

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Física
Programa de Pós-Graduação em Física
Nível Mestrado

Igor Figueiredo Justo

Formação de Estrutura em Larga Escala em Regime Não Linear

Vitória
2012

Igor Figueiredo Justo

Formação de Estrutura em Larga Escala em Regime Não Linear

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física, pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Sergio Vitorino
de Borba Gonçalves

Vitória

2012

À minha família.

Agradecimentos

A conclusão deste trabalho deve-se principalmente à Roseli Figueiredo Justo e Edilberto Graça Justo. Não somente a finalização de mais uma etapa da minha carreira profissional, mas também a formação de um cidadão consciente e responsável, devo aos meus pais. Muito obrigado, mãe, pelo amor, carinho e educação que você me deu.

Devo também grande parte da minha formação pessoal à minha irmã, Glaucia, que foi (e continua sendo) a melhor amiga que eu pude ter, jamais impondo-se como primogênita, mas sempre me mostrando o caminho certo. Agradeço também ao Elias, o irmão caçula que chegou em nosso lar para nos alegrar e fazer esquecer dos problemas externos. Obrigado meus irmãos por estarem sempre ao meu lado.

Obrigado Juliana, por ser uma companheira carinhosa e dedicada, me apoiando nos momentos mais difíceis e compartilhando as horas mais agradáveis. A você, devo a minha felicidade diária.

Agradeço aos meus amigos pessoais, Judismar, André e Diego, que me concederam ótimos momentos de descontração e ouviram inúmeras vezes meus lamentos. Em especial, agradeço ao Judismar e ao André por dispensarem horas me acompanhando ao café e por contribuírem substancialmente para a conclusão deste trabalho. Quero agradecer também à Juliana que, sendo uma ótima assistente social, contribuiu em muitos pontos na síntese deste trabalho. Da mesma forma agradeço aos meus professores e colegas de graduação e pós-graduação por contribuírem significativamente na minha formação profissional.

Agradeço ao meu orientador, Sergio Vitorino, que por mais de quatro anos de convivência me ensinou, com paciência infinita, muito do que sei. Obrigado pelas cobranças, pelos conselhos e pelos momentos de descontração fundamentais nas horas duras que a pesquisa nos traz.

Agradeço aos membros da banca, por terem aceitado o convite e por se disponibilizarem a melhorar não somente essa dissertação mas também a minha formação profissional.

Agradeço finalmente ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pelo apoio financeiro.

Resumo

A utilização de instrumentos ópticos de longo alcance na observação do universo revela a existência de uma curiosa estrutura constituída por regiões aparentemente vazias, aglomerados e superaglomerados de galáxias. O processo de formação dessa enorme estrutura, conhecida como estrutura cosmológica em larga escala, constitui uma importante ferramenta de teste dos vários modelos cosmológicos existentes. Em geral empregamos o método perturbativo no estudo da formação dessas estruturas, no qual consideramos uma expansão da densidade de matéria em termos de uma pequena flutuação. O período evolutivo em que podemos considerar apenas até o termo linear dessa expansão é conhecido como evolução em regime linear. Devido à instabilidade gravitacional, essa pequena flutuação aumenta até um certo ponto em que a aproximação linear não é mais viável. Dizemos então que a evolução dessas estruturas encontra-se em um regime não linear. Neste trabalho faremos uma revisão detalhada de alguns métodos analíticos desenvolvidos para o estudo da evolução não linear das flutuações da densidade de matéria, obtendo os principais formalismos de cada método e expondo-os de forma intuitiva e gradual de forma que um leitor inexperiente no assunto consiga compreender e, possivelmente, utilizar este material.

Abstract

The use of long range optical instruments shows the existence of an amazing structure constituted of empty regions interspersed with galaxies, clusters and superclusters of galaxies. The formation process of this large scale structure is an important tool for testing many existing cosmological models. In general one applies the perturbative method to study this formation, considering an expansion of the matter density in terms of small fluctuations. The part of the evolution period in which we can consider only linear terms of the expansion is known as the linear evolution regime. Due to gravitational instability, the small fluctuations become stronger, until the linear approximation turns impracticable. Then we can say that the evolution is in a non linear regime. In the present work we make a detailed revision of the principal analytical method developed to the study of the non linear evolution of matter density fluctuations, obtaining the principal outcomes and exposing them in an intuitive and gradual manner such that even an unfamiliar reader in the subject will be able to understand.

Sumário

1	Introdução	p. 9
2	Evolução Linear das Perturbações Cosmológicas	p. 12
2.1	Alguns resultados do universo homogêneo e isotrópico	p. 13
2.2	Perturbações Lineares Newtonianas	p. 15
2.2.1	Perturbações no referencial comóvel	p. 18
2.2.2	Expansão em ondas planas	p. 20
3	Aproximação Esférica	p. 22
3.1	Aproximação Esfericamente Simétrica	p. 23
3.1.1	Modelo newtoniano	p. 23
3.1.2	Modelo Relativístico	p. 42
4	Aproximação de Zel'dovich	p. 50
4.1	Método aproximativo de Zel'dovich	p. 50
4.1.1	Algumas ponderações sobre a aproximação de Zel'dovich	p. 54
4.2	Teoria lagrangiana da instabilidade gravitacional: uma generalização do modelo de Zel'dovich	p. 55
4.2.1	Teoria lagrangiana das equações de movimento newtoniano.	p. 56
4.2.2	Referencial comóvel no formalismo lagrangiano	p. 66
4.2.3	Algumas ponderações sobre essa generalização.	p. 73

5	Modelo de Adesão Gravitacional	p. 76
5.1	Análise do modelo mediante valores de ν	p. 84
5.1.1	Método $\nu \rightarrow 0$	p. 84
5.1.2	Método ν finito	p. 87
6	Método de Simulação N-corpos	p. 88
6.1	Método <i>Particle/particle</i>	p. 89
6.2	Algoritmo <i>Particle-Mesh</i>	p. 91
6.3	Método hierárquico em árvore	p. 92
6.4	Outros métodos	p. 93
7	Considerações finais	p. 94
	Apêndice A – Teorema de Birkhoff	p. 96
A.1	Derivada de Lie e os Vetores de Killing	p. 97
A.2	O elemento de linha	p. 98
A.3	As equações de campo de Einstein	p. 100
A.4	Análise do teorema de Birkhoff	p. 103
	Apêndice B – Método <i>Steepest Descent</i>	p. 105
	Referências Bibliográficas	p. 110

1 *Introdução*

A natureza dos corpos celestes, bem como a sua dinâmica e distribuição no espaço, é uma das questões que mais intrigam a humanidade, desde as primeiras civilizações até os dias atuais. É bem verdade que a ciência evoluiu muito ao longo da história, esclarecendo algumas dessas questões, como a evolução estelar, mas não o suficiente a ponto de sanar todas. A utilização de instrumentos ópticos de longo alcance na observação do universo revela a existência de uma curiosa estrutura constituída por regiões aparentemente vazias, aglomerados e superaglomerados de galáxias [1, 2]. O processo de formação dessa enorme estrutura, conhecida como estrutura cosmológica em larga escala, será o foco dessa dissertação.

A fim de analisar a formação dessas estruturas, utilizaremos o método perturbativo que considera uma expansão em termos de flutuações da densidade de matéria em torno de um universo homogêneo e isotrópico, análogo a uma expansão de Taylor. O sucesso dessa teoria deve-se às observações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) que indica inhomogeneidades primordiais no campo de matéria impressas como pequenas flutuações da temperatura. De acordo com os dados observacionais da RCF, podemos considerar que as grandes estruturas evoluíram, via instabilidade gravitacional, a partir de flutuações da densidade de matéria. Essa consideração inicial nos permite ignorar a princípio, na expansão perturbativa, termos de ordem igual ou superior ao de segunda ordem, fazendo assim uma aproximação linear. Por atração gravitacional, maior nos pontos onde a densidade é maior, as partículas irão se aproximar aumentando ainda mais a densidade local, num processo denominado instabilidade gravitacional.

Em 1929, Edwin Hubble publicou resultados observacionais que indicavam uma expansão homogênea e isotrópica do universo, ou seja, a taxa de expansão, por ele encontrada, era a mesma em todos os pontos [3]. Segundo o método perturbativo, a expansão das

regiões onde há acréscimo de densidade de matéria ocorre a uma taxa menor, devido à atração gravitacional, em contraste com as regiões rarefeitas, induzindo um possível colapso nesta região, formando as estruturas compactas. Essa aglomeração de matéria avança até alcançar níveis onde a aproximação linear não é mais válida, obrigando-nos a considerar termos não lineares previamente ignorados.

Temos, portanto, a existência de dois períodos evolutivos: o período de evolução linear, onde a aproximação linear é suficiente, e o período de evolução não linear, onde os termos perturbativos de ordem superior ao termo linear devem ser considerados. O primeiro desses períodos possui um tratamento matemático mais simples em comparação ao período não linear, sendo portanto muito mais explorado e conhecido. Apesar da dificuldade matemática encontrada no estudo do período não linear, alguns métodos aproximativos analíticos foram desenvolvidos a fim de amenizar este problema técnico, obtendo resultados qualitativamente satisfatórios. Uma alternativa às aproximações analíticas é a utilização de métodos numéricos, que possuem a precisão dos resultados limitada à capacidade do equipamento computacional [4].

Destinado a fornecer o conhecimento necessário ao desenvolvimento de pesquisas em formação de estruturas em larga escala, este trabalho possui como principal objetivo a exposição detalhada alguns métodos analíticos desenvolvidos para o estudo da evolução não linear das perturbações, servindo como ponto de partida aos iniciantes neste tema, fornecendo-lhes uma base consistente para um futuro trabalho mais profundo. E neste sentido, os métodos analisados foram distribuídos em cada capítulo seguindo uma ordem crescente no que tange ao ajuste à realidade, de forma que o método de N-corpos, disposto no capítulo 6, aproxima-se muito mais da realidade que o disposto no capítulo 3.

Em resumo, no capítulo 2 apresentamos o método perturbativo linear, que descreve a evolução linear das perturbações, e derivamos detalhadamente os principais resultados, a fim de evidenciar as diferenças entre os períodos evolutivos. Em seguida, no capítulo 3, exploramos cuidadosamente o primeiro método aproximativo analítico destinado a descrever a evolução não linear das perturbações, denominado Aproximação Esférica, em duas abordagens distintas, newtoniana e relativística. No capítulo 4, apresentamos o método newtoniano proposto por Zel'dovich, no qual temos a previsão da formação de estruturas denominadas panquecas, bidimensionais, planas e desprovidas de rotação. Ainda no

capítulo 4, essa ausência de rotação será corrigida por uma generalização do método de Zel'dovich. No capítulo 5 apresentamos uma solução para o problema da espessura infinitesimal de estruturas bidimensionais. O método de adesão gravitacional consiste em adicionar uma viscosidade artificial ao modelo de Zel'dovich, resultando na previsão da formação de três tipos distintos de estruturas, as panquecas, os aglomerados e os filamentos, todos com espessura finita, concordando com as observações do projeto SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*). No capítulo 6, apresentamos alguns dos principais métodos computacionais utilizados para simular a formação de estruturas em larga escala, conhecidos em geral por modelos de N-corpos. Finalmente, no capítulo 7 faremos algumas considerações a respeito desses vários modelos de formação de estruturas em larga escala, destacando vantagens e desvantagens de cada um, fazendo ao mesmo tempo projeções para futuros trabalhos. Incluímos ainda o apêndice A, no qual demonstramos o teorema de Birkhoff, e o B, onde descrevemos o método *Steepest Descent*, útil em alguns modelos computacionais.

2 *Evolução Linear das Perturbações Cosmológicas*

Neste capítulo analisaremos o período de evolução linear da perturbação da densidade de matéria pelo método perturbativo. Adotaremos um modelo cosmológico composto somente por matéria escura fria (CDM, do inglês *Cold Dark Matter*), cuja pressão é nula, e um universo plano, onde o parâmetro de densidade $\Omega = \frac{8\pi G\bar{\rho}}{3H^2} = 1$ ($\bar{\rho}$ é a densidade de matéria escura fria do universo homogêneo). Será extremamente útil a definição e utilização, durante todo o trabalho, de uma quantidade adimensional que indique a intensidade da perturbação na distribuição de matéria. Essa quantidade, denominada contraste da densidade de matéria, é dada pela expressão¹

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \quad (2.1)$$

onde $\delta\rho$ é a flutuação infinitesimal da densidade total e δ é o contraste.

Durante este período linear da evolução da perturbação, temos $\delta \ll 1$, permitindo-nos fazer uma aproximação linear da perturbação pelo método perturbativo. O estudo da evolução perturbativa com $\delta \geq 1$ será feito nos capítulos seguintes. De agora em diante, utilizaremos a definição de dois períodos evolutivos da perturbação: evolução linear, quando $\delta \ll 1$, e não linear, quando $\delta \geq 1$.

Rigorosamente, o estudo das perturbações cosmológicas seria feito pela Relatividade Geral (RG) [5]. Contudo, é possível fazer uma aproximação Newtoniana, sob certas circunstâncias, de modo a simplificar os cálculos, fornecendo-nos um panorama geral da evolução da perturbação.

¹Daqui por diante, sempre que fizermos referência ao contraste de densidade utilizaremos essa definição.

A formação das estruturas cosmológicas ocorre durante um período evolutivo do universo no qual a matéria, que é o componente de pressão nula, é predominante. Focaremos em perturbações cujo comprimento de onda da perturbação, λ , é menor que o horizonte de Hubble $H^{-1}(t)$, onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble. Essas são as circunstâncias que tornam válida a abordagem newtoniana, e que portanto será adotada [6, 7].

Por considerarmos um universo plano e uma aproximação linear da perturbação, podemos expandir as perturbações da pressão p , da velocidade \mathbf{V} , da densidade de matéria ρ e do potencial gravitacional escalar ϕ em ondas planas, como por exemplo

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{k} \delta\rho(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{k} é denominado vetor de onda e $\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}$ é o comprimento de onda da onda plana.

2.1 Alguns resultados do universo homogêneo e isotrópico

Antes de mais nada, obteremos alguns resultados importantes do universo não perturbado, como a evolução temporal do fator de escala e o parâmetro de Hubble.

A evolução de um fluido perfeito é descrita pela mecânica Newtoniana pelo seguinte conjunto de equações:

(1) equação da continuidade,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{V}}) = 0, \quad (2.3)$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade de matéria escura no universo não perturbado e $\bar{\mathbf{V}}$ é a velocidade física (não comóvel) neste mesmo universo² das partículas deste fluido;

(2) equações de Euler, dadas por

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} = -\nabla \bar{\phi}, \quad (2.4)$$

²Os referenciais físicos são aqueles que não acompanham a expansão do universo, ao contrário dos referenciais comóveis.

sendo ∇ o operador diferencial nabla no referencial físico e $\bar{\phi}$ o potencial escalar gravitacional;

(3) equação de Poisson, que define o potencial escalar gravitacional,

$$\nabla^2 \bar{\phi} = 4\pi G \bar{\rho} \quad (2.5)$$

e por fim,

(4) equação de estado,

$$\omega = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} = 0, \quad (2.6)$$

onde \bar{p} é a pressão do fluido em um universo homogêneo. Estamos considerando fluido cuja pressão é nula.

Devido à homogeneidade e isotropia do universo não perturbado, a densidade de matéria e o campo de velocidades são dados por

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(t) \quad (2.7)$$

e

$$\bar{\mathbf{V}} = H(t) \mathbf{r}, \quad (2.8)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble definido por $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, sendo que $a(t)$ é o fator de escala, e \mathbf{r} é o vetor posição no referencial físico. A equação (2.8), denominada lei de Hubble, foi obtida observacionalmente por Edwin Hubble e evidencia, em caráter aproximativo, a expansão homogênea e isotrópica do universo [3].

Substituindo (2.8) em (2.3), temos a expressão da conservação de matéria não relativística,

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3H(t) \bar{\rho} = 0. \quad (2.9)$$

Tomando o divergente de (2.4) e utilizando (2.8), obtemos

$$\dot{H}(t) + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}, \quad (2.10)$$

cuja integração no tempo fornece uma equação equivalente à equação de Friedmann,

$$H^2(t) = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}. \quad (2.11)$$

Resolvendo (2.9) para o fator de escala $a(t)$, obtemos

$$\bar{\rho}(t) = \bar{\rho}_0 a(t)^{-3}, \quad (2.12)$$

onde $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(t_0)$, sendo t_0 o instante (hoje) no qual escolhemos $a(t_0) \equiv 1$, e aplicando o resultado (2.12) em (2.11) encontramos a dependência temporal do fator de escala como sendo

$$a(t) = \frac{3}{2} \left(\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}_0 \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.13)$$

Portanto, a dependência temporal do parâmetro de Hubble é dada por

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (2.14)$$

Com esses resultados, faremos na próxima seção uma expansão linear em termos de pequenas flutuações sobre este universo homogêneo e isotrópico.

2.2 Perturbações Lineares Newtonianas

De acordo com o método perturbativo, cada quantidade que descreve o universo (p , ρ , \mathbf{V} e ϕ) será escrita como a soma de um termo referente ao universo homogêneo com um termo de perturbação, da seguinte maneira,

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{r}, t) = \bar{\rho}(t) [1 + \delta(\mathbf{r}, t)] \\ p(\mathbf{r}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \\ \phi(\mathbf{r}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{r}, t) + \varphi(\mathbf{r}, t), \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $\delta = \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1$ é o contraste de densidade e, por hipótese, $\delta \ll 1$, $\delta p \ll \bar{p}$ e $\mathbf{v} \ll \bar{\mathbf{V}}$.

O passo seguinte consiste em aplicar as seguintes substituições nas equações (2.3), (2.4) e (2.5): $\bar{\rho} \rightarrow \rho$, $\bar{p} \rightarrow p$, $\bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{V}$ e $\bar{\phi} \rightarrow \phi$, transformando-as em equações perturbadas.

(1) Equação perturbada da conservação de matéria:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} + \bar{\rho}\delta) + \nabla \cdot [(\bar{\rho} + \bar{\rho}\delta)(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v})] = 0. \quad (2.16)$$

Utilizando (2.3) e desprezando os termos de segunda ordem em δ , \mathbf{v} e os termos cruzados $\mathbf{v}\delta$, obtemos

$$\delta \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \bar{\rho} \delta \nabla \cdot \bar{\mathbf{V}} + \rho_0 \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \delta = 0, \quad (2.17)$$

sendo que, pela lei de Hubble, $\nabla \cdot \mathbf{V}_H = 3H(t)$. Assim, a expressão acima reduz-se a

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} + \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla \delta \right) + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} + \delta \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho} \delta \frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (2.18)$$

(2) Equação de Euler perturbada:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}) + [(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}) \cdot \nabla](\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}) = -\nabla(\phi + \varphi) - \frac{(\bar{p} + \delta p)}{\bar{\rho} + \bar{\rho}\delta}, \quad (2.19)$$

onde utilizaremos a expansão

$$(\bar{\rho} + \bar{\rho}\delta)^{-1} = \frac{(1 + \delta)^{-1}}{\bar{\rho}} \simeq \frac{1 - \delta}{\bar{\rho}}, \quad (2.20)$$

resultando em

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}) + [(\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}) \cdot \nabla](\bar{\mathbf{V}} + \mathbf{v}) = -\nabla(\phi + \varphi) - \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho}} - \frac{\delta}{\bar{\rho}}(1 - \delta). \quad (2.21)$$

Utilizando (2.4) e desconsiderando termos não lineares em \mathbf{v} , δ , φ e δp , além de termos cruzados entre eles, ficamos com

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} = -\nabla \varphi - \frac{\nabla \delta p}{\bar{\rho}}, \quad (2.22)$$

onde, recordando que $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$, o último termo do lado direito pode ser reescrito como

$$\frac{\nabla \delta p}{\bar{\rho}} = \nabla \left(\frac{\delta p}{\bar{\rho}} \right) = c_s^2 \nabla \delta, \quad (2.23)$$

na qual, $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ é a velocidade de propagação no meio. Ainda na equação (2.22), o termo $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_H$ pode ser reduzido à expressão

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} = H \mathbf{v}, \quad (2.24)$$

pois $(\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial q_{ci}} = \frac{1}{a} (\nabla_c)_i$ enquanto $\bar{\mathbf{V}} = \frac{da(t)\mathbf{q}}{dt}$. A coordenada \mathbf{q} é a coordenada lagrangiana da partícula do meio, definida pela relação com a coordenada física (ou euliana) por $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = a(t)\mathbf{q}$. A expressão 2.24 reduz-se, portanto, a³

$$v_i \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial q_i}, \quad (2.25)$$

resultando na equação (2.24).

Finalmente, após as considerações (2.23) e (2.24) aplicadas em (2.22), a equação de Euler perturbada em primeira ordem fica da seguinte maneira,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + H(t) \mathbf{v} + c_s^2 \nabla \delta = -\nabla \varphi. \quad (2.26)$$

(3) Equação de Poisson perturbada:

$$\nabla^2 (\bar{\phi} + \varphi) = 4\pi G \bar{\rho} (1 + \delta), \quad (2.27)$$

e utilizando a equação de Poisson no universo não perturbado (2.5), podemos reescrever (2.27) como

³O subscrito c refere-se à coordenada comóvel, discutida na próxima seção.

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi G \bar{\rho} \delta . \quad (2.28)$$

Observe que não houve a necessidade de fazer aproximações lineares nesta equação.

2.2.1 Perturbações no referencial comóvel

A vantagem de expandir as perturbações em ondas planas está em obtermos uma equação diferencial ordinária (EDO) para o contraste δ em termos do vetor de onda \mathbf{k} , após desacoplar as equações (2.18), (2.26) e (2.28). Entretanto, a presença do campo de velocidades do universo homogêneo \mathbf{V}_H impede a obtenção dessa EDO.

A mudança do referencial físico (também chamado euleriano) para o referencial comóvel (que neste caso coincide com o lagrangiano⁴) remove o inconveniente causado pelo campo \mathbf{V}_H . A regra de transformação entre os referenciais físico e comóvel é dada por

$$\mathbf{r} = a(t) \mathbf{q}_c , \quad (2.29)$$

onde \mathbf{q}_c é a coordenada comóvel de uma partícula do meio.

As quantidades que dependem diretamente do sistema de coordenadas modificam-se, na troca de referencial da seguinte maneira,

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial r_j} \Rightarrow \nabla_c = a(t) \nabla \quad (2.30)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} - \bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla , \quad (2.31)$$

portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} - H(t) \mathbf{q}_c \cdot \nabla_c , \quad (2.32)$$

pois $\bar{\mathbf{V}} = \dot{a} \mathbf{q}_c$.

⁴Maiores detalhes sobre referenciais euleriano, lagrangiano e comóvel encontram-se no capítulo 4.

Sendo assim, as equações (2.18), (2.26) e (2.28) serão reescritas, nesta ordem, no referencial comóvel como

$$\dot{\delta} + \left(\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a} \right) \delta = -\frac{\nabla_c \cdot \mathbf{v}}{a}, \quad (2.33)$$

onde o segundo termo do lado esquerdo é nulo, devido ao resultado (2.12),

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a}\nabla_c \delta = -\frac{\nabla_c \varphi}{a} \quad (2.34)$$

e

$$\nabla_c^2 \varphi = 4\pi G \rho_H a^2 \delta. \quad (2.35)$$

Visando um futuro desacoplamento entre essas três equações, tomaremos o divergente de (2.34) e a derivada temporal de (2.33), resultando em

$$\ddot{\delta} - \frac{\dot{a}}{a^2} \nabla_c \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{a} \frac{d}{dt} \nabla_c \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \nabla_c \cdot \mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a} \nabla_c \cdot \mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla_c^2 \delta = -\frac{\nabla_c^2 \varphi}{a} \quad (2.37)$$

e por último, a equação (2.35) que manteremos inalterada,

$$\nabla_c^2 \varphi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta. \quad (2.38)$$

Para finalmente desacoplar as três equações, substituiremos (2.38) em (2.37), e a expressão resultante substituiremos em (2.36), obtendo uma equação diferencial parcial para o contraste,

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla_c^2 \delta - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0, \quad (2.39)$$

na qual também utilizamos (2.33).

2.2.2 Expansão em ondas planas

A expansão em ondas planas, permitida pela escolha de um universo plano perturbado linearmente, é feita mediante a transformação de Fourier das perturbações

$$\delta\xi_i(\mathbf{q}_c, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3\mathbf{k} \delta\xi_i(\mathbf{k}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}_c}, \quad (2.40)$$

onde

$$\delta\xi_i = \begin{cases} \delta, & \text{se } i = 1; \\ \delta p, & \text{se } i = 2; \\ \mathbf{v}, & \text{se } i = 3; \\ \varphi, & \text{se } i = 4. \end{cases} \quad (2.41)$$

Em particular, como a equação (2.39) envolve apenas o contraste e suas derivadas, somente será necessária a transformação de Fourier de δ (dada por $\delta\xi_1 = \delta$ em (2.40)). Sendo assim, (2.39) reduz-se a

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{c_s^2|\mathbf{k}|^2}{a^2} - 4\pi G\bar{\rho} \right) \delta_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.42)$$

que é uma equação diferencial ordinária do contraste.

A solução de (2.42) depende do valor do comprimento de onda da perturbação, sendo que $|\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$. Essa dependência tem como parâmetro o comprimento de onda de Jeans, ou comprimento de onda crítico, definido como o comprimento de onda que anula o termo dependente de $\delta_{\mathbf{k}}$,

$$\lambda_{J_c} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}. \quad (2.43)$$

Se $\lambda \ll \lambda_{J_c}$, então a solução da equação diferencial é uma onda sonora, cuja velocidade é c_s . Por outro lado, se $\lambda \gg \lambda_{J_c}$, então podemos desprezar o termo $\frac{c_s^2|\mathbf{k}|^2}{a^2}$ de (2.42), mediante domínio do termo gravitacional.

Considerando a última situação, buscaremos por soluções de (2.42) cuja dependência temporal seja do tipo lei de potência, como o fator de escala, que é dado por (2.13).

Portanto, como a solução geral é uma combinação linear dessas soluções, ela será dada por

$$\delta(\mathbf{k}, t) = C_1 \left(\frac{t}{t_0} \right)^m + C_2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^n, \quad (2.44)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração e $t_0 = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{3} \pi G \bar{\rho}_0 \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Substituindo em (2.42) o *ansatz* de uma das soluções, por exemplo, a solução cujo coeficiente é C_1 , obtemos $m = \frac{2}{3}$ e $m = -1$. Portanto, a solução geral (2.44) ficará da seguinte maneira,

$$\delta(\mathbf{k}, t) = C_1 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} + C_2 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-1}. \quad (2.45)$$

Essa é a forma como a perturbação da densidade de matéria evolui com o tempo. Observe que para cada vetor de onda $|\mathbf{k}|$ a equação (2.44), que descreve o comportamento da onda, prevê uma solução decrescente (cujo expoente é -1) e uma crescente (de expoente $\frac{2}{3}$). Nos próximos capítulos, onde trataremos a evolução dessas perturbações em regime não linear, assumiremos apenas a solução crescente.

3 *Aproximação Esférica*

No capítulo anterior vimos que a formação das estruturas cosmológicas pode ser abordada pelo método perturbativo. Observações da radiação cósmica de fundo e das estruturas em larga escala atualmente existentes evidenciam duas etapas evolutivas da perturbação: uma linear, onde o contraste da densidade de matéria, definido em (2.1), é $\delta \ll 1$, e uma não linear, onde o contraste é $\delta \geq 1$.

Durante a análise do período de evolução linear, feita no capítulo 2, pudemos expandir as perturbações em ondas planas, graças à linearidade da equação diferencial da dinâmica do contraste de matéria tornando-a uma EDO de segunda ordem. Contudo, não podemos contar com este artifício durante o período de evolução não linear. Nessa fase, onde $\delta \geq 1$, não poderemos considerar apenas contribuições em primeira ordem (lineares) das perturbações. Devemos, ao invés, considerar termos de ordens mais altas, resultando em uma equação não linear da dinâmica do contraste de densidade, impedindo a expansão em ondas planas. Precisamos, portanto, de um método aproximativo que simplifique este cenário não linear, tornando-o matematicamente tratável, de maneira que possa ser descrito por equações que tenham soluções analíticas, a fim de obtermos uma primeira visão do cenário obtido.

Enfim, este capítulo é destinado ao estudo do método aproximativo (analítico) esfericamente simétrico, que possui como principal vantagem a sua simplicidade, sendo utilizado frequentemente como primeira ferramenta no teste de modelos cosmológicos quanto à formação de estruturas, fornecendo, ainda que grosseiramente, alguns resultados qualitativos acerca do modelo em teste.

Utilizaremos um modelo cosmológico no qual o universo é composto somente por

CDM, cuja pressão é nula e pode ser tratada como gás perfeito ¹. Além disso, a utilização apenas de CDM nos permite desconsiderar efeitos de emissão de radiação e efeitos de pressão, que contrabalanceiam o colapso gravitacional, induzindo um equilíbrio durante a contração. Na ausência destes efeitos, e do equilíbrio virial (detalhado em 3.1.1), o valor da densidade de matéria tende ao infinito nas regiões de colapso. Na primeira seção desse capítulo abordaremos este processo pela mecânica newtoniana [7], enquanto que na última lançaremos mão da teoria da Relatividade Geral para explicar a evolução perturbativa com simetria esférica.

3.1 Aproximação Esfericamente Simétrica

3.1.1 Modelo newtoniano

Em termos gerais, podemos considerar que o universo é constituído por regiões densas, onde há maior concentração de matéria, e regiões rarefeitas. A principal hipótese do método aproximativo proposto neste capítulo é a simetria esférica das regiões densas, garantida durante toda a evolução da perturbação.

Antes de mais nada, vamos definir matematicamente o contraste de matéria, como em (2.15), por

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_H(\mathbf{r})(1 + \delta(\mathbf{r}, t)), \quad (3.1)$$

onde $\rho(\mathbf{r}, t)$ é a densidade de matéria escura fria medida no universo perturbado, ρ_H é a densidade pontual do universo não perturbado, \mathbf{r} é a coordenada lagrangiana de uma partícula do sistema e t é a coordenada temporal.

De acordo com o modelo cosmológico proposto, a evolução do contraste da densidade de matéria é dada, durante o período linear, por

$$\delta = C_1 \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}} + C_2 \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-1}, \quad (3.2)$$

¹De forma geral, matéria escura é um dos componentes do chamado setor escuro do universo. A principal característica deste componente, na formação de estruturas, é a sua não interação com o campo eletromagnético, havendo apenas interação gravitacional.

obtida em (2.45) como solução da equação da dinâmica do contraste de matéria. Na expressão acima, C_1 e C_2 são constantes de integração.

Como vimos no capítulo 2, a expansão em ondas planas somente é possível devido ao caráter linear da evolução das perturbações e por considerarmos o universo plano. A partir de (2.33) podemos definir a velocidade peculiar de uma partícula como a velocidade induzida pela instabilidade gravitacional, que por sua vez é gerada pela perturbação da densidade de matéria. Portanto, após a expansão em ondas planas, a velocidade peculiar fica da seguinte maneira

$$V = i \frac{\dot{\delta}}{k}, \quad (3.3)$$

onde o ponto indica derivação com relação ao tempo cósmico e k é o módulo do vetor de onda. Com a solução (3.2), podemos reescrever (3.3) da seguinte maneira,

$$V = \frac{i}{k} \left[\frac{2}{3} C_1 \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-\frac{1}{3}} - C_2 \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-2} \right]. \quad (3.4)$$

Uma das condições iniciais impostas ao sistema é a velocidade peculiar inicialmente nula,

$$V(t_i) = 0, \quad (3.5)$$

pois em t_i a perturbação é considerada nula, de modo que todas as partes do universo (ainda não perturbado) evoluem a uma mesma taxa $a(t)$, tendo todas, portanto, uma mesma velocidade de expansão.

Com isso, as constantes C_1 e C_2 de (3.2) relacionam-se de acordo com a expressão

$$C_1 = \frac{3}{2} C_2 \quad (3.6)$$

que, retornando à equação (3.2) calculada em t_i , fornece

$$C_1 = \frac{3}{5} \delta_i. \quad (3.7)$$

Substituindo este resultado novamente em (3.2), porém agora avaliada em $t > t_i$, podemos reescrevê-la em termos de uma única constante inicial δ_i ,

$$\delta = \frac{3}{5} \delta_i \left(\frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.8)$$

Vejamos qual o valor assumido pelo parâmetro de densidade $\Omega = \frac{8\pi G}{3H_i} \rho = \frac{\rho}{\rho_c}$ quando avaliado em $t = t_i$, escrito em termos do contraste inicial.

$$\Omega_i = \bar{\Omega}_i + \delta \Omega_i, \quad (3.9)$$

$$= \frac{\bar{\rho}_i(1 + \delta_i)}{\rho_c}, \quad (3.10)$$

$$= \bar{\Omega}_i(1 + \delta_i), \quad (3.11)$$

onde $\bar{\Omega}_i$ é o valor do parâmetro de densidade referente ao universo não perturbado calculado em $t = t_i$.

A condição de simetria esférica das regiões perturbadas, válida por hipótese durante toda a evolução, será imposta pelo método das cascas concêntricas: por hipótese, uma certa região densa é composta por cascas massivas de espessura infinitesimal e concêntricas. Para que essa simetria seja mantida durante a evolução desta região, vamos considerar que a taxa de expansão/contração de cada camada é a mesma. Como resultado, nunca haverá cruzamento entre cascas, de modo que a massa contida no interior de uma certa casca é constante no tempo, ou seja, $M(t) = M_i$.

Este é o cenário físico hipotético que facilitará o estudo da evolução não linear das perturbações cosmológicas. Portanto, a equação newtoniana do movimento de uma casca esférica de raio r será

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM_i}{r^2}, \quad (3.12)$$

onde

$$M_i = \bar{M}(t_i) + \delta M_i \quad (3.13)$$

e

$$\delta M_i = 4\pi \int_0^{r_i} \delta_i r^2 dr. \quad (3.14)$$

Para escrever a massa inicial em termos da perturbação da densidade, vamos definir o contraste inicial médio como

$$\langle \delta_i \rangle = \left(\frac{3}{r_i^3} \right) \int_0^{r_i} \delta_i r^2 dr, \quad (3.15)$$

de modo que a expressão da massa fica da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} M_i &= \bar{M}(t_i) + \bar{M}(t_i) \left(\frac{3}{r_i^3} \right) \int_0^{r_i} \delta_i r^2 dr \\ M_i &= \bar{M}(1 + \langle \delta_i \rangle). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Integrando (3.12) teremos a expressão newtoniana da conservação de energia,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM_i}{r} = E, \quad (3.17)$$

que de acordo com (3.16), pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{G\bar{M}_i(1 + \langle \delta_i \rangle)}{r} = E. \quad (3.18)$$

Na ausência de perturbação o universo evolui homogênea e isotropicamente de acordo com o fator de escala $a(t)$. Ao contrário, o universo perturbado não evolui homogeneamente, visto que a taxa de expansão das regiões mais densas diminui com o tempo, devido à interação gravitacional. Sendo assim, podemos esperar que, sob certas condições, a expansão nessas regiões irá cessar, dando início ao processo de colapso gravitacional. Essa condição de colapso será imposta sobre a energia, que é constante e dada por (3.17), e cujos possíveis valores serão analisados adiante.

- (1) $E = 0$ resulta em $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{GM_i(1 + \langle \delta_i \rangle)}{r}$. Ou seja, ao passo em que r aumenta, $\left(\frac{dr}{dt} \right)^2$ diminui proporcionalmente. Isso significa que a velocidade será nula, $\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 0$, somente quando $r \rightarrow \infty$. Portanto não haverá colapso para $E = 0$.

- (2) $E > 0$ implica em $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 > \frac{GM_i}{r}$. Neste caso, como a velocidade de expansão nunca seria nula, não haverá colapso.
- (3) $E < 0$, ao contrário dos dois primeiros casos, resulta em $\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 < \frac{GM_i}{r}$, que implica na existência de um instante em que $\frac{dr}{dt} = 0$. Assim, haverá um momento em que a velocidade de expansão será nula para, posteriormente, ocorrer um colapso. Este instante será chamado daqui em diante de instante de reversão.

O fato de a velocidade peculiar ser inicialmente nula faz com que o termo cinético da equação (3.17) esteja associado apenas à expansão homogênea e isotrópica do universo. E como a energia total do sistema mantém-se constante no tempo, podemos escrevê-la em termos do contraste inicial de matéria. A partir daí, pela condição de colapso, determinaremos um intervalo de possíveis valores para o contraste inicial de densidade.

Sendo assim, como em $t = t_i$ a região (futuramente) perturbada acompanha a evolução do universo não perturbado, a velocidade será dada pela lei de Hubble

$$\dot{r}_i = H(t_i)r_i, \quad (3.19)$$

resultando em uma energia cinética dada por

$$K_i = \frac{1}{2} (\dot{r}_i)^2 = \frac{H_i^2 r_i^2}{2}. \quad (3.20)$$

A energia potencial em $t = t_i$ ficará da seguinte maneira,

$$|U| = \frac{GM_i}{r_i}, \quad (3.21)$$

onde utilizaremos (3.16) para obter

$$|U| = \frac{4}{3} \pi G r_i^2 \bar{\rho}(t_i) (1 + \langle \delta_i \rangle). \quad (3.22)$$

Como $\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c}$, sendo $\rho_c = \frac{3H_i^2}{8\pi G}$ a densidade crítica do universo, temos

$$\begin{aligned}
|U| &= \frac{1}{2} H_i^2 r_i^2 \bar{\Omega}_i (1 + \langle \delta_i \rangle) \\
&= k_i \bar{\Omega}_i (1 + \langle \delta_i \rangle).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto, a expressão da energia total do sistema será reescrita da seguinte maneira,

$$E = k_i \bar{\Omega}_i [\bar{\Omega}_i^{-1} - (1 + \langle \delta_i \rangle)]. \tag{3.24}$$

Aplicando a condição de colapso, $E < 0$, obtemos, enfim, a condição sobre o contraste inicial de densidade

$$\langle \delta_i \rangle > \bar{\Omega}_i^{-1} - 1. \tag{3.25}$$

Como o parâmetro $\bar{\Omega}_i$ é a razão entre a densidade inicial de matéria do universo e a densidade crítica², vejamos como a condição de colapso comporta-se nos três casos distintos de geometria do universo, embora a abordagem newtoniana seja válida somente em um deles: $\bar{\Omega}_i = 1$, geometria plana; $\bar{\Omega}_i > 1$, geometria esférica e $\bar{\Omega}_i < 1$, geometria hiperbólica.

(i) Geometria plana ($\bar{\Omega}_i = 1$): do resultado (3.25), temos

$$\langle \delta_i \rangle > 0. \tag{3.26}$$

Entretanto, o contraste da densidade é por definição uma quantidade positiva. Isso significa que em um universo plano qualquer acréscimo na densidade de matéria resultará em um colapso.

Mais adiante consideraremos somente este caso, de universo plano, pois essa geometria é uma das condições necessárias para utilizarmos o formalismo newtoniano.

(ii) Hiperesféra ($\bar{\Omega}_i > 1$): existe um número $M \in \mathfrak{R}_+^*$ tal que $\langle \delta_i \rangle > M$.

²Densidade crítica é a densidade de um universo plano.

Mais uma vez, pela definição do contraste, qualquer acréscimo na densidade cumpre a condição de colapso.

- (iii) Hiperbólico ($\bar{\Omega}_i < 1$): $\exists M \in \mathfrak{R}_+^*$ tal que $\langle \delta_i \rangle > M$. Ou seja, existe uma densidade crítica sobre a qual a região densa irá colapsar. A região esférica com acréscimo de densidade irá expandir até alcançar um raio máximo, passando para uma etapa de contração.

Outro ponto importante neste método aproximativo é o instante em que a região esférica atinge o seu raio máximo, conhecido como reversão. Neste momento a energia cinética do sistema é nula, de forma que a energia mecânica coincidirá com a energia potencial gravitacional. Ao contrário do que acontece no instante inicial, onde a velocidade peculiar é nula, durante a reversão a velocidade peculiar equipara-se em módulo, mas com sentido oposto, à velocidade dada pela expansão do universo não perturbado. Essa é a razão do cancelamento da energia cinética neste instante.

Portanto, a energia mecânica durante a reversão será dada por

$$E = |U| = \frac{GM_i}{r_m}. \quad (3.27)$$

Com (3.16), temos

$$|U| = \frac{1}{2} \frac{H_i^2 r_i^3 \bar{\Omega}_i (1 + \langle \delta_i \rangle)}{r_m}, \quad (3.28)$$

que, com (3.20), resulta em

$$|U| = \frac{r_i}{r_m} k_i \bar{\Omega}_i (1 + \langle \delta_i \rangle). \quad (3.29)$$

Pela conservação de energia, obtemos finalmente a relação entre os raios inicial e final,

$$\frac{r_m}{r_i} = \frac{(1 + \langle \delta_i \rangle)}{[\langle \delta_i \rangle - (\bar{\Omega}_i^{-1} - 1)]}. \quad (3.30)$$

Por várias vezes o parâmetro temporal foi motivo de preocupação para cosmólogos e astrofísicos. A primeira crise da idade do universo ocorreu quando astrofísicos calcularam, com boa aproximação, uma idade da ordem de 13 bilhões de anos para os aglomerados

globulares, enquanto que o modelo cosmológico padrão aceito na época (composto apenas por matéria bariônica) previa uma idade para o universo da ordem de 9 bilhões de anos. Essa crise somente foi superada após a inserção da constante cosmológica Λ como mais um componente do universo. Em seguida, a idade do universo foi mais uma vez posta em xeque justamente pela formação das estruturas cosmológicas. De acordo com o modelo padrão Λ CDM, o universo deveria ter uma idade acima de 13 bilhões de anos para que ocorresse a formação das estruturas atualmente observadas. A solução deste problema veio com a inserção de matéria escura, responsável por acelerar o processo de aglomeração da matéria bariônica [8, 9].

Temos, então, ótimos motivos para conhecer o tempo gasto, segundo o modelo em teste, para formação das estruturas cosmológicas em larga escala. E neste sentido, a integral de (3.17) fornece as equações de movimento parametrizadas³,

$$\begin{aligned} r &= A(1 - \cos\theta), \\ t + T &= B(\theta - \sin\theta) \end{aligned} \quad (3.31)$$

e

$$A^3 = GMB^2,$$

onde A e B são constantes que podem ser determinadas impondo valores ao parâmetro θ , enquanto T é uma constante de integração que será determinada pelas condições iniciais, $t = t_i$ e $r = r_i$. O parâmetro θ surge de uma mudança de variáveis durante a solução da integral e está associado com a taxa de variação da coordenada radial com o tempo.

O raio máximo é alcançado, segundo a primeira equação de (3.31), quando $\theta = \pi$, resultando em $r_m = 2A$. Sendo assim, (3.30) fornece

$$A = \frac{r_i}{2} \frac{(1 + \langle \delta_i \rangle)}{\langle \delta_i \rangle - (\bar{\Omega}_i^{-1} - 1)}. \quad (3.32)$$

Assim, pela relação entre as constantes A e B , dada em (3.31), e por (3.28), obtemos,

³Para maiores detalhes sobre a obtenção da solução 3.31 veja o problema da *braquistócrona* em [10].

$$B = \frac{1 + \langle \delta_i \rangle}{2H_i \bar{\Omega}_i^{\frac{1}{2}} \left[\langle \delta_i \rangle - (\bar{\Omega}_i^{-1} - 1) \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.33)$$

Por fim, a constante T será obtida fazendo $t = t_i$ e $r = r_i$. As constantes A , B e T serão escritas em seguida para o caso particular de universo plano, onde $\bar{\Omega}_i = 1$,

$$A = \frac{r_i (1 + \langle \delta_i \rangle)}{2 \langle \delta_i \rangle}, \quad (3.34)$$

$$B = \frac{(1 + \langle \delta_i \rangle)}{2H_i \langle \delta_i \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (3.35)$$

e

$$T = \frac{(1 + \langle \delta_i \rangle)}{2H_i \langle \delta_i \rangle^{\frac{3}{2}}} (\theta_i - \text{sen} \theta_i) - t_i. \quad (3.36)$$

Com a finalidade de obtermos o contraste da densidade, definido por (3.1), escrito em termos do parâmetro θ , devemos utilizar os resultados (2.12) e (2.13) que fornecem

$$\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}, \quad (3.37)$$

e também a definição de densidade de matéria,

$$\rho = \frac{3M_i}{4\pi r^3}, \quad (3.38)$$

que, por (3.31), fornece

$$\rho = \frac{3M_i}{4\pi A^3 (1 - \cos \theta)^3}. \quad (3.39)$$

Portanto, o contraste pode ser escrito como⁴

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \delta + 1 = \frac{18\pi G M_i B^2 (\theta - \text{sen} \theta)^2}{4\pi G M_i B^2 (1 - \cos \theta)^3}, \quad (3.40)$$

⁴Fazendo θ suficientemente pequeno e considerando termos não lineares da expansão de Taylor de (3.41), obtemos da mesma forma a equação (3.8).

$$\delta = \frac{9(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \cos\theta)^3} - 1. \quad (3.41)$$

Finalmente, as equações que regem a evolução de uma região densa podem ser agrupadas da seguinte maneira

$$r = \frac{r_i}{2} \left(\frac{1 + \langle \delta_i \rangle}{\langle \delta_i \rangle} \right) (1 - \cos\theta), \quad (3.42)$$

$$t = \frac{1}{2H_i} \left(\frac{1 + \langle \delta_i \rangle}{\langle \delta_i \rangle^{\frac{3}{2}}} \right) (\theta - \text{sen}\theta), \quad (3.43)$$

e

$$\delta = \frac{9(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \cos\theta)^3} - 1. \quad (3.44)$$

No instante inicial $\langle \delta_i \rangle \ll 1$, pois em t_i o universo encontra-se no período de evolução linear, e a expansão do universo não perturbado é dada, de acordo com (2.14), por $H_i = \frac{2}{3t_i}$. Sendo assim, as equações (3.42) e (3.43) serão reescritas da seguinte maneira,

$$r = \frac{r_i}{2\langle \delta_i \rangle} (1 - \cos\theta) \quad (3.45)$$

e

$$t = \frac{3t_i}{4\langle \delta_i \rangle^{\frac{3}{2}}} (\theta - \text{sen}\theta). \quad (3.46)$$

De acordo com a expressão (3.8), o contraste da densidade medido hoje, ou seja, em t_0 , é

$$\langle \delta_0 \rangle = \frac{3}{5} \langle \delta_i \rangle \left(\frac{t_0}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.47)$$

ou ainda, segundo (2.13),

$$\langle \delta_0 \rangle = \frac{3}{5} \frac{\langle \delta_i \rangle}{a(t_i)}. \quad (3.48)$$

Na prática os resultados teóricos são confrontados com os dados observacionais. Entretanto, devemos observar que o referencial de observação, a Terra, acompanha a evolução do universo, tornando-o, por definição, um referencial comóvel. Portanto, para que possamos comparar grandezas equivalentes, vamos definir distância comóvel no instante inicial como $q_{ci} = \frac{r_i}{a(t_i)}$.

Com a equação (3.48) e com a definição da distância comóvel, as expressões (3.45) e (3.46) ficarão da seguinte maneira,

$$r = \frac{3}{10} \frac{x_i}{\langle \delta_0 \rangle} (1 - \cos \theta) \quad (3.49)$$

e

$$t = \left(\frac{3}{5} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4} \frac{t_0}{\langle \delta_0 \rangle^{\frac{3}{2}}} (\theta - \text{sen} \theta). \quad (3.50)$$

A principal forma de obtermos informações do universo é mediante a captação de fótons dele provenientes, com os quais medimos uma quantidade, denominada *redshift* (z), associada ao efeito Doppler sofrido pela luz. Portanto, é extremamente útil escrever as quantidades que descrevem o sistema em termos deste *redshift*, que de acordo com o modelo cosmológico proposto (CDM) é dado por

$$\left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} = (1+z)^{-1}, \quad (3.51)$$

permitindo-nos escrever a expressão (3.50) da seguinte maneira,

$$(1+z)^{-1} = \frac{3}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\theta - \text{sen} \theta)^{\frac{2}{3}}}{\langle \delta_0 \rangle}, \quad (3.52)$$

que, por (3.47), fornece

$$(1+z)^{-1} = \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\theta - \text{sen} \theta)^{\frac{2}{3}}}{\langle \delta_i \rangle} (1+z_i). \quad (3.53)$$

Enfim, as equações newtonianas que descrevem a evolução esfericamente simétrica, em um regime não linear, de uma perturbação da densidade são

$$(1+z)^{-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{(\theta - \text{sen}\theta)^{\frac{2}{3}}}{\langle\delta_i\rangle(1+z_i)}, \quad (3.54)$$

$$r = \frac{3}{10} \frac{x_i}{\langle\delta_0\rangle} (1 - \cos\theta), \quad (3.55)$$

$$t = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4} \frac{t_0}{\langle\delta_0\rangle^{\frac{3}{2}}} (\theta - \text{sen}\theta), \quad (3.56)$$

e

$$\delta = \frac{9(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \cos\theta)^3} - 1. \quad (3.57)$$

Sendo que as condições iniciais deste sistema são dadas por $z_i \simeq 10^4$ e $\langle\delta_i\rangle \simeq 10^{-3}$, onde z_i e $\langle\delta_i\rangle$ são os valores do *redshift* e do contraste médio de densidade inicial, respectivamente, durante a transição entre o período de desacoplamento da radiação e de domínio da matéria.

Como o instante de reversão é de extrema importância no processo de formação das estruturas em larga escala, vamos destacar os resultados obtidos pelas equações (3.54), (3.55), (3.56) e (3.57) quando $\theta = \pi$,

$$z_m = z(\pi) \simeq 4,65, \quad (3.58)$$

$$\langle\delta\rangle_m \simeq 4,55, \quad (3.59)$$

$$r = \frac{3}{5} \frac{x_i}{\langle\delta_0\rangle} \quad (3.60)$$

e

$$t = \pi \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4} \frac{t_0}{\langle\delta_0\rangle^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.61)$$

De forma geral, a expressão (3.57) fornece para cada θ um valor para o contraste da densidade. A partir desta equação podemos descobrir em que instante (ou, em qual *redshift*) o processo torna-se não linear. Por definição, a transição ocorre quando $\bar{\delta} \simeq 1$. A seguir, relacionamos em uma tabela o contraste δ e o *redshift* z , cujos valores são aproximados, com alguns valores de θ :

θ	δ	z
$\pi/2$	0,46	16,6
$2\pi/3$	1	9,56
π	4,55	4,65

Tabela 3.1: Na primeira coluna estão expostos alguns valores de θ . Na segunda e na terceira coluna, estão os valores do contraste e do *redshift* assumidos para cada valor de θ .

Como podemos ver na Tabela 3.1, a reversão ocorre em um instante cujo *redshift* é da ordem de 4,65, enquanto que a transição entre os períodos de evolução linear e não linear ocorre quando o *redshift* é $z \simeq 9,56$.

Com o intuito de obter um gráfico da densidade de energia pelo parâmetro θ , devemos observar que as equações (3.40) e (3.41) nos fornecem

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho}\delta + \bar{\rho} \\ \rho &= \frac{9\bar{\rho}(\theta - \text{sen}\theta)^2}{2(1 - \text{cos}\theta)^3} + \bar{\rho}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

que, com $\bar{\rho} = \frac{1}{6\pi G t^2}$ e com a expressão do tempo em função de θ em (3.31), obtemos

$$\rho = \frac{2}{9\pi G B^2} \left[\frac{1}{(1 - \text{cos}\theta)^3} + \frac{1}{(\theta - \text{sen}\theta)^2} \right], \quad (3.63)$$

que nos permite obter os gráficos (3.1(a)) e (3.1(b)),

Para fins comparativos, o gráfico da densidade de matéria em um universo não perturbado, dado por (3.37), será exposto na figura (3.2).

Com os gráficos (3.1(a)) e (3.2) podemos observar que para $0.3\pi < \theta \simeq 0.7\pi$ o comportamento da densidade de energia ρ (do universo perturbado) assemelha-se muito com

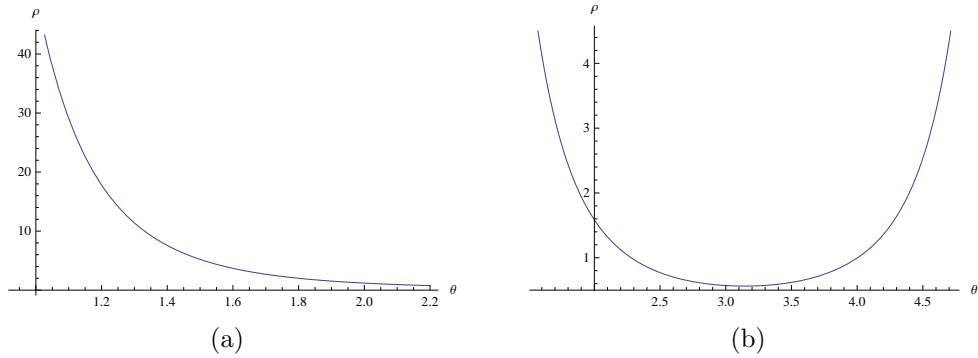


Figura 3.1: Em (a) temos $\rho \times \theta$ sendo $0.3\pi \leq \theta \leq 0.7\pi$, a fim de evidenciar a concordância, para $\theta < 0.7\pi$, com a evolução do universo não perturbado; na figura (b) $\rho \times \theta$ sendo $0.5\pi \leq \theta \leq 1.5\pi$, evidenciando a discrepância, a partir de $\theta > 0.7\pi$, entre o universo não perturbado e o universo com perturbação esférica.

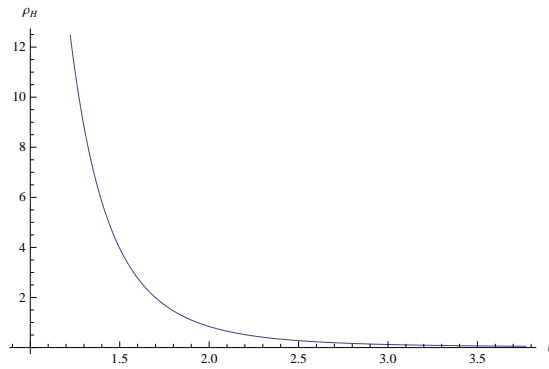


Figura 3.2: Evolução da densidade de matéria em um universo não perturbado, com $\bar{\rho} \times \theta$ sendo $0.3\pi \leq \theta \leq 1.2\pi$

o comportamento da densidade $\bar{\rho}$ (do universo não perturbado). Para valores superiores a 0.7π essa semelhança deixa de existir pois quando $\theta \simeq 0.7\pi$ temos $\delta \simeq 1$, que é o período de transição entre a evolução linear e não linear. Pelo gráfico (3.1(b)) fica evidente a existência de regiões cuja densidade tende ao infinito quando $\theta \gg 0,7\pi$, refletindo o fato de não considerarmos efeitos dissipativos como a emissão de radiação e o equilíbrio virial.

Na próxima seção incluiremos esses feitos afim de eliminar essa singularidade assintótica, fornecendo-nos ainda condições necessárias sobre o raio e a massa desses objetos para a formação de estruturas compactas.

Equilíbrio Virial e Emissão de Radiação

A consideração da existência de um componente bariônico no universo, além da CDM, é necessária, pois ao divisar um objeto no espaço, a maior parte da informação obtida provém da radiação eletromagnética por ele emitida ou refletida, visto que matéria escura não interage com campo eletromagnético. De qualquer forma, daqui em diante vamos considerar como gás perfeito o fluido de matéria (de qualquer natureza) que preenche a região esférica, obedecendo, portanto, a seguinte equação de estado, também conhecida como lei geral dos gases,

$$pV = \frac{M}{\mu} T, \quad (3.64)$$

e a relação entre temperatura e energia cinética média, dada por

$$\langle K \rangle = \frac{3}{2} \frac{M}{\mu} T, \quad (3.65)$$

onde $\langle K \rangle$ é a energia cinética média, M é a massa do aglomerado gasoso, μ é a massa molar média do gás⁵ e T é a temperatura da névem de gás.

Após o instante da reversão, a distância entre cada molécula deste gás e o centro da esfera, cujo raio máximo é dado por (3.60), será gradativamente menor (em um processo quase-estático), alcançando em um dado instante o equilíbrio termodinâmico, ou equilíbrio virial, no qual a esfera gasosa terá um raio médio dado por

$$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = 2\langle K \rangle. \quad (3.66)$$

Este é o resultado do teorema do virial. O termo do lado esquerdo da equação (3.66) é igual ao módulo do trabalho realizado pela força gravitacional para atrair as moléculas do gás a partir do infinito até um raio médio R . Portanto, como a energia cinética média é dada, segundo a teoria cinética dos gases, por (3.65), a temperatura do aglomerado gasoso relaciona-se com o seu raio médio por

⁵Massa molar é, em gramas, numericamente igual à massa atômica do gás que permeia a região esférica. Quando há mais de um componente, por exemplo, hidrogênio e hélio, temos massa molar média dada por $\mu = \frac{m_H n_H + m_{He} n_{He}}{2n_H + 3n_{He}}$.

$$T = \frac{GM\mu}{5R} . \quad (3.67)$$

E de acordo com o teorema do virial (3.66) e a energia cinética fornecida pela mecânica, encontramos uma relação entre a velocidade média das partículas do gás e o raio médio da esfera dada pela expressão

$$v^2 = \frac{3}{5} \frac{GM}{R} . \quad (3.68)$$

Naturalmente, pela relação entre energia cinética e temperatura em (3.65), temos

$$T = \frac{\mu v^2}{3} . \quad (3.69)$$

Das equações (3.68) e (3.69) podemos extrair algumas considerações físicas. Da primeira delas observamos que a velocidade média das partículas do gás depende inversamente do raio da esfera, ou seja, há um aumento da velocidade média durante a compressão. Por sua vez, a segunda equação evidencia a relação direta entre a velocidade média e a temperatura: quanto maior a velocidade, maior será a temperatura. Sendo assim, desconsiderando possíveis processos de resfriamento (como a emissão de radiação), a temperatura da esfera sofrerá um acréscimo a partir do instante t_m , no qual o raio é máximo, até atingir o equilíbrio virial.

Contudo, sabemos que a agitação molecular, observada como temperatura, provoca a emissão de radiação por parte das partículas eletricamente carregadas, resultando numa perda de energia dada por

$$E = h\nu , \quad (3.70)$$

onde h é a constante de Planck e ν é a frequência do fóton irradiado. A consequência desta perda de energia é a diminuição da velocidade média, desestabilizando o equilíbrio virial alcançado e permitindo que a compressão avance, reduzindo ainda mais o raio da esfera.

Como foi pontuado anteriormente, o tempo de formação das estruturas cosmológicas é de suma importância, pois se muito longo não seríamos capazes de observá-las atualmente.

Sendo assim, na suposição de um cenário livre dos efeitos recém mencionados, a matéria seria comprimida infinitamente e as partículas estariam em queda livre a partir do raio máximo até o centro da esfera, como vimos na subseção anterior. No instante em que o raio é máximo $\theta = \pi$ e as equações (3.31) fornecem

$$t = \left(\frac{8}{r_m^3} GM \right) (\theta - \text{sen}\theta). \quad (3.71)$$

Como o tempo gasto do instante inicial, equivalente a $\theta = 0$, ao instante em que o raio é máximo, quando $\theta = \pi$, é igual ao tempo de queda livre, a partir do raio máximo até o centro da esfera, então a equação (3.71) resulta em

$$t_{din} = \frac{\pi}{2} \left(2 \frac{GM}{r_m^3} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.72)$$

onde t_{din} é o tempo dinâmico de queda livre.

Por outro lado, se considerarmos uma situação completamente não física, apenas por ludismo, em que não há interação gravitacional, ainda assim as partículas emitiriam radiação. Contudo o tempo de resfriamento seria muito maior, comparado ao caso mais realístico em que há atração gravitacional, não propiciando a formação das estruturas em larga escala. O tempo de resfriamento de um gás depende da contribuição de cada processo físico envolvido na emissão de radiação, dada em geral pelo efeito Compton entre fótons e elétrons livres no gás, pelo efeito Bremsstrahlung e pela recombinação entre Hidrogênio-Hélio. Em particular, o efeito Compton não será considerado, pois sua contribuição em instantes posteriores à época da recombinação ($z \leq 10$) é insignificante.

O tempo de resfriamento depende da composição do gás, assumida basicamente de Hidrogênio e Hélio ionizados e quentes, banhados na radiação cósmica de fundo, e portanto será dado por [11]

$$t_{resf} = 1,8 \times 10^6 \frac{1}{n} \left[\left(\frac{T}{10^6} \right)^{-\frac{1}{2}} + 1,5 f_m \left(\frac{T}{10^6} \right)^{-\frac{3}{2}} \right]^{-1}, \quad (3.73)$$

onde n é a densidade do número de partículas do gás e f_m é a proporção de metais permeando o gás (aqui $f_m = 1$, denotando ausência de metais). O termo $\left(\frac{T}{10^6} \right)^{-\frac{1}{2}}$ é refe-

rente ao efeito Bremsstrahlung, enquanto que o termo $\left(\frac{T}{10^6}\right)^{-\frac{3}{2}}$ refere-se à recombinação Hidrogênio-Hélio.

Podemos notar que quanto maior o tempo de resfriamento, t_{resf} , em comparação com o tempo de queda livre, mais tarde haverá a formação de estruturas compactas. Portanto, torna-se útil a definição de um parâmetro adimensional cujo valor indique a possibilidade de formação das estruturas cosmológicas. Esse parâmetro é definido por

$$\tau = \frac{t_{resf}}{t_{din}}, \quad (3.74)$$

de maneira que os possíveis valores assumidos por ele são $\tau = 1$, $0 < \tau < 1$ e $\tau > 1$.

Adotaremos como parâmetro de comparação a inversa da constante de Hubble medida hoje, H_0^{-1} , pois possui dimensão temporal no sistema de unidades MKS e representa o tempo gasto pelo fóton para viajar da era da recombinação até os dias atuais⁶. Dessa maneira, teremos os possíveis casos:

- 1) $\tau > 1$, sendo que $t_{resf} > H_0^{-1} > t_{din}$: neste caso o aglomerado maciço demoraria um tempo de resfriamento maior que o tempo gasto pelo fóton para chegar aos nossos olhos. Isso nos permite dizer que não haverá formação de estruturas compactas.
- 2) $\tau > 1$, sendo que $H_0^{-1} > t_{resf} > t_{din}$: neste segundo caso, apesar do tempo de resfriamento ser menor que H_0^{-1} ele ocorre de forma tão lenta (quase-estática) que hoje observaríamos apenas nuvens gasosas, e não aglomerados compactos.
- 3) $\tau < 1$, sendo que $H_0^{-1} > t_{din} > t_{resf}$: aqui sim, além de resfriar em um tempo menor que H_0^{-1} , o tempo de queda livre é maior, propiciando a formação de estruturas compactas.
- 4) os casos em que $\tau = 1$, ou seja, $t_{resf} = t_{din}$, não favorecem a formação das estruturas em larga escala.

Da expressão (3.73) podemos notar que a temperatura $T = 10^6 K$ é crucial durante o resfriamento da região gasosa. Portanto, faremos algumas suposições sobre a temperatura

⁶Atualmente, de acordo com os resultados do programa WMAP, a constante de Hubble possui um valor de $73,5 \pm 3,2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [12]

desse gás no instante em que $\theta = \pi$, ou seja, no início da reversão, culminando em condições necessárias de colapso sobre a massa e o raio das esferas gasosas [7]. As considerações serão as seguintes:

- i) $T < 10^6$ K: como neste cenário apenas a contribuição da recombinação é considerável, a expressão da razão entre o tempo de resfriamento e o tempo de queda livre ficará da seguinte maneira,

$$\tau = \frac{2,7 \times 10^6 n^{-1} \left(\frac{T}{10^6}\right)^{3/2}}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{2GM}{R^3}\right)^{-1/2}}. \quad (3.75)$$

Substituindo a massa do gás em colapso por

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{5RT}{G\mu}\right) = 2,1 \times 10^{11} \left(\frac{T}{10^6}\right)^{3/2} n^{-1/2}, \quad (3.76)$$

temos

$$\tau \simeq \frac{1}{9 \times 10^{11}} \frac{M}{M_{\odot}}. \quad (3.77)$$

Ou seja, para que um aglomerado gasoso colapse em uma estrutura compacta com uma massa $M < 10^{11} M_{\odot}$, é necessário que ele tenha uma temperatura $T < 10^6$ K.

- ii) $T > 10^6$ K: ao contrário do primeiro caso, agora apenas o termo de contribuição referente ao efeito Bremsstrahlung é considerável, $\left(\frac{T}{10^6}\right)^{1/2}$. Sendo assim, o parâmetro temporal τ ficará da seguinte maneira,

$$\tau = \frac{1,8 \times 10^6 n^{-1} \left(\frac{T}{10^6}\right)^{1/2}}{\frac{\pi}{2} \left(\frac{2GM}{R^3}\right)^{-1/2}}, \quad (3.78)$$

onde mais uma vez efetuamos a substituição (3.76) feita no ítem anterior, obtendo

$$\tau \simeq \frac{R}{80} \text{kpc}. \quad (3.79)$$

Isso significa que se a temperatura do aglomerado gasoso for $T > 10^6$ K no início da reversão, ele deverá ter um raio $R < 80$ kpc para colapsar em uma estrutura compacta.

3.1.2 Modelo Relativístico

Embora a maior parte deste trabalho tenha sido feita segundo o formalismo newtoniana, cabe aqui a inclusão de uma seção sobre a evolução não linear com simetria esférica sob a ótica da Relatividade Geral, até hoje considerada a teoria que melhor explica as características do universo em que vivemos e os feitos gravitacionais que nele acontecem. Antes de adentrarmos pelo método aproximativo em si vamos apenas apresentar brevemente a teoria da Relatividade Geral (RG, daqui por diante).

Em 1915 Albert Einstein publicou uma teoria que generaliza a teoria da Relatividade Restrita (ou especial), também de sua autoria. De forma superficial, a RG amplia os conceitos definidos em espaços quadridimensionais (três dimensões espaciais e uma temporal), chamados de variedade espaço-tempo, com geometria plana, na Relatividade Especial, para espaços com geometria curva, também quadridimensionais⁷. O resultado dessa generalização é a equivalência entre a energia e a curvatura do espaço-tempo. Portanto, a atração entre dois corpos deve-se à deformação da geometria local devido às suas massas, excluindo a existência de força gravitacional. O conjunto de equações que descreve essa teoria é ⁸

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}, \quad (3.80)$$

onde geralmente escolhemos um sistema de unidades tal que a velocidade da luz é $c = 1$ [13]. Na equação acima o termo da esquerda diz respeito à geometria do espaço-tempo, e o termo da direita refere-se ao tipo de matéria e à sua distribuição no espaço-tempo, descritos pelo tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. A geometria do universo é descrita pela métrica, $g_{\mu\nu}$, da variedade, com a qual podemos calcular a distância entre dois pontos

⁷Quando falamos aqui em espaço estamos nos referindo à variedade espaço-tempo quadridimensional, não à parte puramente espacial da variedade. Em todos os outros capítulos a palavra espaço refere-se realmente à parte espacial, tridimensional.

⁸Em todo o trabalho, índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos variam de 1 a 3.

(equivalente ao teorema de Pitágoras em um espaço euclidiano bidimensional).

Em (3.80),

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\lambda, \nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu, \lambda}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\eta\alpha}^{\alpha}, \quad (3.81)$$

onde o símbolo de Christoffel é definido como

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\nu\rho, \lambda} + g_{\lambda\rho, \nu} - g_{\nu\lambda, \rho}) \quad (3.82)$$

e $g_{\mu\nu}$ é tal que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (3.83)$$

é o elemento de linha do espaço-tempo.

As mesmas suposições cosmológicas feitas anteriormente na aproximação newtoniana serão também assumidas aqui, como a homogeneidade e isotropia inicial do universo. A partir daí podemos escrever uma métrica, chamada métrica de Friedmann-Lamaitre-Robertson-Walker (FLRW), para um universo plano, da seguinte maneira,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dr^2 - r^2 d\phi^2 - r^2 \sin^2 \theta d\theta^2). \quad (3.84)$$

Identificando (3.83) com (3.84), aplicando em (3.82) e posteriormente em (3.81), obtemos a equação de Friedmann, a partir da solução de (3.80) com os índices $\mu = 0$ e $\nu = 0$. Com a equação de Friedmann e a solução da equação de Einstein com índices $\mu = 1$ e $\nu = 1$, obtemos uma equação que fornece a taxa de aceleração do fator de escala⁹. Ambas estão expostas a seguir, na ordem em que foram citadas:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3} \pi G \rho \quad (3.85)$$

e

⁹Um gás perfeito é descrito pela expressão $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} - pg_{\mu\nu}$.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i), \quad (3.86)$$

onde o número de pontos indica a ordem da derivada temporal e a soma é feita sobre os componentes do universo.

Um dos pontos de grande importância da gravitação proposta por Einstein é a previsão do princípio de conservação do tensor momento-energia, descrito por

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (3.87)$$

do qual obtemos, quando $\mu = 0$, a expressão da conservação de energia de um fluido perfeito

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (3.88)$$

As equações (3.85), (3.86) e (3.88) são resultados da RG de um universo plano, homogêneo, isotrópico e preenchido por fluido perfeito. Vamos agora aplicar as condições da aproximação esfericamente simétrica sobre uma perturbação inicialmente linear do campo de densidade de energia.

Graças à validade do teorema de Birkhoff na RG (veja o Apêndice A), podemos analisar a evolução da região esférica em colapso independente de todo o universo em volta, tendo ela a sua própria taxa de expansão $h(t)$, referente ao parâmetro de Hubble local, dada por

$$h = \frac{\dot{f}}{f}, \quad (3.89)$$

onde $f(t)$ é o fator de escala local.

Sendo assim, teremos as versões locais das equações (3.86) e (3.88), respectivamente,

$$\frac{\ddot{f}}{f} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_{ci} + 3p_{ci}) \quad (3.90)$$

e

$$\dot{\rho}_c = -3h(\rho_c + p_c), \quad (3.91)$$

onde o subscrito c refere-se à região de colapso esférico:

$$\begin{cases} \rho_c = \rho_0 + \delta\rho \\ p_c = p_0 + \delta p. \end{cases} \quad (3.92)$$

Escrevendo a transformação entre os referenciais lagrangiano e euleriano como

$$\mathbf{r} = a(t)\mathbf{q} + f(t)\mathbf{q}, \quad (3.93)$$

podemos definir velocidade peculiar como

$$\mathbf{u} = \dot{f}(t)\mathbf{q}. \quad (3.94)$$

Então,

$$\nabla_q \cdot \mathbf{u} = \nabla_q(\dot{f}\mathbf{q}), \quad (3.95)$$

$$= \mathbf{q} \cdot \nabla_q \dot{f} + 3\dot{f}. \quad (3.96)$$

O subscrito q no operador nabla indica que a derivada espacial é feita com relação à coordenada lagrangiana.

Com o gradiente lagrangiano da velocidade peculiar, vamos definir a quantidade θ da seguinte maneira,

$$\theta \equiv \nabla_q \cdot \mathbf{u}. \quad (3.97)$$

A distribuição de matéria no interior da região perturbada será considerada homogênea, apesar de supormos uma distribuição inhomogênea da perturbação no universo, de forma que o fator de escala local dependerá somente do tempo. Na seção anterior supomos que o aglomerado esférico seria formado por cascas esféricas concêntricas de espessura infinitesimal. Se a distribuição da perturbação, dentro dessa nuvem gasosa, não

fosse homogênea, cada camada evoluiria a uma taxa diferente, provocando um futuro cruzamento entre cascas adjacentes. No entanto essa situação não será considerada por hipótese. A consequência deste fato na equação (3.95) é $\nabla_q \dot{f} = 0$, pois do contrário cada camada esférica teria uma velocidade de expansão diferente. Assim,

$$\theta = 3\dot{f}. \quad (3.98)$$

Da expressão (3.93) podemos obter h , definido em (3.89), em termos do parâmetro de Hubble do universo não perturbado ([14]),

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{a}(t)\mathbf{q} + \dot{f}(t)\mathbf{q}, \quad (3.99)$$

$$= a(t) \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{f}}{a} \right) \mathbf{q}, \quad (3.100)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}}{a} = \left(H + \frac{\dot{f}}{a} \right) \mathbf{q}, \quad (3.101)$$

onde identificamos

$$h = H + \frac{\dot{f}}{a}. \quad (3.102)$$

Mas como $\theta = 3\dot{f}$,

$$h = H + \frac{\theta}{3a}, \quad (3.103)$$

Sendo assim, de (3.89), temos

$$\dot{h} = \frac{\ddot{f}}{f} - \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 = \frac{\ddot{f}}{f} - h^2, \quad (3.104)$$

que, por (3.102), equivale a

$$\dot{h} = \dot{H} + \frac{\dot{\theta}}{3a} - \frac{\theta H}{3a}, \quad (3.105)$$

portanto,

$$\frac{\dot{f}}{f} = \frac{\dot{\theta}}{3a} + \dot{H} - \frac{\theta H}{3a} + H^2 + \frac{\theta^2}{9a^2} + 2\frac{\theta H}{3a}. \quad (3.106)$$

A equação que fornece a taxa de aceleração do fator de escala escrita em termos do gradiente lagrangiano do campo de velocidade peculiar θ fica, portanto, da seguinte maneira

$$\dot{\theta} + 3\dot{H}a + \theta H + 3H^2a + \frac{\theta^2}{3a} = -4\pi Ga \sum_i (\rho_{ci} + 3p_{ci}). \quad (3.107)$$

De (3.86), temos

$$-4\pi Ga \sum_i (\rho_i + 3p_i) = 3\ddot{a} = 3\dot{H}a + 3H^2a, \quad (3.108)$$

portanto,

$$\dot{\theta} + \theta H + \frac{\theta^2}{3a} = -4\pi Ga \sum_i \delta\rho_i \left(1 + 3\frac{\delta p_i}{\delta\rho_i}\right). \quad (3.109)$$

A quantidade $\frac{\delta p_i}{\delta\rho_i}$ define a velocidade efetiva do som no fluido c_{eff}^2 . A rigor, velocidade efetiva do som num fluido c_{eff}^2 é uma quantidade diferente da velocidade do som no fluido $c^2 = \frac{\partial p}{\partial\rho}$, entretanto elas podem coincidir quando $\delta \ll 1$. Sendo assim, a expressão (3.109) fica da seguinte maneira,

$$\dot{\theta} + \theta H + \frac{\theta^2}{3a} = -4\pi Ga \sum_i \rho_i \delta_i (1 + 3c_{effi}^2). \quad (3.110)$$

Obteremos, da mesma forma, uma equação para o contraste em termos da equação de estado, ω , da velocidade efetiva do som e do parâmetro de Hubble. Para isso, devemos utilizar a definição do contraste (3.1), sendo que aqui $\delta\rho = \rho_c - \rho$. Em primeiro lugar, vamos calcular a diferença $\dot{\rho}_c - \dot{\rho}$.

$$\dot{\rho}_c - \dot{\rho} = 3H(\rho_p) - 3h(\rho_c + p_c), \quad (3.111)$$

$$= 3H(1 + \omega)\rho - 3\left(H + \frac{\theta}{3a}\right)(1 + \omega_c)\rho_c, \quad (3.112)$$

onde $\omega = \frac{p}{\rho}$ é a equação de estado do fluido, enquanto $\omega_c = \frac{p_c}{\rho_c}$ é a equação de estado local, da região em colapso. Sendo assim,

$$\frac{\dot{\rho}_c - \dot{\rho}}{\rho} = 3H(1 + \omega) - 3 \left(H - \frac{\theta}{3a} \right) (1 + \omega_c)(1 + \delta). \quad (3.113)$$

Mas como

$$\omega_c = \frac{p + \delta p}{\rho + \delta \rho} = \frac{\omega \left(1 + \frac{\delta p}{p} \right)}{\rho(1 + \delta)}, \quad (3.114)$$

$$= \frac{\omega}{1 + \delta} + c_{eff}^2 \frac{\delta}{(1 + \delta)}, \quad (3.115)$$

temos

$$\frac{\dot{\rho}_c - \dot{\rho}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d\delta\rho}{dt} = 3H(1 + \omega) - 3 \left(H + \frac{\theta}{3a} \right) (1 + \omega_c)(1 + \delta). \quad (3.116)$$

Utilizando as relações

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\delta\rho}{dt} = \dot{\delta} + \frac{\delta\rho}{\rho^2} \dot{\rho} \quad (3.117)$$

e (3.88), obtemos a seguinte equação diferencial do contraste,

$$\dot{\delta} = 3H(1 + \omega)(1 + \delta) - 3 \left(H + \frac{\theta}{3a} \right) (1 + \omega_c)(1 + \delta), \quad (3.118)$$

$$= 3H(1 + \omega)(1 + \delta) - 3H \left[1 + \frac{\omega}{1 + \delta} + \frac{\delta p}{(1 + \delta)} \right] (1 + \delta), \quad (3.119)$$

portanto,

$$\dot{\delta} = -3H\delta(c_{eff}^2 - \omega) - [1 + \omega + (1 + c_{eff}^2)\delta] \frac{\theta}{a}. \quad (3.120)$$

Vamos considerar que a conservação da energia vale individualmente para cada componente do universo, assim teremos uma equação diferencial do contraste para cada componente. Portanto, se considerarmos apenas a existência de matéria escura fria ou bariônica,

teremos uma única equação do tipo (3.120), com $\omega = c_{eff}^2 = 0$.

De modo geral, a solução das equações (3.110) e (3.120) fornecem toda a evolução da região perturbada com simetria esférica. Entretanto, apenas por uma questão de comodidade, substituiremos a variável de dependência do contraste e do parâmetro θ ; ao invés do tempo cósmico t , utilizaremos o fator de escala $a(t)$. Utilizaremos também o parâmetro de densidade $\Omega_i = \rho_i \frac{8\pi G}{3H_0^2}$. Com essas modificações, (3.110) e (3.120) ficarão da seguinte maneira,

$$\delta'_i = -\frac{3}{a}\delta_i(c_{effi}^2 - \omega_i) - [1 + \omega_i + (1 + c_{effi}^2)\delta_i] \frac{\theta}{a^2 H} \quad (3.121)$$

e

$$\theta' + \frac{\theta}{a} + \frac{\theta^2}{3a^2 H} = -\frac{3H}{2} \sum_i \Omega_i \delta_i (1 + 3c_{effi}^2). \quad (3.122)$$

De acordo com o modelo cosmológico em questão, as quantidades c_{effi}^2 e ω_i terão influência decisiva. Por exemplo, no modelo gás de Chaplygin generalizado, cuja equação de estado é dada por $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$, onde A é uma constante positiva, temos

$$\omega = -\bar{C} \left[\bar{C} + (1 + \bar{C})a^{-3(\alpha+1)} \right]^{-1}, \quad (3.123)$$

onde \bar{C} é uma constante de integração proveniente da equação de conservação de energia [15]. Mas ainda,

$$c_{effi}^2 = \omega \frac{(1 + \delta)^\alpha - 1}{\delta}. \quad (3.124)$$

Portanto, de acordo com o modelo cosmológico assumido, as soluções numéricas das equações (3.121) e (3.122) fornecem todas as informações necessárias para determinar o colapso esférico homogêneo.

4 *Aproximação de Zel'dovich*

A maneira mais simples de estudarmos a formação de estruturas em larga escala em regime não linear é, sem dúvida, com a aproximação esférica, onde consideramos uma perturbação inicial sobre a densidade de matéria (ainda no período da recombinação) evoluindo com simetria esférica e cuja velocidade peculiar inicial é nula. Entretanto, apesar de muito conveniente e agradável, este cenário é altamente instável, tendo em vista a improvável evolução exatamente esférica, principalmente quando consideramos a componente bariônica do universo. Essa evolução provavelmente anisotrópica das regiões com acréscimo de densidade foi analisada pela primeira vez por Lin et al., em 1965 [16], e posteriormente por Zel'dovich, em 1970 [17], quando ele propõe um método no qual a aproximação linear é aplicada numa formulação com as coordenadas (ou referencial lagrangiano) lagrangianas das equações newtonianas, com o intuito de melhor aproximar analiticamente o processo de formação de estrutura durante o período não linear.

Neste capítulo faremos uma análise detalhada deste modelo, obtendo ao final da primeira seção os principais resultados previstos por Zel'dovich, partindo de uma construção minuciosa das condições deste modelo. Na segunda seção apresentaremos uma generalização a este modelo, proposta por Thomas Buchert, em 1992, no qual novos efeitos, como os vórtices, são previstos [18, 19].

4.1 Método aproximativo de Zel'dovich

Um fato conhecido, e de fácil constatação, é que a densidade de matéria em regiões onde existem galáxias, aglomerados de galáxias, ou ainda superaglomerados de galáxias (as estruturas em larga escala), é bem maior do que em regiões supostamente vazias do universo. Esse contraste entre as regiões com muita e pouca matéria é descrito por uma

quantidade, δ , denominada contraste da densidade de matéria, que indica exatamente o percentual de acréscimo da densidade de matéria, tendo como base o universo não perturbado, cuja densidade é $\bar{\rho}$. Matematicamente, o contraste define-se por

$$\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} . \quad (4.1)$$

A explicação, corroborada pelas observações da CMB [20], para a formação dessas estruturas em larga escala é fornecida pelo método perturbativo, segundo o qual, uma pequena flutuação da densidade de matéria evolui, aglomerando gravitacionalmente partículas massivas, até formar esses objetos cosmológicos. Do início da perturbação, onde $\delta \ll 1$, até o instante em que $\delta \simeq 1$, afirmamos que a evolução dessas flutuações de densidade ocorria em regime linear. Para instantes futuros, quando $\delta \gg 1$, determinamos que a evolução ocorre em regime não linear.

O período evolutivo denominado linear caracteriza-se pela aproximação no termo linear da expansão perturbativa, cujo erro possui dimensões aceitáveis, e tem como principal vantagem a possível expansão em ondas planas dos campos perturbados (ρ , p , \mathbf{V} e ϕ). Após tal expansão pudemos evidenciar, no capítulo 2, a independência evolutiva de cada modo perturbativo \mathbf{k} , permitindo-nos analisar um único modo, obtendo ao final a regra de evolução da perturbação. Essa expansão de Fourier não é possível, entretanto, durante a evolução não linear, onde $\delta \gg 1$, onde devemos considerar termos de ordem superior ao termo linear. Sendo assim, não podemos analisar individualmente cada modo perturbativo, durante o regime não linear, forçando-nos a utilizar o espaço das posições. O método de simetria esférica aborda essa necessidade de retornar ao espaço das posições de forma objetiva pelo sistema euleriano de coordenadas. Por outro lado, a aproximação proposta por Zel'dovich utiliza o sistema lagrangiano de coordenadas, na qual é desnecessária a suposição de uma evolução esférica da perturbação.

A regra de transformação entre os sistemas euleriano e lagrangiano é dada por

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = a(t)\mathbf{q} + b(t)\mathbf{P}(\mathbf{q}) , \quad (4.2)$$

onde \mathbf{r} é a coordenada euleriana, $a(t)$ é o fator de escala que descreve a expansão do universo, \mathbf{q} é a coordenada lagrangiana, $b(t)$ é o fator de escala local da região perturbada

e \mathbf{P} é o fator perturbativo. Para que seja possível a formação das estruturas cosmológicas, é necessário que a taxa de expansão da região perturbada seja menor que a taxa de expansão do universo.

Vamos ver então quais são os resultados de uma tal abordagem, e para isso notemos que o universo pode ser classificado, newtonianamente, como uma variedade diferencial de dimensão 3: o universo perturbado será denotado por U' , enquanto que o universo não perturbado será denotado por U . A evolução de um universo não perturbado, U , para um perturbado, U' , é dada pela transformação (4.2). Na variedade U' definiremos um mapeamento \mathbf{r} , denominado coordenada euleriana, enquanto que na variedade U definiremos o mapeamento \mathbf{q} , chamado coordenada lagrangiana¹.

Chamaremos de dv' o elemento de volume da variedade U' mapeado por $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ e dv o elemento de volume equivalente na variedade U , mapeado por \mathbf{q} . Nas duas variedades podemos construir quantidades topológicas como vetores tangentes à variedade e formas diferenciais (em particular, as 3-formas). Cada quantidade dessa constitui um espaço vetorial, sendo que as formas obedecem a regra do produto tensorial ou produto externo [13, 21], definido por

$$dr_i \wedge dr_j = -dr_j \wedge dr_i, \quad (4.3)$$

onde esses dr_i 's são os elementos da base do espaço das formas, associadas à variedade U ou U' , com $i, j = 1, 2$ e 3 .

Para obter a relação entre os elementos de volume dv e dv' , vamos considerar que o conjunto $\{dr_1, dr_2, dr_3\}$ seja uma base do espaço vetorial das formas associadas à coordenada euleriana \mathbf{r} , e o conjunto $\{dq_1, dq_2, dq_3\}$ uma base do espaço das formas associadas à coordenada lagrangiana \mathbf{q} , o que resulta nos seguintes elementos de volume,

$$dv' = dr_1 \wedge dr_2 \wedge dr_3 \quad (4.4)$$

e

$$dv = dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3. \quad (4.5)$$

¹Note que a coordenada $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$ carrega a informação da posição perturbada da partícula; por outro lado, a coordenada \mathbf{q} pode ser interpretada da seguinte maneira: $\mathbf{q} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, 0)$, ou seja, é a informação da posição inicial da partícula, na ausência de perturbação.

Mas como $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$, temos, pela regra da cadeia (estamos adotando a convenção de Einstein),

$$dr_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} dq_j, \quad (4.6)$$

que conduz a

$$\begin{aligned} dv' &= \frac{\partial r_1}{\partial q_i} dq_i \wedge \frac{\partial r_2}{\partial q_j} dq_j \wedge \frac{\partial r_3}{\partial q_k} dq_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial r_1}{\partial q_i} \frac{\partial r_2}{\partial q_j} \frac{\partial r_3}{\partial q_k} dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3, \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde esta última expressão é obtida com a propriedade do produto externo (4.3).

O fator multiplicativo do lado direito da última expressão é claramente o determinante da matriz $\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)$ (o Jacobiano), enquanto que o produto externo entre os elementos da base dq_1, dq_2, dq_3 é o elemento de volume dv . Portanto,

$$dv' = \det\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) dv. \quad (4.8)$$

Pela equação (4.2) temos

$$\frac{\partial r_i}{\partial q_j} = a(t)\delta_{ij} + b(t)\frac{dp_i}{dq_j}, \quad (4.9)$$

que possui a seguinte representação matricial²,

$$\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \begin{pmatrix} (a(t) + \alpha b(t)) & 0 & 0 \\ 0 & (a(t) + \beta b(t)) & 0 \\ 0 & 0 & (a(t) + \gamma b(t)) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Sendo assim, (4.8) pode ser escrita como

²Podemos escolher eixos perpendiculares entre si de forma que a matriz jacobiana fique diagonalizada, resultando em $\frac{dp_i}{dq_j} = 0$ para $i \neq j$ e $\frac{dp_i}{dq_j} = \alpha_i$ para $i = j$ ($\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = -\beta$ e $\alpha_3 = -\gamma$).

$$dv' = (a - \alpha b)(a - \beta b)(a - \gamma b) dv. \quad (4.11)$$

O universo, então, evolui suavemente de um estado não perturbado U para um estado perturbado U' , de acordo com (4.2). Isso significa que a quantidade de matéria presente num certo volume em U será a mesma em U' , mesmo porque não existem, *a priori*, fontes nem sorvedouros de matéria no universo. Portanto,

$$\bar{\rho}_0 dv = \rho dv'. \quad (4.12)$$

Considerando ainda o resultado (4.8),

$$\rho = \frac{\bar{\rho}_0}{\det\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}, \quad (4.13)$$

ou ainda

$$\rho = \frac{\bar{\rho}_0}{(a - \alpha b)(a - \beta b)(a - \gamma b)}, \quad (4.14)$$

que é um dos principais resultados do método aproximativo de Zel'dovich.

4.1.1 Algumas ponderações sobre a aproximação de Zel'dovich

Pelo resultado parcial (4.10), os parâmetros α , β e γ podem ser considerados coeficientes perturbativos de três direções distintas e mutuamente ortogonais, definidas por cada um desses coeficientes. Uma das principais condições deste modelo é que cada direção espacial, definida pelos coeficientes perturbativos, evolua independentemente, ao contrario da aproximação esférica que, como o nome sugere, supõe uma evolução isotrópica. Essa evolução anisotrópica da perturbação indica que, se tivéssemos inicialmente uma região cúbica com acréscimo de matéria, futuramente teríamos um paralelepípedo. Seguindo essa premissa, a probabilidade de encontrarmos $\alpha = \beta$ ou ainda $\alpha = \beta = \gamma$, é nula.

A evolução independente de cada direção nos permite analisar apenas uma, por exemplo α , sem perda alguma de generalidade.

A relação (4.14) nos mostra que em algum instante durante a evolução da perturbação teremos $(a - \alpha b) = 0$, que implica em $\rho \rightarrow \infty$. Como $\alpha = \alpha(\mathbf{q})$, podemos encontrar um ponto \mathbf{q}_m , num certo volume do espaço, tal que α é máximo [$\alpha(\mathbf{q}_m) = \alpha_m$], e é exatamente neste ponto que $\rho \rightarrow \infty$ primeiro, $[a(t_c) - \alpha_m b(t_c)] = 0$.

O fato de que a densidade infinita é resultado de uma compressão unilateral (α , β ou γ) é extremamente importante e deve ser enfatizado. Se considerarmos uma região perturbada inicialmente esférica, a evolução independente de cada eixo a tornará um elipsóide. Após um certo instante, o suficiente para comprimir completamente uma das direções, esse elipsóide torna-se uma elipse plana, com densidade superficial finita, ainda que a densidade volumétrica seja infinita.

Após $\rho \rightarrow \infty$ a equação (4.8) não pode mais ser utilizada no mesmo ponto, mas graças à distribuição contínua da perturbação ela pode ser aplicada num ponto vizinho α_1 tal que $\alpha_m - \alpha_1 \ll \alpha_m$. Devido à distribuição contínua (e suave) da perturbação, o eixo triaxial definido no ponto \mathbf{q}_1 é praticamente igual ao eixo definido em \mathbf{q}_m . Temos então a formação de uma estrutura, no referencial $\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)$, bidimensional, não espiralada (ou seja, sem vórtices), parecida com uma panqueca, onde no centro temos o ponto de maior densidade, e nas bordas pontos com menor densidade.

4.2 Teoria lagrangiana da instabilidade gravitacional: uma generalização do modelo de Zel'dovich

No ano de 1992, Thomas Buchert publica um trabalho [19] no qual ele apresenta uma generalização do modelo de formação de estrutura em larga escala, via instabilidade gravitacional, proposto por Zel'dovich. Da mesma forma que Zel'dovich, Buchert adota uma abordagem pelo referencial lagrangiano das equações de movimento newtonianas, porém utiliza uma relação de transformação entre os referenciais euleriano e lagrangiano mais geral possível, obtendo ao final efeitos não previstos por Zel'dovich.

4.2.1 Teoria lagrangiana das equações de movimento newtoniano.

Seguindo então o proposto, apresentamos logo abaixo as equações newtonianas do movimento, incluindo a gravitação, no formalismo euleriano. Em seguida, apresentamos as regras de transformação entre os referenciais euleriano e lagrangiano, onde logo na primeira equação fica evidente a diferença entre o que vimos na seção anterior, sobre a aproximação de Zel'dovich, e o que vamos abordar aqui.

- (1) A seguir estão as equações de continuidade, do movimento e da gravitação newtoniana, seguindo esta ordem:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad (4.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = 0 \Rightarrow \mathbf{g} = -\nabla \phi. \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \Lambda - 4\pi G \rho, \quad (4.18)$$

Na equação (4.18), Λ é a constante cosmológica, introduzida inicialmente por Einstein e compreendida atualmente como a responsável pela expansão acelerada do universo, segundo o modelo cosmológico padrão.

- (2) Em sequência, apresentamos as relações de transformação entre os referenciais euleriano e lagrangiano:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{q}, t), \quad (4.19)$$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{v}(\mathbf{q}, t), \quad (4.20)$$

$$(\nabla)_i = \frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{\partial q_k}{\partial f_i} \frac{\partial}{\partial q_k} = J_{ik}^{-1} \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad (4.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = J_{ik}^{-1} \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_k} = J_{ik}^{-1} J_{ik}, \quad (4.22)$$

onde J_{ik} denota o elemento da i -ésima linha com a k -ésima coluna da matriz jacobiana, referente à transformação entre os referenciais euleriano e lagrangiano; J é o determinante dessa matriz.

O diferencial de uma função escalar pode ser escrito, em um sistema cartesiano, da seguinte maneira

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt, \quad (4.23)$$

sendo, $f = f(x, y, z, t)$. Portanto, a derivada temporal dessa função fica da seguinte maneira,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (4.24)$$

sendo que $\frac{dx_i}{dt}$ (com $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$) é a i -ésima componente do vetor velocidade. Note que o lado direito da expressão (4.24) pode ser visto como o produto interno entre o gradiente da função escalar, ∇f , e o vetor velocidade, \mathbf{v} , de maneira que pode ser reescrita como

$$\frac{df}{dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla f) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.25)$$

Vamos agora aplicar as regras de transformação ao conjunto de equações newtonianas que descrevem o movimento, reescrevendo-as no referencial lagrangiano.

(1) Equação da Continuidade: por (4.15), (4.22) e (4.25) temos

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = -\rho J^{-1} \frac{dJ}{dt} \\ &\Rightarrow \rho = \rho_0 J^{-1}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

É importante observar que a conservação de energia independe de $\mathbf{f}(\mathbf{q}, t)$.

(2) Equação do movimento: por (4.16) e (4.25) obtemos

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \ddot{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{g}. \quad (4.27)$$

(3) Gravitação newtoniana: a equação (4.17) pode ser escrita em termos das suas componentes da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} J_{jl}^{-1} \frac{\partial \ddot{f}_k}{\partial q_l} &= 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_{ijk} J_{jl}^{-1} \ddot{J}_{lk} &= 0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

o que resulta em³

$$J_{jl}^{-1} \ddot{J}_{lk} = J_{kl}^{-1} \ddot{J}_{lj}. \quad (4.29)$$

Utilizando álgebra matricial, podemos reescrever (4.28) como

$$\varepsilon_{ijk} [\text{adj}(J_{ab})]_{jl} \ddot{J}_{lk} = 0, \quad (4.30)$$

onde $[\text{adj}(J_{ab})]_{jl}$ é a componente da j -ésima linha com a l -ésima coluna da matriz adjunta⁴ obtida a partir da matriz jacobiana (J_{ab}) .

(4) Equação de Poisson: utilizando (4.26) e (4.22), obtemos a forma lagrangiana de (4.18),

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g} &= \Lambda - 4\pi\rho_0 J^{-1}, \\ \Rightarrow J_{ik}^{-1} \ddot{J}_{ki} &= \Lambda - 4\pi\rho_0 J^{-1}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Note que as equações (4.26) e (4.27) são satisfeitas em (4.30) e (4.31), cujas soluções são, portanto, suficientes para descrever o sistema.

A primeira restrição feita neste modelo será sobre a relação (4.19), na qual explicitaremos o nosso objetivo que é tratar as perturbações cosmológicas. Assim, faremos

³ $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se a permutação dos índices é par} \\ 0, & \text{se um dos índices são iguais} \\ -1, & \text{se a permutação dos índices é ímpar.} \end{cases}$

⁴A matriz adjunta do jacobiano será denotada por $\text{adj}(J_{ab})$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, t) = a(t)\mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, t), \quad (4.32)$$

onde o termo $a(t)\mathbf{q}$ descreve uma evolução homogênea e isotrópica do universo não perturbado, e o termo $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ descreve a distribuição inhomogênea e isotrópica⁵ das perturbações, obedecendo a condição inicial $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0}$.

Note que a regra de transformação (4.2) é um caso particular de (4.32), sendo a perturbação do tipo variável separável; por enquanto, consideramos apenas que a perturbação deve ser pequena o suficiente para satisfazer a condição de linearidade.

Com a transformação (4.32) podemos calcular a matriz jacobiana (e suas derivadas), bem como a sua matriz adjunta, a fim de resolver as equações (4.30) e (4.31) perturbadas.

Em primeiro lugar, o Jacobiano da transformação (4.32) é dado por

$$J_{ab} = \begin{pmatrix} a(t) + \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_2} & \frac{\partial P_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial P_2}{\partial q_1} & a(t) + \frac{\partial P_2}{\partial q_2} & \frac{\partial P_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial q_1} & \frac{\partial P_3}{\partial q_2} & a(t) + \frac{\partial P_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

enquanto que a matriz adjunta é a transposta da matriz dos cofatores. Vamos à matriz dos cofatores: o elemento ij da matriz dos cofatores é dado pela conhecida regra $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(J_{ij})$, onde J_{ij} é o elemento ij da matriz jacobiana. Sendo assim,

$$\text{adj}(J_{ab}) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

A expressão (4.30) pode ser reescrita como

$$[\text{adj}(J_{ab})]_{jl} \ddot{J}_{lk} = [\text{adj}(J_{ab})]_{kl} \ddot{J}_{lj}, \quad (4.35)$$

⁵As características homogeneidade e isotropia, conhecidas como Princípio Cosmológico, indicam que não existe nenhum ponto privilegiado do espaço bem como nenhuma direção privilegiada. Dessa forma, uma distribuição inhomogênea e isotrópica da perturbação significa que existem pontos perturbados e outros não, igualmente em todas as direções.

ou ainda, utilizando (4.34),

$$\Delta_{lj}\ddot{J}_{lk} = \Delta_{lk}\ddot{J}_{lj}. \quad (4.36)$$

Note que o elemento jl da matriz adjunta, $[\text{adj}(J_{ab})]_{jl}$, é igual ao elemento lj da matriz dos cofatores, Δ_{lj} . Como exemplo, vamos explicitar os cálculos de (4.36) para o caso em que $j = 2$, $k = 3$ e $i = 1$, obtendo

$$\Delta_{12}\ddot{J}_{13} + \Delta_{22}\ddot{J}_{23} + \Delta_{32}\ddot{J}_{33} - \Delta_{13}\ddot{J}_{12} - \Delta_{23}\ddot{J}_{22} - \Delta_{33}\ddot{J}_{32} = 0. \quad (4.37)$$

De acordo com a regra de obtenção dos elementos da matriz dos cofatores e com a derivada temporal de segunda ordem de (4.33), (4.37) ficará da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} & - \left[a(t) \frac{\partial P_2}{\partial q_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \frac{\partial P_3}{\partial q_3} - \frac{\partial P_2}{\partial q_3} \frac{\partial P_3}{\partial q_1} \right] \ddot{J}_{13} + \left[a^2(t) + a(t) \frac{\partial P_3}{\partial q_3} + a(t) \frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \right. \\ & + \left. \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_3}{\partial q_3} - \frac{\partial P_1}{\partial q_3} \frac{\partial P_3}{\partial q_1} \right] \ddot{J}_{23} - \left[a(t) \frac{\partial P_2}{\partial q_3} + \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_3} - \frac{\partial P_1}{\partial q_3} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} \right] \ddot{J}_{33} - \\ & - \left[\frac{\partial P_2}{\partial q_1} \frac{\partial P_3}{\partial q_2} - a(t) \frac{\partial P_3}{\partial q_1} - \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \frac{\partial P_3}{\partial q_1} \right] \ddot{J}_{12} + \left[a(t) \frac{\partial P_3}{\partial q_2} + \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_3}{\partial q_2} - \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_3}{\partial q_1} \right] \ddot{J}_{22} - \\ & - \left[a^2(t) + a(t) \frac{\partial P_2}{\partial q_2} + a(t) \frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \right] \ddot{J}_{32} = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Desconsiderando termos de segunda ordem da derivada da perturbação, encontramos

$$a^2(t) \left(\frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial q_2} \right) - \ddot{a}(t) a(t) \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_3} - \frac{\partial P_3}{\partial q_2} \right) = 0. \quad (4.39)$$

Observe que o primeiro termo da esquerda é proporcional à i -ésima componente (com $i = 1$) do rotacional em coordenadas lagrangianas da segunda derivada temporal da perturbação, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial q_3} - \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial q_2} \right) = (\nabla_L \times \ddot{\mathbf{P}})_1. \quad (4.40)$$

E igualmente, podemos identificar o segundo termo da esquerda com a i -ésima componente do rotacional lagrangiano da perturbação,

$$\left(\frac{\partial P_2}{\partial q_3} - \frac{\partial P_3}{\partial q_2} \right) = (\nabla_L \times \mathbf{P})_1 . \quad (4.41)$$

Mesmo sendo este um caso particular (com $i = 1$, $j = 2$ e $k = 3$), podemos supor que os resultados para os casos onde $\{i = 2, j = 3, k = 1\}$ e $\{i = 3, j = 1, k = 2\}$ serão as componentes 2 e 3, respectivamente, dos rotacionais da perturbação e de suas derivadas. Sendo assim, podemos escrever

$$\ddot{a}(t)a(t) \nabla_L \times \mathbf{P} - a^2(t) \nabla_L \times \ddot{\mathbf{P}} = \mathbf{0} . \quad (4.42)$$

O procedimento utilizado na obtenção de (4.42), a partir de (4.30), será igualmente aplicado para desenvolver (4.31), obtendo ao final uma equação no referencial lagrangiano linearmente perturbada. Sendo assim, da expressão em coordenadas lagrangianas da equação de Poisson (4.31), obtemos

$$[\text{adj}(J_{ab})]_{ik} J^{-1} \ddot{J}_{ki} = \Lambda - 4\pi G \rho_0 J^{-1} , \quad (4.43)$$

ou ainda,

$$\Delta_{ki} \ddot{J}_{ki} = \Lambda J - 4\pi G \rho_0 . \quad (4.44)$$

Efetuada a soma sobre os índices k e i , encontramos

$$\begin{aligned} & \Delta_{11} \ddot{J}_{11} + \Delta_{21} \ddot{J}_{12} + \Delta_{31} \ddot{J}_{13} + \Delta_{12} \ddot{J}_{21} + \Delta_{22} \ddot{J}_{22} + \Delta_{32} \ddot{J}_{23} + \\ & + \Delta_{13} \ddot{J}_{31} + \Delta_{23} \ddot{J}_{32} + \Delta_{33} \ddot{J}_{33} = \Lambda (J_{11} \Delta_{11} + J_{12} \Delta_{12} + J_{13} \Delta_{13}) - 4\pi G \rho_0 . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Utilizando a regra de obtenção dos elementos da matriz adjunta e a segunda derivada de (4.33), (4.45) resulta em uma equação perturbada não linear. Após a conseguinte linearização, mediante exclusão dos termos quadráticos e cúbicos da perturbação, obtemos

$$\begin{aligned}
& [3\ddot{a}(t)a^2(t) - a^3\Lambda] + \ddot{a}(t)a(t) \left(\frac{\partial P_3}{\partial q_3} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \right) + a^2(t) \frac{\partial \ddot{P}_1}{\partial q_1} + a^2(t) \frac{\partial \ddot{P}_2}{\partial q_2} + \\
& + \ddot{a}(t)a(t) \left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_3}{\partial q_3} \right) + \ddot{a}(t)a(t) \left(\frac{\partial P_1}{\partial q_1} + \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \right) + a^2(t) \frac{\partial \ddot{P}_3}{\partial q_3} = \\
& = \Lambda \left[a^2(t) \frac{\partial P_1}{\partial q_1} + a^2(t) \left(\frac{\partial P_2}{\partial q_2} + \frac{\partial P_3}{\partial q_3} \right) \right] - 4\pi G\rho_0 . \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Identificando em (4.46) o divergente do campo perturbativo decomposto em suas componentes, podemos reduzir essa expressão em

$$[3\ddot{a}(t)a^2(t) - a^3(t)\Lambda] + [2\ddot{a}(t)a(t) - a^2(t)] \nabla_L \cdot \mathbf{P} + a^2(t) \nabla_L \cdot \ddot{\mathbf{P}} = -4\pi G\rho_0 . \tag{4.47}$$

Ao final, obtemos as equações (4.42) e (4.47), onde em ambas aparece o operador ∇_L representando o operador nabla no referencial lagrangiano \mathbf{q} ,

$$(\nabla_L)_i = \frac{\partial}{\partial q_i} . \tag{4.48}$$

Note que o primeiro termo à esquerda de (4.47) não depende da perturbação $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$, permitindo relacioná-lo com a equação lagrangiana de Poisson em um universo não perturbado. Neste sentido, basta fazer $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t) = 0$ na regra de transformação (4.32) e aplicar posteriormente em (4.31), obtendo ao final,

$$3\ddot{a}(t)a^2(t) - a^3(t)\Lambda = -4\pi G\bar{\rho}_0 , \tag{4.49}$$

onde utilizamos $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 a^{-3}(t)$ e cuja primeira integral resulta na equação de Friedmann com constante cosmológica,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8}{3} \pi G \bar{\rho} . \tag{4.50}$$

Portanto, de (4.49), as equações (4.42) e (4.47) ficam, respectivamente, da seguinte maneira (repare que a primeira dessas duas permanece imutável, pois independe de (4.49))

$$\ddot{a}(t)a(t)\nabla_L \times \mathbf{P} + a^2(t)\nabla_L \times \ddot{\mathbf{P}} = 0 \quad (4.51)$$

e

$$[2\ddot{a}(t)a(t) - a^2(t)\Lambda] \nabla_L \cdot \mathbf{P} + a^2(t)\nabla_L \cdot \ddot{\mathbf{P}} = -4\pi G(\rho_0 - \bar{\rho}_0). \quad (4.52)$$

Em $t = t_0$ temos, $a(t_0) = a_0 = 1$, por definição, reduzindo (4.52) a

$$\nabla_L \cdot \ddot{\mathbf{P}}(t_0) = -4\pi G(\rho_0 - \bar{\rho}_0), \quad (4.53)$$

pois $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t_0) = 0$, entretanto, via de regra $\ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t_0) \neq 0$. E com isso, mais uma constante da equação (4.52) foi eliminada, sendo reescrita da seguinte maneira

$$[2\ddot{a}(t)a(t) - a^2(t)\Lambda] \nabla_L \cdot \mathbf{P} + a^2(t)\nabla_L \cdot \ddot{\mathbf{P}} = \nabla_L \cdot \ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t_0). \quad (4.54)$$

ou ainda

$$\nabla_L \cdot \left[\left(2\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} - \Lambda \right) \mathbf{P} + \ddot{\mathbf{P}} - \frac{1}{a^2(t)} \ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t_0) \right] = 0. \quad (4.55)$$

O operador nabla também pode ser evidenciado, de forma óbvia, em (4.51), resultando na expressão

$$\nabla_L \times \left[\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \mathbf{P} - \ddot{\mathbf{P}} \right] = 0. \quad (4.56)$$

A partir das equações (4.55) e (4.56), o campo vetorial $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ pode ser decomposto em duas componentes: uma componente cujo rotacional é nulo, $\mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t)$, que pode ser escrita em termos de um campo escalar; e outra componente cujo divergente é nulo, $\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t)$, que pode ser escrita em termos de um campo vetorial⁶. Assim,

$$\mathbf{P}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t) + \mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t), \quad (4.57)$$

⁶Os índices sobrescritos R e D advêm dos termos em inglês *rotationless* e *divergenceless*, respectivamente.

resultando em

$$\nabla_L \times \left(\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{a} \mathbf{P}^R - \ddot{\mathbf{P}}^R \right) = 0, \quad (4.58)$$

$$\nabla_L \cdot \left[\left(2\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{a} - \Lambda \right) \mathbf{P}^D + \ddot{\mathbf{P}}^D - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t_0) \right] = 0. \quad (4.59)$$

A partir dessa decomposição, podemos definir $\boldsymbol{\psi}$ e \mathbf{K} , denominados potencial escalar e potencial vetor, respectivamente, da seguinte maneira,

$$\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{a} \mathbf{P}^R - \ddot{\mathbf{P}}^R = \nabla_L \cdot \boldsymbol{\psi} \quad (4.60)$$

e

$$\left(2\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{a} - \Lambda \right) \mathbf{P}^D + \ddot{\mathbf{P}}^D - \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t_0) = \nabla_L \times \mathbf{K}. \quad (4.61)$$

Consideraremos o caso especial em que $\nabla_L \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ e $\nabla_L \times \mathbf{K} = 0$, fazendo com que $\mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t)$ satisfaça uma equação homogênea e $\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t)$ satisfaça uma equação inhomogênea:

$$\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{a} \mathbf{P}^R - \ddot{\mathbf{P}}^R = 0, \quad (4.62)$$

e

$$\left(2\frac{\ddot{\mathbf{a}}}{a} - \Lambda \right) \mathbf{P}^D + \ddot{\mathbf{P}}^D = \frac{1}{a^2} \ddot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t_0). \quad (4.63)$$

A equação (4.62) admite duas soluções linearmente independentes, enquanto que (4.63) admite, além de duas soluções linearmente independentes, mais uma solução particular:

$$\mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t) = \mathbf{P}_{s1}^R + \mathbf{P}_{s2}^R \quad (4.64)$$

e

$$\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t) = \mathbf{P}_{s1}^D + \mathbf{P}_{s2}^D + \mathbf{P}_p^D, \quad (4.65)$$

onde o termo \mathbf{P}_p^D , na última equação, denota a solução particular da equação inhomogênea (4.63).

Uma segunda suposição é a de que as soluções, individualmente, são do tipo variáveis separáveis. Isso significa que as soluções podem ser escritas da seguinte maneira,

$$\mathbf{P}_{si}^j = S_i^j(t) \mathbf{Q}_i^j(\mathbf{q}), \quad (4.66)$$

onde o índice $j = R, D$ e o índice $i = 1, 2$.

Substituindo (4.66) em (4.63), temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} S_i^R \mathbf{Q}_i^R - \ddot{S}_i^R \mathbf{Q}_i^R = 0, \quad (4.67)$$

ou ainda

$$\frac{\ddot{a}}{a} S_i^R - \ddot{S}_i^R = 0, \quad (4.68)$$

sendo uma equação para cada valor possível de $i = 1, 2$.

O mesmo acontece com a equação (4.63), havendo, porém, uma equação a mais referente à solução particular. Vejamos primeiro a equação homogênea que permite duas soluções linearmente independentes,

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \Lambda\right) S_i^D + \ddot{S}_i^D = 0, \quad (4.69)$$

e em segundo a solução particular,

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \Lambda\right) S_p^D + \ddot{S}_p^D - \frac{1}{a^2} \ddot{S}_p^D(t_0) = 0. \quad (4.70)$$

Enfim, o campo perturbativo que satisfaz as equações (4.55) e (4.56) é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{q}, t) &= \mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t) + \mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t) \\
&= S_1^R(t)\mathbf{Q}_1^R(\mathbf{q}) + S_2^R(t)\mathbf{Q}_2^R(\mathbf{q}) + S_1^D(t)\mathbf{Q}_1^D(\mathbf{q}) + S_2^D(t)\mathbf{Q}_2^D(\mathbf{q}) + \\
&\quad + S_p^D(t)\mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

4.2.2 Referencial comóvel no formalismo lagrangiano

No estudo da fluidodinâmica, nos deparamos frequentemente com a necessidade de utilizar o conceito dos referenciais comóveis ao fluxo, que são sistemas de coordenadas associados a observadores sujeitos ao escoamento do fluido. Por outro lado, aos referenciais alheios a este escoamento, damos o nome de referenciais fixos ou físicos. O mesmo ocorre em cosmologia, visto que toda a matéria existente pertence ao universo, que por sua vez encontra-se, ao que tudo indica, em expansão. Estudos teóricos e dados observacionais, baseados na análise de fótons provenientes dos objetos cosmológicos, indicam que o universo está em expansão, resultando em um aumento da distância entre os objetos com o passar do tempo [12]. Portanto, a distância medida por uma régua entre dois objetos cosmológicos é uma grandeza comóvel à expansão do universo. Essa é a origem da necessidade de utilizarmos, em cosmologia, o referencial comóvel.

Matematicamente a definição de distância comóvel é dada da seguinte maneira,

$$\mathbf{q}_c = \frac{\mathbf{r}(\mathbf{q}, t)}{a(t)}, \tag{4.72}$$

onde não podemos confundir \mathbf{q}_c com \mathbf{q} , sendo o primeiro a posição comóvel de um objeto, e o segundo a posição lagrangiana do mesmo. A diferença entre essas duas quantidades é, segundo a regra de transformação (4.32), fornecida por

$$\mathbf{q}_c - \mathbf{q} = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)}{a(t)}, \tag{4.73}$$

de modo que, pela condição $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t_0) = 0$, temos em $t = t_0$, $\mathbf{q}(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{q}$.

Mesmo que o universo esteja em expansão, cada partícula do meio possui uma ve-

locidade peculiar proveniente da instabilidade gravitacional. Portanto, essa velocidade peculiar depende diretamente do campo perturbativo $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$, de forma que em t_0 a velocidade peculiar é nula (como supomos no capítulo 3). É natural que a velocidade peculiar dependa da perturbação, visto que o universo é, por hipótese, um sistema isolado (no sentido mecânico e termodinâmico), excluindo a existência de fontes energéticas que dariam origem à velocidade peculiar.

Sendo assim, a velocidade (total) de uma partícula é dada por

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}(t)\mathbf{q}_c + a(t)\dot{\mathbf{q}}_c \quad (4.74)$$

$$= \dot{a}\mathbf{q} + \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t), \quad (4.75)$$

onde definimos a velocidade peculiar como

$$\mathbf{u} = a(t)\dot{\mathbf{q}}_c, \quad (4.76)$$

ou ainda

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t) - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{P}(\mathbf{q}, t). \quad (4.77)$$

Seguindo este raciocínio, podemos definir a aceleração peculiar como

$$\mathbf{w} = 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}. \quad (4.78)$$

A construção de quantidades comóveis, como velocidade e aceleração peculiar, é completamente possível e simples, mediante a regra de transformação (4.72).

É extremamente útil, na prática, obter a lei de evolução da perturbação $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ em termos dos campos de velocidade e aceleração peculiar comóveis, e na busca desta solução vamos supor que os coeficientes temporais de (4.71) sejam do tipo lei de potência, inspirados na evolução temporal do fator de escala $a(t)$, dada em (2.13), em um universo com $\Lambda = 0$. Portanto, teremos, por hipótese,

$$S_i^R = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{m_i}, \quad S_i^D = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{n_i} \text{ e } S_p^D = \left(\frac{t}{t_0}\right)^l, \quad (4.79)$$

onde o índice $i = 1, 2$.

Resta-nos determinar os expoentes m_i , n_i e l , e para isso lançaremos mão das equações (4.68), (4.69) e (4.70), com as quais, por simples substituição, obtemos

$$m_1 = \frac{2}{3}, \quad m_2 = \frac{1}{3}; \quad n_1 = \frac{4}{3}, \quad n_2 = -\frac{1}{3} \text{ e } l = \frac{2}{3}, \quad (4.80)$$

fazendo com que a solução (4.71) fique com a seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{q}, t) = & \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{Q}_1^R + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{Q}_2^R + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{4}{3}} \mathbf{Q}_1^D + \\ & + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \mathbf{Q}_2^D + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{P}_p^D. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Com a finalidade de determinar os campos vetoriais \mathbf{Q}_i^R , \mathbf{Q}_i^D e \mathbf{P}_p^D ($i = 1, 2$) em termos dos campos velocidade e aceleração peculiares, definiremos algumas quantidades úteis como velocidade relativa, $\mathbf{V}_{rel}(t_0)$, e a aceleração relativa, $\mathbf{G}_{rel}(t_0)$, associadas às derivadas da perturbação.

Definimos velocidade e aceleração relativa, respectivamente, da seguinte maneira,

$$\mathbf{V}_{rel}(t) := \dot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t) = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{a}}\mathbf{q}, \quad (4.82)$$

e

$$\mathbf{G}_{rel}(t) := \ddot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t) = \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{a}}\mathbf{q}. \quad (4.83)$$

Dessa forma, com $\mathbf{V}_{rel}(t_0)$ e $\mathbf{G}_{rel}(t_0)$ definidos, podemos construir, com (4.77) e (4.78), uma velocidade peculiar relativa, $\mathbf{U}_{rel}(t_0)$, e uma aceleração peculiar relativa, $\mathbf{W}_{rel}(t_0)$, como

$$\mathbf{U}_{rel} := \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{V}_{rel}(t_0) = \dot{\mathbf{P}}(t_0) \quad (4.84)$$

e

$$\mathbf{W}_{rel} := \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{G}_{rel}(t_0) = \ddot{\mathbf{P}}(t_0) . \quad (4.85)$$

Como decompos o vetor perturbação em duas componentes, uma cujo rotacional é nulo e outra cujo divergente é nulo, $\mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t)$ e $\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t)$ respectivamente, o mesmo acontece com as quantidades definidas acima,

$$\mathbf{U}_{rel}^j = \mathbf{V}_{rel}^j(t_0) \quad (4.86)$$

e

$$\mathbf{W}_{rel}^j = \mathbf{G}_{rel}^j(t_0) . \quad (4.87)$$

com j podendo assumir os valores R e D .

Entretando, utilizando a equação (4.62) avaliada em $t = t_0$ encontraremos a seguinte condição sobre \mathbf{W}_{rel} ,

$$\frac{\ddot{a}}{a} \mathbf{P}^R(t_0) - \ddot{\mathbf{P}}^R(t_0) = 0 , \quad (4.88)$$

mas como $\mathbf{P}^R(t_0) = \mathbf{0}$, concluímos que,

$$\ddot{\mathbf{P}}^R(t_0) = \mathbf{G}_{rel}^R(t_0) = \mathbf{W}_{rel}^R = 0 . \quad (4.89)$$

Prosseguindo com o objetivo de escrever \mathbf{Q}_i^R , \mathbf{Q}_i^D e \mathbf{P}_p^D (com $i = 1, 2$) em termos de \mathbf{U}_{rel}^D , \mathbf{U}_{rel}^R e \mathbf{W}_{rel}^D , vamos utilizar as condições iniciais sobre a perturbação, $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0}$, e a primeira derivada temporal do campo perturbativo, $\dot{\mathbf{P}}(\mathbf{q}, t_0)$.

Como $\mathbf{P}(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t_0) + \mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0}$, então

$$\mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{0} \quad (4.90)$$

e

$$\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t_0) = 0, \quad (4.91)$$

individualmente. Isso nos permite escrever

$$\mathbf{P}^R(\mathbf{q}, t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{Q}_1^R(\mathbf{q}) + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{Q}_2^R(\mathbf{q}), \quad (4.92)$$

resultando em

$$\mathbf{Q}_1^R(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_2^R(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.93)$$

Com a primeira derivada temporal da perturbação, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}^R(\mathbf{q}, t) &= \dot{\mathbf{P}}_1^R(\mathbf{q}, t) + \dot{\mathbf{P}}_2^R(\mathbf{q}, t) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \mathbf{Q}_1^R(\mathbf{q}) + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{Q}_2^R(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (4.94)$$

mas como $\dot{\mathbf{P}}^R(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{V}_{rel}^R(t_0) = \mathbf{U}_{rel}^R$, ficamos com

$$2\mathbf{Q}_1^R(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_2^R(\mathbf{q}) = 3t_0 \mathbf{U}_{rel}^R. \quad (4.95)$$

Portanto, as equações (4.93) e (4.95) resultam em

$$\mathbf{Q}_1^R(\mathbf{q}) = 3t_0 \mathbf{U}_{rel}^R, \quad (4.96)$$

$$\mathbf{Q}_2^R(\mathbf{q}) = -3t_0 \mathbf{U}_{rel}^R. \quad (4.97)$$

O mesmo será feito com a componente $\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t)$:

$$\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{4}{3}} \mathbf{Q}_1^D + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \mathbf{Q}_2^D + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{P}_p^D, \quad (4.98)$$

$$\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{P}_1^D(\mathbf{q}, t_0) + \mathbf{P}_2^D(\mathbf{q}, t_0) + \mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}, t_0) = 0, \quad (4.99)$$

portanto,

$$\mathbf{Q}_1^D(\mathbf{q}) + \mathbf{Q}_2^D(\mathbf{q}) + \mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}) = 0, \quad (4.100)$$

que resulta em

$$\mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}) = -\mathbf{Q}_1^D(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}_2^D(\mathbf{q}). \quad (4.101)$$

Tomando a derivada temporal de (4.98), temos que

$$\dot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t) = \frac{4}{3} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{Q}_1^D - \frac{1}{3} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{4}{3}} \mathbf{Q}_2^D + \frac{2}{3} \frac{1}{t_0} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \mathbf{P}_p^D, \quad (4.102)$$

portanto, em $t = t_0$ e com $\dot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t_0) = \mathbf{U}_{rel}^D$, obtemos

$$4\mathbf{Q}_1^D(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}_2^D(\mathbf{q}) + 2\mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}) = 3t_0 \mathbf{U}_{rel}^D. \quad (4.103)$$

Mas como a componente $\mathbf{P}^D(\mathbf{q}, t)$ possui três funções a serem determinadas, duas provenientes da equação homogênea e uma da equação inhomogênea, precisamos de mais uma equação de vínculo com o campo de velocidades, que virá da segunda derivada temporal do campo de velocidades relativas peculiares, $\mathbf{W}_{rel}^D = \ddot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t_0)$, lembrando que a componente sem rotacional é nula. Sendo assim, temos

$$\ddot{\mathbf{P}}^D(\mathbf{q}, t) = \frac{4}{9} \frac{1}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \mathbf{Q}_1^D + \frac{4}{9} \frac{1}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{7}{3}} \mathbf{Q}_2^D - \frac{2}{9} \frac{1}{t_0^2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{4}{3}} \mathbf{P}_p^D, \quad (4.104)$$

que, em $t = t_0$ e com a condição imposta acima, fica da seguinte maneira

$$4\mathbf{Q}_1^D(\mathbf{q}) + 4\mathbf{Q}_2^D(\mathbf{q}) - 2\mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}) = 9t_0^2 \mathbf{W}_{rel}^D. \quad (4.105)$$

Com as três equações de vínculo entre os campos perturbativos sem rotação e o campo de velocidades peculiares, e sua derivada temporal, encontramos as seguintes relações,

$$\mathbf{Q}_1^D(\mathbf{q}) = \frac{3}{5}t_0 \mathbf{U}_{rel}^D + \frac{9}{10}t_0^2 \mathbf{W}_{rel}^D, \quad (4.106)$$

$$\mathbf{Q}_2^D(\mathbf{q}) = -\frac{3}{5}t_0 \mathbf{U}_{rel}^D + \frac{3}{5}t_0^2 \mathbf{W}_{rel}^D \quad (4.107)$$

e

$$\mathbf{P}_p^D(\mathbf{q}) = -\frac{3}{2}t_0^2 \mathbf{W}_{rel}^D. \quad (4.108)$$

E finalmente obtemos a expressão da evolução do universo linearmente perturbado⁷ em função das condições iniciais impostas sobre o campo de velocidades do universo,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = & \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{q} + \frac{3}{5}t_0 \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] \mathbf{U}_{rel}^D + 3t_0 \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] \mathbf{U}_{rel}^R + \\ & + t_0^2 \left[\frac{9}{10} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] \mathbf{W}_{rel}^D. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Sendo assim, diante das componentes \mathbf{U}_{rel}^D e \mathbf{W}_{rel}^D , cujos divergentes são nulos, não há dúvidas de que em um modelo que obedece (4.32), as estruturas formadas devem possuir vórtices. Esse resultado contradiz o modelo proposto por Zel'dovich, quando ele diz que as estruturas formadas, do tipo panqueca, não devem possuir vórtices [17, 18, 22], muito embora, eles concordem com o tipo de estrutura formada.

De (4.53), e lembrando que $\ddot{\mathbf{P}}(t_0) = \dot{\mathbf{P}}^D(t_0) = \mathbf{W}_{rel}^D$, chegamos na expressão que determina a densidade de matéria em termos da derivada temporal do campo de velocidades,

$$\rho_0(\mathbf{q}) = \rho_{H0} - \frac{1}{4\pi G} \nabla_L \cdot \mathbf{W}_{rel}^D, \quad (4.110)$$

sendo que, segundo (4.26), $\rho(\mathbf{q}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{q})}{\det[J_{ab}]}$, resultando em

⁷A aparente contradição entre a evolução não linear e a perturbação linear será discutida mais à frente

$$\rho(\mathbf{q}, t) = \frac{\rho_{H0}}{\det[J_{ab}]} - \frac{1}{4\pi G} \frac{\nabla_L \cdot \mathbf{W}_{rel}^D}{\det[J_{ab}]}, \quad (4.111)$$

que contrasta, pelo segundo termo, com a expressão (4.13) obtida por Zel'dovich.

De acordo com Zel'dovich, o fator perturbativo da expressão (4.2) cresce a uma taxa maior que o fator de escala, e para que o mesmo ocorra com o modelo generalizado proposto aqui, vamos impor algumas condições iniciais sobre o campo de velocidade e aceleração peculiar relativa. A primeira condição é bem objetiva: note que o único termo de (4.109) que possui uma taxa de crescimento acima do fator de escala é o segundo termo da direita, portanto, a condição mais óbvia é $\mathbf{U}_{rel}^R = \mathbf{W}_{rel}^D$, resultando em

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{q} + \frac{3}{5} t_0 \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{1}{3}} \right] \mathbf{U}_{rel}^D. \quad (4.112)$$

Essa condição sobre os campos de velocidade e aceleração também ajusta a expressão (4.111) à expressão (4.13). Além dessa condição, ainda há outra maneira de obter os resultados acima, basta aplicar a condição $\mathbf{U}_{rel}^R = 0$ e $\mathbf{U}_{rel}^D = t_0 \mathbf{W}_{rel}^D$, resultando em

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \mathbf{q} + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \mathbf{U}_{rel}^D. \quad (4.113)$$

Portanto, podemos ver que esta generalização fornece, além dos resultados previstos por Zel'dovich, um comportamento rotacional do campo de velocidades das partículas. Na próxima seção discutiremos em maiores detalhes esses resultados.

4.2.3 Algumas ponderações sobre essa generalização.

O procedimento realizado, não somente no modelo proposto por Zel'dovich mas também nessa generalização que acabamos de desenvolver (além do modelo de adesão gravitacional, a ser apresentado no próximo capítulo), consiste em uma perturbação de caráter linear, isotrópica e inomogênea do campo gravitacional, refletida na maneira como cada ponto do espaço evolui com o tempo e expressa matematicamente por uma relação do tipo

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}, t) = a(t)\mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{q}, t), \quad (4.114)$$

onde a vizinhança próxima dos pontos do espaço em que não há perturbação evolui aproximadamente de acordo com o primeiro termo à direita de (4.114), enquanto que a vizinhança próxima dos pontos em que há perturbação evolui obedecendo todo o lado direito dessa expressão. Essa vizinhança evolui, portanto, a uma taxa menor daquela onde não há perturbação gravitacional, propiciando o aumento da densidade nesta região.

Vimos anteriormente que a quantidade adimensional que mede a aglomeração de matéria num ponto perturbado do espaço é o contraste δ . Como a perturbação do campo gravitacional é inicialmente zero, é natural que esse contraste tenha valores muito pequenos, $\delta \ll 1$, no princípio da perturbação, mas que, com o passar do tempo, ele assumia valores maiores ou iguais a 1, $\delta \geq 1$, período esse denominado período de evolução não-linear. Essa é uma das grandes vantagens desses modelos quando comparados a modelos que assumem uma perturbação inicial sobre o campo escalar de densidade de matéria, do tipo

$$\rho(\mathbf{q}, t) = \rho_0(\mathbf{q}) + \delta\rho(\mathbf{q}, t), \quad (4.115)$$

como no método de simetria esférica, onde utilizamos as coordenadas eulerianas, visto no capítulo anterior. Outra grande e evidente vantagem é a possibilidade de obter a formação de estruturas com formatos e características mais compatíveis com o observado atualmente. Segundo o modelo esfericamente simétrico, a única estrutura capaz de ser formada são os aglomerados com formato esférico. Enquanto que os modelos que consideram uma perturbação sobre o fator de escala do espaço, prevêem a formação de estruturas chatas, denominadas panquecas, aproximando-se do formato das estruturas observadas.

Uma das ferramentas mais importantes para se analisar perturbações lineares da densidade de matéria ($\delta \ll 1$) é a expansão em modos de Fourier, pois evidencia a evolução independente de cada modo perturbativo, mas como a formação das estruturas em larga escala ocorre quando $\delta \geq 1$ essa poderosa ferramenta deve ser descartada, visto que cada modo perturbativo não mais evolui individualmente. Portanto, para trabalharmos com perturbações da densidade de matéria, como no modelo esfericamente simétrico, faz-se necessário a adoção das coordenadas eulerianas, a fim de acompanharmos o movimento

das partículas. Tudo isso não é necessário nos modelos que adotam as coordenadas lagrangianas, onde a perturbação é evidenciada na regra de transformação entre as coordenadas física e lagrangianas dada por (4.114).d

Um ponto que deve ficar extremamente claro é que as observações feitas em 4.1.1 são válidas nesta generalização, e podem ser confirmadas pela equação (4.111).

5 *Modelo de Adesão Gravitacional*

O método aproximativo proposto por Zel'dovich, analisado no capítulo anterior, apesar de elegante e eficiente faz duas previsões desagradáveis: a formação apenas de estruturas do tipo panqueca e uma espessura infinitesimal desses objetos. Resumidamente, este método descreve o modo como as partículas do meio perturbado, descrito por (4.2), se comportam, sem qualquer consideração de limites (físicos ou não) sobre a aproximação entre elas. Essa falta de limites sobre a aproximação entre as partículas culmina na formação de uma estrutura com densidade volumétrica infinita, conservando porém uma densidade superficial finita de uma panqueca com espessura infinitesimal. Vários modelos computacionais, classificados generalizadamente como modelos N-corpos¹, tidos como referência na análise de resultados, discordam das previsões da aproximação de Zel'dovich [23, 24, 25].

Em 1985, Gurbatov, Saichev e Shandarin apresentaram pela primeira vez uma possível solução para os problemas citados anteriormente [26], acrescentando um termo de viscosidade às equações de Zel'dovich, ajustando assim a espessura das estruturas formadas. A equação obtida após a inserção da viscosidade é conhecida como equação de Burgers² e possui uma solução bem conhecida.

O termo viscoso acrescentado deliberadamente não representa uma viscosidade física do meio, ele é apenas um artifício matemático extremamente útil no ajuste da espessura de

¹O modelo N-corpos é sempre tido como referência visto que ele utiliza métodos computacionais para traçar a trajetória individual de N partículas, tornando-se mais realista, porém mais complexo, conforme aumentamos o valor de N.

²Em 1940, Johannes Martinus Burgers apresentou um conjunto de soluções para um certo tipo de equações diferenciais parciais (a equação de Burgers) que, logo após, passou a ser utilizado para descrever fenômenos de difusão gasosa. Somente anos mais tarde, em 1985, os físicos Gurbatov, Saichev e Shandarin aplicaram essa equação à cosmologia.

cada estrutura formada. Essa é a razão para o nome Adesão Gravitacional.

Como veremos mais adiante, o método de Adesão Gravitacional possui, ao contrário de outros modelos, uma dependência das condições iniciais de um potencial escalar do campo de velocidades, associadas ao potencial gravitacional durante o período de evolução linear (nossas condições iniciais são tomadas ainda no período de evolução linear). Para melhor esclarecer esses detalhes, vamos às considerações físicas e matemáticas desse modelo. Assumiremos um universo composto por um componente do tipo CDM, onde a equação de estado é nula. Adotaremos ainda o referencial lagrangiano, assim como na aproximação de Zel'dovich, com uma transformação do tipo

$$\mathbf{r}(t, \mathbf{q}) = a(t) [\mathbf{q} + b_{ad}(t)\mathbf{P}(\mathbf{q})] , \quad (5.1)$$

onde $b_{ad} = \frac{b(t)}{a(t)}$, sendo $b(t)$ definido em (4.2), de onde temos que $b_{ad}(0) = 0$. Como $b_{ad}(0) = 0$, a coordenada lagrangiana \mathbf{q} é compreendida como a posição (lagrangiana) inicial de cada partícula. Assumiremos aqui um universo plano, $\Omega = 1$.

Em todo o capítulo utilizaremos quantidades comóveis (discutidas no capítulo 4), como por exemplo as coordenadas comóveis, definidas por $\mathbf{q}_c = \mathbf{r}/a(t)$. Sendo assim, a transformação comóvel entre os referenciais euleriano e lagrangiano fica escrita como segue,

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{q} + b_{ad}(t)\mathbf{P}(\mathbf{q}) . \quad (5.2)$$

Nas expressões (5.1) e (5.2), $b_{ad}(t)$ é o fator de expansão local devido à perturbação, e $\mathbf{P}(\mathbf{q})$ é a distribuição espacial da perturbação, ambos referentes ao modelo de Adesão Gravitacional. Suponha, entretanto, um universo não-perturbado, completamente homogêneo e isotrópico, ou seja, com $\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$ em todos os pontos. Nesse caso, pela (5.2), $\mathbf{q}_c = \mathbf{q}$ em qualquer instante. Isso significa que a distância comóvel entre duas partículas é, além de constante, igual à distância entre elas no instante inicial. Contudo, a perturbação inhomogênea e isotrópica existe (inicialmente pequena o quanto quisermos), e portanto a posição comóvel de cada partícula varia, com o tempo, da posição inicial \mathbf{q} por uma quantidade $b_{ad}(t)\mathbf{P}(\mathbf{q})$. Ou seja, suponha que uma dada partícula “enxerga” uma outra partícula vizinha a uma distância \mathbf{q} . Com o passar do tempo, devido à perturbação,

aquela partícula verá sua vizinha em uma nova posição $\mathbf{q} + b_{ad}(t)\mathbf{P}(\mathbf{q})$. Definimos, nesses casos, a velocidade peculiar comóvel dada por

$$\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{V}}{a(t)} = \dot{b}_{ad}(t)\mathbf{P}(\mathbf{q}), \quad (5.3)$$

onde o ponto sobre as quantidades indica derivação temporal.

Observe que a velocidade peculiar é diretamente proporcional ao campo perturbativo, e a partir dela definiremos um campo de velocidades da seguinte maneira,

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}(t)}{\dot{b}_{ad}(t)} \equiv \mathbf{P}(\mathbf{q}). \quad (5.4)$$

Com (5.4) podemos obter uma expressão análoga à equação de movimento de Euler, efetuando uma mudança de coordenadas conveniente entre o tempo cósmico e o parâmetro temporal $b_{ad}(t)$.

Antes de mais nada, observe que a derivada temporal total pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla, \quad (5.5)$$

onde ∇ é o operador nabla no referencial euleriano.

Substituindo a variável de derivação $t \rightarrow b_{ad}(t)$ na equação (5.5), ficamos com

$$\frac{d}{db_{ad}} \dot{b}_{ad} = \frac{\partial}{\partial b_{ad}} \dot{b}_{ad} + \dot{b}_{ad} \frac{d\mathbf{r}}{db_{ad}} \cdot \nabla, \quad (5.6)$$

$$= \frac{\partial}{\partial b_{ad}} + \mathbf{P} \cdot (\mathbf{q}) \nabla. \quad (5.7)$$

Mas como

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}(\mathbf{q}), \quad (5.8)$$

a derivada total em relação ao parâmetro b_{ad} ficará da seguinte maneira,

$$\frac{d}{db_{ad}} = \frac{\partial}{\partial b_{ad}} + \mathbf{v} \cdot \nabla . \quad (5.9)$$

Entretanto, \mathbf{v} depende apenas da posição lagrangiana de cada partícula, portanto

$$\frac{d\mathbf{v}}{db_{ad}} = 0 , \quad (5.10)$$

que conduz a ³

$$\frac{dv^i}{db_{ad}} = \frac{\partial v^i}{\partial b_{ad}} + v^j v_{,j}^i = 0 . \quad (5.11)$$

Finalmente obtivemos (5.11), que é similar à equação do movimento de Euler. Da mesma forma podemos encontrar uma expressão equivalente à equação da continuidade.

Da RG temos a conservação de energia dada por

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 , \quad (5.12)$$

ou ainda, utilizando (5.9),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \dot{b}_{ad}\mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 . \quad (5.13)$$

Definindo $\eta = a^3\rho$, podemos escrever

$$\frac{1}{\dot{b}_{ad}} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\eta) = 0 , \quad (5.14)$$

lembrando que $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Finalmente,

$$\frac{\partial \eta}{\partial b_{ad}} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\eta) = 0 , \quad (5.15)$$

onde, enfim, conseguimos obter uma expressão equivalente à equação da continuidade.

Devemos ressaltar que até aqui nada difere do modelo de Zel'dovich, e uma prova

³Aqui utilizamos a seguinte notação: $v_{,j}^i = \frac{dv^i}{dx^j}$ e a regra de Einstein, $A^i A_i = \sum_{i=1}^3 A^i A_i$ e $A^\mu A_\mu = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu A_\mu$.

disso é a solução da equação (5.15),

$$\eta = \frac{\eta_0}{\det\left[\frac{\partial q_{ci}}{\partial q_i}\right]}, \quad (5.16)$$

equivalente ao resultado (4.8) obtido no capítulo anterior.

O próximo passo, talvez um dos mais importantes neste modelo, é a inserção, que a princípio pode parecer arbitrária, de um termo na equação (5.11) equivalente a uma suposta viscosidade. Esse termo será responsável por ajustar as previsões do modelo de Zel'dovich aos resultados obtidos pelos modelos de N-corpos, conferindo uma espessura finita às estruturas formadas em larga escala.

Como verificamos anteriormente, a aproximação de Zel'dovich prevê a formação de estruturas cosmológicas em larga escala com espessuras infinitesimais, provenientes do colapso gravitacional em que $\rho \rightarrow \infty$, discordando dos resultados obtidos pelos modelos N-corpos. Essa aproximação infinita entre as partículas é resultado de algumas hipóteses físicas: consideramos apenas a interação gravitacional entre partículas pontuais, cuja dimensão é nula, e desconsideramos efeitos como o equilíbrio virial e a emissão de radiação (discutidos em 3.1.1).

Neste sentido, a viscosidade imposta terá o papel de resistir a essa compactação desenfreada, representando a grosso modo uma adesão gravitacional entre as partículas, forçando a formação de estruturas com espessura finita. Assim, a equação ficará da seguinte maneira,

$$\frac{\partial v^i}{\partial b_{ad}} + v^j v_{,j}^i = \nu \nabla^2 v^i, \quad (5.17)$$

onde ν é o coeficiente de viscosidade.

A forma como a viscosidade depende do campo de velocidades (proporcional ao laplaciano do campo de velocidades) foi escolhida com o único intuito de obtermos a equação de Burgers, cuja solução é bem conhecida ([26, 27, 28] e [29]).

É importante observar que mesmo inserindo viscosidade no processo, a ausência de vórtices nas estruturas formadas também é prevista no modelo de Adesão Gravitacional, e por isso ainda podemos escrever o campo de velocidades como o gradiente de um potencial

escalar,

$$\mathbf{v} = \nabla\Phi, \quad (5.18)$$

modificando a equação de Burgers da seguinte maneira,

$$\frac{\partial}{\partial b_{ad}} \nabla\Phi + (\nabla\Phi \cdot \nabla) \nabla\Phi = \mathbf{v} \nabla^2 (\nabla\Phi). \quad (5.19)$$

Logo abaixo reescreveremos a equação vetorial (5.19) em termos de suas componentes, com o objetivo de evidenciar algumas possíveis manipulações,

$$\frac{\partial}{\partial b_{ad}} \partial_i \Phi + (\partial_j \Phi \partial^j) \partial_i \Phi = \mathbf{v} \partial_j \partial^j \partial_i \Phi. \quad (5.20)$$

O produto interno será realizado mediante aplicação da métrica $g^{\mu\nu}$, da seguinte maneira,

$$\frac{\partial}{\partial b_{ad}} \partial_i \Phi + g^{jl} \partial_j \Phi \partial_l \partial_i \Phi = \mathbf{v} g^{jl} \partial_j \partial_l \partial_i \Phi. \quad (5.21)$$

O segundo termo do lado esquerdo da expressão anterior pode ser escrito como

$$g^{jl} \partial_j \Phi \partial_l (\partial_i \Phi) = g^{jl} \partial_i (\partial_j \Phi \partial_l \Phi) - g^{jl} \partial_j (\partial_i \Phi) \partial_l \Phi, \quad (5.22)$$

que, quando reescrita na sua forma vetorial, fornece

$$\nabla (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = (\nabla\Phi \cdot \nabla) \nabla\Phi + (\nabla\Phi \cdot \nabla) \nabla\Phi, \quad (5.23)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{2} \nabla (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi) = (\nabla\Phi \cdot \nabla) \nabla\Phi. \quad (5.24)$$

Escrevendo, novamente, a equação 5.24 em termos de suas componentes, obtemos

$$g^{jl} \partial_j \Phi \partial_l (\partial_i \Phi) = \frac{1}{2} g^{jl} \partial_i (\partial_j \Phi \partial_l \Phi), \quad (5.25)$$

que é exatamente o segundo termo do lado esquerdo da equação (5.21).

Substituindo o resultado obtido em (5.21), podemos reescrevê-la da seguinte maneira,

$$\partial_i \frac{\partial}{\partial b_{ad}} + \frac{1}{2} g^{jl} \partial_i \partial_j \Phi \partial_l \Phi = \nu g^{jl} \partial_j \partial_l \Phi, \quad (5.26)$$

$$\partial_i \left[\partial_i \frac{\partial}{\partial b_{ad}} + \frac{1}{2} g^{jl} \partial_j \Phi \partial_l \Phi \right] = \partial_i \left(\nu g^{jl} \partial_j \partial_l \Phi \right). \quad (5.27)$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial b_{ad}} \Phi + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = \nu \nabla^2 \Phi, \quad (5.28)$$

a menos de uma constante, absorvida pelo potencial Φ .

A equação de Burgers está sendo manipulada com a finalidade de encontrarmos uma equação de difusão, cuja solução, em termos de uma distribuição estatística, é conhecida. Neste sentido, definiremos um campo U da seguinte maneira,

$$\Phi = \Phi(U), \quad (5.29)$$

levando (5.28) em

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial b_{ad}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \nabla U \right)^2 = \nu \left[\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \cdot \nabla U + \frac{\partial \Phi}{\partial U} \nabla^2 U \right]. \quad (5.30)$$

Observe que, a menos do termo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \nabla U \right)^2 - \nu \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \cdot \nabla U, \quad (5.31)$$

temos a equação de difusão. Portanto, igualar este termo a zero fornecerá a restrição sobre o campo U .

Assim,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \nabla U \right)^2 - \nu \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \cdot \nabla U = 0, \quad (5.32)$$

$$\nabla U \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)^2 \nabla U - \mathbf{v} \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right) \right] = 0. \quad (5.33)$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right)^2 \nabla U = \mathbf{v} \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial U} \right), \quad (5.34)$$

que conduz a

$$\Phi = -2\mathbf{v} \ln U. \quad (5.35)$$

Com essa condição satisfeita, temos enfim a equação de difusão

$$\frac{\partial U}{\partial b_{ad}} = \mathbf{v} \nabla^2 U, \quad (5.36)$$

cuja solução, em termos de uma distribuição estatística, é conhecida e dada por

$$U(\mathbf{r}, b_{ad}) = \left(\frac{1}{4\pi\mathbf{v}b_{ad}} \right)^{3/2} \int \exp \left[-\frac{\Phi_0}{2\mathbf{v}} - \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{q})^2}{4\mathbf{v}b_{ad}} \right] d^3\mathbf{q}. \quad (5.37)$$

Na solução acima, Φ_0 é o potencial de velocidades avaliado no instante inicial, quando $b_{ad} = 0$, que fornece pela (5.35) $U(\mathbf{q}, 0) = \exp\left(-\frac{\Phi_0}{2\mathbf{v}}\right)$. Definindo a quantidade $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad}) = \Phi_0 + \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{q})^2}{2b_{ad}}$, teremos,

$$U(\mathbf{r}, b_{ad}) = \left(\frac{1}{4\pi\mathbf{v}b_{ad}} \right)^{3/2} \int \exp \left[-\frac{1}{2\mathbf{v}} G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad}) \right] d^3\mathbf{q}. \quad (5.38)$$

Utilizando as equações (5.18), (5.35) e (5.38), temos

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi = -2\mathbf{v} \frac{\nabla U}{U}. \quad (5.39)$$

O gradiente do campo U fornece

$$\nabla U(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = \left(\frac{1}{4\pi\nu b_{ad}} \right)^{3/2} \left(-\frac{1}{2\nu b_{ad}} \right) \int d^3q (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \exp \left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad}) \right], \quad (5.40)$$

o qual substituiremos em (5.39), obtendo

$$\mathbf{v} = \frac{\int d^3q (\mathbf{r} - \mathbf{q}) \exp \left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad}) \right]}{b \int d^3q \exp \left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad}) \right]}. \quad (5.41)$$

Observe que no limite $\nu \rightarrow 0$ temos novamente o modelo de Zel'dovich. O que deve ficar claro é que estamos atribuindo, forçosamente, uma viscosidade efetiva a um fluido de matéria escura fria, cuja pressão é nula. Esse artifício foi utilizado com o intuito de evitar dimensões infinitesimais da espessura das estruturas formadas (as “panquecas”), um problema característico do modelo de Zel'dovich.

5.1 Análise do modelo mediante valores de ν

Existem na literatura duas maneiras de abordar o resultado (5.41) obtido acima, uma delas é fazendo $\nu \rightarrow 0$, e a outra é fazendo ν pequeno porém finito.

A seguir faremos uma análise mais detalhada de cada um desses métodos.

5.1.1 Método $\nu \rightarrow 0$.

Na prática a solução da equação (5.41) é obtida pelo método *Steepest Descent*⁴, com o qual utilizamos o fato de que para um dado \mathbf{q}_i (coordenada lagrangiana de uma dada partícula), a maior contribuição com as integrais envolvidas na solução (5.41) é dada pelo menor valor assumido por $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}_i, b_{ad})$. O procedimento consiste em definirmos o parabolóide [23, 24, 25, 30]

$$P(\mathbf{r}_i, \mathbf{q}_i, b_{ad}) = -\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{q}_i)^2}{2b_{ad}} + N \quad (5.42)$$

e ajustarmos a constante real N a partir de $-\infty$ até o ponto em que o parabolóide tangencia a hipersuperfície $\Phi_0(\mathbf{q}_i)$. Neste(s) ponto(s) de tangência, $G(\mathbf{r}_i, \mathbf{q}_i, b_{ad})$ assume seu menor

⁴Veja o Apêndice B para maiores detalhes sobre o método *Steepest Descent*.

valor.

Enfim, tomamos a projeção do valor mínimo deste parabolóide sobre uma hipersuperfície de coordenadas eulerianas, na qual obtemos a coordenada \mathbf{r}_i , como mostra a Figura 5.1.

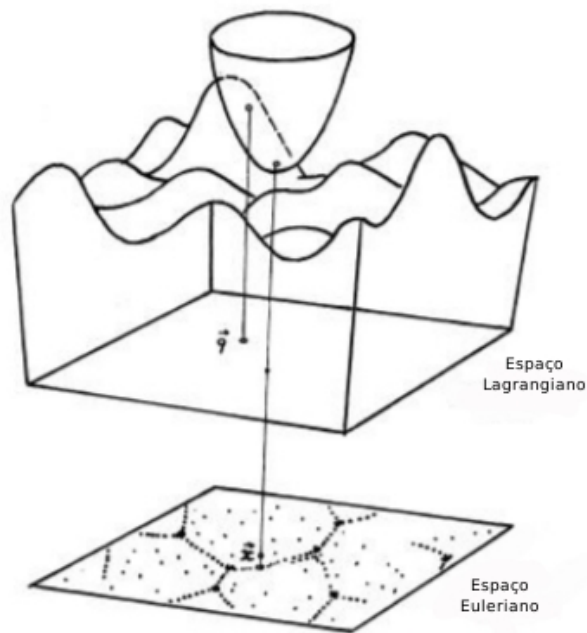


Figura 5.1: Interseção entre a hipersuperfície Φ_0 e o parabolóide no ponto \mathbf{q}_i [25].

O significado físico dos pontos \mathbf{q}_i e \mathbf{r}_i é simples e de fácil compreensão: \mathbf{q}_i é a coordenada lagrangiana da i -ésima partícula no instante inicial, ou seja, antes de qualquer aglomeração (ainda no período de evolução linear da perturbação da densidade); \mathbf{r}_i , por sua vez, é a coordenada euleriana da i -ésima partícula no instante b_{ad} (instante referente ao parâmetro b_{ad}), já no período de evolução não linear, podendo já ter ocorrido aglomeração ou não.

Ou seja, para um dado ponto (lagrangiano) do espaço podemos encontrar um parabolóide que nos informará a posição (euleriana) futura deste ponto inicial, sendo que a cada partícula está associada uma coordenada lagrangiana distinta.

Entretanto, ainda existem algumas restrições quanto ao parabolóide definido. Devemos garantir que ele não cruze a hipersuperfície Φ_0 , apenas tangencie-a. Inicialmente, para pequenos valores de b_{ad} , cada parabolóide tangencia em apenas um único ponto lagrangiano, enquanto que para instantes futuros, grandes valores de b_{ad} , cada parabolóide pode, ao mesmo tempo, tangenciar um, dois ou três pontos lagrangianos distintos. Em cada caso desses temos uma estrutura diferente formada: parabolóide tangenciando apenas um ponto \mathbf{q}_i , temos a formação das panquecas; tangenciando dois pontos distintos \mathbf{q}_i 's, temos a formação dos filamentos e quando tangencia três pontos distintos \mathbf{q}_i 's, temos a formação dos aglomerados. Encontrar esse(s) ponto(s) euleriano(s) significa resolver a equação

$$\mathbf{r}_i(\mathbf{q}_i, b_{ad}) = \mathbf{q}_i + \int db_{ad} \mathbf{v}(\mathbf{r}, \mathbf{q}_i, b_{ad}). \quad (5.43)$$

Feito o trabalho de encontrar os pontos \mathbf{r}_i obtemos um mapeamento das estruturas formadas ao qual daremos o nome de “esqueleto” das reais estruturas (veja Figura 5.2).

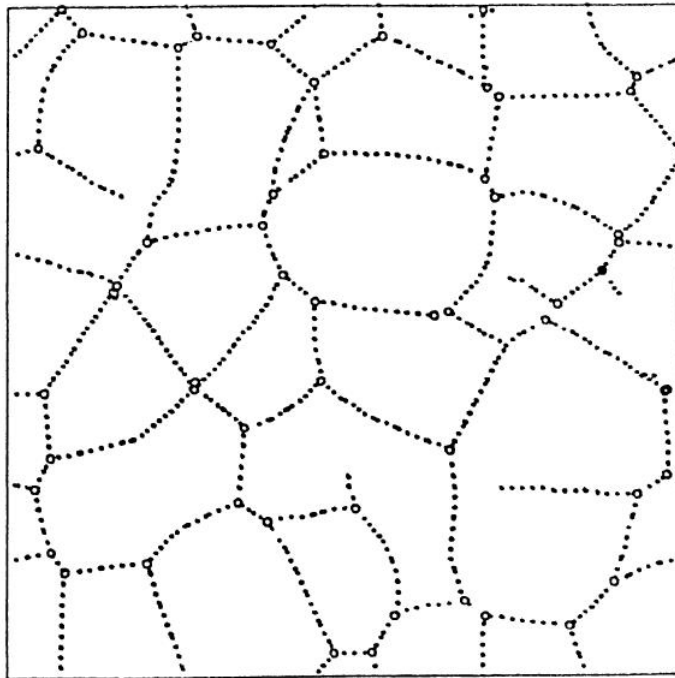


Figura 5.2: Resultado numérico do modelo de Adesão com $\mathbf{v} \rightarrow 0$, [25].

A princípio podemos imaginar que o modelo de Adesão Gravitacional pouco difere do

modelo de Zel'dovich, contudo, note que a expressão do campo de velocidades no modelo de Zel'dovich é dada por (4.76), enquanto que no modelo de Adesão Gravitacional obtemos a expressão (5.41) e a partir dela fazemos $\mathbf{v} \rightarrow 0$.

Fisicamente, antes da fase de aglomeração o modelo de Zel'dovich confunde-se com o de Adesão Gravitacional, mas após a formação das estruturas o primeiro prevê espessuras infinitesimais para elas, enquanto que o método de Adesão Gravitacional impõe um limite à espessura das estruturas.

5.1.2 Método \mathbf{v} finito

Vimos anteriormente que quanto menor o valor de \mathbf{v} menor será a espessura das estruturas formadas em larga escala. Portanto, fixar um valor para \mathbf{v} significa delimitar uma região no espaço lagrangiano (das posições lagrangianas) no qual a função $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad})$ ainda possui valores consideráveis às integrais da equação (5.41). Ou seja, não consideraremos apenas os pontos \mathbf{q}_i que minimizam a função $G(\mathbf{r}, \mathbf{q}, b_{ad})$, mas também os pontos pertencentes a uma certa vizinhança, delimitada por \mathbf{v} , que contribuem significativamente com as integrais.

Essa delimitação é feita, segundo [24], da seguinte maneira: as integrais presentes na equação (5.41) serão feitas apenas nas regiões onde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{q}) - G_{min.}(\mathbf{r}, \mathbf{q}_i) = \frac{1}{\varepsilon} , \quad (5.44)$$

onde ε é um número pequeno, à critério do utilizador, que fornece o tamanho da região de integração, sendo ainda necessário utilizar a relação (5.43) para encontrar as posições eulerianas, num certo instante futuro b_{ad} , de cada partícula. A descrição do comportamento das partículas externas a essa região delimitada é similar para os dois modelos, de Adesão Gravitacional e de Zel'dovich. Quanto maior a distância entre a partícula externa e a região, menor será a diferença entre os modelos.

6 Método de Simulação N-corpos

O período de evolução não linear, existente durante a formação das estruturas cosmológicas como às vemos hoje, apresenta como principal dificuldade o tratamento matemático da interação não linear entre as partículas do meio envolvidas no processo. Motivados por este problema, apresentamos até este exato momento apenas modelos evolutivos analíticos que aproximam, cada um a seu modo, o cenário físico real por um ideal. No capítulo 3 fizemos considerações de simetria esférica e velocidade peculiar inicialmente nula sobre a perturbação da densidade. No capítulo 4 apresentamos o método proposto por Zel'dovich que, apesar de ser mais geral que o primeiro citado, prevê a formação de estruturas do tipo panquecas, com espessuras infinitesimais. Por último, no capítulo 5 analisamos um modelo que impõe uma "viscosidade gravitacional" ao método proposto por Zel'dovich, prevendo assim a formação hierárquica de três tipos distintos de estruturas, todas com espessuras finitas. Nesses três capítulos os métodos aproximativos apresentados são analíticos, possuindo a vantagem de apresentar resultados qualitativos extremamente úteis para termos uma ideia, ainda que superficial, sobre a formação dessas estruturas em larga escala.

O presente capítulo destina-se à apresentação de métodos numéricos para formação das estruturas em larga escala. De modo geral, esses métodos analisam a evolução individual de cada partícula do sistema, resultando, ao final, na formação (ou não) de estruturas cujas características são mais realistas, em comparação com os métodos analíticos. A proximidade com a realidade depende, em geral, do número de partículas existentes, por hipótese, no sistema; quanto maior o número de partículas, mais realísticos são os resultados. Contudo, o ganho em qualidade, com o acréscimo do número de partículas, ocorre mediante um inevitável aumento do gasto computacional, resultando muitas vezes em um longo tempo, nem sempre disponível, necessário para simular a formação dessas estruturas

em larga escala. A seguir vamos expor diferentes algoritmos que procuram equilibrar, de acordo a necessidade, a qualidade dos resultados com o trabalho computacional.

6.1 Método *Particle/particle*

Em alguns casos na física nos deparamos com a necessidade de resolver integrais de alto nível de complexidade analítica, incentivando-nos a desenvolver métodos numéricos que facilitem a busca pela solução do problema. Neste sentido, o método Monte Carlo, cujo nome, em sua origem, indica seu caráter aleatório ¹, cumpre de forma simples o objetivo, ainda que com um alto custo computacional.

Suponha que busquemos pela solução da seguinte integral

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (6.1)$$

e que tal solução deve ser numérica, devido a uma suposta complexidade. Decidindo por utilizar o método Monte Carlo, devemos seguir os seguintes passos: dividir o espaço domínio da função integrada em N pedaços iguais, nos quais a função $f(x)$ será avaliada em um ponto aleatório x_i (com $i = 1, 2, 3, \dots, N$); somar todos os valores assumidos pela função em cada uma das N regiões e dividir o resultado por N , afim de obtermos o valor médio. Por fim, multiplicamos o valor médio obtido pelo intervalo de integração $(b - a)$, resultando na solução aproximada da integral original

$$I = \frac{(a - b)}{N} \sum_j f(x_j), \quad (6.2)$$

onde x_j é escolhido aleatoriamente em cada uma das N regiões. Quanto maior o número de subdivisões N do intervalo de integração, maior será a acurácia do resultado, ainda que às custas de um enorme, e muitas vezes indisponível, tempo gasto durante o processo computacional.

O caso físico de interesse é a solução da equação de Poisson, no caso de várias partículas no sistema,

¹O nome “Monte Carlo” refere-se à capital de Mônaco, local de enorme concentração de cassinos, estes que são símbolos de aleatoriedade, indicando o mesmo caráter randômico do modelo.

$$\nabla^2\phi = 4\pi G \int \rho d^3v, \quad (6.3)$$

para o qual existem vários modelos computacionais já formulados, e tantos outros em formulação, além do método Monte Carlo, por nós escolhido para análise [31, 32].

Adaptando o procedimento descrito à distribuição de matéria granulada no universo (mesmo que esta matéria seja CDM), particionaremos o espaço em N regiões, ou realizações, constituídas por um número suficientemente grande (estatisticamente) de partículas do fluido. Atribuímos, ainda, a massa $m_i = N^{-1} \int \rho d^3x$ à coordenada $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ (com $i = 1, 2, 3, \dots, N$), escolhida aleatoriamente, em cada uma das regiões. Obtemos assim a seguinte solução aproximada

$$\phi(x_i) = - \sum_{j \neq i} G \frac{m_j}{(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.4)$$

onde ε é uma quantidade pequena, não necessariamente constante, imposta a fim de suavizar o efeito gravitacional para $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| < \varepsilon$, evitando uma singularidade. Chamamos de efeito de discretização o efeito associado ao processo de particionamento do espaço, prejudicando, quanto menor for N , a resolução das imagens das estruturas cosmológicas compactas. Outra fonte de perda de resolução é o parâmetro ε : a interação gravitacional entre partículas cujas posições satisfazem $|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| < \varepsilon$ é insignificante, impedindo-nos de conhecer detalhes do interior deste núcleo das estruturas.

Naturalmente, quanto maior o número das N partições, maior a confiabilidade do resultado, pois maior é a proximidade com o cenário real do universo. Podemos compreender este processo como a realização de N interações independentes entre a i -ésima e a j -ésima partícula, necessariamente distinta da primeira, separadas por uma distância aleatória. A acurácia deste modelo aproximativo computacional está atrelada à quantidade de partículas do meio: quanto mais, melhor !

Tomando o gradiente da expressão (6.4) podemos calcular a aceleração sobre a i -ésima partícula, dada a posição inicial das outras $N - 1$ partículas. Por uma integração temporal obtemos a velocidade, e integrando mais uma vez obtemos a posição em um certo instante t , dada a velocidade inicial da i -ésima partícula,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\phi|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} \quad (6.5)$$

e

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = \mathbf{v}_i. \quad (6.6)$$

Efetuada este procedimento para as N partículas temos, após um tempo t , a velocidade e a posição de cada uma. Utilizando este resultado como condição inicial em um novo processo, teremos mais uma vez a velocidade e a posição de cada uma, porém agora, em um instante posterior t' . A cada procedimento as partículas dão um passo em direção à formação de uma estrutura compacta, sendo, portanto, de extrema importância a determinação do tamanho de cada passo. Apesar de atraente à primeira vista, um passo de tamanho constante é extremamente ineficaz para formação de objetos compactos. O tamanho do passo deve diminuir de acordo com a realização do procedimento, e a regra de decaimento deve ser cuidadosamente analisada [33, 34].

Especialmente em formação de estruturas cosmológicas, o modelo acima relatado é conhecido por método *particle-particle*, pois como vimos o procedimento, em cada passo, calcula individualmente a interação entre duas partículas.

6.2 Algoritmo *Particle-Mesh*

A característica principal deste método computacional é o particionamento do espaço em um sistema cartesiano, como uma grade, onde as dimensões de cada célula desta grade são conhecidas, e a densidade de matéria, em cada uma, obedece a condições de contorno. As partículas não interagem diretamente umas com as outras, mas sim com um campo gravitacional médio de cada célula. Tradicionalmente, o tratamento numérico de um potencial escalar gradeado é feito com a técnica *Fast Fourier Transform* (FFT daqui por diante), com a qual as condições de contorno em cada célula são automaticamente satisfeitas. O número de processos computacionais envolvidos neste modelo é da ordem de $\mathcal{O}(N \ln N)$, onde N é o número de células da grade.

A simplicidade e a eficácia deste modelo fazem com que vários autores o utilizem [35,

36, 37], tanto na sua forma tradicional, utilizando FFT, quanto aplicando implementações particulares, visando a otimização do processo.

6.3 Método hierárquico em árvore

De acordo com Josh Barnes e Piet Hut, em 1986, um grande avanço computacional foi obtido, frente aos métodos mencionados anteriormente, com um algoritmo hierárquico em árvore. A grosso modo, este método é caracterizado por considerar uma subdivisão em células cúbicas idênticas da região onde possivelmente haverá formação de estruturas compactas da seguinte maneira: essa região inteira será a primeira célula cúbica, ou célula raiz, que abrangerá todas as N partículas consideradas, e cujo centro coincidirá com o centro de massa do sistema. Posteriormente, ela será subdividida em mais oito novas células, idênticas e cujo centro, de cada uma, coincidirá com o centro de massa referente a cada célula. Este processo ocorrerá até que haja somente uma partícula em cada subcélula [33, 34, 38, 39].

Tendo subdividido a região de interesse em células, calcularemos, a partir da célula raiz, a força gravitacional sobre cada partícula devido às demais subcélulas. Se uma certa subcélula estiver longe o suficiente da partícula em questão, o algoritmo aproximará toda a árvore abaixo desta célula por um multipolo. Do contrário, todas as subcélulas contribuirão. Como foi dito, no interior de uma célula qualquer pode haver uma ou mais partículas, porém a sua contribuição gravitacional ocorre como se ela fosse homogênea e com massa igual a soma das massas das partículas internas à célula em questão.

Apesar de muito eficiente, este algoritmo apresenta uma perda de acurácia em dois pontos, um quando aproximamos células distantes por multipolos, e outro quando consideramos uma distribuição homogênea, em cada subcélula, da massa das partículas a ela pertencentes. Mas, enfim, como saber se a distância entre uma célula e uma partícula é grande o suficiente para fazer a aproximação? Este julgamento é feito com base no parâmetro angular θ , definido como a divisão do comprimento da célula cúbica pela distância dela à partícula. A partir deste parâmetro, ajustamos a acurácia do modelo.

6.4 Outros métodos

Além dos algoritmos apresentados neste capítulo existem vários outros métodos com suas vantagens e desvantagens tais como, *Particle-Particle/Particle-Mesh*, ou simplesmente P^3M , que é obviamente uma junção dos dois primeiros métodos citados; *Hierarchical P^3M* , que também uma junção de métodos; o método chamado *Celestial Mechanics Codes* [39, 40, 4]. Enfim, a todo momento um novo código numérico, melhor em alguns pontos e pior em outros, é formulado pela comunidade científica. Todo este esforço em simular, além de vários outros processos físicos, a formação de estruturas cosmológicas, permite-nos testar, como em laboratórios, os modelos cosmológicos desejados.

7 *Considerações finais*

Essa dissertação foi elaborada com o objetivo de proporcionar uma análise objetiva do processo de formação das estruturas em larga escala em regime não linear, abordando modelos alguns analíticos, tornando-se um material relevante aos iniciantes neste assunto, por fornecer uma base consistente para um futuro trabalho mais profundo. Sendo assim, com o intuito de concretizar este objetivo, a distribuição dos modelos em cada capítulo seguiu uma ordem crescente da acurácia de forma que a cada novo capítulo o modelo abordado aproximava-se ainda mais da realidade.

Iniciamos, portanto, com um estudo sobre a aproximação linear das perturbações cosmológicas, embora o foco da dissertação tenha sido a evolução não linear. Neste capítulo enfatizamos ao máximo as principais considerações físicas, como os referenciais comóveis e a expansão em ondas planas, chegando, a partir desses conceitos, em uma regra para a evolução temporal da perturbação linear da densidade. Este resultado serviu como base de comparação aos modelos seguintes, evidenciando as diferenças entre a evolução linear e a não linear.

Em seguida apresentamos o primeiro método aproximativo que propõe uma descrição do período evolutivo não linear, supondo uma simetria esférica a essa evolução, respaldados pela validade do teorema de Birkhoff. Inicialmente tratamos este modelo por uma abordagem newtoniana, seguida por uma relativística. A simplicidade matemática, conferida pela consideração da simetria esférica, é um dos seus principais atrativos, fornecendo resultados importantes, em uma primeira análise, sobre a formação das estruturas cosmológicas. Por esse modelo obtivemos informações sobre o tempo de formação desses objetos, bem como condições sobre o raio e a massa para que haja o colapso. Vimos, inclusive, em qual instante esses objetos alcançam seu raio máximo.

Com o intuito de obter resultados mais próximos da realidade, apresentamos a aproximação de Zel'dovich que, ao contrário do método de simetria esférica, supõe uma taxa de expansão diferente para cada eixo coordenado. Esses eixos coordenados são definidos pela diagonalização da matriz jacobiana, obtida pela relação de transformação entre os referenciais euleriano e lagrangiano, e as taxas de expansão de cada eixo são os autovalores dessa matriz. Seguindo essas considerações, o modelo prevê a formação de estruturas conhecidas como panquecas, com espessura infinitesimal e desprovidas, a princípio, de rotação. Entretanto, de acordo com a generalização proposta por Buchert, a existência dessa rotação é verificada. É importante salientar que este método proposto por Zel'dovich, e aprimorado por Buchert, é uma valiosa ferramenta na obtenção de um campo de velocidades necessário em simulações computacionais.

No capítulo 5, adicionamos, de acordo com Gurbatov, Saichev e Shandarin, um termo de viscosidade artificial simulando uma interação entre as partículas do meio, com o intuito de obter a formação de estruturas com espessuras finitas, ao contrário do que é previsto por Zel'dovich. Com a inserção do termo viscoso, a velocidade de cada partícula do campo é obtida mediante a solução da equação de Burgers. Além de impossibilitar a formação de estruturas com espessuras infinitesimais, obtivemos também a previsão de três tipos distintos de estruturas, como as panquecas, os filamentos e os aglomerados.

Enfim, discutimos no capítulo 6 as vantagens e desvantagens de alguns dos métodos computacionais mais utilizados em formação de estruturas cosmológicas, como o método Monte Carlo, *Particle-Mesh* e o método hierárquico em árvore. Em geral, a acurácia do resultado, ou seja, o quanto o resultado se aproxima da realidade, está sempre associada ao gasto computacional: quanto maior a acurácia, maior o gasto computacional.

Tendo compreendido cada um desses modelos, um possível trabalho subsequente seria aplicá-los aos modelos cosmológicos e gravitacionais interessantes ao nosso grupo, como o modelo de Gás de Chaplygin e a gravitação de Brans-Dicke, investigando, por exemplo, qual a interferência da constante do modelo de Gás de Chaplygin na formação das estruturas em larga escala pelo método de adesão gravitacional. Os resultados dessa aplicação seriam confrontados com os resultados das simulações de N-corpos no modelo padrão.

APÊNDICE A -- Teorema de Birkhoff

O Teorema de Birkhoff garante que um campo gravitacional, descrito pela Relatividade Geral, apenas esfericamente simétrico é, a princípio, estático.

O problema em questão é a possibilidade de medirmos a variação do campo gravitacional gerada por uma oscilação esfericamente simétrica de um objeto também esférico. Ou seja, queremos descobrir se uma variação esférica da distribuição de matéria de um objeto provoca uma variação do seu campo gravitacional.

Este teorema é o equivalente relativístico do teorema newtoniano das cascas esféricas que diz o seguinte:

- o campo gravitacional devido a uma distribuição esférica de matéria não depende do raio dessa distribuição, ainda que seja nulo;
- dividindo este objeto esférico em cascas esféricas, uma casa esférica não produz campo gravitacional em um ponto do seu interior.

Devido ao caráter relativístico deste teorema, as equações (3.80), (3.81), (3.82) e (3.83) serão necessárias na sua demonstração. Mesmo assim, elas serão reescritas em momentos oportunos, de modo a não criar confusões ou dúvidas. Dessa forma, este apêndice está disposto da seguinte maneira: na seção A.1 faremos uma breve definição dos vetores de Killing, relacionando-os com as simetrias do sistema; na seção A.2 utilizaremos os vetores de Killing para encontrar a forma do elemento de linha que descreve o sistema em questão; na seção (A.3) obteremos cada componente da conexão afim e do tensor de Ricci (definidos mais a diante) para posteriormente substituí-los nas equações de campo de Einstein, demonstrando enfim o teorema. Na última seção, a (A.4), faremos algumas observações acerca do teorema em questão.

A.1 Derivada de Lie e os Vetores de Killing

Seja $\phi_\lambda : M \rightarrow N$ (M e N variedades diferenciais) um difeomorfismo¹ definido sobre funções $f : N \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $f \circ \phi_\lambda : M \rightarrow \mathfrak{R}$, associado a um campo vetorial \mathbf{v} . Com esse mapeamento podemos definir uma transformação ϕ_λ^* que leva tensores em tensores: a transformação ϕ_λ^* leva o tensor $T_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_l}$, cuja ordem é (l, k) , no tensor $\phi_\lambda^* T_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_l}$, cuja ordem também é (l, k) [13].

A aplicação do difeomorfismo ϕ_λ^* pode ser compreendida como um arrasto, de um ponto a outro, de um tensor, por uma curva parametrizada pelo parâmetro λ . Como estamos considerando o mapeamento $\phi_\lambda : M \rightarrow N$ difeomorfo, então necessariamente a dimensão das variedades M e N são idênticas. Portanto, a aplicação deste mapeamento equivale a uma mudança de coordenadas.

De acordo com esta interpretação dinâmica do mapeamento ϕ_λ^* , a existência de um campo vetorial \mathbf{v} , como o gerador de arrasto, fica mais clara. Assim, como \mathbf{v} é vetor tangente à curva λ de arrasto, suas componentes são dadas por²

$$v^\mu = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^\mu. \quad (\text{A.1})$$

Por definição, a derivada de Lie de um tensor é a diferença entre ele, avaliado em um certo ponto da variedade, e o tensor resultante do arrasto obtido pela aplicação do difeomorfismo ϕ_λ^* ,

$$\mathcal{L}_v T_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_k} \equiv \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{\phi_\lambda^* T_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_k} - T_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_k}}{\lambda} \right], \quad (\text{A.2})$$

onde \mathbf{v} é o campo vetorial associado ao difeomorfismo ϕ_λ^* .

Sobre um campo tensorial de ordem $(1, 1)$, a derivada de Lie está relacionada à derivada covariante de acordo com a seguinte fórmula, ou seja,

¹Um mapeamento um-a-um é dito difeomorfo se ele possui inversa e infinitas derivadas igualmente invertíveis.

²A notação indicial segue a convenção de [13]: objetos com índices latinos representam a própria quantidade (tensores, de forma geral), e quantidades com índices gregos representam as suas componentes, em um certo sistema de coordenadas.

$$\mathcal{L}_v T_b^a = v^c \nabla_c T_b^a - T_b^c \nabla_c v^a + T_c^a \nabla_b v^c, \quad (\text{A.3})$$

onde $\nabla_c X_b^a = \frac{\partial X_b^a}{\partial x^c} + \Gamma_{cr}^a X_b^r - \Gamma_{cb}^r X_r^a$.

Uma transformação ϕ_λ^* definida sobre um campo tensorial é dita simétrica quando a derivada de Lie deste campo for nula,

$$\mathcal{L}_v T_{b_1 \dots b_k}^{a_1 \dots a_k} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Ou ainda, se o campo tensorial em questão for o tensor métrico, diremos que essa transformação é uma isometria, significando que $\phi_\lambda^* g_{ab} = g_{ab}$.

Em particular, de (A.3) e do fato de que $\nabla_c g_{ab} = 0$, a equação de isometria é

$$\nabla_a v_b + \nabla_b v_a = 0, \quad (\text{A.5})$$

da qual definimos os campos vetoriais \mathbf{v} como os vetores de Killing.

Como temos a liberdade de escolha do sistema de coordenadas, faremos essa escolha baseados na condição de simetria do sistema. Por exemplo, se o sistema possui isometria radial, um arrasto do tensor métrico na direção radial não o altera. Dessa forma, o vetor tangente à direção radial é dado, segundo (A.1), por

$$v^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^\mu, \quad (\text{A.6})$$

que é o vetor de Killing associado à simetria radial do sistema.

A.2 O elemento de linha

De acordo com a definição de vetor de Killing e com as condições iniciais do problema, podemos saber quantos campos de Killing existem e a quais simetrias eles estão associados. Por exemplo, sabemos que nosso sistema possui simetria esférica e que o campo gravitacional deve ser estacionário. Portanto, o sistema de coordenadas esféricas é o mais conveniente.

Devido à condição de simetria esférica, uma isometria radial e uma angular devem existir associadas aos vetores $\zeta^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\mu$ e $\Theta^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \omega}\right)^\mu$, respectivamente. A condição de campo gravitacional estacionário não representa uma isometria, pois estamos considerando, *a priori*, que o campo gravitacional não possua simetria de translação temporal. Assim, o vetor associado à translação temporal, dado por $\xi^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t''}\right)^\mu$, não caracteriza um vetor de Killing.

Os vetores ζ e Θ são ortogonais entre si, pois são campos vetoriais de Killing associados a direções perpendiculares, enquanto que ξ não é perpendicular aos dois primeiros, visto que não é um vetor de Killing. Contudo, podemos torná-lo perpendicular a um dos dois, sendo que escolheremos o vetor Θ .

Dessa forma, o tensor métrico terá componentes temporal, radial, angular e uma componente mista radial/temporal, associada à não perpendicularidade entre essas direções. Essas componentes serão dadas por³,

$$\begin{aligned} g_{t''t''} &= \xi^\mu \xi_\mu \\ &= g_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu = -A'(r, t''), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \zeta^\mu \zeta_\mu \\ &= g_{\mu\nu} \zeta^\mu \zeta^\nu = B'(r, t''), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} g_{\omega\omega} &= \Theta^\mu \Theta_\mu \\ &= g_{\mu\nu} \Theta^\mu \Theta^\nu = r^2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e

$$g_{rt''} = g_{t''r} = g_{\mu\nu} \zeta^\mu \xi^\nu. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, o elemento de linha ficará da seguinte maneira,

$$ds^2 = A'(r, t'') dt''^2 + g_{rt''} (dt'' dr + dr dt'') + B'(r, t'') dr^2 + r^2 d\omega^2. \quad (\text{A.11})$$

³Utilizamos uma assinatura da métrica do tipo $(-, +, +, +)$.

Podemos ainda efetuar uma mudança de coordenada temporal, $t'' \rightarrow t'$, de forma a cancelar o termo cruzado da métrica. Essa mudança é feita de acordo com a seguinte regra de transformação dos tensores,

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.12})$$

Nesse novo sistema redefiniremos o parâmetro temporal e o elemento de linha fica reescrito da seguinte maneira,

$$ds^2 = A(r, t') dt'^2 + B(r, t') dr^2 + r^2 d\omega^2, \quad (\text{A.13})$$

onde $A(r, t')$ e $B(r, t')$ são as antigas funções $A'(r, t'')$ e $B'(r, t'')$ em função do novo parâmetro temporal t' .

Como o elemento de linha acima deve ter uma assinatura pré-definida, as funções A e B devem ser estritamente negativa e positiva, respectivamente. Esse fato nos permite escrever tais funções como exponenciais, fornecendo

$$ds^2 = -e^{2\alpha(t', r)} dt'^2 + e^{2\beta(t', r)} dr^2 + r^2 d\omega^2. \quad (\text{A.14})$$

Enfim, (A.14) é a métrica que descreve a distorção espaço-temporal, não estática a princípio, causada por uma distribuição esférica de matéria.

Na próxima seção veremos como ficam as equações de campo da Relatividade Geral em um sistema físico com essas características.

A.3 As equações de campo de Einstein

Vamos supor que o nosso universo, descrito pela métrica (A.14), obedeça à dinâmica descrita pelas equações da RG de Einstein [8],

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.15})$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\rho}^{\rho} - \Gamma_{\rho\mu,\nu}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\rho}^{\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\lambda}. \quad (\text{A.16})$$

é o tensor de Ricci, sendo que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\nu\rho,\mu} + g_{\mu\rho,\nu} - g_{\mu\nu,\rho}) \quad (\text{A.17})$$

é a conexão afim.

As equações de Einstein serão aplicadas numa região vazia (vácuo) do universo, o que implica em $T_{\mu\nu} = 0$ e conseqüentemente, $R_{\mu\nu} = 0$.

Vamos agora ao cálculo dos $R_{\mu\nu}$, começando pela conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$.

De acordo com a equação (A.17) e utilizando a métrica (A.14), obtemos os seguintes termos não nulos de $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$.

Primeiro os termos temporais:

$$\Gamma_{r0}^0 = \alpha', \quad \Gamma_{00}^0 = \dot{\alpha} \quad \text{e} \quad \Gamma_{rr}^0 = \dot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)}. \quad (\text{A.18})$$

Agora, os termos radiais:

$$\Gamma_{00}^r = \alpha' e^{2(\alpha-\beta)}, \quad \Gamma_{r0}^r = \dot{\beta}, \quad \Gamma_{rr}^r = \beta', \quad (\text{A.19})$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r e^{-2\beta} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -r \sin^2 \theta e^{-2\beta}. \quad (\text{A.20})$$

Por fim, vamos aos termos angulares:

$$\Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (\text{A.21})$$

$$\Gamma_{\phi r}^{\phi} = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} = \cot \theta. \quad (\text{A.22})$$

Enfim, utilizaremos estes resultados para calcular os elementos do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$.

(1) Termo puramente temporal:

$$R_{00} = \alpha'' e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha' (\alpha' - \beta') e^{2(\alpha-\beta)} - \ddot{\beta} - \dot{\beta}\dot{\alpha} + \alpha'^2 e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'\alpha' e^{2(\alpha-\beta)} - \dot{\beta}^2 = 0. \quad (\text{A.23})$$

(2) Termo temporal e radial:

$$R_{0r} = \frac{2}{r}\dot{\beta} = 0. \quad (\text{A.24})$$

(3) Termo temporal e angular:

$$R_{0\theta} = (\dot{\beta} + \dot{\alpha}) \cot \theta = 0 \quad (\text{A.25})$$

e

$$R_{0\phi} = 0. \quad (\text{A.26})$$

(4) Termo puramente radial:

$$R_{rr} = -\alpha'' - 3\beta'\alpha' + 4\frac{\beta'}{r} + 4\frac{\alpha'}{r} - \alpha^2 + \ddot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)} + 2\dot{\beta}(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) e^{2(\beta-\alpha)} + \dot{\alpha}\dot{\beta} e^{2(\beta-\alpha)} + \dot{\beta}^2 e^{2(\beta-\alpha)} = 0. \quad (\text{A.27})$$

(5) Termos puramente angulares:

$$R_{\theta\theta} = \frac{e^{2\beta} + r\beta' - r\alpha' - 3}{e^{-2\beta}} = 0 \quad (\text{A.28})$$

e

$$R_{\phi\phi} = r\beta' \sin^2 \theta e^{-2\beta} - r\alpha' \sin^2 \theta e^{-2\beta} - 2\cos^2 \theta + 1 - r\cos \theta \sin \theta e^{-2\beta} - \sin^2 \theta e^{-2\beta} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Com o termo R_{0r} podemos notar que

$$\frac{2}{r}\dot{\beta} = 0, \quad (\text{A.30})$$

o que implica, necessariamente, em $\beta = \beta(r)$.

Ao mesmo tempo, com o termo $R_{\theta\theta}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}R_{\theta\theta} = -\frac{r\dot{\alpha}'}{e^{-2\beta}} = 0. \quad (\text{A.31})$$

Isso significa que $\dot{\alpha}' = 0$, ou seja,

$$\alpha(t', r) = f(r) + g(t'), \quad (\text{A.32})$$

necessariamente.

Podemos, com isso, reescrever a métrica (A.14) da seguinte maneira,

$$ds^2 = -e^{2f(r)} e^{2g(t')} dt'^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\omega^2, \quad (\text{A.33})$$

na qual definiremos uma escala temporal dada por

$$dt = e^{g(t')} dt', \quad (\text{A.34})$$

deixando a métrica com o seguinte formato,

$$ds^2 = -e^{2f(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 d\omega^2. \quad (\text{A.35})$$

A.4 Análise do teorema de Birkhoff

Uma característica óbvia da métrica (A.35) obtida é que ela é invariante por translações temporais, mantendo a simetria esférica, o que significa que o campo gravitacional é constante com o passar do tempo, apesar de termos considerado *a priori* uma dependência temporal da gravidade.

Note que essa métrica é válida para um observador fora da distribuição esférica de matéria.

Em resumo, de acordo com a RG, se a distribuição de matéria for esfericamente simétrica, o campo gravitacional será estacionário, mesmo que essa distribuição varie com o tempo mantendo a simetria. Na prática podemos dizer que nunca sentiremos uma variação do campo gravitacional gerado por um corpo esférico e que pulsa, explode ou colapsa, mantendo sua simetria esférica.

APÊNDICE B -- Método Steepest Descent

Frequentemente em física ou matemática nos deparamos com situações onde se faz necessário obter o menor valor de uma dada função (grandeza) $F(x)$, ou mesmo o ponto x_0 onde $F(x)$ é mínima. Um exemplo dessas situações é a solução da equação (5.41), motivo pelo qual dedicarei este apêndice à análise das soluções de casos desse gênero [41].

Considere uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que seja suave em seu domínio.¹

Vamos agora considerar que estamos num ponto qualquer x_k e que queremos nos aproximar do ponto x_0 (ponto de mínimo de $F(x)$) dando inicialmente um passo, então precisamos definir o tamanho desse passo e saber qual direção devemos tomar. A direção é dada por $-\nabla F(x_k)$, enquanto que o tamanho do passo será dado por λ_k . Portanto, após darmos este passo na direção determinada, estaremos em

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla F(x_k). \quad (\text{B.1})$$

Uma grande quantidade de físicos e matemáticos utilizam este método de iterações atraídos por sua óbvia facilidade e simplicidade. Entretanto, esses irresistíveis atrativos possuem um preço, que variam de acordo com o tamanho do passo em cada iteração: podemos ter um número infinito de iterações necessárias para encontrar x_0 ; ou ainda, podemos ter um modelo altamente impreciso.

Para ajustar esse preço a ser pago, devemos fazer uma análise mais detalhada da equação (B.1), observando seu comportamento de acordo com os possíveis valores de λ_k . Como λ_k ($k \in \mathbb{N}$ fixo) representa o tamanho do passo que iremos dar na direção

¹Por uma função suave denoto toda função que possua primeira e segunda derivada contínuas no seu domínio.

$\nabla F(x_k)$ partindo do ponto x_k , vamos supor que o passo seguinte seja sempre menor que o passo anterior, ou seja, $\lambda_{k+1} < \lambda_k$. Se a diferença entre os passos consecutivos for muito grande, precisaremos de um número também muito grande de iterações para encontrar x_0 , o que acarretará em um enorme gasto de tempo computacional atrelado a um aumento proporcional da precisão do resultado.

Por outro lado, vamos supor que o passo terá sempre um tamanho finito definido, $\lambda_k \neq 0$. Se o tamanho do passo for suficientemente grande diminuiremos o tempo computacional, mas aumentaremos proporcionalmente a imprecisão do método.

Portanto, vimos que podemos controlar o custo-benefício deste método ajustando o parâmetro λ_k : quanto menor o valor do passo, maior será a precisão do resultado, porém com um gasto computacional maior; ao mesmo tempo, quanto maior o valor do parâmetro λ_k , mais impreciso será o resultado, mas com um gasto computacional bem menor.

Vamos ver agora como esse método se aplica em um caso típico como a obtenção da solução da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Nf(x)} dx, \quad (\text{B.2})$$

onde N é um número real fixo suficientemente grande e $f(x)$ é dita função suave com um ponto de máximo x_0 global. Apesar do fato óbvio de não existir uma solução exata para essa integral, somos capazes, graças ao valor de N , de obter uma boa aproximação dessa solução. Note que, $f(x_0)$ é maior do que em qualquer outro ponto x nas proximidades de x_0 , e mesmo que a diferença $f(x_0) - f(x)$ não seja muito grande, devido a N , o valor da exponencial em x_0 ,

$$e^{Nf(x_0)},$$

será muito maior do que em qualquer outro ponto nas proximidades de x_0 . Dessa forma, a maior contribuição à integral (B.2) será dada pelo valor da exponencial avaliada em x_0 .

Uma expansão de Taylor da função f nas proximidades de x_0 ficará da seguinte forma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\delta x^2 + \dots, \quad (\text{B.3})$$

onde $f''(x_0)$ denota a segunda derivada de f calculada em x_0 e $\delta x = x - x_0 \ll 1$. Como x_0 é o ponto de máximo de f dentro do intervalo de integração, a primeira derivada de f calculada em x_0 é nula e, pelo mesmo motivo, $f''(x_0)$ deve ser negativo. Sendo assim, com boa aproximação, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Nf(x)} dx \simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{Nf(x_0)} e^{-\frac{N}{2}|f''(x_0)|\delta x^2} dx, \quad (\text{B.4})$$

Repare que utilizamos o intervalo $(-\infty, \infty)$ ao invés de um intervalo fechado qualquer com o intuito de aumentar o número de iterações na busca pelo ponto x_0 , e com isso aumentar a precisão do resultado.

Efetuada uma mudança de variável, $\delta x = t$, a integral acima fica

$$e^{Nf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{N}{2}|f''(x_0)|t^2} dt, \quad (\text{B.5})$$

e como

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}},$$

com α constante, teremos

$$e^{Nf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{N}{2}|f''(x_0)|t^2} dt = 2 e^{Nf(x_0)} \sqrt{\frac{\pi}{N|f''(x_0)|}}. \quad (\text{B.6})$$

Enfim, o único trabalho restante é conhecer o ponto x_0 , que depende do trabalho computacional escolhido, mas como vimos, o procedimento computacional é simples, *a priori*, até o ponto em que temos de escolher a maneira que iremos dar os “passos” em direção a x_0 . Via de regra, o problema não está em saber a direção $\nabla f(x_k)$ em cada passo, mas sim em escolher os passos λ_k de forma que a convergência ao ponto x_0 ocorra com o melhor custo-benefício (menor gasto computacional mas ainda com boa precisão). Neste sentido, existem vários trabalhos a respeito da convergência do método *Steepest Descent* [42].

No capítulo que trata do Modelo de Adesão, vimos que o movimento de cada partícula do meio obedece à seguinte equação

$$\mathbf{v} = \frac{\int d^3q (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \exp\left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{x}, \mathbf{q}, b)\right]}{b \int d^3q \exp\left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{x}, \mathbf{q}, b)\right]}, \quad (\text{B.7})$$

onde o parâmetro de “viscosidade” do meio, ν , é considerado infinitesimal². Dessa forma temos um caso parecido com o resolvido logo acima (B.2), e da mesma forma encontraremos uma expressão aproximada para a velocidade.

Nesse caso do Modelo de Adesão estamos procurando o(s) ponto(s) \mathbf{q}_0 , para o qual o polinômio

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{q})^2}{b} - \Phi_0 \quad (\text{B.8})$$

é mínimo.

Na prática, definimos um polinômio $P(\mathbf{x}_0, \mathbf{q}_0) = \frac{(\mathbf{x}_0 - \mathbf{q}_0)^2}{b} - N$ no qual ajustamos a constante real N a partir de $-\infty$ até o ponto em que o polinômio $P(\mathbf{x}_0, \mathbf{q}_0)$ tangencia a hipersuperfície Φ_0 .

Vamos supor que, inicialmente, exista apenas um único ponto \mathbf{q}_0 que minimiza a função $G(\mathbf{x}, \mathbf{q})$, e sendo assim, resolveremos primeiro a integral do denominador,

$$\int d^3q (\mathbf{x} - \mathbf{q}) \exp\left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{x}, \mathbf{q}, b)\right] = (\mathbf{x} - \mathbf{q}_0) 2 e^{\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{x}, \mathbf{q}_0)} \sqrt{\frac{\pi\nu}{b}}, \quad (\text{B.9})$$

e por sua vez, resolveremos a integral do numerador,

$$b \int d^3q \exp\left[-\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{x}, \mathbf{q}, b)\right] = 2 \sqrt{b\pi\nu} e^{\frac{1}{2\nu} G(\mathbf{x}, \mathbf{q}_0)}. \quad (\text{B.10})$$

Dividindo uma pela outra, temos

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{q}_0}{b}. \quad (\text{B.11})$$

No caso de existirem N pontos de mínimo, o método *Steepest Descent* fornece, seguindo a mesma ideia,

²Por infinitesimal entendemos que $\nu \rightarrow 0$.

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x} - N^{-1} \sum_i^N \mathbf{q}_0^i}{b}. \quad (\text{B.12})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Sloan Digital Sky Survey - Mapping the Universe, *The Sloan Digital Sky Survey*. <http://www.sdss.org/>. Acesso em: 17 de julho de 2012.
- [2] National Aeronautics and Space Administration - Universe - Beyond Big Bang - Structure, *How Did Structure Form in the Universe?* http://map.gsfc.nasa.gov/universe/bb_cosmo_struct.html. Acesso em: 17 de julho de 2012.
- [3] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae *Proceedings of the National Academy of Science*, **15**:168-173. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1929PNAS...15..168H>, 1929. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [4] University of Washington - Department of Astronomy - Computer Science and Engineering - Department of Physics, *University of Washington N-Body Shop*. <http://www-hpcc.astro.washington.edu/>. Acesso em: 17 de julho de 2012.
- [5] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [6] V. Mukhanov. *Physical Foundations on Cosmology*. Cambridge University Press., 2005.
- [7] T. Padmanabhan. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, 1993.
- [8] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- [9] A. H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, **23**, 2:10. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>, 1981.
- [10] N. A. Lemos. *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física, 2^a edition, 2007.
- [11] J. C. Raymond, D. P. Cox, and B. W. Smith. Radiative cooling of a low-density plasma. *The Astrophysical Journal*, **204**:290–292, 1976.
- [12] National Aeronautics and Space Administration - Universe - Our Universe - Expansion, *How Fast is the Universe Expanding?* http://map.gsfc.nasa.gov/universe/uni_expansion.html. Acesso em: 17 de julho de 2012.

- [13] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984. ISBN 0 226 8033 2.
- [14] L. R. Abramo, R. C. Batista, L. Liberato, and R. Rosenfeld. Physical approximations for the nonlinear evolution of perturbations in inhomogeneous dark energy scenarios. *Physical Review D*, **79**:9. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.023516>, 2009.
- [15] R. A. A. Fernandes, J. P. M. de Carvalho, A. Yu Kamenshchik, U. Moschella, and A. da Silva. Spherical ‘top-hat’ collapse in general-chaplygin-gas-dominated universes. *Physical Review D*, **85**:8. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.083501>, 2012.
- [16] Lin, L. Mestel, and F. Shu. The gravitational collapse of a uniform spheroid. *Astrophysical Journal*, **142**:1431, 1965.
- [17] Ya. B. Zel’dovich. Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations. *Astronomy and Astrophysics*, **5**:84–89, 1970.
- [18] S. F. Shandarin and Ya. B. Zel’dovich. The large-scale structure of the universe: Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium. *Reviews of Modern Physics*, **61**(2):32, 1989.
- [19] T. Buchert. Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman-Lamaître cosmologies and the ‘Zeldovich approximation’. *MNRAS*, **254**:729–737, 1992.
- [20] National Aeronautics and Space Administration - Universe - Beyond Big Bang - Fluctuations, *Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*. map.gsfc.nasa.gov/universe/bb_cosmo_fluct.html. Acesso em: 17 de julho de 2012.
- [21] B. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, 1999. ISBN 0 521 29887 3.
- [22] Ya. B. Zel’dovich. The theory of the large scale structure of the universe. In *The Large Scale Structure of the Universe; Proceedings of the Symposium*, pages 409–421, 1977.
- [23] S. Shandarin. *Large-Scale Structures and Peculiar Motions in the Universe*, pages 189–204. Astronomical Society of the Pacific, 1991.
- [24] A. Nusser and A. Dekel. Filamentary structure from gaussian fluctuations using the adhesion approximation. *Astrophysical Journal*, **362**:14–24, 1990.
- [25] L. Kofman, D. Pogosyan, and S. Shandarin. Structure of the universe in the two-dimensional model of adhesion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **242**:200–208, 1990.

- [26] S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin. A model for describing the development of the large-scale structure of the universe. *Soviet Physics Doklady*, **20** (04):921, 1984.
- [27] J. M. Burgers. *The Nonlinear Diffusion Equation*. D. Reidel Publishing Company, PO Box 17, Dordrecht, Holland, 1974.
- [28] S. N. Gurbatov, A. I. Saichev, and S. F. Shandarin. The large-scale structure of the universe in the frame of the model equation of non-linear diffusion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **236**:385–402, 1989.
- [29] D. H. Weinberg and J. E. Gunn. Large-scale structure and the adhesion approximation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, (247):260–286, 1990.
- [30] Jean Audouze, Marie-Christine Pelletan, and Sandor Szalay, editors. *Theories of Large Scale Structure*. International Astronomical Union, Kluwer Academic Publishers, June 1988.
- [31] S. D. M. White. Simulations of galaxy mergers, *Internal Kinematics and Dynamics of Galaxies*, **100**:337–344. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983IAUS...100..337W>, 1983. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [32] C. S. Frenk, S. D. M. White, and M. Davis. Nonlinear evolution of large-scale structure in the universe. *Astrophysical Journal*, **271**:417–430. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1983ApJ...271..417F>, 1983. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [33] B. Guy and G. Narlikar. A practical comparison of n -body algorithms. In *Parallel Algorithms*, Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. American Mathematical Society, 1997.
- [34] M. T. P. Hut. N-body simulations (gravitational). *Scholarpedia*, **3**(5):3930, 2008.
- [35] A. V. Kravtsov, A. A. Klypin, and A. M. Khokhlov. Adaptive Refinement Tree: A New High-Resolution N-Body Code for Cosmological Simulations. *Astrophysical Journal Supplement*, **111**:73. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1997ApJS...111..73K>, 1997. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [36] A. Klypin, J. Holtzman, J. Primack, and E. Regos. Structure Formation with Cold plus Hot Dark Matter. *Astrophysical Journal*, **416**:1. <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993ApJ...416....1K>, 1993. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [37] H. J. Seo, E. R. Siegel, D. J. Eisenstein, and M. White. Nonlinear Structure Formation and the Acoustic Scale. *Astrophysical Journal*, **686**:13–24. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...686...13S>, 2008. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.

- [38] J. Barnes and P. Hut. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, **324**:446–449, 1986. *Nature*, **324**:446–449, 1986. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- [39] J. Wang. Simulating structure formation with n-body and semi-analytic models. Master’s thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2008.
- [40] Scholarpedia - the peer-reviewed open-access encyclopedia, *N-body Simulations*. http://www.scholarpedia.org/article/N-body_simulations. Acesso em: 17 de julho de 2012.
- [41] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **49**:1–23, 1943.
- [42] R. Fletcher and M. J. D. Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *The Computer Journal*, **6**:163–168, 1963.