa  $m_p$ , fazendo papel de massa passiva, localizado num ponto  $\mathbf{r}(t_0)$ . No referencial do observador  $O$  esse objeto sofre uma força de origem gravitacional devida toda massa  $M_a$ , gravitacional ativa, contida na esfera de raio  $\mathbf{r}(t_0)$ . Nesse tomamos a densidade de massa  $\rho_a(t)$  como uma manifestação de caráter gravitacional

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{-GM_a}{r^3(t)}\mathbf{r}(t) \quad . \quad (3.12)$$

Igualando (3.11) a (3.12), encontraremos

$$\dot{H}(t) + H^2(t) = -\frac{4}{3}\pi G\rho_a(t) \quad . \quad (3.13)$$

A densidade de massa gravitacional por sua vez pode ser postulada como a contração do tensor momento energia [26]. Para enxergarmos isso basta analisar a equação de Poisson no limite newtoniano não desprezando o termo de pressão <sup>2</sup> [27]

---

<sup>2</sup>Deduziremos que a pressão e o campo gravitacional estão intrinsecamente ligados no contexto do próximo capítulo

$$\rho_a = T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3 \quad . \quad (3.14)$$

Onde  $T_{\beta}^{\alpha}$  é o tensor momento energia para a métrica de Minkowski num referencial co-móvel

$$\rho_a \rightarrow \varrho + 3p/c^2 \quad . \quad (3.15)$$

Onde  $\varrho = \rho + \Pi/c^2$ . Sendo  $\rho$  densidade de massa associada a energia de repouso e  $\Pi/c^2$  densidade de massa associada energia térmica do sistema. E temos a pressão como fonte de campo gravitacional. A relação  $\varrho + 3p$  determina a convergência de geodésicas em relatividade geral [7]. O interessante aqui é notar a pressão como fonte de campo gravitacional.

Portanto, a equação diferencial que o potencial gravitacional deve satisfazer é uma equação de Poisson modificada

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 4\pi G(\varrho + 3p/c^2)} \quad . \quad (3.16)$$

Nosso segundo passo agora é redefinir a densidade de massa gravitacional passiva como [7]

$$\varrho_p \rightarrow \varrho + p/c^2 \quad . \quad (3.17)$$

A partir dessa redefinição, reescrevemos as equação de Euler como

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \phi - \frac{\nabla p}{(\varrho + p/c^2)}} \quad . \quad (3.18)$$

uma vez que a ideia deste formalismo neo-newtoniano consiste nas substituições das definições (3.17), (3.15) nas equações para fluidos newtonianos.

A equação de Continuidade escrevemos como

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varrho + p/c^2) \mathbf{u}] = 0} \quad . \quad (3.19)$$

Essas equações foram obtidas a partir dos trabalhos de McCrea e Harrison [25]. Com as equações de Poisson, continuidade e Euler acopladas, corrigidas com termos de pressão,

conseguimos encontrar as equações de Friedman [7], de forma semelhante feita com as equações hidrodinâmicas newtonianas no tópico anterior

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{Kc^2}{a^2} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p/c^2) \quad , \quad (3.20)$$

por consequência conseguiremos uma boa descrição para a evolução do universo segundo a relatividade geral.

Uma vez que temos as equações hidrodinâmicas corrigidas com termos de pressão em mão, podemos estender o domínio de nossa teoria rumos à sistemas nos quais a pressão seja relevante.

É importante deixar claro que a correção proposta acima consiste em uma tentativa de avançar em direção a relatividade geral. O que foi apresentado aqui não caracteriza uma prova em si e sim um *ansatz*. O interessante disso tudo é que mesmo a proposta acima sendo um *ansatz*, conseguimos descrever o mesmo universo que a relatividade geral descreve, sob certas condições.

### 3.3 Correções Alternativas

Assim como na teoria neo-newtoniana discutida no tópico anterior, ainda existem outros conjuntos de equações que a partir de uma correção relativística no termo de pressão tentam estender o domínio da teoria newtoniana.

Podemos comparar as equações estudadas anteriormente, por exemplo, com as equações deduzidas a partir de um tratamento semi-pós newtoniano proposto por T. Harko [5] para o estudo da a dinâmica cosmológica do condensado de Bose Einstein. Nessa proposta o autor deduz as equações fluidodinâmicas a partir da análise da derivada covariante do tensor momento energia  $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$  para uma métrica qualquer e por fim assume  $\sqrt{-g} \rightarrow 1$  no limite newtoniano, encontrando novas equações com termos de pressão.

A referência [28] caminha um pouco além de T. Harko [5]. A partir da conservação do tensor momento energia para uma métrica genérica o autor toma o limite newtoniano utilizando

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad . \quad (3.21)$$

Entretanto despreza os termos de correção de pressão considerando  $p \ll c^2$ . Em ambas referências citadas acima os autores não desenvolvem os termos de conexão  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ . Com isso perdemos informações importantes nas equações finais como é no caso da equação de Euler onde o termo gravitacional  $\nabla\phi$  é acoplado à mão. Por outro lado o autor em [29] [30] desenvolve os termos de conexão e encontra o termo gravitacional  $\nabla\phi$  mas despreza os termos de correção de pressão estudados na dissertação.

Existem também propostas de correção nas próprias equações fluidodinâmicas discutidas no tópico (3.2) proposta nas equações (30)-(32) do artigo [18]. Por meio de argumentos termodinâmicos o autor [6] propõe uma modificação na equação de continuidade para que se faça sentido um estudo sobre perturbações cosmológicas.

A correção de pressão relativística é ainda motivo de estudos, de forma que recentemente Hwang e Noh [3] propuseram equações fluidodinâmicas também de forma alternativa ao modelo neo-newtoniano. Discutiremos essas detalhadamente nos capítulos seguintes assim como suas aplicações.

## Capítulo 4

# HIDRODINÂMICA NEWTONIANA COM CORREÇÕES DE PRESSÃO

### Introdução

Recentemente os autores Hwang e Noh [3] propuseram uma correção de pressão nas equações da fluidodinâmica newtoniana. Baseados na formulação geral não linear da perturbação cosmológica oriunda da gravitação de Einstein, os autores encontram termos de correção de pressão. Estas diferem de todos os modelos propostos até o momento. Na equação de continuidade um novo termo surge ao lado direito da equação proporcional ao gradiente da pressão, enquanto que na equação de Euler também surge um termo de correção ao lado direito da equação, mas este proporcional à derivada temporal da pressão presente no sistema.

Obteremos as equações para fluidos a partir das projeções da derivada covariante do tensor momento-energia para uma métrica perturbada em torno de um universo plano em expansão. Veremos em seguida que a partir da relatividade restrita também é possível encontra-las. E que essas equações oriundas das projeções da conservação do tensor momento energia regem elementos de fluido que possuem entropia constante ao longo de sua trajetória assim como na fluido dinâmica newtoniana. Observaremos também que no limite newtoniano a equação de Poisson admite uma correção de pressão, atuando como fonte de campo gravitacional.

### 4.1 Métrica Perturbada

Muitas das equações básicas da fluidodinâmica foram obtidas por meio meio de tentativas, sem basear-se em gravitação relativística [3]. Os termos de correção de pressões foram utilizados de uma maneira não muito rigorosa artigos [31] [32] [25] [26]. A seguir faremos um ensaio de como Hwang-Noh encontraram suas equações para fluidos.

Para isso é necessário antes discutir a perturbação cosmológica da métrica em torno de um universo plano em expansão. Consideremos portanto a métrica perturbada



$$ds^2 = [g_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta g_{\alpha\beta}] dx^\alpha dx^\beta \quad \text{com} \quad |\delta g_{\alpha\beta}| \ll |g_{\alpha\beta}^{(0)}|, \quad (4.1)$$

onde

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.2)$$

As perturbações da métrica  $\delta g_{\alpha\beta}$  podem ser caracterizadas em três tipos distintos: escalar, vetorial e tensorial. Essa classificação é baseada em propriedades de simetria da métrica de fundo homogênea e isotrópica que é invariante sobre um grupo de rotações e translações espaciais em algum instante do tempo [33].

O termo  $\delta g_{00}$  comporta-se como escalar sobre rotações

$$\delta g_{00} = 2\Phi \quad \text{onde } \Phi \text{ é um 3-escalar}. \quad (4.3)$$

O termo  $\delta g_{0i}$  pode ser decomposto na soma de um gradiente de uma função escalar  $B$  mais um vetor  $S_i$ , desde que  $S^i$  satisfaça  $\partial_i S^i = 0$

$$\delta g_{0i} = a(t)(\partial_i B + S_i). \quad (4.4)$$

O termo  $\delta g_{ij}$  de forma semelhante pode ser decomposto em parte escalar, vetorial e tensorial

$$\delta g_{ij} = a^2(t) [2\Psi + 2\partial_i \partial_j E + \partial_j F_i + \partial_i F_j + h_{ij}]. \quad (4.5)$$

Onde  $\Psi$  e  $E$  são funções escalares,  $F_i$  um vetor que deve satisfazer  $\partial_i F^i = 0$  e  $h_{ij}$  componentes de um 3-tensor que satisfaz as restrições  $h^i_i = 0$  *traceless* e  $h^i_{j,i} = 0$  *transverse*. Trabalharemos com o calibre espacial definido por  $E := 0$  e  $F_i := 0$  [3] [34]. Estamos interessados apenas na parte escalar-vetorial da métrica perturbada, já que a parte tensorial está associada ao estudo de ondas gravitacionais, que não é o nosso caso. Reescrevemos então a métrica

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + 2\chi_i c dt dx^i + a(t)^2 (1 - 2\Psi) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.6)$$

com  $\chi_i := \partial_i B + S_i$ .

Adotaremos também, sem perda de generalidade, o calibre shear zero  $\chi_i = 0$  [3] [34]. Onde  $a(t)$  é o fator de escala cósmico e  $\Phi(t, \mathbf{r})$ ,  $\Psi(t, \mathbf{r})$  são chamadas potenciais de Bardeen.

Notemos que essas imposições ao elemento de linha nos levaram a um mesmo destino que a utilização do calibre newtoniano, portanto ao estudo de perturbação apenas escalares.

Iremos trabalhar com o um fluido perfeito que possui a forma

$$T^{\alpha\beta} = (\varrho + p/c^2)u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta} \quad . \quad (4.7)$$

Sobre a questão de notação definimos que os índices gregos variam entre  $\{0,1,2,3\}$  e que os índices latinos variam entre  $\{1,2,3\}$ . Com  $\varrho \rightarrow (\rho + \Pi/c^2)$ . As grandezas  $\rho + \Pi/c^2$  e  $p$  são invariantes do espaço-tempo, isto é, possuem o mesmo valor independentemente do referencial adotado e representam respectivamente a densidade de matéria do fluido associada a massa de repouso, a densidade de massa associada à energia interna (termodinâmica) e a pressão do sistema [35] [36].

Por outro lado considerando que as perturbações sejam pequenas em torno de Minkowski, podemos linearizar as equações de Einstein

$$\delta G_\nu^\mu = \frac{8\pi G}{c^2} \delta T_\nu^\mu \quad . \quad (4.8)$$

Utilizando a definição de tensor momento energia (4.7) e a métrica (4.6) no calibre shear zero  $\chi_i = 0$  encontraremos a na parte "ij" da equação acima a relação [37] [38]

$$\left[ (2\dot{H} + 3H^2)\Phi + H\dot{\Phi} + \ddot{\Psi} + 3H\dot{\Psi} + \frac{1}{2a(t)^2} \nabla^2(\Phi - \Psi) \right] \delta_{ij} - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) = \delta p (4\pi G) \delta_{ij} \quad (4.9)$$

com "." significando a derivada em relação ao tempo  $t$ . Considere  $i \neq j$  na equação acima e concluiremos que fluido perfeito implica em  $\Psi = \Phi$  [33].

#### 4.1.1 O Limite Newtoniano

Mostraremos nesse tópico que a pressão do sistema estudado está diretamente relacionado com a existência do campo gravitacional e que isso é independente da relação  $\Phi = \Psi$ . Para tanto considere a métrica (4.6). Calculando as componentes os tensores pertencentes a equação de Einstein

$$G_\beta^\alpha = \kappa T_\beta^\alpha \quad . \quad (4.10)$$

Com a condição  $\Phi \ll 1$  e  $\Psi \ll 1$  com  $a(t) \rightarrow 0$  e admitindo que os campos sejam estacionários, isto é,  $\dot{\Psi} \rightarrow 0$  assim como  $\dot{\Phi} \rightarrow 0$ . Encontraremos os tensores de Ricci

$$R_{00} = \nabla^2 \Phi \quad , \quad R_{0i} = 0 \quad , \quad R_{ij} = -\partial_i \partial_j (\Phi + \Psi) - \delta_{ij} \nabla^2 \Psi \quad , \quad (4.11)$$

assim como o escalar de Ricci

$$R = R_{\mu}^{\mu} = -2\nabla^2(\Phi + 2\Psi) \quad . \quad (4.12)$$

Uma vez calculado o escalar de Ricci e o tensor de Ricci, podemos escrever as componentes do tensor de Einstein

$$G_{00} = -2\nabla^2\Psi \quad , \quad G_{0i} = 0 \quad , \quad G_{ij} = -\partial_i\partial_j(\Phi + \Psi) + \delta_{ij}\nabla^2(\Phi + \Psi) \quad . \quad (4.13)$$

E por consequência as equações de Einstein

$$-\nabla^2\Psi = \frac{4\pi G}{c^4} \left[ \rho c^2 + \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}(\rho c^2 + p) \right] \quad . \quad (4.14)$$

Componente espaço-espaço da equação de Einstein

$$\nabla^2(\Phi + \Psi) = \frac{4\pi G}{c^4} \left[ 3p + \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}(\rho c^2 + p) \right] \quad . \quad (4.15)$$

Somando as equações (4.14) e (4.15) encontraremos desprezando termos de ordem  $O(c^{-4})$

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G}{c^2} \left( \rho + 3p/c^2 \right) \quad . \quad (4.16)$$

Ainda nessa linha de raciocínio podemos identificar  $\Phi = \phi/c^2$  e encontrar a equação de Poisson para sistemas os quais a pressão seja da ordem de  $c^2$

$$\boxed{\nabla^2\phi = \frac{4\pi G}{c^2} \left( \rho + 3p/c^2 \right)} \quad . \quad (4.17)$$

Essa identificação é bem conhecida do limite newtoniano e pode ser encontrada na referência [10] para casos onde  $p \ll c^2$ . No limite Newtoniano proposto por Hwang-Noh a densidade de massa associada a energia interna do sistema  $\Pi/c^2$  não é desprezado em contra partida ao limite newtoniano usual [28].

## 4.2 Conservação do Tensor Momento-Energia

Existem sistemas compostos por elementos de fluidos cuja pressão é comparável com a densidade de energia. Para esses sistemas a descrição matemática utilizando as equações

newtonianas deixam de ser uma boa aproximação. Neste contexto deduziremos as equações hidrodinâmicas propostas por Hwang-Noh que consistem em equações para fluidos com termos de correção de pressão oriundas da relatividade geral. Começemos portanto, com a conservação local do tensor momento-energia

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (4.18)$$

O fluido em estudo é perfeito que possui a forma

$$T^{\mu\nu} = (\varrho + p/c^2)u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu} \quad . \quad (4.19)$$

Onde definimos  $\varrho$  como a densidade de massa

$$\varrho = \rho + \Pi/c^2 \quad (4.20)$$

com  $\rho$  a densidade de massa associada a energia de repouso e  $\Pi/c^2$  a densidade de massa associada energia interna do sistema.

Uma vez substituindo a expressão (4.19) na relação (4.18) encontraremos [39] [40]

$$(\varrho + p/c^2)u^{\nu}\nabla_{\mu}u^{\mu} + (\varrho + p/c^2)u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\nu} + u^{\mu}u^{\nu}\nabla_{\mu}(\varrho + p/c^2) + g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}p = 0 \quad . \quad (4.21)$$

Podemos decompor a relação acima numa parte ortogonal à quadrivelocidade  $u^{\nu}$  e em outra parte paralela [41]. Essas relações como veremos generalizam as equações de Euler e de continuidade como veremos mais adiante

$$\left[ u^{\mu}\partial_{\mu}\varrho + (\varrho + p/c^2)\nabla_{\mu}u^{\mu} \right] u^{\nu} + \left[ (\varrho + p/c^2)u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\nu} + (g^{\mu\nu} + u^{\mu}u^{\nu}/c^2)\nabla_{\mu}p \right] = 0 \quad , \quad (4.22)$$

Lembrando que  $\nabla_{\mu}g^{\mu\nu} = 0$ . Projetando a equação (4.22) na direção ortogonal à quadrivelocidade  $u^{\mu}$  com o auxílio do operador projeção  $h_{\nu}^{\alpha} = g_{\nu}^{\alpha} + u^{\alpha}u_{\nu}$  podemos encontrar a relação

$$\boxed{(\varrho + p/c^2)u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\alpha} = -(g^{\mu\alpha} + \frac{u^{\mu}u^{\alpha}}{c^2})\nabla_{\mu}p} \quad (4.23)$$

uma vez que  $h_{\nu}^{\alpha}u^{\nu} = 0$ . A equação acima é conhecida com equação de Euler relativística [27]. Notemos que o primeiro termo nada mais é do que a quadri-aceleração  $a^{\alpha} = u^{\mu}\nabla_{\mu}u^{\alpha}$ . A equação (acima) pode ser escrita de uma maneira semelhante a segunda lei de Newton [28]

$$a^\alpha = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)}(g^{\mu\alpha} + u^\mu u^\alpha)\nabla_\mu p \quad (4.24)$$

onde a aceleração é proporcional ao gradiente da pressão e a força gravitacional está escondida na derivada covariante da velocidade  $\nabla_\mu u^\alpha$ . De forma não surpreendente, no caso de pressão uniforme ou nula teremos a equação da geodésica ( $a^\alpha = 0$ ). Podemos portanto dizer que o gradiente da pressão é o responsável pelos "desvios" das geodésicas das partículas imersa no sistema [40].

Por outro lado se contrairmos a relação (4.22) com o vetor  $u^\nu$  estaremos em outras palavras projetando-a numa direção paralela à quadrivelocidade  $u^\nu$ . Encontraremos portanto

$$\boxed{u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p/c^2)\nabla_\mu u^\mu = 0} \quad . \quad (4.25)$$

E a equação acima é conhecida como equação de continuidade relativística [27]. Para desenvolver as relações acima utilizamos o fato de que  $u^\mu u_\mu = -1$  que implica em  $2u_\mu \nabla_\nu u^\mu = 0$ . As equações (4.23) e (4.25) são as bases para nossos cálculos seguintes [42]. Essas equações relativísticas e Euler e Continuidade também podem ser obtidas via formalismo lagrangiano na referência [43].

#### 4.2.1 O Limite Newtoniano das Equações Hidrodinâmicas

Com as equações tensoriais em mãos necessitamos de uma métrica para prosseguir com nossos cálculos. Nosso objetivo é encontrar as equações de Euler e de continuidade. Devemos antes deixar claro que o limite newtoniano das equações hidrodinâmicas relativísticas não é rigorosamente um limite matemático. Isso se da ao fato de existirem conceitos na relatividade geral que não existem na formulação newtoniana, que possam se equivaler através de um limite matemático como a massa de repouso, por exemplo [28]. Uma vez que várias aproximações são necessárias para que possamos encontrar as equivalência entre as grandezas das duas teorias.

Para o limite newtoniano utilizamos a métrica

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}dx^i dx^j \quad . \quad (4.26)$$

Do elemento de linha acima encontramos seus respectivos símbolos de Christoffel [30]

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{\partial_0 \phi / c^2}{(1 + 2\phi / c^2)} & \Gamma_{0j}^0 &= \frac{\partial_j \phi / c^2}{(1 + 2\phi / c^2)} \\
\Gamma_{ij}^0 &= -\frac{\partial_0 \phi / c^2}{(1 + 2\phi / c^2)} \delta_{ij} & \Gamma_{00}^k &= \frac{\partial^k \phi / c^2}{(1 - 2\phi / c^2)} \\
\Gamma_{0j}^k &= -\frac{(\partial_0 \phi / c^2)}{(1 - 2\phi / c^2)} \delta_j^k & & \\
\Gamma_{ij}^k &= -\frac{1}{(1 - 2\phi / c^2)} [\delta_i^k (\partial_j \phi / c^2) + \delta_j^k (\partial_i \phi) - \delta_{ij} (\partial^k \phi / c^2)] \quad .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Do elemento de linha acima podemos também encontrar a componente temporal da quadri-velocidade que será utilizado mais a frente

$$-\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)u^0 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{ij}u^i u^j = -c^2 \quad . \tag{4.28}$$

Caso  $\phi \ll c^2$  fazemos uma pequena expansão do tipo  $(1 - x)^2 \approx 1 - 2x$  com  $x \ll 1$ , encontraremos como primeira ordem

$$u^0 = c \left(1 - \frac{\phi}{c^2} + \frac{u^2}{2c^2}\right) \quad \text{com} \quad u^j = \frac{dx^j}{d\tau} \quad . \tag{4.29}$$

Onde  $u^2 = \delta_{ij}u^i u^j$  corresponde a tri-velocidade da partícula em movimento [44] [27] [28]. Com a métrica em mãos substituiremos (4.26) nas equações de Euler (4.23) e Continuidade (4.25) relativísticas.

Começemos com a **Equação de Euler:**

**Caso  $\nu = 0$**

$$u^\mu (\partial_\mu u^0 + u^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^0) = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left( \frac{u^\mu u^0}{c^2} + g^{\mu 0} \right) \nabla_\mu p \quad . \tag{4.30}$$

Não nos preocupamos com termos de ordem  $O(c^{-4})$ . Para o caso  $\phi \ll c^2$  reescrevemos a equação acima

$$\begin{aligned}
&u^0 \partial_0 u^0 + (u^j \partial_j) u^0 + \frac{u^0 u^0}{c^2} \partial_0 \phi + 2 \frac{u^0 u^j}{c^2} \partial_j \phi - \frac{u^j u_j}{c^2} \partial_0 \phi = \\
&-\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left\{ -(1 - 2\phi/c^2) \partial_0 p + \frac{u^0 u^0}{c^2} \partial_0 p + \frac{u^0}{c^2} (u^j \partial_j) p \right\} \quad .
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Impondo a condição de estaticidade característico do Limite Newtoniano e recorrendo à quadri-velocidade  $u^0$  encontrada em (4.29) reescrevemos a equação acima

$$u^0 \partial_0 u^0 + (u^j \partial_j) u^0 + 2u^0 u^i \partial_i (\phi/c^2) = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left\{ \frac{u^0}{c^2} (u^j \partial_j) p \right\} .$$

Em sua forma vetorial

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2c^2} \right) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi + \frac{1}{2c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}^2 = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p . \quad (4.32)$$

Podemos desprezar o termo  $1/c^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi$  e o termo proporcional à  $u^3$  [27]<sup>1</sup> [30]<sup>2</sup>. Desprezaremos também os termos de ordem  $O(c^{-3})$  e consideraremos o campo gravitacional como estático, i.e,  $\partial_0 \phi = 0$  reescrevendo a equação acima como

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2c^2} \right) = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p} . \quad (4.33)$$

Ainda na equação de Euler:

**Caso**  $\nu = i$

$$u^0 \partial_0 u^i + u^j \partial_j u^i + u^\mu u^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^i = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left( \frac{u^i u^0}{c^2} \partial_0 p + \frac{u^i u^j}{c^2} \partial_j p + \partial^i p \right) . \quad (4.34)$$

Para o caso em que  $\phi \ll c^2$ . Encontraremos

$$u^0 \partial_0 u^i + u^j \partial_j u^i + \frac{u^0 u^0}{c^2} \partial^i \phi - 2 \frac{u^0 u^i}{c^2} \partial_0 \phi - 2 \frac{u^i u^j}{c^2} \partial_j \phi + \frac{u^j u_j}{c^2} \partial^i \phi = \quad (4.35)$$

$$-\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left\{ \frac{u^i u^0}{c^2} \partial_0 p + (1 + 2\phi/c^2) \partial^i p + \frac{u^i u^j}{c^2} \partial_j p \right\} .$$

Para se encontrar a equação de Euler segundo Hwang-Noh devemos nos restringir à campos estáticos, isto é,  $\partial_0 \phi = 0$ , portanto impondo essa restrição à equação acima e utilizando a componente temporal da quadri-velocidade  $u^0$  (4.29)

$$u^0 \partial_0 \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \left( \frac{(u^0)^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \right) \nabla \phi - \frac{2}{c^2} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left\{ \frac{\mathbf{u}}{c^2} u^0 \partial_0 p + \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \nabla p + \frac{\mathbf{u}}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p \right\} . \quad (4.36)$$

<sup>1</sup>Nesta referência o termo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}/c^2$  é desprezado. Veja o conjunto de equações (3.94)-(3.95).

<sup>2</sup>Nesta referência o termo  $1/c^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi$  é desprezado veja o exercício 5 do cap. 7.

Desprezaremos os termos  $1/c^2(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi$  como na referência [30]. Multiplicando a equação acima por  $(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{u^2}{2c^2})$  e ainda desprezando termos do tipo  $\phi^2$ ,  $u^3$  e  $u^2\phi$  incluindo produtos similares como  $u^i\partial_i\phi$  encontraremos a equação de Euler proposta por Hwang-Noh

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla\phi = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left[ \frac{\mathbf{u}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla p \right]} . \quad (4.37)$$

As imposições que fizemos são bem conhecidas do limite newtoniano. Neste contexto Hwang-Noh sugerem que  $\phi$  deva satisfazer a equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad , \quad (4.38)$$

em contra partida ao limite newtoniano descrito no tópico (4.2) que sugere para sistemas cuja pressão é comparável a densidade de energia a relação (4.17).

Por outro lado considere agora a (**Equação de Continuidade**), obtida ao projetar a equação (4.22) paralelamente ao vetor velocidade

$$u^\mu \nabla_\mu \rho + (\rho + p) \nabla_\mu u^\mu = 0 \quad , \quad (4.39)$$

encontraremos

$$u^0 \partial_0 \rho + u^i \partial_i \rho + (\rho + p/c^2) \left( \partial_0 u^0 + \partial_i u^i + \Gamma_{\mu 0}^\mu u^0 + \Gamma_{\mu i}^\mu u^i \right) = 0 \quad . \quad (4.40)$$

Impondo a condição  $\varphi \ll c^2$  e desprezando termos de ordem  $O(c^{-4})$

$$u^0 \partial_0 \rho + u^i \partial_i \rho + (\rho + p/c^2) [\partial_0 u^0 + \partial_i u^i - 2u^0 \partial_0(\phi/c^2) - 2u^i \partial_i(\phi/c^2)] = 0 \quad . \quad (4.41)$$

Novamente, estamos interessados em campos estáticos

$$u^0 \partial_0 \rho + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho + (\rho + p/c^2) \left[ \partial_0 u^0 + \nabla \cdot \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\phi/c^2) \right] = 0 \quad . \quad (4.42)$$

Desprezando os termos o termo  $1/c^2(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi$  como nas equações anteriores encontraremos

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla[(\rho + p/c^2)\mathbf{u}] = \frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \cdot \nabla)p - (\rho + p/c^2) \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2c^2} \right)} . \quad (4.43)$$



Substituindo (4.33) em (4.43) encontraremos a equação de continuidade proposta por Hwang-Noh [3].

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \left[ (\varrho + p/c^2) \mathbf{u} \right] = \frac{2}{c^2} \mathbf{u} \cdot \nabla p} \quad . \quad (4.44)$$

O método para se encontrar as equações de Continuidade e Euler utilizadas por Hwang-Noh se diferencia do nosso. Enquanto eles utilizaram o formalismo ADM nós preferimos desenvolver as equações da maneira mais natural possível. Algo semelhante as contas acima, relativo à formalismo ADM pode ser encontrado em [45]. As equações (4.33), (4.37) e (5.2) também podem ser encontradas na referência [27].

Devemos ressaltar que o limite Newtoniano é feito de maneiras diferentes por diferentes autores levando por consequência a equações diferentes. Note que nas equações hidrodinâmicas newtonianas encontramos a densidade de matéria  $\rho$  enquanto que nas equações de Hwang-Noh encontramos os termos  $\varrho$ . Isso se deve ao fato de não desprezarmos a densidade de massa associada a energia interna  $\Pi/c^2$  do sistema indo contra ao limite newtoniano usual. A medida em que  $\Pi/c^2 \rightarrow 0$ , temos  $\varrho \rightarrow \rho$ , para ver isso basta verificar a definição (4.20) [28].

Por exemplo, na referência [28], o autor no limite newtoniano despreza os termos de correção de pressão ( $p/c^2$ ) encontrando:

Equação de Euler

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \phi = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad . \quad (4.45)$$

Na equação acima, o autor não desenvolve os símbolos de Christoffel associado a métrica (4.26) colocando à mão a interação gravitacional entre as partículas.

Equação de Continuidade

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad . \quad (4.46)$$

Algo semelhante também pode ser encontrado em [5]

### 4.3 Conservação da entropia

Toda fluidodinâmica está contida na conservação da densidade de corrente  $\nabla_\alpha J^\alpha = 0$  e na conservação do tensor momento energia  $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$  [36]. Mostraremos aqui que um sistema composto por um fluido perfeito possui entropia constante em cada elemento de volume assim como na fluidodinâmica newtoniana. Analisemos as consequências da primeira relação.

Substituindo  $J^\alpha = \rho u^\alpha$  na equação de conservação da densidade de corrente encontramos

$$\nabla_\alpha u^\alpha = -\frac{1}{\rho} u^\alpha \nabla_\alpha \rho \quad . \quad (4.47)$$

Projetando a conservação do tensor momento energia numa direção paralela à velocidade encontraremos a relação (4.25)

$$u^\mu \nabla_\mu \left( \rho + \frac{\Pi}{c^2} \right) + \left[ \left( \rho + \frac{\Pi}{c^2} \right) + p \right] \nabla_\mu u^\mu = 0 \quad . \quad (4.48)$$

definindo  $\epsilon := (\rho c^2 + \Pi)$

E multiplicando a equação (4.48) por  $c^2$  e utilizando a definição acima encontraremos

$$u^\mu \nabla_\mu \epsilon - \frac{(\epsilon + p)}{\rho} (u^\mu \nabla_\mu \rho) = 0 \quad . \quad (4.49)$$

Comparando com a primeira lei da termodinâmica

$$d\epsilon - \frac{(\epsilon + p)}{\rho} d\rho = \rho T ds \quad , \quad (4.50)$$

reescrevemos (4.49) como

$$u^\mu \nabla_\mu s = \frac{Ds}{d\tau} = 0 \quad , \quad (4.51)$$

de onde podemos tirar a conclusão de que a entropia se conserva em cada elemento de fluido ao longo de sua trajetória. Além do mais os fluidos perfeitos são ditos isentrópicos se

$$\boxed{\nabla_\mu s = 0} \quad . \quad (4.52)$$

Como as equações de Hwang-Noh possuem origem na conservação do tensor momento energia então podemos dizer que a entropia se conserva em cada elemento de volume do fluido ao longo de sua trajetória.

#### 4.4 Confirmação com a Relatividade Restrita

Embora deduzida da teoria cosmológica totalmente perturbada, via formalismo ADM, as equações da hidrodinâmica propostas por Hwang-Noh podem ser encontradas partir da Relatividade Restrita sob certas aproximações. Como os autores Hwang-Noh em seu artigo, no qual baseamos nossa dissertação, não se preocuparam em mostrar tal confirmação, apenas

citando-o, aqui o faremos. Para isso devemos estudar as leis de conservação em relatividade restrita assim como em relatividade geral descrito nos tópicos anteriores.

Podemos definir um fluido perfeito como um fluido os quais as partículas de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{r},t)$  em cada ponto de sua trajetória observem a distribuição de matéria isotrópico cujo o caminho médio será livre de colisões [10]. Suponha inicialmente que estejamos num referencial da partícula, isto é, tri-velocidade nula  $u^i = 0$ , então o tensor momento energia (4.19) possuirá a forma

$$T^{00} = \rho \quad T^{0i} = 0 \quad T^{ij} = p\delta_{ij} \quad . \quad (4.53)$$

Se mudamos entretanto do referencial da partícula para o referencial do laboratório devemos fazer uma transformação de Lorentz de forma que

$$u^i = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \gamma\mathbf{v} \quad (4.54)$$

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = \gamma c \quad . \quad (4.55)$$

Com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad (4.56)$$

Afim de encontrar as equações oriundas da lei de conservação em relatividade restrita, analisamos a relação

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad (4.57)$$

Projetando a equação de conservação numa direção ortogonal à quadri-velocidade encontraremos [42]

$$(\rho + p)u^\mu \partial_\mu u^\nu = -\left(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu / c^2\right) \partial_\mu p \quad . \quad (4.58)$$

Analisando a parte espacial da equação acima  $\nu = i$

$$\gamma^2 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + (\gamma \mathbf{v}) \left( \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \gamma \right) = -\frac{1}{\rho + p/c^2} \left[ \nabla p + \gamma^2 \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma^2 \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) p \right] \quad , (4.59)$$

ou ainda,

$$\gamma^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \frac{d\gamma^2}{dt} = -\frac{1}{\rho + p/c^2} \left[ \frac{\mathbf{v}}{c^2} \gamma^2 \frac{\partial p}{\partial t} + \left( \gamma^2 \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} + \gamma^2 \left( 1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right) \right) \nabla p \right] . \quad (4.60)$$

Entretanto

$$\frac{d\gamma^2}{dt} = 2\gamma^4 \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (4.61)$$

reescrevemos a equação de (4.60) com o auxílio de (4.61) [10] [46] [47]

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\gamma^2 (\rho + p/c^2)} \left[ \nabla p + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right]} . \quad (4.62)$$

E a interação gravitacional entre as partículas deve ser colocada à mão. Por outro lado projetando a derivada covariante na direção paralela à velocidade encontraremos

$$u^\mu \partial_\mu \rho + (\rho + p) \partial_\mu u^\mu = 0 , \quad (4.63)$$

com o auxílio das transformações de Lorentz encontramos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left[ (\rho + p/c^2) \mathbf{v} \right] = (\rho + p/c^2) \frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) p . \quad (4.64)$$

Onde

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^2 \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (4.65)$$

Mas a derivada temporal da velocidade já foi encontrada na equação de Euler. Portanto substituindo (4.64) em (4.65) utilizando também (4.62) encontraremos, desprezando termos de ordem  $O(c^{-4})$ , a relação

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left[ (\rho + p/c^2) \mathbf{v} \right] = \frac{2}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla p} . \quad (4.66)$$

Como novidade temos um termo proporcional à velocidade com produto interno do gradiente da pressão que aparece ao lado direito da equação de continuidade e um termo proporcional à derivada temporal da pressão que aparece no lado direito da equação de Euler. Notemos que a medida em que  $c^2 \rightarrow 0$  as equações hidrodinâmicas de Hwang-

Noh tornam-se newtonianas. Como era de se esperar uma vez que não fizemos o limite newtoniano por completo tomando considerando  $p \ll c^2$ .

Diferentemente da proposta neo-newtoniana discutida no tópico 3.2, não é possível uma clara distinção no conceito de massa inercial ativa e passiva no sentido de uma transformação  $\rho \rightarrow \rho + p/c^2$  quando fazemos passagem newtoniana para Hwang-NoH.

Com novas equações em mãos estudaremos alguns sistemas os quais a pressão possui um papel importante afim de compara-las com outras equações fluidodinâmicas e concluir quem mais se aproxima da relatividade geral.

## Capítulo 5

# COSMOLOGIA

### Introdução

Neste capítulo, percorreremos os mesmos passos trilhados nos capítulos anteriores para se encontrar as equações de Friedman a partir de equações de fluido. Mas agora com as equações fluidodinâmicas de Hwang-Noh. Faremos isso afim de analisar a evolução do universo segundo tais equações e compara-las à relatividade geral, para ver se a correção de pressão nas equações newtonianas consistem em um bom modelo ou ruim.

A partir dessas equações para fluidos utilizando a equação de estado  $p = w\rho c^2$  encontraremos duas equações análogas à de Friedman, uma para o caso  $w = -1/9$  e a outra para quando  $w \neq -1/9$ . Com objetivo de estudar a aceleração do universo analisaremos o comportamento da derivada segunda do fator de escala  $\ddot{a}(t)$  variando os parâmetros  $w$  e curvatura do universo  $K$ . Veremos que na maioria dos casos o universo se expandirá com aceleração negativa. Poderá entretanto admitir uma fase acelerada quando  $K$  e  $w$  assumirem valores positivos, diferentemente da relatividade geral. Exploraremos também dois casos particulares em que o universo de Hwang-Noh descreve o mesmo universo da relatividade geral. Um para equação de estado  $p = w(t)\rho c^2$  e a outra  $p = K\rho^\gamma$ . Esta última nos levará a uma equação de Friedmans semelhante a equação encontrada utilizando o gás de Chaplygin generalizado.

Por fim perturbaremos as equações para fluido de Hwang-Noh afim de compara-las aos modelos existentes e os resultados observacionais.

### 5.1 A Dinâmica do Universo Segundo as Equações de Hwang-Noh

Para se estudar a dinâmica do universo segundo as equações de Hwang-Noh considere novamente um universo esfericamente simétrico contido em  $\mathbb{R}^3$ , de raio  $a(t)$  centrado em um observador  $O$  na origem do sistema de coordenadas. Composto por um fluido perfeito uniformemente distribuído em toda época  $t$ , a pressão  $p = p(t)$  e densidade  $\rho = \rho(t)$  dependentes apenas do tempo. As partículas deste fluido são essencialmente galáxias que se afastam uma das outras num movimento restritamente radial, exatamente como nos modelos anteriores.

Como estamos interessados em estudar o universo segundo as equações para fluidos propostas por Hwang-Noh então, nossa densidade de matéria será governada pela equação de continuidade

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( \varrho + \frac{p}{c^2} \right) \mathbf{v} \right] = \frac{2}{c^2} \mathbf{v} \cdot \nabla p \quad . \quad (5.1)$$

O nosso universo se expande, segundo a Lei de Hubble a uma velocidade  $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$ , então podemos encontrar como a densidade de matéria se comporta na medida em que o universo evolui com o tempo. Como a pressão e a densidade dependem apenas do tempo, então ao lado direito temos  $\nabla p(t) = 0$  e ao lado esquerdo o divergente atua apenas na velocidade. Substituindo essa relação de velocidade na equação de continuidade, encontraremos a equação diferencial

$$\dot{\varrho} + 3H(t) \left( \varrho + p/c^2 \right) = 0 \quad . \quad (5.2)$$

Idêntica a prevista pela relatividade geral. Queremos encontrar uma solução para a equação diferencial acima, mas isso requer uma equação de estado barotrópica. Estudaremos os casos em que  $p = (\varrho c^2)w$ , onde  $w$  é uma constante associada a um determinado fluido. Com isso teremos a solução

$$\varrho(t) = \varrho_0 a(t)^{-3(1+w)} \quad . \quad (5.3)$$

A equação acima pode ser encontrada em [48]. Portanto, conseguimos descrever como a densidade de matéria bariônica se distribui no universo conforme o tempo evolui. Uma vez feito isso, queremos agora investigar a dinâmica do universo, i.e, como o universo evolui segundo a dominância de um determinado fluido. Para isso recorreremos a equação de Euler acoplada

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi = - \frac{1}{(\varrho + p/c^2)} \left[ \nabla p + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad . \quad (5.4)$$

Novamente devemos substituir a relação de velocidade  $\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}$ , assim como a densidade de matéria  $\varrho = \varrho(t)$  e a pressão  $p = p(t)$  na equação acima. Em seguida tomaremos o divergente desta equação que por sua vez possuirá uma dependência em  $\nabla^2 \phi$ . Então recorreremos a equação de Poisson, encontraremos

$$\dot{H}(t) + (1 - 3w)H^2(t) = \frac{4}{3}\pi G\varrho(t) \quad . \quad (5.5)$$

Podemos reescrever a equação acima como

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = (3w)H^2 - \frac{4}{3}\pi G\rho} \quad . \quad (5.6)$$

Conhecendo o comportamento de  $H^2$  podemos estudar as fases de expansão do universo. A equação acima é uma das chamadas equações de Friedman. Afim de encontrar soluções para a equação (5.5) fazemos uma mudança de variável  $t \rightarrow a(t)$ . Portanto, reescrevemos a equação diferencial (5.6) como

$$\frac{a}{2} \frac{dH^2}{da} + H^2(1 - 3w) = -\frac{4}{3}\pi G\rho \quad . \quad (5.7)$$

Desta forma encontraremos diretamente  $H$  em função de  $a(t)$ , isto é, equações de movimento análogas à Friedman, mas no contexto das equações fluidodinâmicas de Hwang-Noh. Imaginando soluções do tipo (5.3) e multiplicando por  $2a^{(1-6w)}$  reescrevemos (5.7) como

$$\frac{d}{da} [H^2 a^{(2-6w)}] = -\frac{8}{3}\pi G\rho_0 a^{(-2-9w)} \quad . \quad (5.8)$$

Nenhuma restrição foi feita a  $w$  até aqui. Apenas agora com a integração da equação diferencial que faremos isso. Notemos que integrando a equação acima para o caso em que  $w = -1/9$ , encontraremos como resultado um logaritmo natural e para o caso  $w \neq -1/9$  obteremos soluções do tipo polinomiais.

Portanto, para  $w = -1/9$

$$\boxed{H^2 = \left(-\frac{\ln a}{a^{8/3}}\right) \frac{8\pi G\rho_0}{3} + \frac{Kc^2}{a^{8/3}}} \quad . \quad (5.9)$$

Da equação de Friedmann (5.6) podemos observar que o universo se expandirá de forma desacelerada para o caso em que  $w = -1/9$ . Dizemos que esse se expande porque  $\dot{a}(t) > 0$ . Para observar isso basta analisar (5.9) que pode ser escrito em função do fator de escala  $a(t)$ .

A evolução deste universo é limitada no intervalo  $0 < a < a_F$ . Impondo a condição de que  $H^2 > 0$  encontraremos

$$\ln a_F := \ln a < \frac{3Kc^2}{8\pi G\rho_0} \quad (5.10)$$

Por outro lado, integrando  $w \neq -1/9$ , teremos



$$H^2 = \frac{1}{(1+9w)} \frac{8\pi G \rho}{3} + \frac{Kc^2}{a^{2(2-6w)}} \quad (5.11)$$

Substituindo  $H^2$  (5.11) em (5.6) encontraremos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4}{3} \pi G \rho \left( \frac{6w}{1+9w} - 1 \right) + 3w \frac{Kc^2}{a^{2(1-3w)}} \quad (5.12)$$

Para se estudar o comportamento da aceleração do universo construído com as equações de Hwang-Noh devemos considerar os casos em que  $w$  e  $K$  assumem os valores positivo, nulo e negativo na equação (5.12) e também analisar a equação (5.6).

Começemos com os casos em que  $w < 0$ . Esses universos estão em expansão com aceleração negativa. Para observar isso recorreremos à equação (5.6) que possuirá o valor negativo sempre. Quando  $w = 0$  o mesmo ocorre.

Para o caso em que  $w > 0$ , analisamos a equação (5.12). O valor entre parenteses, ao lado esquerdo da soma, possui valor negativo para os casos em que  $w > -1/3$  e (5.11) admite solução se  $w > -1/9$ . Sendo assim, o universo se expandirá de forma desacelerada para o conjunto de os casos em que  $w > 0$  e  $K < 0$ ,  $w > 0$  e  $K = 0$ , pois esses tornam negativo o termo ao lado direito da soma da equação analisada (5.12).

Por outro lado, caso  $w > 0$  e  $K > 0$ , encontramos um universo em expansão que pode possuir as fases acelerada, desacelerada ou de velocidade constante. Afim de encontrar a fase de expansão acelerada, impomos que a equação (5.12) deva assumir valores maior que zero. Sendo assim encontramos o valor

$$a(t) > \left[ \frac{1}{9(wK)} \left( \frac{1+3w}{1+9w} \right) \frac{4\pi G \rho_0}{c^2} \right]^{\frac{1}{1+9w}} \quad (5.13)$$

E concluímos que para a existência de uma fase de expansão acelerada o fator de escala inicial  $a(t)$  deve deve satisfazer a relação acima.

	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$w < 0$	Desacelerado	Desacelerado	Desacelerado
$w = 0$	Desacelerado	Desacelerado	Desacelerado
$w > 0$	Desacelerado	Desacelerado	Desacelerado, Acelerado ou Nulo

**Tabela 5.1.** Estudo do comportamento da derivada segunda temporal do fator de escala  $\ddot{a}(t)$ , para os universos em expansão com os parâmetros  $w$  e  $K$  assumindo valores positivos, negativos e nulos no modelo de Hwang-Noh.

Poderíamos portanto, explicar a expansão do universo sem a necessidade de energia escura.

Em Relatividade Geral temos universo se expandindo de forma acelerada para  $w < -1/3$ , com velocidade constante quando  $w = -1/3$  e desacelerada quando  $w > -1/3$ . Construiremos uma tabela com o as fases do universo para Relatividade Geral, semelhante a construída para o modelo de Hwang-Noh analisando a equação de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) . \quad (5.14)$$

Observemos que se associamos  $K$  à curvatura do espaço-tempo como em relatividade geral então este garantirá a presença fase de expansão acelerada do universo, diferentemente da relatividade geral.

	$K < 0$	$K = 0$	$K > 0$
$w < -1/3$	Acelerado	Acelerado	Acelerado
$w = -1/3$	Nulo	Nulo	Nulo
$w > -1/3$	Desacelerado	Desacelerado	Desacelerado

**Tabela 5.2.** Estudo do comportamento da derivada segunda temporal do fator de escala  $\ddot{a}(t)$ , para os universos em expansão com os parâmetros  $w$  e  $K$  assumindo valores positivos, negativos e nulos em Relatividade Geral.

Poderá se encontrar um estudo semelhante das fases de expansão do universo em relatividade geral na referência [49] [21].

### 5.1.0.1 Casos Especiais

Existem casos em que o modelo de Hwang-Noh gera resultados idênticos aos descritos pela relatividade geral. Para observar isso, tomemos o divergente da equação de Euler (5.4), com o auxílio da equação de continuidade (5.2) e de Poisson (4.38) podemos encontrar a relação

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\rho}{3} - \frac{1}{(\rho + p/c^2)} \frac{H\dot{p}}{c^2} \quad (5.15)$$

Em Relatividade Geral por outro lado, encontramos seu correspondente como

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\rho}{3} - \frac{4\pi Gp}{c^2} \quad (5.16)$$

Para que o modelo de Hwang-Noh reproduza as equações de Friedmann como em Relatividade Geral, as equações acima devem se equivaler, portanto

$$\boxed{H\dot{p} = (\rho + p/c^2)(4\pi Gp)} \quad (5.17)$$

Nos resta agora utilizar equações estado de nosso interesse em (5.17) afim de observar a quais resultados nos levará o modelo de Hwang-Noh/Relatividade Geral.

### Caso I

Como primeiro caso tentaremos a equação de estado  $p = w\rho c^2$  que substituindo em condição de pressão encontraremos

$$H\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho(1+w)}\right) = 4\pi G\rho \quad (5.18)$$

Utilizando a equação de continuidade (5.2) na equação acima encontraremos um resultado inconsistente

$$\boxed{H^2 = -\frac{4\pi G\rho}{3}} \quad (5.19)$$

Essa última relação em resumo nos diz que é impossível obter via Hwang-Noh, os mesmo resultados obtidos por relatividade geral. Como era de se esperar, já que encontramos essa diferença entre os dois modelos nos tópicos anteriores.

Se por outro lado, assumimos uma dependência de  $w$  em relação à  $t$  na mesma equação de estado  $p = w(t)\rho c^2$ , encontraremos

$$\boxed{H\frac{\dot{w}}{w(w+1)} - 3H^2 = 4\pi G\rho} \quad (5.20)$$

E assim conseguimos reproduzir os mesmos resultados que a relatividade geral.

### Caso II

Como segundo caso tentaremos a equação de estado  $p = K(\rho c^2)^\gamma$ , sendo  $K$  e  $\gamma$  constantes. Substituindo esta equação de estado na condição de pressão (5.17) e na equação de continuidade (5.2) encontraremos

$$H^2 = -\frac{1}{2\gamma} \frac{8\pi G\rho}{3} \quad (5.21)$$

E para que a equação acima faça sentido  $\gamma$  deve assumir valores negativos ( $\gamma < 0$ ), algo semelhante ao gás de Chaplygin [50] que procura descrever a transição de um universo em expansão com fase desacelerada para um universo em expansão com fase acelerada.

## 5.2 Perturbações Cosmológicas

Até agora tratamos o universo como se fosse homogêneo e assim foi no momento da recombinação [48]. Entretanto o universo tem uma estrutura bem desenvolvida não linear na forma de galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias, e, em escalas maiores, de espaços vazios por exemplo [33]. Para se entender como se formaram essas estruturas e sua evolução, em larga escala, devemos introduzir inhomogeneidades. Admitiremos que essas inhomogeneidades permanecem pequenas durante toda evolução e formação de estruturas.

A teoria de perturbação newtoniana é uma boa descrição no interior do raio de Hubble para matéria não relativística, isto é, bárions após desacoplamento e matéria escura. Queremos entretanto estender esse domínio de descrição newtoniano para situações em que o universo possuiu pressão não desprezível, isto é, regiões de domínio relativística.

Sendo assim consideramos perturbações lineares em um universo em expansão que consiste em uma teoria realista, nos permitindo descrever o crescimento de heterogeneidades em escalas sub-horizonte após recombinação. Faremos isso afim de analisar como a radiação ou a energia de vácuo influenciam no crescimento das heterogeneidades.

Nessa linha de raciocínio introduziremos perturbações nas equações para fluidos proposta por Hwang-Noh e comparemos com os modelos newtonianos e da relatividade geral. Dessa forma

$$\varrho = \varrho_0(t) + \delta\varrho(\mathbf{r}, t) \quad \phi = \phi_0(t) + \delta\phi(\mathbf{r}, t) \quad (5.22)$$

$$p = p_0(t) + c_s^2 \delta\varrho(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0(t) + \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (5.23)$$

De forma que as perturbações sejam muito menores que as suas grandezas respectivas, isto é,  $\delta\varrho(\mathbf{r}, t) \ll \varrho_0(t)$ , por exemplo. Por outro lado a pressão é uma quantidade que depende da entropia e da densidade de matéria

$$p(\mathbf{r}, t) = p(\epsilon + \delta\epsilon, S + \delta S) = p_0(t) + \delta p(\mathbf{r}, t) \quad (5.24)$$

então da relação acima

$$\delta p(\mathbf{r}, t) = \left( \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)_S \delta\varrho + \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\varrho \delta S \quad (5.25)$$

Definindo

$$c_s^2 := \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \quad e \quad \sigma := \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \quad (5.26)$$

Então  $\delta p = c_s^2 \delta \rho + \sigma \delta S$ , com  $c_s^2$  identificada como velocidade do som ao quadrado propagada pelo fluido.

Considere portanto a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) \mathbf{v} \right] = \frac{2}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) p \quad (5.27)$$

Introduzindo as perturbações reescrevendo-as de uma forma linear teremos

$$\frac{\partial(\delta \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left( \rho_0 + \frac{p_0}{c^2} \right) (\delta \mathbf{v}) + \delta \rho \left( 1 + \frac{c_s^2}{c^2} \right) \mathbf{v}_0 \right] = 2 \frac{c_s^2}{c^2} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \delta \rho \quad (5.28)$$

Definindo  $\delta := \delta \rho / \rho_0$  e a relação  $p = w \rho c^2$  escreveremos

$$\boxed{\dot{\delta} + 3H \left( \frac{c_s^2}{c^2} - w \right) \delta + (1 + w) \nabla(\delta \mathbf{v}) + \left( 1 - \frac{c_s^2}{c^2} \right) (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \delta = 0} \quad (5.29)$$

Se mudamos de referencial de  $\mathbf{r} = a(t)\mathbf{x}$  para  $\mathbf{x} = a(t)\mathbf{q}$ , afim de estudar um universo em expansão, necessariamente devemos utilizar a regra da cadeia [33]

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} - (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \quad e \quad \nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \quad (5.30)$$

Reescrevemos a expressão (5.29) como

$$\boxed{\dot{\delta} + 3H \left( \frac{c_s^2}{c^2} - w \right) \delta + (1 + w) \frac{1}{a} \nabla(\delta \mathbf{v}) - \frac{1}{a} H \frac{c_s^2}{c^2} (\mathbf{q} \cdot \nabla) \delta = 0} \quad (5.31)$$

Por outro lado um pequena perturbação na equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (5.32)$$

nos levará a forma

$$\boxed{\nabla^2(\delta\phi) = 4\pi G a^2 \rho_0 \delta} \quad (5.33)$$

Considere por último a equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi = -\frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left[ \nabla p + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right]. \quad (5.34)$$

Perturbando as equações encontraremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \nabla(\delta\phi) &= -\frac{1}{\rho_0 + p_0} \left[ \nabla(\delta p) + \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \frac{\delta\mathbf{v}_0}{c^2} \frac{\partial p_0}{\partial t} \right] \\ + \frac{(\delta\rho) + (\delta p)/c^2}{\rho_0 + p_0} \left[ \frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} \frac{\partial p_0}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Utilizando o fato de que  $(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 = H(\delta\mathbf{v})$  e levando em consideração a equação de estado  $p_0 = w c^2 \rho_0$  encontraremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} + H(\delta\mathbf{v}) + \nabla(\delta\phi) &= -\frac{1}{(1+w)} \left[ c_s^2(\nabla\delta) \right. \\ &\left. + \frac{\dot{p}_0}{\rho_0 c^2}(\delta\mathbf{v}) + \frac{c_s^2 \mathbf{v}_0}{c^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} + \delta \frac{(1+c_s^2/c^2)}{(1+w)^2} \frac{\dot{p}_0}{\rho_0} \frac{\mathbf{v}_0}{c^2} \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

Mudando de referencial como na equação de Poisson, encontraremos com o auxílio da equação (5.31)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\mathbf{v})}{\partial t} + H(\delta\mathbf{v}) + \frac{1}{a} \nabla(\delta\phi) &= -\frac{1}{(1+w)} \left[ \frac{c_s^2}{a}(\nabla\delta) + \frac{1}{\rho_0 c^2} \left( \frac{\partial p_0}{\partial t} - \frac{1}{a}(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)p_0 \right) \delta\mathbf{v} + \right. \\ &\left. \frac{c_s^2}{\rho_0 c^2} H\mathbf{q} \left( \frac{\partial(\delta\rho)}{\partial t} - \frac{1}{a} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla(\delta\rho) \right) + \delta \frac{(1+c_s^2/c^2)}{(1+w)^2} H\mathbf{q} \frac{1}{\rho_0 c^2} \left( \frac{\partial p_0}{\partial t} - \frac{H}{a}(\mathbf{q} \cdot \nabla)p_0 \right) \right] \end{aligned}}$$

As equações (5.31) e (5.37) possuem dependência da posição  $\mathbf{q}$  que nos dificulta encontrar uma equação fechada para  $\delta$ , diferentemente da teoria newtoniana onde essa dependência não ocorre.

Podemos contornar esse problema focando nossa atenção a pequenas escalas considerando os termos  $Hq^i/c^2 \ll 1$ . Reescrevemos a equação de Continuidade como

$$\dot{\delta} + (1+w)\frac{\theta}{a} + 3H\left(\frac{c_s^2}{c^2} - w\right)\delta = 0, \quad (5.37)$$

tomando o divergente da equação de Euler e definido  $\theta := \nabla \cdot (\delta\mathbf{v})$  encontraremos

$$\dot{\theta} + H\theta(1 - 3w) + \frac{1}{a}\nabla^2(\delta\phi) = -\frac{1}{1+w}\left(\frac{c_s^2}{a}\nabla^2\delta\right) . \quad (5.38)$$

Essas são as mesmas equações de evolução para pequenas flutuações em cosmologia relativística no calibre newtoniano [51]. Talvez não seja surpresa esse resultado obtido uma vez que partimos da relatividade geral no mesmo calibre e fizemos uma pequena aproximação trabalhando com pequenas escalas.

## Capítulo 6

# ESTRELAS COMPACTAS

### Introdução

Além do modelo cosmológico que conseguimos construir com as equações hidrodinâmicas, também é possível o estudo do equilíbrio estelar, isto é, dados alguns parâmetros iniciais conseguimos deduzir as massas e os raios máximos das estrelas de nêutrons e anãs brancas. Deduziremos a equação de equilíbrio estelar utilizando as equações hidrodinâmicas propostas por Hwang-Noh afim de compara-las com os modelos newtoniano, neo-newtoniano e observar quem mais se aproxima do modelo proposto pela relativístico geral também deduzido de corrigido na dissertação.

Encontraremos uma massa máxima  $M$  e um raio  $R$  máximo para uma determinada pressão central fixa para todos os modelos em estudo. Em seguida esboçaremos esse comportamento a medida em que variamos a pressão central  $p_0$  da estrela observando qual modelo mais se aproxima da relatividade geral. Mas para isso utilizaremos métodos computacionais e algumas mudanças de variáveis nas equações analíticas afim de otimização do programa numérico.

Como veremos essas estrelas podem ser consideradas frias, além do mais nosso modelos não possuem rotação muito menos considerações sobre convecção. A equação de estado será composta por uma soma de duas equações de estado politrópicas, uma para o caso relativístico e outra para o caso não relativístico  $\epsilon(p) = A_{NR}\bar{p}^{3/5} + A_R\bar{p}$ , modelada para um sistema composto unicamente por nêutrons não interagentes. Após isso, trataremos de forma breve esse mesmo sistema com interação nêutron-nêutron.

Discutiremos também a respeito do equilíbrio para as estrelas de nêutrons, falando um pouco da condição de instabilidade e de uma forma argumentativa explicar o por que da existência de uma massa limite esboçada nos gráficos de massa máxima.

### 6.1 O Equilíbrio Estelar

Embora muito simples, simetria esférica e estática são muito interessantes para estudo de muitos objetos astrofísicos. Aplicaremos as equações para fluidos de Hwang-Noh ao



estudo do equilíbrio estelar e o compararemos mais pra frente com os modelos newtoniano e relativístico geral. Para se encontrar a equação análoga à TOV segundo Hwang-Noh, devemos encontrar uma relação de como a pressão se comporta à medida em que nos deslocamos radialmente no interior da estrela.

Começemos com essa busca através da equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad . \quad (6.1)$$

Nosso sistema estudado possui simetria esférica. A pressão juntamente com a densidade massa variam conforme o raio da estrela

$$p = p(r) \quad , \quad \rho = \rho(r) \quad , \quad \phi = \phi(r) \quad . \quad (6.2)$$

Reescrevemos portanto a equação de Poisson como

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] = 4\pi G \rho \quad . \quad (6.3)$$

Para dar sequência ao raciocínio devemos analisar a equação de Euler acoplada

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi = - \frac{1}{(\rho + p/c^2)} \left[ \nabla p + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad . \quad (6.4)$$

Como a pressão depende apenas da posição  $r$  então a derivada parcial de  $p$  em relação ao tempo é nula. O nosso sistema possui uma simetria esférica, portanto o gradiente de da pressão torna-se uma derivada em relação a coordenada radial.

Suponha agora que cada elemento de volume que compõe a estrela esteja em equilíbrio hidrostático de forma que a velocidade em cada ponto  $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t), t)$  seja nula. Então reescrevemos a equação de Euler acoplada como [12]

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \frac{1}{(\rho + p/c^2)} \frac{dp(r)}{dr} \quad . \quad (6.5)$$

Multiplicando a equação acima por  $r^2$  e a diferenciando em relação à  $r$  encontraremos

$$\frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right] = \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{(\rho + p/c^2)} \frac{dp(r)}{dr} \right] \quad . \quad (6.6)$$

Com o auxílio de (6.3) reescrevemos a equação acima (6.6) como

$$4\pi G \rho r^2 = \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{(\rho + p/c^2)} \frac{dp(r)}{dr} \right] . \quad (6.7)$$

A fim de dar um passo em direção à relatividade, estabelecemos uma relação entre a densidade de massa  $\rho$  e a densidade de energia  $\epsilon$ . De acordo com a teoria da Relatividade Restrita

$$\epsilon(r) = \rho(r)c^2 , \quad (6.8)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Sendo  $\epsilon$  associada a energia de repouso mais energia interna de sistema. Integrando a equação acima desde que  $\epsilon(0)$  e  $p(0)$  sejam finitos, encontraremos

$$\boxed{\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\epsilon(r)}{r^2c^2} \left[ 1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right]} . \quad (6.9)$$

Onde definimos a quantidade  $M(r)$  através de sua derivada em relação à coordenada radial

$$\boxed{\frac{dM(r)}{dr} := \frac{4\pi\epsilon(r)r^2}{c^2} dr} . \quad (6.10)$$

Integrando a relação (6.10) do centro da estrela  $r = 0$  até um determinado ponto  $r$  encontraremos a energia, associada a  $\epsilon$ , da estrela contida num volume de raio  $r$

$$M(r)c^2 := \int_0^r 4\pi\epsilon(r')r'^2 dr' \quad (6.11)$$

As equações (6.9) e (6.10) nos permitem de uma certa forma estudar o equilíbrio estelar. Por isso a chamaremos de equações análogas à TOV <sup>1</sup>. Se procuramos encontrar as equações análogas à TOV segundo o de equações para fluidos Newtoniana (2.5), (2.10) e (2.11) encontraremos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \quad (6.12)$$

com

---

<sup>1</sup>TOV é uma equação diferencial obtida da Relatividade Geral que nos permite estudar o equilíbrio estelar como veremos mais adiante.

$$\frac{dM(r)}{dr} := \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2} \quad (6.13)$$

Observamos que a equivalência entre a quantidade  $M(r)$  e o conceito de massa em física newtoniana só ocorre no limite em que a energia interna do sistema seja desprezível  $\Pi/c^2 \rightarrow 0$ . Se procuramos encontrar as equações análogas à TOV segundo o conjunto de equações Neo-Newtoniana (3.18), (3.16) e (3.19) encontraremos:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[ 1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \quad (6.14)$$

com

$$\frac{dM(r)}{dr} := \frac{4\pi r^2 \epsilon(r)}{c^2} \left[ 1 + \frac{3p(r)}{\epsilon(r)} \right] \quad (6.15)$$

No modelo Neo-Newtoniano a equivalência entre a quantidade  $M(r)$  e o conceito de massa em física newtoniana só ocorre no limite em que  $p$  tende a zero, além da energia interna do sistema desprezível. Portanto, à medida em que caminhamos em direção a relatividade geral com esses modelos observamos que a pressão desempenha um papel importantíssimo na configuração do campo gravitacional em comparação com o modelo newtoniano.

Para seguir em frente no estudo do equilíbrio estelar, devemos resolver as equações diferenciais (6.10) e (6.9) acopladas assim como o conjunto (6.12) (6.13) e (6.14) (6.15). Nesse sistema temos três funções  $\epsilon(r)$ ,  $M(r)$  e  $p(r)$  que dependem da coordenada radial  $r$  independentes entre si, a princípio, para duas equações. Portanto sendo necessário uma equação que co-relacione essas funções para a solução das equações diferenciais. Essa relação será chamada equação de estado e será desenvolvida mais adiante.

Observemos que à medida em que a massa  $M(r)$  aumenta a pressão  $p(r)$  diminui, pois as derivadas dessas grandezas em relação à coordenada radial  $r$  possuem sinais opostos. Integraremos de uma região  $r = 0$  até um raio  $r$  onde a pressão anula-se. Será justamente esse raio ao qual a pressão anula-se a condição que nos leva a definir o raio máximo da estrela. Necessitaremos ainda definir uma pressão em  $r = 0$  chamada pressão central  $p_0$ .

### 6.1.1 Correções Oriundas da Relatividade Geral

Assim como o modelo de Hwang-Noh, os modelos newtonianos e neo-newtonianos são válidos para regime os quais a matéria não deforma o espaço-tempo. Portanto, a integração das equações (6.10) e (6.9) descreverão bem, por exemplo, anãs brancas [2], isto é, sistemas os quais efeitos da relatividade geral não se faz tão importante. Diga-se de passagem, efeitos relativísticos se tornam importantes a medida em que  $GM/c^2 R$  deixa de ser desprezível.

A equação que governa o equilíbrio estelar quando efeitos curvatura do espaço se tornam importantes possui origem nas equações de Einstein e as deduziremos a seguir

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda) \quad (6.16)$$

Onde  $T^{\mu\nu}$  é o tensor momento energia (4.19). Para se encontrar as equações para o equilíbrio estelar substituímos nas equações de Einstein a métrica esfericamente simétrica e estática abaixo

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (6.17)$$

Na parte da matéria, utilizamos um fluido perfeito num referencial co-móvel

$$u^i = 0 \quad e \quad u^0 = -(-g^{00})^{-1/2} = -c\sqrt{B(r)} \quad (6.18)$$

Assumiremos que a densidade de matéria  $\rho$  e a pressão  $p$  dependam apenas da coordenada radial. Substituindo as condições (6.18) e (6.17) em (6.16) encontraremos

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left( \rho - \frac{p}{c^2} \right) A \quad (6.19)$$

$$R_{22} = -1 + \frac{r}{2A} \left( -\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left( \rho - \frac{p}{c^2} \right) r^2 \quad (6.20)$$

$$R_{00} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left( \rho + \frac{3p}{c^2} \right) B \quad (6.21)$$

Onde "''"significa derivada ordinária em relação a coordenada radial  $r$ . Uma vez encontrado as relações temporais (00) e espaciais (ii) das equações de Einstein, podemos soma-las a fim de encontrar o valor de  $A(r)$

$$\frac{R_{11}}{2A} + \frac{R_{22}}{r^2} + \frac{R_{00}}{2B} = -\frac{A'}{rA^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (6.22)$$

que pode ser escrita como

$$\left( \frac{r}{A} \right)' = 1 - \frac{8\pi G \rho}{c^2} r^2 \quad (6.23)$$

Desde que  $A(0)$  seja finito

$$A(r) = \left[ 1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right] \quad (6.24)$$

Onde definimos  $M(r)$  como

$$M(r)c^2 := \int_0^R 4\pi r^2 \epsilon(r) dr \quad (6.25)$$

Por outro lado, contraindo  $g_{\mu\lambda}$  da equação de conservação  $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$  encontramos [10]

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p/c^2}{p/c^2 + \rho} \quad (6.26)$$

Utilizando as relações (6.24),(6.26) na componente (22) da equação de Einstein (6.20) encontraremos a relação que nos permite estudar o equilíbrio estelar

$$\boxed{\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2 r^2} \left[ 1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2} \right] \left[ 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r} \right]^{-1}} \quad (6.27)$$

A equação acima é conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkov ou simplesmente TOV.

Os dois termos entre o primeiro colchetes possuem origem em relatividade restrita [52], enquanto os dois últimos colchetes estão associados a correção relativística geral. No limite em que a pressão da estrela torna-se muito menor do que a densidade de energia recuperamos o caso newtoniano, para campo gravitacional fraco, ou seja, quando o termo de correção do tipo Schwarzschild torna-se desprezível e para  $\Pi \ll c^2$ .

Por outro lado, no que se diz respeito da energia total da estrela, poderíamos ficar tentados a defini-la como  $M(R)c^2$ . Entretanto, esta quantidade não é bem definida em relatividade geral [10]. O que podemos dizer é que  $M(r)$  uma quantidade que leva em consideração as massas associadas aos campos gravitacionais, a energia de repouso e a energia interna do sistema e que no limite newtoniano é idêntica a massa gravitacional ativa.

No fim da vida de algumas estrelas a pressão pode eventualmente não suportar a força gravitacional e colapsar dando origem a objetos compactos como estrelas de nêutrons ou anãs brancas. Temos interesse em estudar objetos compactos que possuem pressão relevante e as partículas que compõe o sistema baixas velocidades, afim de comparar os termos de correção de pressão sugeridos pelo artigo do Hwang-Noh [3] com a relatividade geral. Nas anãs brancas existem casos em que as partículas assumem velocidades próximas a da luz, consistindo em um caso que não nos interessa [53]. Já as estrelas de nêutrons, por outro

lado, se enquadra a nossos requisitos consistindo em um ótimo sistema para aplicarmos as equações de Hwang-Noh.

## 6.2 Estrelas de Neutrôn

As estrelas de nêutrons os buracos negros e as anãs brancas são estágios finais da evolução de uma estrela que se inicia com uma grande nuvem de gás concentrada que se contraindo forma uma protoestrela. Com essa aglomeração a temperatura do núcleo se eleva eventualmente dando início à queima de hidrogênio. Se a estrela começa sua vida com uma massa menor que  $0,08 M_{\odot}$ , se tornará uma anã marrom. Caso tenha uma massa maior que  $0,8 M_{\odot}$  então se tornará uma anã branca.

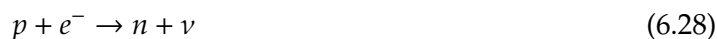
Por outro lado se inicia com uma massa entre  $0.8$  e  $10 M_{\odot}$ , após transformar o hidrogênio em hélio, a estrela passará pelas estados de gigante vermelha de super gigante vermelha passando pelo processo de ejeção de matéria (nebulosa planetária) e por fim tornando-se uma anã branca.

Caso inicialmente possua um valor entre  $10$  e  $25 M_{\odot}$ , de maneira semelhante ao caso anterior chegará a fase de gigante vermelha e ao invés de ejetar matéria como uma nebulosa planetária, ejetará na forma de supernova e se tornará uma estrela de nêutrons por fim.

Por outro lado, se as estrelas se iniciam com uma massa maior que  $25 M_{\odot}$  então após a ejeção de matéria via supernova, se tornaram buracos negros. [54]

Estamos interessados particularmente nas estrelas de nêutrons, uma vez que constituem em um bom sistema para o teste das equações de Hwang-Noh. Essas estrelas são compostas essencialmente por nêutrons e que através de sua pressão de degenerescência contrabalançam o efeito da gravidade evitando o colapso gravitacional. Foram sugeridos teoricamente nos anos de 1930 sobretudo com os trabalhos de Robert Oppenheimer e colaboradores. Esses objetos exóticos ficaram no papel até os anos de 1960 quando os raios astrônomos descobriram os *quasi stellar objects* (QSO's)<sup>2</sup> [10].

Numa estrela de nêutrons os elétrons e o prótons são convertidos em nêutrons através da reação



liberando neutrinos [10]. Esses objetos são muito compactos possuindo um radio por volta de 20 Km e massa de  $1.4 M_{\odot}$  e uma temperatura superficial acima de 1 milhão de graus Kelvin.

---

<sup>2</sup>QSO's são fontes intensas de radio com aparência ótica aproximadamente de estrelas azuladas [54].

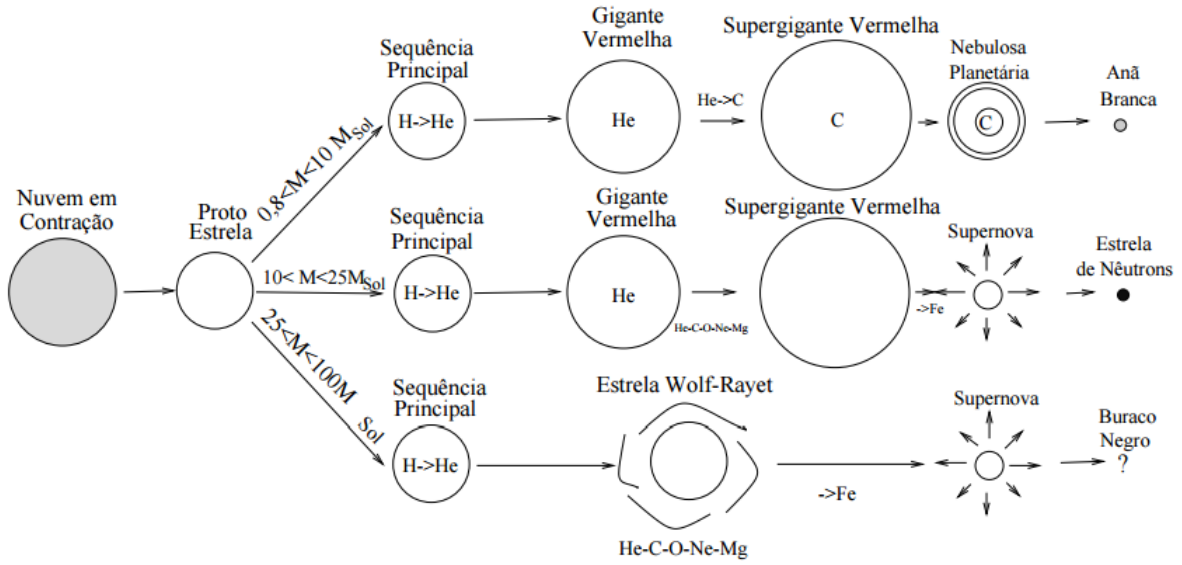


Figura 6.1. Esquema de evolução estelar para diferentes massas iniciais

A seguir iremos resolver as equações para estrutura estelar numericamente para os modelos de Hwang-Noh, Newtoniano e Neo-Newtoniano, em seguida os compararemos com a correção oriunda da relatividade geral. Mas para se resolver tais equações é necessário uma relação entre densidade de energia e pressão que constitui o interior da estrela. Essa equação de estado primeiramente será construída via calculos computacionais para um gás de nêutrons que não interage entre si. Em seguida trataremos da equação que lida com as tais interações.

### 6.2.1 Equação de Estado para Nêutrons não Interagentes

Nas seções anteriores encontramos duas equações diferenciais uma para massa e outra para pressão acopladas que possuem a dependência da densidade de energia  $\epsilon$ . Para seguir em frente no desenvolvimento dessas equações fixamos uma relação entre a pressão  $p$  e a densidade de energia  $\epsilon$ , para um sistema composto puramente por nêutrons não interagentes entre si.

Não levaremos em consideração efeitos de transporte de energia por convecção ou radiação, o que não condiz com a realidade. Entretanto, nosso objetivo é comparar qual modelo mais se aproxima da relatividade geral a partir de uma equação de estado simples para estrela de nêutrons. Não consideraremos interação entre os nêutrons do sistema.

Para um gás de nêutrons ideal degenerado em equilíbrio o número de partículas por unidade de volume assume o valor num ensemble grande canônico

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} f(k) d^3k = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \tag{6.29}$$

Onde  $(2\pi\hbar)^3$  é um volume "unitário" do espaço de fase. A função  $f$  é a distribuição de Fermi-Dirac

$$f(E) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/k_B T] + 1} \quad (6.30)$$

Onde  $E$  é a energia do sistema,  $\mu$  o potencial químico,  $k_B$  a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura. Para um gás de nêutrons totalmente degenerado a temperatura pode ser considerada fria uma vez que  $(E - \mu) \ll k_B T$  [2], embora tenha uma temperatura superficial acima de 1 milhão de graus Kelvin [54]. Essa função  $f(E)$  assumirá o valor  $f(E) = 1$  caso  $E \leq E_F$  e assumirá o valor  $f(E) = 0$  caso  $E > E_F$  neste caso em específico.

Escrevendo a densidade de matéria como  $\rho = nm_N$ , reescrevemos a relação (6.29) como

$$k_F = \hbar \left( \frac{3\pi^2 \rho}{m_N} \right)^{1/3} \quad (6.31)$$

Temos por objetivo construir uma equação de estados para esse sistema, estabelecendo uma relação entre a pressão de densidade de energia do sistema.

Com isso em mente, expressamos a densidade de energia de nosso sistema como

$$\epsilon(k_F) = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \sqrt{(k^2 c^2 + m_N^2 c^4)} k^2 dk \quad (6.32)$$

$$= \frac{m_N^4 c^5}{\pi^4 \hbar^3} \int_0^{k_F/m_N c} \sqrt{(u^2 + 1)} u^2 du \quad (6.33)$$

fazendo uma mudança de variável tomando  $x = k_F/(m_N c)$ , encontraremos

$$\epsilon(x) = \frac{m_N^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 + x)(1 + x^2)^{1/2} - \sinh^{-1}(x)] \quad (6.34)$$

A pressão por outro lado, para nosso sistema possuirá a forma

$$p(k_F) = \frac{8\pi}{3c(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{(k^2 c^2 + m_N^2 c^4)^{1/2}} k^2 dk \quad (6.35)$$

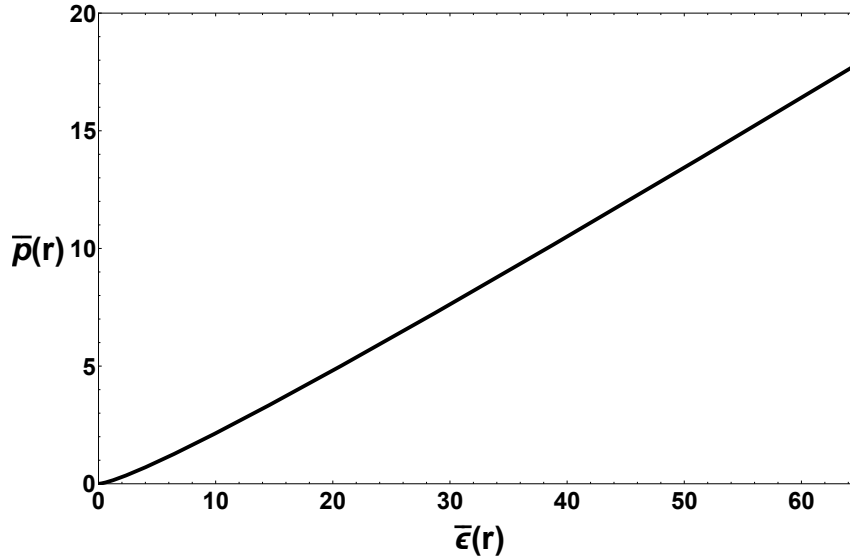
$$= \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F/(m_N c)} \frac{u^4}{\sqrt{(u^2 + 1)}} du \quad (6.36)$$

novamente fazendo uma mudança de variável tomando  $x = k_F/(m_N c)$ , encontraremos



$$p(x) = \frac{m_N^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} [(2x^3 - 3x) \sqrt{1+x^2} + 3 \sinh^{-1}(x)] \quad (6.37)$$

Podemos estabelecer uma relação entre as equações (6.34) e (6.37) através *Wolfram Mathematica 10.2* plotando um conjunto de valores para ambas relações. No trabalho que se segue encontraremos os resultados



**Figura 6.2.** Relação entre pressão  $\bar{p}$  e densidade de energia  $\bar{\epsilon}$  para um gás de nêutrons não interagentes

Sendo  $\bar{p}(r)$  e  $\bar{\epsilon}(r)$  as partes adimensionais da pressão  $p(r)$  e densidade de energia  $\epsilon(r)$  respectivamente.

Além do mais podemos escrever essa a densidade de energia tendo como base duas equações do tipo politrópicas, uma para o caso relativístico com  $p = K_R \epsilon$  e outra para um caso não relativístico  $p = K_{NR} \epsilon^{3/5}$ , com  $K_R$  e  $K_{NR}$  sendo constantes. Através do comando *Fit* do programa *Wolfram Mathematica* construímos nossa equação de estado como

$$\bar{\epsilon}(r) = A_{NR} \bar{p}^{3/5} + A_R \bar{p} \quad (6.38)$$

Possuindo os coeficientes os valores  $A_{NR} = 2.4216$  e  $A_R = 2.8663$  com acurácia de 1% [52].

## 6.2.2 Resultados Numéricos

Com a equação de estado para a estrela de nêutrons em mãos calcularemos as massas máximas e raios máximos para uma dada pressão central. Mas antes devemos fazer pequenas alterações nas equações diferenciais analíticas por questões computacionais. Os resultados

numéricos que se seguem foram baseados no artigo do Silbar e Reddy [52], assim como o algoritmo numérico que pode ser encontrado na referência [55], escrito pelos mesmos autores.

Sendo assim começaremos por escrever a massa da estrela em termos de massas solares definindo  $\bar{M}(r) := M(r)/M_\odot$  escrevendo a equação diferencial (6.9) como

$$\frac{dp(r)}{dr} = -R_0 \frac{\epsilon(r)\bar{M}(r)}{r^2} \left[ 1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)} \right] \quad (6.39)$$

e

$$\frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \frac{1}{c^2 M_\odot} 4\pi\epsilon(r)r^2 \quad (6.40)$$

com  $R_0 = GM_\odot/c^2$ . Para estrelas de Nêutrons  $R_0$  possui o valor de  $1.47km$ , mas o valor do coeficiente da equação diferencial para massa  $4\pi/c^2 M_\odot$  é da ordem de  $10^{-47}$ , e os computadores comuns não possuem a qualidade de trabalhar com números tão pequenos. Para se contornar essa situação definimos a pressão  $\bar{p}$  e a densidade de energia  $\bar{\epsilon}$  adimensionais

$$p(r) = \epsilon_0 \bar{p}(r) \quad (6.41)$$

$$\epsilon(r) = \epsilon_0 \bar{\epsilon}(r) \quad (6.42)$$

Substituindo as definições de pressão e densidade de energia nas equações(6.42) e (6.9) encontraremos

$$\frac{d\bar{p}(r)}{dr} = -\frac{\alpha\bar{M}(r)}{r^2} [\bar{\epsilon}(r) + \bar{p}(r)] \quad (6.43)$$

$$\frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \beta r^2 \bar{\epsilon}(r) \quad (6.44)$$

Onde definimos

$$\alpha := R_0 \quad \text{e} \quad \beta := \frac{4\pi\epsilon_0}{M_\odot c^2} \quad (6.45)$$

Podemos portanto escolher um  $\epsilon_0$  arbitrário de forma que os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  sejam da ordem de  $10^0$  para que assim os computadores consigam resolver a equação diferencial. No caso de um gás de nêutrons a escolha mais natural para  $\epsilon_0$  será

$$\epsilon_0 := \frac{m^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} = 0.003006 M_\odot c^2 / \text{km}^3 \quad (6.46)$$

esse coeficiente é composto pelas constantes da densidade de energia de um gás de nêutrons, como pode ser visto em (6.34).

Teremos assim com essa escolha os valores dos coeficientes  $\alpha = 1.47 \text{Km}$  e  $\beta = 0.038 \text{Km}$ . Para seguir em frente utilizaremos a equação de estado (6.38). O programa utilizado foi desenvolvido no ambiente do *Wolfram Mathematica 10.2* e pode ser encontrado um esboço no apêndice A.

Resolveremos a equação diferencial (6.44) para cada valor de  $r$  pertencente ao intervalo  $[0.01; 50]$  variando em intervalos de 0.01 de forma crescente. Para cada valor de massa resolveremos uma equação diferencial para pressão lhe dando portanto com uma "infinitude" de equações diferenciais. Após várias iterações eventualmente a pressão poderá se anular. Quando isso ocorre finalizamos o programa, pois esta condição determina o raio da estrela e o valor de  $M$  para o qual o valor da pressão se nula determina o valor da massa máxima da estrela.

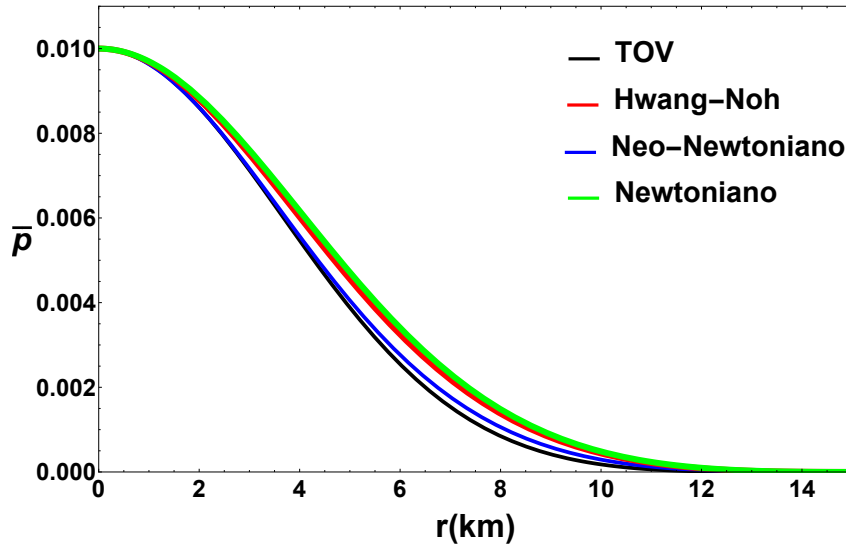
Resolvemos as equações diferenciais para os quatro modelos estudados na dissertação. São eles os modelos Newtoniano, Neo-Newtoniano, Hwang-Noh e TOV. Para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  definidos em (6.45) e para pressão central  $\bar{p}(0) = 0.01$  encontraremos os valores de raio máximo  $R$  e massa máxima  $M$  na tabela abaixo.

$R$	$M$	Modelo
15.1	1.0371	Newtoniano
15.0	0.9922	Hwang-Noh
14.4	0.9083	Neo-Newtoniano
13.4	0.7166	TOV

**Tabela 6.1.** Massa  $M$  em  $M_\odot$  e raio  $R$  em  $\text{km}$  máximos para uma estrela de nêutrons pura com pressão central  $\bar{p}(0) = 0.01$ , utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.

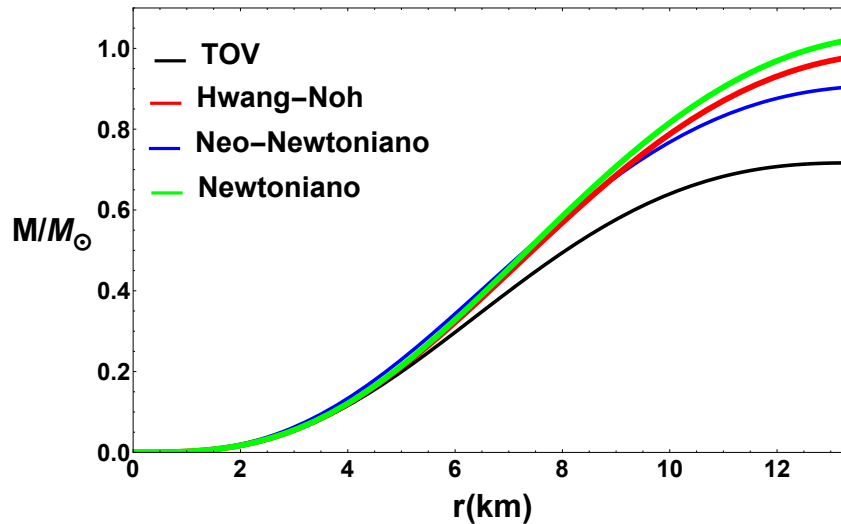
Observemos que para estrelas massivas onde a pressão  $p$  é significativa comparado à velocidade da luz  $c$  efeitos relativísticos são significativos. Comparando o modelo Newtoniano à TOV observamos uma diferença de aproximadamente 11,3% com relação ao raio e com relação à massa 31,0%. Comparando TOV à Hwang-Noh observamos uma diferença de 10,7% com relação ao raio e de 27,8%. Por fim comparando TOV ao modelo neo-newtoniano encontraremos uma diferença de 6.94% com relação ao raio e 21,1% com relação a massa.

Isso pode ser observado através da tabela acima ou de forma mais ilustrativa nas figuras abaixo.



**Figura 6.3.** Pressão  $\bar{p}(r)$  adimensional em função do raio  $r$  em  $km$  para uma estrela de nêutrons pura com pressão central  $p(0) = 0.01$ , utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.

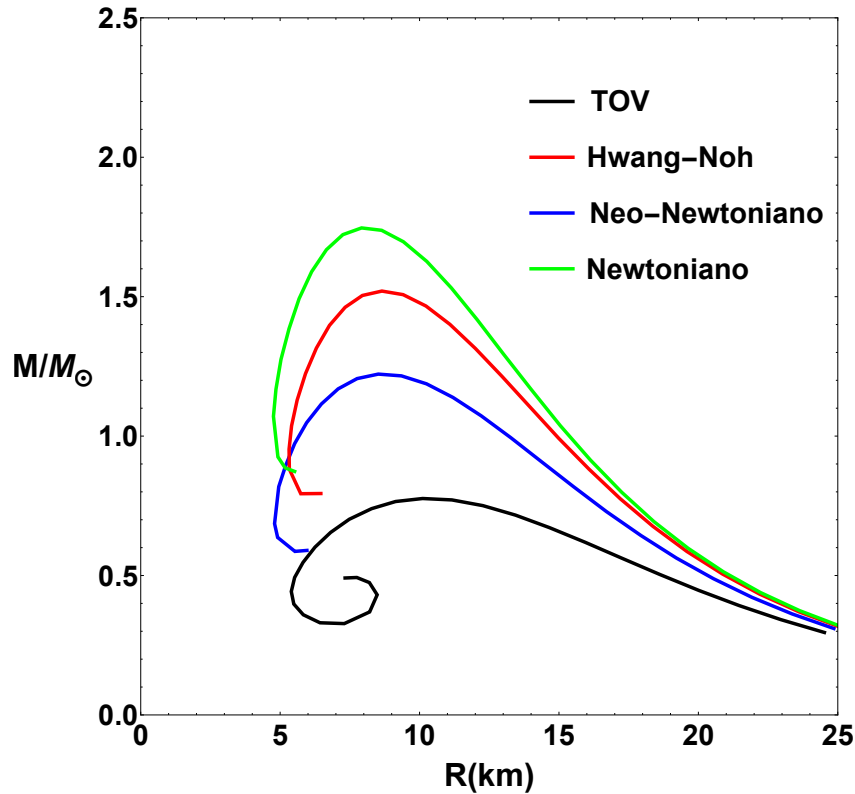
Esses resultados nos levam a crer que a abordagem relativística para esses sistemas são imprescindíveis.



**Figura 6.4.** Massa  $M(r)$  em  $M_{\odot}$  em função do raio  $r$  em  $km$  para uma estrela de nêutrons pura com pressão central  $p(0) = 0.01$ , utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.

Como dito anteriormente, as massas  $M(r)$  em função do raio  $r$  plotadas no gráfico acima foram calculadas para uma pressão central  $\bar{p}(0) = 0.01$ , obtendo como resultado o raio e a massa máximas da estrela  $R = 15.1$  e  $M = 1.0371$ , para o modelo Newtoniano. Entretanto, se alteramos o valor da pressão central  $\bar{p}(0)$  encontraremos outro conjunto de dados, isto é, novo raio de nova massa. É bastante instrutivo exibir esse comportamento da variação das pressões centrais. Abaixo construímos um gráfico comparando o modelo de Hwang-Noh

com outros modelos.



**Figura 6.5.** Massa  $M(r)$  em  $M_{\odot}$  em função do raio  $R$  em  $km$  para uma estrela de nêutrons pura com baixos valores da pressão central  $\bar{p}(0)$ , utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.

Para baixas pressões centrais  $\bar{p}(0)$  temos estrelas com poucas massas solares segundo as equações (6.43) e (6.44). Como a massa é pequena a atração gravitacional nas camadas mais externas da estrela também será pequena e teremos por consequência estrelas de raio grande. À medida em que a pressão central aumenta a massa também aumenta e o raio das camadas mais externas diminui devido ao aumento do campo gravitacional da estrela.

Por volta de  $\bar{p}(0) = 0.056$ , para TOV a estrela alcança o seu raio máximo  $R \approx 10.1$   $km$  assim com sua massa máxima  $M(r) \approx 0.78M_{\odot}$ . Estes resultados estão em acordo com o resultado encontrado na referência [52].

Os gráficos acima foram plotados para pressões centrais  $\bar{p}(0) = 10.0^{-i}$ , com  $i$  variando de  $-12$  até  $16$  com o raio variando de  $1.0$  até o valor máximo em intervalos de  $0.01$ . Seguem abaixo alguns dados iniciais de pressão central e suas respectivas massas e raios máximos para seus respectivos modelos, justamente nos pontos de derivada nula.

$\bar{p}(0)$	$R$	$M$
1.7783	7.25	1.722
1.0000	7.92	1.747
0.5623	8.64	1.738

**Tabela 6.2.** Raio  $R$  em  $km$  e massa  $M$  em  $M_{\odot}$  para estrela de nêutrons com equação de estado para um gás de nêutrons sem interação no modelo Newtoniano.

$\bar{p}(0)$	$R$	$M$
1.0000	7.95	1.504
0.5623	8.65	1.520
0.3162	9.41	1.507

**Tabela 6.3.** Raio  $R$  em  $km$  e massa  $M$  em  $M_{\odot}$  para estrela de nêutrons com equação de estado para um gás de nêutrons sem interação no modelo Hwang-Noh.

$\bar{p}(0)$	$R$	$M$
0.5623	7.76	1.206
0.3162	8.52	1.222
0.1778	9.35	1.216

**Tabela 6.4.** Raio  $R$  em ( $km$ ) e massa  $M$  em ( $M_{\odot}$ ) para estrela de nêutrons com equação de estado para um gás de nêutrons sem interação no modelo Neo-Newtoniano.

$\bar{p}(0)$	$R$	$M$
0.1000	9.14	0.765
0.0562	10.11	0.776
0.0316	11.16	0.771

**Tabela 6.5.** Raio  $R$  em ( $km$ ) e massa  $M$  em ( $M_{\odot}$ ) para estrela de nêutrons com equação de estado para um gás de nêutrons sem interação no modelo TOV.

$\bar{p}(0)$	$R$	$M$	MODELO
1.0000	7.92	1.747	Newtoniano
0.5623	8.65	1.520	Hwang-Noh
0.3162	8.52	1.222	Neo-Newtoniano
0.0562	10.1	0.776	TOV

**Tabela 6.6.** Comparação de raio  $R$  em ( $km$ ) e massa  $M$  em ( $M_{\odot}$ ) dos modelos para estrela de nêutrons com equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.

### 6.2.3 Equação de Estado para Nêutrons Interagentes

Podemos tornar nosso sistema mais realístico resolvendo as equações diferenciais discutidas acima para uma equações de estado que leva em consideração interação entre os

nêutrons da estrela. Para isso considere

$$p(\epsilon) = \kappa_0 \epsilon^2 \quad (6.47)$$

com  $\kappa_0 = 4.012 \cdot 10^{-4} (m^2/N)$ . Não entraremos em muitos detalhes sobre o método necessário para se encontrar a equação de estado (6.47), para mais consulte [52].

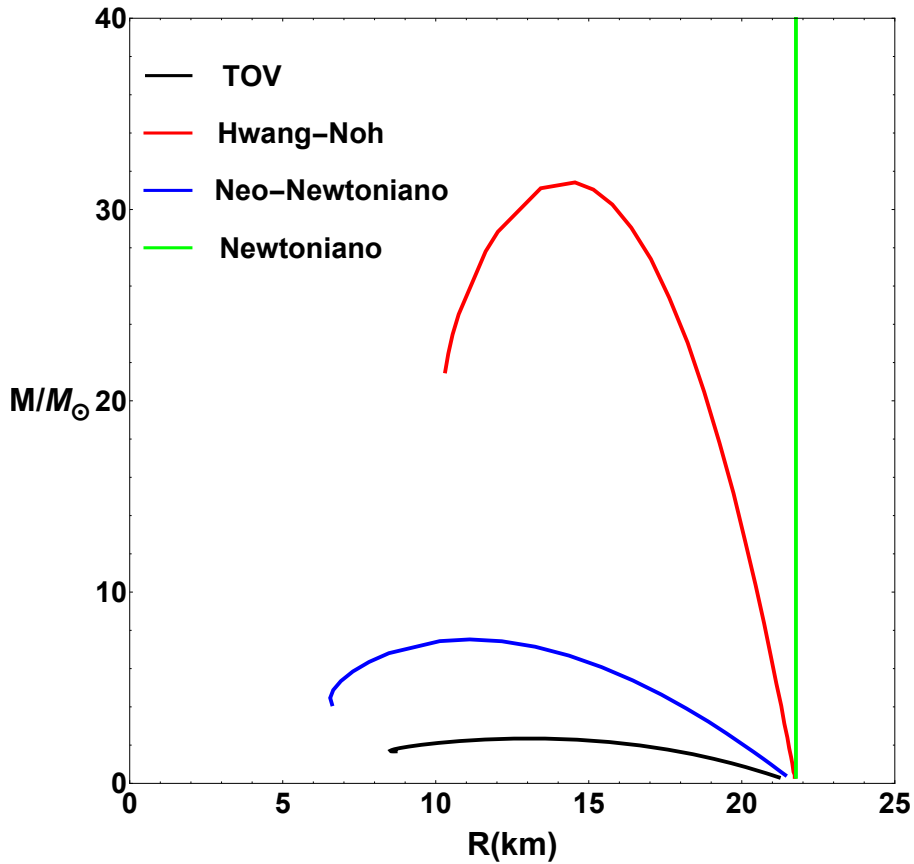
Reescrevendo a equação de forma adimensional com o auxílio de (6.42) encontraremos

$$\bar{\epsilon}(\bar{p}) = (\kappa_0 \epsilon_0)^{-1/2} \bar{p}^{-1/2} = A_0 \bar{p}^{-1/2}, \quad A_0 = 0.8642 \quad (6.48)$$

Da mesma forma como no modelo para estrela de nêutrons não interagentes definimos.

$$\epsilon_0 = \frac{m_N^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (6.49)$$

Resolvendo as equações diferenciais acopladas para diferentes pressões iniciais  $\bar{p}(0)$ , como anteriormente encontraremos



**Figura 6.6.** Massa  $M$  em  $M_\odot$  em função do raio máximo  $R$  em  $km$ , utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons interagentes.

Como podemos observar a interação nêutron-nêutron é significativa. Enquanto temos uma massa máxima de  $2.34 M_{\odot}$  e um raio de  $13.6 \text{ km}$  para equação de estado com interação nêutron-nêutron, para nêutrons não interagentes encontraremos uma massa de  $0.78 M_{\odot}$  com um raio de  $10.1 \text{ km}$ .

Observemos que o modelo de Hwang-Noh prevê estrelas de nêutrons gigantescas com uma massa de  $31.5 M_{\odot}$  e com raio de  $14.6 \text{ km}$  o que não condiz com a realidade. Enquanto que o modelo newtoniano nem se quer possui uma curva de estabilidade. Se por um lado o modelo de Hwang-Noh nos traz resultados que não condizem com a realidade, por outro constituem uma melhora considerável em relação ao modelo newtoniano. Observemos que o modelo neo-newtoniano mais uma vez foi o modelo que mais se aproxima de TOV.

Não configura uma surpresa que o modelo de Hwang-Noh preveja estrelas gigantescas uma vez que estas equações foram deduzidas no regime de campos fracos e as estrelas de nêutrons por sua vez constituem um sistema que possui campos gravitacionais fortes.

#### 6.2.4 Estabilidade

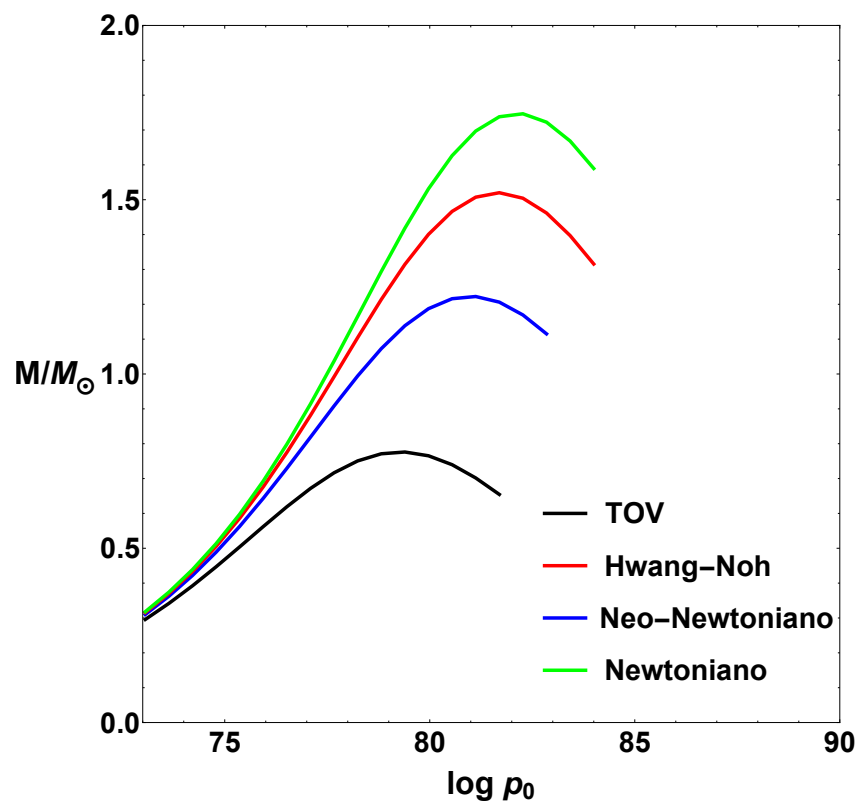
As estrelas de nêutrons foram estudadas partindo-se da hipótese de equilíbrio hidrostático. Isso não quer dizer que sejam estáveis. Estabilidade e equilíbrio não são sinônimos. Existem estados na evolução estelar em que o sistema esta em equilíbrio mas que sua existência não é permitida segundo a teoria de estabilidade, como veremos a seguir. Estabilidade é um tópico bem especializado e que não trabalharemos aqui, apenas discuti-la de forma breve. Dizemos que uma estrela é instável se [2]

$$\frac{dM}{dp_0} < 0 \quad (6.50)$$

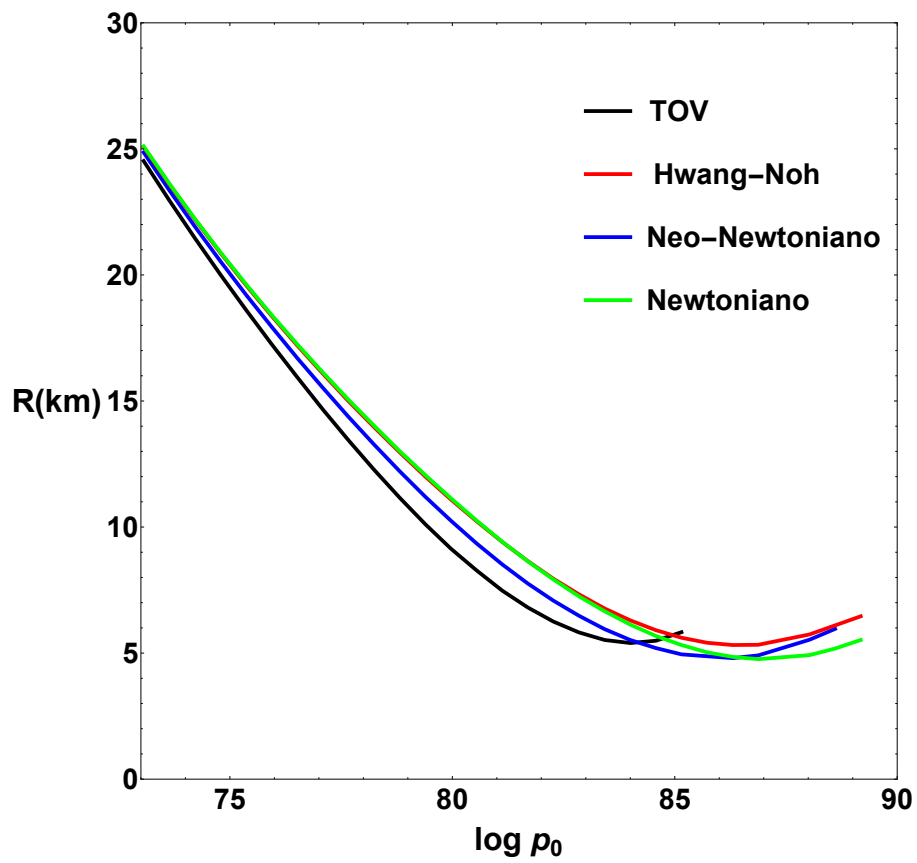
Estabilidade é um tópico bem especializado e que não trabalharemos aqui, apenas discuti-la de forma breve. Lembrando que a recíproca não é verdadeira, isto é, o fato de  $dM/dp_0 > 0$  não implica em estabilidade. Mas se torna uma condição necessária [56]. A seguir traçamos o gráfico da Massa em função do logaritmo da pressão central  $p(0)$  para analisar as regiões as quais a estrela de é instável. Não consideraremos interação nêutron-nêutron neste caso.

Em seguida esboçaremos o comportamento do raio máximo em função do logaritmo da pressão central  $p_0$  para essa mesma estrela





**Figura 6.7.** Massa  $M(r)$  em  $M_{\odot}$  em função do logaritmo da pressão central  $p_0$  em  $N/m^2$  para uma estrela de nêutrons pura com baixos valores da pressão central utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.



**Figura 6.8.** Raio  $R$  em  $km$  em função do logaritmo da pressão central  $p_0$  em  $N/m^2$  para uma estrela de nêutrons pura para baixos valores da pressão central, utilizando uma equação de estado para um gás de nêutrons sem interação.

Analisando o gráfico (6.5) podemos concluir que as estrelas com os valores menores que o raio máximo nos seus respectivos modelos não são estáveis. Para tal conclusão devemos utilizar a regra da cadeia na equação (6.50)

$$\frac{dM}{dp_0} = \frac{dM}{dR} \frac{dR}{dp_0} < 0 \quad . \quad (6.51)$$

O comportamento da derivada da massa em relação a pressão central assim como o comportamento do raio em função do logaritmo da pressão foram esboçadas acima.

Observe que a região de instabilidade onde  $dM/dp_0 < 0$ , é a mesma região onde  $dR/dp_0 < 0$ . Isso nos leva a conclusão que a parte esquerda do gráfico (6.5), ao qual  $dM/dR > 0$  é uma região que não existem estrelas segundo a teoria de estabilidade. Não mostraremos aqui a estabilidade para regiões as quais  $dM/dR < 0$ , mas a teoria que envolve estabilidade estelar pode ser encontrada em [57].

### 6.2.5 Por que existe uma massa máxima ?

Observamos nos tópicos anteriores que as estrelas de nêutrons possuem uma massa limitante para além do qual configurações hidrostáticas em equilíbrio não são possíveis. Iremos abordar de maneira argumentativa esse fenômeno a seguir. Considere portanto tal equilíbrio numa estrela. Se aumentamos a densidade de matéria, então a atração gravitacional também aumentará nas camadas mais externas da estrela de forma que para que continuemos em equilíbrio hidrostático, a pressão deve possuir um aumento considerável.

Por outro lado, a componente térmica que compõe a pressão é desprezada em estrelas frias [52]. Por consequência uma variação na densidade de massa da estrela, segundo as equações barotrópicas estudadas aqui acarretaria numa mudança direta na densidade de energia e na pressão do sistema. Podemos estabelecer uma relação entre um incremento na densidade de energia e um incremento da densidade de energia como

$$\frac{dp}{d\epsilon} = \left( \frac{c_S}{c} \right)^2 \quad (6.52)$$

Onde  $c_S$  é a velocidade de propagação de ondas no fluido que compõe a estrela [58]. A expressão (6.52) por sua vez coloca um limite no aumento da pressão associada a alterações na densidade, já que queremos que nosso sistema satisfaça o princípio da causalidade. Portanto, acabará por correr para a situação em que qualquer aumento na densidade irá resultar em um adicional na atração gravitacional que não poderá ser compensada pelo aumento correspondente na pressão. Isto nos leva naturalmente a existência de uma massa máxima para a estrela.

A partir deste argumento podemos deixar de nos preocupar com a cauda encaracolada no gráfico (6.5), já que está região ocorre após a região de instabilidade e que consistem em altas pressões.

## Capítulo 7

# CONCLUSÕES

A possibilidade de descrição de sistemas físicos segundo as equações hidrodinâmicas é uma área interessante que gerou e ainda poderá gerar o desenvolvimento de novas tecnologias. Tendo em vista isso, neste trabalho resolvemos investigar alguns sistemas segundo as equações para fluidos propostas por Hwang-Noh, que constituem em si equações para fluido com correções de pressão. Em particular estudamos dois sistemas os quais a pressão possui um papel importante, são eles a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico do ponto de vista newtoniano e as estrelas de nêutrons. Uma vez descrito esses sistemas e obtidos alguns resultados, os comparamos com resultados da relatividade geral e de outras propostas.

Mas para se fazer tais comparações, antes tivemos que deduzir as equações que governam a dinâmica de fluidos, isto é, as equações de continuidade, Euler e Poisson.

Uma vez deduzida tais equações, demos sequência, mostramos não só a possibilidade de descrever sistemas relativísticos segundo equações de fluidos, mas também sistemas quânticos como o efeito Aharonov-Bohm. Além do mais mostramos que com as equações de continuidade, Euler e Poisson para um universo homogêneo e isotrópico tridimensional é possível descrever a dinâmica de um universo com pressão nula, idêntico à relatividade geral. Atualmente o universo não possui pressão nula sendo necessário uma correção de pressão nessas equações de fluidos, para uma boa descrição do universo em todas as suas fases.

Não existe uma correção padrão de pressão nas equações para fluidos, havendo assim várias propostas publicadas em revistas. Nesse contexto, recentemente Hwang-Noh propuseram uma correção de pressão relativística geral com correções originadas da relatividade geral na tentativa de descrever tais sistemas de uma maneira melhor que as propostas já existentes.

Neste trabalho mostramos como os autores encontraram suas equações a partir da relatividade geral, utilizando formalismo covariante de forma alternativa ao formalismo ADM. Uma vez feito isso procuramos encontra-las via relatividade restrita dando um passo além do artigo [3]. Com as equações em mãos, nos propomos a estudar sistemas os quais a

pressão possuíse um papel mais fundamental.

Em cosmologia, através das equações de Hwang-Noh, encontramos duas equações que governam a dinâmica análoga a equação de Friedmann. Uma para  $w \neq -1/9$  e outra para  $w = -1/9$ , utilizando a equação de estado  $p = w\rho c^2$ . Para  $w = -1/9$  encontramos soluções de Friedmann com correções do tipo logarítmicas, por outro lado, para  $w \neq -1/9$  e assumindo um big-bang, conseguimos uma equação de Friedmann com correções do tipo  $1/(1+w)$ , além do mais observamos que a curvatura está intimamente ligado à presença de matéria. Para a fase em que o universo foi dominado pela matéria  $p = 0$ , voltamos ao modelo newtoniano.

Investigamos também a existência de uma fase de expansão acelerada para estes modelos. Observamos que enquanto para relatividade geral essa condição acontece com  $w < -1/3$ , desde que  $H^2$  seja positivo, no modelo de Hwang-Noh  $w$  e  $K$  devem possuir o valor positivo no mínimo.

Destacamos casos interessantes os quais o modelo de Hwang-Noh descreve os mesmos resultados que a relatividade geral. São estes os casos em que a equação de estado toma as formas  $p = w(t)\rho c^2$  e  $p = K\rho^\gamma$ . Chamamos a atenção para o caso da equação de estado politrópica  $p = K\rho^\gamma$  que nos levará a um resultado semelhante ao gás de Chaplygin, que por sua vez nos permite a descrição de um universo em expansão desacelerada para uma fase acelerada também em expansão.

Introduzimos perturbações nas equações para fluidos hidrodinâmicas observaremos a presença de termos proporcionais à  $Hq^i/c^2$  nas equações de Euler e de Continuidade perturbadas. Isso nos impossibilitou encontrar uma equação fechada para  $\delta$  como existentes na teoria newtoniana e na RG. Contornamos esse problema focamos nossa atenção a pequenas escalas encontrando um resultado semelhante a relatividade geral.

Na descrição de objetos compactos enfatizamos às estrelas de nêutrons por constituírem um sistema munido de altas pressões. Procuramos desenvolver uma equação análoga à TOV a partir das equações para fluidos de Hwang-Noh. Em meio a esse desenvolvimento tivemos que definir o conceito de massa assim como utilizar uma equação de estado para se seguir em frente na resolução da equação diferencial.

Essas estrelas são constituídas em nosso modelo totalmente por nêutrons, o que não ocorre na realidade. Construimos nossa equação de estado com o auxílio do programa *Wolfram Mathematica 10.2* da seguinte maneira. Tabelaamos os dados da pressão  $p$  e da densidade de energia  $\epsilon$  para um gás puramente de nêutrons e com o programa encontramos uma relação entre as duas grandezas.

Uma vez encontrada a equação de estado procuramos resolver as equações diferenciais não só para Hwang-Noh, mas também para os modelos neo-newtonianos, newtonianos afim de compara-los à TOV. Encontramos como a pressão e a massa variam conforme percorremos seu interior para uma pressão central de  $\bar{p}_0 = 0,01$ . Para cada valor de pressão central, encontramos um raio e uma massa máximos. Com o objetivo de investigar sobre estabilidade, plotamos um gráfico da massa máxima  $M/M_{sol}$  em função do raio máximo  $R$  à medida em que variamos a pressão centro  $p_0$ .

Observamos que o modelo de Hwang-Noh apesar de se aproximar mais da relatividade geral que o modelo newtoniano, este perde para o modelo neo-newtoniano o qual mais se aproxima de TOV. O fato das equações de Hwang-Noh nos levarem a resultados diferentes de TOV não é de se assustar, uma vez que estas foram deduzidas para campos gravitacionais fracos, enquanto que as estrelas de nêutrons possuem campos gravitacionais fortes.

Ainda em estrelas de nêutrons introduzimos a interação nêutron-nêutron tornando nosso modelo mais realista. Observamos que esta interação leva o modelo de Hwang-Noh a prever objetos com massa característica de estrelas super gigantes e raios gigantes.

Em resumo o que fizemos nesse trabalho basicamente foi uma continuação do trabalho de Hwang-Noh. Uma vez encontradas as equações para fluidos pelos autores, procuramos aplicá-las a sistema onde a pressão possui um papel fundamental e comparar seus resultados com outros modelos já existentes. Observamos que o modelo de Hwang-Noh consegue descrever, em partes, a evolução do universo como em relatividade geral, deixando a desejar com relação ao modelo neo-newtoniano. Por outro lado, consiste em um modelo mais sofisticado que o modelo newtoniano descrevendo diferentes fases do universo.

Estudando as estrelas de nêutrons, observamos que o mesmo ocorre com o modelo de Hwang-Noh. Tendo o modelo neo-newtoniano raios e massas máximas mais próximas à TOV e o modelo de Hwang-Noh sendo uma versão mais sofisticada do que o modelo newtoniano.

Apesar das equações neo-newtonianas descreverem melhor os sistemas estudados acima, não possuem uma dedução consistindo de um *ansatz*, enquanto que as equações de Hwang-Noh possuem uma dedução originada a partir de aproximações no limite newtoniano.

# Referências Bibliográficas

- [1] BATISTA, J. & FERRACIOLI, L. Da physis à física, uma história da evolução do pensamento da física. *EDUFES, Vitória-ES* (2003).
- [2] Sagert, I., Hempel, M., Greiner, C. & Schaffner-Bielich, J. Compact stars for undergraduates. *European journal of physics* **27**, 577 (2006).
- [3] Hwang, J.-c. & Noh, H. Newtonian hydrodynamics with general relativistic pressure. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2013**, 054 (2013).
- [4] Oliveira, A., Velten, H., Fabris, J. & Salako, I. Newtonian view of general relativistic stars. *The European Physical Journal C* **74**, 1–6 (2014).
- [5] Harko, T. Evolution of cosmological perturbations in bose–einstein condensate dark matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **413**, 3095–3104 (2011).
- [6] Lima, J., Zanchin, V. & Brandenberger, R. On the newtonian cosmology equations with pressure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **291**, L1–L4 (1997).
- [7] Fabris, J. & Velten, H. Neo-newtonian cosmology: an intermediate step towards general relativity. *Revista Brasileira de Ensino de Física* **34**, 1–9 (2012).
- [8] Ollitrault, J.-Y. Relativistic hydrodynamics for heavy-ion collisions. *European Journal of Physics* **29**, 275 (2008).
- [9] Keller, A. J. *Michaelis: dicionário escolar alemão: alemão-português, português-alemão;[com a nova ortografia do alemão]* (Melhoramentos, 2002).
- [10] Weinberg, S. & Dicke, R. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. *American Journal of Physics* **41**, 598–599 (1973).
- [11] Nussenzveig, H. M. Curso de física básica vol. 2 fluidos. *Oscilações e Ondas, Calor. 4ª Edição* (1997).
- [12] Landau, L. & Lifshitz, E. Fluid mechanics, vol. 6. *Course of Theoretical Physics* 227–229 (1987).
- [13] Stewart, J. Cálculo, v. 2. *São Paulo: Cengage Learning* (2009).

- [14] Fabris, J., Piattella, O., Velten, H., Salako, I. & Tossa, J. A note on acoustic black holes in neo-newtonian theory. *Modern Physics Letters A* **28**, 1350169 (2013).
- [15] Nandi, K. K., Zhang, Y.-Z. & Cai, R.-G. Acoustic wormholes. *arXiv preprint gr-qc/0409085* (2004).
- [16] Anacleto, M., Salako, I., Brito, F. & Passos, E. Analogue aharonov-bohm effect in neo-newtonian theory. *arXiv preprint arXiv:1506.03440* (2015).
- [17] Reis, R. R. Domain of validity of the evolution of perturbations in newtonian cosmology with pressure. *Physical Review D* **67**, 087301 (2003).
- [18] Fabris, J. C. & Velten, H. Neo-newtonian theories. *arXiv preprint arXiv:1501.01614* (2014).
- [19] Ribeiro, M. B. Cosmologia newtoniana. *Boletim da Soc. Astron<sup>o</sup>mica Brasileira* **14**, 34–63 (1994).
- [20] Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **15**, 168–173 (1929).
- [21] d’Inverno, R. *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press, USA, 1899).
- [22] Riess, A. G. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal* **116**, 1009 (1998).
- [23] Perlmutter, S. *et al.* Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal* **517**, 565 (1999).
- [24] Milne, E. A. A newtonian expanding universe. *The Quarterly Journal of Mathematics* 64–72 (1934).
- [25] Harrison, E. Cosmology without general relativity. *Annals of Physics* **35**, 437–446 (1965).
- [26] McCrea, W. H. Relativity theory and the creation of matter **206**, 562–575 (1951).
- [27] Bartelmann, M. *Theoretical Astrophysics: An Introduction* (Wiley-VCH, 2013).
- [28] Rezzolla, L. & Zanotti, O. *Relativistic hydrodynamics* (Oxford University Press, 2013).
- [29] Schutz, B. *A first course in general relativity* (Cambridge university press, 2009).
- [30] Scott, R. B. A detailed solution manual and guide for schutz’s first course in general relativity (schutz, 2009) (2012).
- [31] Whittaker, E. T. On gauss’ theorem and the concept of mass in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* **149**, 384–395 (1935).
- [32] Coles, P. & Lucchin, F. *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure* (John Wiley & Sons, 2003).



- [33] Mukhanov, V. *Physical foundations of cosmology* (Cambridge University Press, 2005).
- [34] Hwang, J.-c. & Noh, H. Fully non-linear and exact perturbations of the friedmann world model. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **433**, 3472–3497 (2013).
- [35] Chandrasekhar, S. The post-newtonian equations of hydrodynamics in general relativity. *Astrophysical Journal* **142**, 1488–1512 (1965).
- [36] Poisson, E. & Will, C. M. *Gravity: Newtonian, post-newtonian, relativistic* (Cambridge University Press, 2014).
- [37] Brandenberger, R. H. Lectures on the theory of cosmological perturbations. In *The Early Universe and Observational Cosmology*, 127–167 (Springer, 2004).
- [38] Rasanen, S. Cosmology i & ii (2015). URL [http://theory.physics.helsinki.fi/~cosmology/cosmo2014\\_09.pdf](http://theory.physics.helsinki.fi/~cosmology/cosmo2014_09.pdf).
- [39] Plebanski, J. & Krasinski, A. *An introduction to general relativity and cosmology* (Cambridge University Press, 2006).
- [40] Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A. *Gravitation* (Macmillan, 1973).
- [41] Hajicek, P. *An introduction to the relativistic theory of gravitation*, vol. 750 (Springer, 2008).
- [42] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P. & Lasenby, A. N. *General relativity: an introduction for physicists* (Cambridge University Press, 2006).
- [43] Ray, J. R. Lagrangian density for perfect fluids in general relativity. *Journal of Mathematical Physics* **13**, 1451–1453 (1972).
- [44] Andersson, N. & Comer, G. L. Relativistic fluid dynamics: physics for many different scales. *Living Rev. Relativity* **10** (2007).
- [45] Gourgoulhon, E. *3+1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity*, vol. 846 (Springer Science & Business Media, 2012).
- [46] van Holten, J. Relativistic fluid dynamics. *Nikhef Amsterdam NL* (2006).
- [47] Peacock, J. A. *Cosmological physics* (Cambridge university press, 1999).
- [48] Dodelson, S. *Modern cosmology* (Academic press, 2003).
- [49] Ryden, B. *Introduction to cosmology*, vol. 1 (2003).
- [50] Kamenshchik, A., Moschella, U. & Pasquier, V. An alternative to quintessence. *Physics Letters B* **511**, 265–268 (2001).
- [51] Ma, C.-P. & Bertschinger, E. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *arXiv preprint astro-ph/9506072* (1995).

- [52] Silbar, R. R. & Reddy, S. Neutron stars for undergraduates. *American journal of physics* **72**, 892–905 (2004).
- [53] Griffiths, D. J. *Introduction to quantum mechanics* (Pearson Education India, 2005).
- [54] de Souza Oliveira Filho, K., de Souza Oliveira Filho, K. & Saraiva, M. d. F. O. *Astronomia e astrofísica* (Ed. Universidade/UFRGS, 2000).
- [55] Reddy, S. . Neutron stars for undergraduates. wolfram mathematica code (2015). URL <http://public.lanl.gov/silbar/nstars.html>.
- [56] Glendenning, N. K. *Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity* (Springer Science & Business Media, 2012).
- [57] Shapiro, S. L. & Teukolsky, S. A. *Black holes, white dwarfs and neutron stars: the physics of compact objects* (John Wiley & Sons, 2008).
- [58] Kalogera, V. & Baym, G. The maximum mass of a neutron star. *The Astrophysical Journal Letters* **470**, L61 (1996).

# Apêndice A

## Programas

Para os cálculos numéricos efetuados no capítulo 6, sobre estrela de Nêutrons, desenvolvemos um programa no ambiente *Wolfram Mathematica 10* que discutiremos a seguir. Algo semelhante ao código desenvolvido abaixo pode ser encontrado na referência [55]

### A.1 Algoritmo Computacional

---

```
(*Definição das Constantes  $\alpha$  e  $\beta$ *)
```

```
 $\alpha = R_0 * 10^{-3}$  (*km*);
```

```
 $\beta = \frac{4 \pi * \epsilon_0}{M_{sol} * c^2} * 10^9$  (*1/km3*);
```

```
(*Queremos um  $\epsilon_0$  de forma que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam o mais próximo da ordem  $10^0$ ,  
obteremos este por meio de tentativas*)
```

```
 $\epsilon_0 = 0.003006 * M_{sol} * c^2 * 10^{-9}$  (*m*);
```

```
(*Equação de Estado da Estrela de Nêutros*)
```

```
 $\bar{\epsilon}[r_] = A_{NR} \bar{\rho}[r]^{3/5} + A_R \bar{\rho}[r]$ ;
```

```
 $A_{NR} = 2.4216$ ;
```

```
 $A_R = 2.8663$ ;
```

```
estilo3 = {Red, Dashing[Tiny]};
```

```
RMList3 = {};
```

```

(*Pressão Central*)
p̄₀ = 0.01 (*N/m²*);

(*Equação diferencial a ser resolvida para o modelo de HWANG-NOH*)

Do[{
  sol3 = NDSolve[{{p̄'[r] ==  $\frac{-\alpha * \bar{\epsilon}[r] * \bar{M}[r]}{r^2} * \left(1 + \frac{\bar{p}[r]}{\bar{\epsilon}[r]}\right)$ , M'[r] ==  $\beta * r^2 * \bar{\epsilon}[r]$ ,
    p̄[r₀] == p̄₀, M[r₀] == 0.0}, {p̄, M}, {r, r₀, z}, MaxSteps → 20 000];
  Pressão = Re[p̄[z] /. sol3];
  Massa = Re[M[z] /. sol3];
  If[Pressão[[1]] < 0, Break[], {raioMax = z, massaMax = Massa[[1]]}],
  {z, 0.01, 50.0, 0.01}];
Rmlist3 = Append[Rmlist3, {p̄₀, raioMax, massaMax}];

Print["p₀          R(km)          M(MSol)"]
Print[""]
Do [Print[ScientificForm[Rmlist3[[1, 1]], {12, 2}], " ",
  PaddedForm[Rmlist3[[1, 2]], {8, 1}], PaddedForm[Rmlist3[[1, 3]], {10, 4}]]

(*Encontramos para uma determinada
  pressão central uma massa máxima e um raio máximo*)

(*Resolvemos de forma semelhante a equação diferencial para o caso Newtoniano,
  Neo-Newtoniano e Tov*)

(* Para comparar as pressões máximas obtidas pelos modelos estudados,
  para uma determinada pressão central, utilizamos o código*)

<< PlotLegends`
Plot[{Evaluate[p̄[r] /. sol1], Evaluate[p̄[r] /. sol2],
  Evaluate[p̄[r] /. sol3], Evaluate[p̄[r] /. sol4]}, {r, r₀, raioMax}, PlotStyle →
  {Directive[estilo1], Directive[estilo2], Directive[estilo3], Directive[estilo4]},
  PlotLegend → {"TOV", "NEO-NEWTONIANO", "HWANG/NOH", "NEWTONIANO"},
  LegendPosition → {1.0, -.8}, LegendOrientation → Vertical,
  (*LegendBackground→LightPurple,*) LegendShadow → None,
  LegendSize → 0.9, PlotRange → Full, Frame → True,
  FrameLabel → {StyleForm["r(km)", "Subsection"], StyleForm["p̄", "Subsection"]}]

```

(\* Para comparar as massas máximas obtidas pelos modelos estudados, utilizamos o código\*)

```
<< PlotLegends`
Plot[{Evaluate[M[r] /. sol1], Evaluate[M[r] /. sol2],
      Evaluate[M[r] /. sol3], Evaluate[M[r] /. sol4]}, {r, r0, 13.4}, PlotStyle ->
      {Directive[estilo1], Directive[estilo2], Directive[estilo3], Directive[estilo4]},
PlotLegend -> {"TOV", "NEO-NEWTONIANO", "HWANG/NOH", "NEWTONIANO"},
LegendPosition -> {1.0, -.8}, LegendOrientation -> Vertical,
LegendShadow -> None, LegendSize -> 0.9, PlotRange -> Full, Frame -> True,
FrameLabel -> {StyleForm["r(km)", "Subsection"], StyleForm["M", "Subsection"]}]
```

(\*Uma vez encontrado as massas e os raios máximos para os modelos estudados, variaremos a pressão central a fim de encontrar novos valores de massa e raios máximos\*)

(\*No caso a seguir faremos especificamente para o modelo de Hwang-Noh\*)

```
estilo3 = {Blue, Dashing[{0.03, 0.02}]};
```

```
RMlist3 = {};
```

```
imin = -12;
```

```
imax = 16;
```

```
iloop = 1 + (imax - imin);
```

```
Do[{p0 = 10.0-i/4,
```

```
Do[{
```

```
sol3 = NDSolve[{p'[r] ==  $\frac{-\alpha * M[r]}{r^2} * (\bar{\epsilon}[r] + \bar{p}[r])$ , M'[r] ==  $\beta * r^2 * \bar{\epsilon}[r]$ ,
```

```
  p[r0] == p0, M[r0] == 0.0}, {p, M}, {r, r0, z}, MaxSteps -> 20 000];
```

```
Pressão = Re[p[z] /. sol3];
```

```
Massa = Re[M[z] /. sol3];
```

```
If[Pressão[[1]] < 0, Break[], {raioMax = z, massaMax = Massa[[1]]}],
{z, 0.01, 50.0, 0.01}];
```

```
RMlist3 = Append[RMlist3, {p0, raioMax, massaMax}];]; {i, imin, imax}
```

```

Print["p0          R(km)          M(Msol) "]
Print[""]
Do [Print[PaddedForm[RList3[[i, 1]], {12, 7}],
    " ", PaddedForm[RList3[[i, 2]], {6, 2}],
    PaddedForm[RList3[[i, 3]], {7, 3}]], {i, iloop}]

(*O código acima imprimirá um conjunto de massas
e raios máximos para diferentes pressões centrais*)

(*O comando abaixo organiza esses dados em uma tabela*)

tabela3 = {};
Do[If[RList3[[i, 3]] < 26, If[RList3[[i, 3]] > 0,
    tabela3 = Append[tabela3, {RList3[[i, 2]], RList3[[i, 3]]}], {i, 1, 29}]
MatrixForm[tabela3]

(*Em seguimos plotamos um gráfico massa
máxima em função do raio da tabela anterior*)

```

```

ListPlot[{tabela3}, Joined → {True}, PlotStyle → {Directive[estilo3]},
PlotRange → {{0, 25}, {0, 1.9}}, Frame → True, FrameLabel →
{StyleForm["R(km)", "Subsection"], StyleForm["M/Msol", "Subsection"]}]

```

(\*Fazemos o mesmo para os modelos newtonianos, neo-newtoniano e Tov\*)

```

ListPlot[{tabela1, tabela2, tabela3, tabela4},
Joined → {True, True, True, True}, PlotStyle →
{Directive[estilo1], Directive[estilo2], Directive[estilo3], Directive[estilo4]},
PlotLegend → {"TOV", "NEO-NEWTONIANO", "HWANG/NOH", "NEWTON"},
LegendPosition → {1.0, -1.0}, LegendOrientation → Vertical,
(*LegendBackground→LightPurple,*) LegendShadow → None, LegendSize → 0.9,
PlotRange → {{0, 25}, {0, 1.9}}, Frame → True, FrameLabel →
{StyleForm["R(km)", "Subsection"], StyleForm["M/Msol", "Subsection"]}]

```

## Apêndice B

# Equações Fluidodinâmicas

Seguem em anexo as equações hidrodinâmicas estudadas na dissertação. Note que no limite em que  $c \rightarrow \text{inf}$  as equações de Hwang-Noh e Neo-Newtoniana se reduzem ao modelo Newtoniano

### B.1 Equação de Euler

Newtoniana

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi = -\frac{\nabla p}{\rho} \quad (\text{B.1})$$

Neo-Newtoniana

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi = -\frac{\nabla p}{\rho + p/c^2} \quad (\text{B.2})$$

Hwang-Noh

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \phi = -\frac{1}{\rho + p/c^2} \left[ \nabla p + \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right] \quad (\text{B.3})$$

### B.2 Equações de Continuidade

Newtoniana

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Neo-Newtoniana

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \left[ \left( \varrho + \frac{p}{c^2} \right) \mathbf{v} \right] = 0 \quad (\text{B.5})$$

Hwang-Noh

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \left[ \left( \varrho + \frac{p}{c^2} \right) \mathbf{v} \right] = \frac{2}{c^2} \nabla p \quad (\text{B.6})$$

### B.3 Equações de Poisson

Newtoniana

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{B.7})$$

Neo-Newtoniana

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G (\varrho + 3p) \quad (\text{B.8})$$

Hwang-Noh

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \varrho \quad (\text{B.9})$$