

Frederico Luiz Strey

Cosmologia de Universos Emergentes de Mundos-Brana

Vitória – ES, Brasil

2018

Frederico Luiz Strey

Cosmologia de Universos Emergentes de Mundos-Brana

Universidade Federal do Espírito Santo – Ufes

Programa de pós graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov

Vitória – ES, Brasil

2018

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente ao professor Galen Mihaylov Sotkov e a André Alves por terem me ajudado e ensinado praticamente tudo que sei ao longo dos últimos anos. Este trabalho nunca teria sido feito sem a ajuda de ambos.

À banca de avaliação deste trabalho de dissertação e ao professor Valério Marra, não somente pelo curso de relatividade geral mas também por aceitar participar da banca de pré-defesa.

Aos amigos que estiveram comigo durante minha jornada acadêmica.

E aos professores e servidores que tornam possível o funcionamento da universidade.

Resumo

Consideramos diferentes problemas ligados a modelos cosmológicos do tipo mundo-brana com uma (quinta) dimensão não-compacta a mais. Investigamos as opções para a introdução de matéria de origem geométrica no nosso universo, realizado como uma 3-brana imersa no espaço-tempo cinco-dimensional criado por um Buraco-Negro em AdS_5 . Começamos com a ação de Einstein com constante cosmológica negativa e com a 3-brana, posicionada perto da borda do espaço, cuja geometria induzida é a de uma cosmologia de FRW. Depois adicionamos termos descrevendo gases de 1- e 2-branas imersas dentro da 3-brana original. Mostramos que a densidade do fluido efetivo da matéria neste modelo tem os elementos do modelo cosmológico padrão, mas inclui dois novos termos: um gás de cordas cósmicas e um gás de branas. O problema principal estudado nessa dissertação é a descrição detalhada das possíveis evoluções dos universos, dependendo crucialmente das condições iniciais que são determinadas pelas relações entre os parâmetros cosmológicos. Mesmo que a natureza da densidade do fluido efetivo permaneça intacta, nós estabelecemos, nos casos mais simples (na ausência de poeira), que existem onze diferentes tipos de evolução do universo. Os métodos usados para a descrição da evolução dos universos e a descrição das mudanças (transições de fase) entre eles, são baseados no estudo de sistemas dinâmicos equivalentes às equações de Friedmann ou, no caso particular de radiação e constante cosmológica, na forma explícita das soluções exatas. Em todos os casos, a origem das diferenças entre as classes de soluções que encontramos (e da transição de fase entre elas) consiste na existência de pontos e linhas fixas no diagrama planar do sistema dinâmico, devido às diferenças entre as condições iniciais e à forma do potencial escalar na descrição equivalente do fluido efetivo.

Abstract

We consider some problems related to cosmological brane-world models, with an extra non-compact fifth dimension. We investigate different options for geometrical terms representing 2- and 1-branes immersed in a 3-brane universe. The latter is embedded in a 5-dimensional space-time corresponding to a black hole in AdS_5 . We show that the net effect of the inclusion of lower dimensional brane-gas terms consists in a rather specific form of the effective density of the matter fluid filling the emergent 3-brane universe. This turns out to present the elements of the standard cosmological model: radiation, dust and a positive cosmological constant, but it also has two additional terms corresponding to a string gas and a brane gas. The main problem studied in the present work concerns the detailed description of all the possible evolutions of the homogeneous and isotropic 3-brane universe, depending crucially on the different classes of admissible initial conditions, determined by the specific relations between the cosmological parameters. Even if the form of the induced matter fluid is unchanged, we have shown that in the most simple example (i.e. without dust) there exists eleven families of qualitatively different cosmological histories. The methods we have used in the description of the properties of the evolution of the 3-brane universes include analysis of dynamical systems, as well as the construction of the exact form of the solutions of the FRW equations (when it is possible), presenting the scale factor and the scalar field as explicit functions of cosmic time. In all these cases, the origin of the differences between the observed eleven different universe evolutions (and of the phase transitions between them) consists in the existence of fixed point and fixed lines of the planar dynamical system, due to the qualitatively different initial conditions and of the different forms of the potential of the scalar field.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	7
1.1	Quinta Dimensão	8
1.2	Universo como 3-brana em espaço-tempo de BN-AdS_5	9
1.3	Resumo dos problemas e dos resultados	10
2	BURACOS NEGROS	13
2.1	Espaço-tempo de Schwarzschild	13
2.1.1	Métrica de Schwarzschild	13
2.1.2	Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild	16
2.1.3	Estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild	18
2.2	Espaço-tempo de Anti-deSitter (AdS)	23
2.2.1	Coordenadas no hiperbolóide	25
2.2.2	Coordenadas globais	26
2.3	Buraco negro em Anti-deSitter	28
2.3.1	Métrica de Schwarzschild- AdS_5	28
2.3.2	Coordenadas de Kruskal	30
3	HIPERSUPERFÍCIES E MUNDOS-BRANA	33
3.1	Geometria intrínseca e extrínseca de uma hipersuperfície	33
3.1.1	Derivadas covariantes em \mathcal{S}	35
3.1.2	Curvatura extrínseca	36
3.1.3	Equações de Gauss-Codazzi	38
3.2	Condições de Israel	38
3.2.1	Primeira condição de Israel	39
3.2.2	Tensor de Riemann	40
3.2.3	Tensor energia-momento da hipersuperfície	40
3.2.4	Segunda condição de Israel	41
3.3	Termo de Gibbons-Hawking	42
3.4	Mundo-brana e equações de Friedmann	45
4	MUNDO-BRANA COM DENSIDADE DE ENERGIA CONSTANTE	51
4.1	Equações de Friedmann para brana com tensão constante	51
4.2	Sistema de primeira ordem e solução das equações de Friedmann	52
4.3	Evolução dos universos	56
4.3.1	Pontos fixos - Universo estático de Einstein e dS_4	59
4.3.2	Separatrizes	59

4.3.3	Universos planos ($K=0$)	65
4.3.4	Universos abertos ($K = -1$)	66
4.3.5	Universos fechados ($K = 1$)	69
4.4	Inventário das histórias dos universos	72
5	MUNDO-BRANA COM GÁS DE CORDAS	74
5.1	Gás de branas e gás de cordas	74
5.2	Mundos-brana em AdS_5 sem buraco negro	76
5.3	Mundos-brana em AdS_5 com buraco negro e gás de cordas	82
6	CONCLUSÃO	84
	APÊNDICES	86
	APÊNDICE A – CONVENÇÕES E NOTAÇÕES	87
	APÊNDICE B – DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE GAUSS-CODAZZI	88
	APÊNDICE C – ESPAÇO-TEMPO DE DE SITTER	90
C.1	Sistema de coordenadas globais	90
C.2	Sistema de coordenadas planas	91
C.3	Sistema de coordenadas estáticas	91
	APÊNDICE D – DECOMPOSIÇÃO DE TENSORES SOBRE UMA HIPERSUPERFÍCIE	93
	APÊNDICE E – EQUAÇÕES DE FRIEDMANN PARA UMA BRANA COM DENSIDADE DE ENERGIA CONSTANTE	95
	APÊNDICE F – EQUAÇÃO DE ESTADO PARA UM GÁS DE P-BRANAS	100
	REFERÊNCIAS	102

1 Introdução

A Relatividade Geral junto com o princípio cosmológico e o Modelo Padrão das partículas elementares fornecem uma boa descrição para a evolução do Universo e para a maioria dos fenômenos ocorridos em diferentes épocas, desde muito cedo quando o universo era dominado por radiação, depois por matéria bariônica e matéria escura (poeira) e até hoje quando é dominada pela energia escura (ver por exemplo o livro [1]). A Relatividade Geral também é necessária para descrever a inflação [2] que precede a era dominada por radiação e é necessário para explicar o Universo observado.

Os recentes avanços observacionais (ver por exemplo [3]) permitiram estabelecer com precisão os valores dos parâmetros principais do modelo cosmológico padrão e introduziram rigorosas restrições sobre os possíveis modelos inflacionários e sobre os ingredientes da matéria do Universo. Mas existem vários problemas em aberto como a natureza da matéria e da energia escura e os detalhes do universo inflacionário.

Estes desenvolvimentos deixaram também dicas importantes sobre os princípios fundamentais e os novos conceitos do espaço-tempo, da matéria e das forças unificadas que devem determinar as Leis da Física para as energias extremamente altas, $E > 10^{16}$ GeV, em particular para os instantes iniciais do universo pre-inflacionário. Acredita-se que esta faixa de energias altas (e distâncias e volumes muito pequenos) representa o limite de validade da relatividade geral clássica, do nosso modelo do espaço-tempo e também da validade das teorias quânticas de campo do modelo padrão das partículas. Os problemas conceituais específicos para a época do Big-Bang, da “emergência quântica” do espaço-tempo e da necessidade da quantização da força gravitacional, que nessa época fica tão forte como as outras três forças, juntam-se com os outros problemas cosmológicos em aberto, como da natureza (eventualmente geométrica) dos diferentes tipos de matéria, o problema da inflação da origem do inflaton e do potencial do inflaton governando a inflação, da explicação da origem e dos valores observados dos parâmetros cosmológicos e das “constantes de acoplamento” das diferentes forças, entre tantos outros.

Uma direção promissora para a solução dos problemas mencionados são modelos cosmológicos oriundos de teorias de cordas e branas em dez (ou onze) dimensões [4, 5]. Existem diferentes possibilidades nesse contexto. Por exemplo a teoria de cordas pode introduzir novos tipos de matéria “geométrica” no universo como um gás de cordas [6, 7]. Uma possibilidade mais “radical” é que o nosso universo seja uma brana embebida em um espaço-tempo com dimensão maior, ou seja, um mundo-brana [8, 9, 10, 11].

1.1 Quinta Dimensão

A hipótese de que existem mais do que três dimensões espaciais [12], cujas consequências provenientes das extensões dos modelos da relatividade geral e das teorias quânticas de campos e partículas poderiam ser decisivas na descrição da física de altas energias, aparece como ingrediente essencial nas maioria das tentativas de unificação das interações fundamentais.

A tentativa de unificar geometricamente gravitação e eletromagnetismo vem desde o século XIX. Muitas tentativas diferentes foram feitas por muitos teóricos e a unificação das duas teorias clássicas era um dos grandes objetivos de Einstein após a descoberta da Relatividade Geral (ver por exemplo [13]). Historicamente, a idéia mais bem sucedida foi proposta por T. Kaluza em 1921 [14]. Nessa proposta, a unificação da gravitação e do electromagnetismo acontece a partir da gravitação de Einstein em cinco dimensões. O campo principal é a métrica do espaço-tempo 5-dimensional g_{AB} , cujas componentes 4-dimensionais $g_{\mu\nu}$ determinam a métrica pseudo-Riemanniana responsável pela gravitação. As componentes $g_{5\mu}$ representam o quadri-potencial A_μ do eletromagnetismo, e g_{55} seria um novo campo escalar de origem geométrica. Esta teoria é uma “geometrização” do electromagnetismo, porém aparece um problema: como entender os efeitos da dependência do graviton e do potencial eletromagnético com a quinta dimensão?

A solução está numa hipótese já sugerida por Kaluza e depois reforçada por O. Klein [15, 16], que relacionou a geometrização da quinta coordenada com a teoria quântica. A hipótese é que a quarta dimensão espacial, ao contrário das outras três, é “compacta”, sendo um círculo com raio R muito pequeno, ou seja $x_5 \in S_R$. Com isso se impõe condições de contorno periódicas para todos os campos no espaço tempo, por exemplo para a métrica:

$$g_{AB}(x_\mu, x_5 + 2\pi R) = g_{AB}(x_\mu, x_5).$$

Com essa condição, as transformadas de Fourier dos campos na direção x_5 determinam um espectro discreto da quinta componente do momento $p_5^{(n)} = n/2\pi R$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Assim dando origem a uma família infinita de campos quadri-dimensionais com massas $M_n^2 = (p_5^{(n)})^2$ para cada um dos campos com spins zero, um, dois etc. Essas novas partículas são difíceis de observar na faixa de energias acessíveis do modelo padrão $E \propto 1\text{Tev}$, porque as energias $M_n^2 \propto 1/R^2$ são muito grandes pois a quinta dimensão compacta tem o raio pequeno. Esse cenário ficou conhecido como “teoria de Kaluza-Klein” (ver por exemplo [17] para uma revisão). Essa idéia providencia uma explicação geométrica para a origem dos valores específicos das massas das partículas. Por outro lado, a realização dessa idéia leva à previsão da existência de um número infinito de partículas com cada spin: escalares, vetores, spinores, tensores, etc. Ou seja, junto com as partículas sem massa, o graviton e fóton, e as partículas massivas conhecidas, uma torre infinita de novas partículas muito pesadas deveria existir e ser observada. A idéia de Kaluza-Klein da compactificação de

dimensões extras e a origem geométrica das massas, reapareceu nas últimas 5 décadas de formas diferentes como ingrediente essencial em quase todas as tentativas de teorias de unificação. Um exemplo moderno representativo é dado pela compactificação de seis das nove dimensões espaciais na teoria de Super-Cordas.

1.2 Universo como 3-brana em espaço-tempo de BN- AdS_5

Os resultados dos modelos de Kaluza-Klein com dimensões extra compactas nos encaminham ao problema da possível existência de teorias consistentes com dimensões extra **abertas** [18, 19]. Ou seja, se existe a possibilidade que a quinta coordenada seja não-compacta: $x_5 \in (-\infty, \infty)$ ou $x_5 \in [0, \infty)$, ao mesmo tempo diferente das outras três coordenadas espaciais, mas de tal maneira que sua existência não leve a efeitos físicos observáveis nas escalas planetárias, cósmicas e/ou subatômicas acessíveis nos dias de hoje.

Uma outra expectativa é que esta escolha da quinta coordenada “aberta” não leve à discretização da quinta coordenada do momento p_5 e como consequência, não teremos um número infinito de partículas massivas indesejáveis que não foram observadas até agora. Na ausência do mecanismo de Kaluza-Klein, que transfere o efeito da quinta coordenada para um conjunto infinito de campos massivos no nosso mundo quadri-dimensional, agora temos o problema de como confinar a matéria e eventualmente a gravitação somente ao nosso sub-espaco quadri-dimensional.

Em cinco dimensões, no limite Newtoniano da gravitação fraca, o potencial gravitacional seria

$$V_5(r) \propto \frac{1}{r_5^2}$$

onde $r_5^2 = r_4^2 + x_5^2$, levando a diferenças essenciais com a gravitação em quatro dimensões para a qual $V_4 \propto 1/r_4$. Estas diferenças poderiam ser observados no sistema solar. Esses mesmos problemas de desvio da forma quadri-dimensional são válidos para o potencial electromagnético, etc. Assumindo que na teoria cinco-dimensional todos os campos, incluindo a métrica e os campos de matéria, são funções contínuas da quinta coordenada. É necessário um novo mecanismo que permita “suavizar” os efeitos da quinta dimensão, introduzindo, de uma forma consistente com as equações 5-dimensionais, pequenas correções dos potenciais gravitacional e eletromagnético, tendo como o primeiro e principal termo o conhecido das teorias quadri-dimensionais,

$$V_5 \propto \frac{1}{r_4} (1 + g/r_4^2 + \dots).$$

A solução deste problema está nos modelos de Randall-Sundrum [20, 21, 22]. A idéia geral é considerar uma gravitação de Einstein com constante cosmológica negativa em (4+1)-dimensões com uma hiper-superfície (3+1)-dimensional (o nosso universo) chamada

de “3-brana” [8, 23, 24] com uma tensão positiva e com todos os campos de matéria confinados sobre a 3-brana. O mecanismo que restringe os efeitos gravitacionais devidos à 5ª coordenada e à dependência da métrica $g_{AB}(x_\mu, x_5)$ em x_5 , consiste em uma escolha particular da posição da nossa 3-brana que fica “perto” da borda do espaço 5-dimensional, onde $x_5 \approx 0$, e também da forma específica das equações para flutuações lineares da métrica ao redor da borda de AdS_5 , e portanto ao redor da 3-brana. O efeito principal, devido à presença da tensão e da matéria na 3-brana, é que as equações das flutuações tomam a forma da equação de Schroedinger estacionária com um potencial específico com poucos (um ou dois) autovalores discretos além do estado fundamental. Assim, nós temos o “modo zero” que corresponde ao graviton sem massa 4-dimensional, e mais um ou dois “modos excitados” representando partículas massivas de spin 2 além do graviton. Essa construção corresponde ao segundo modelo proposto por Randall e Sundrum [21] e é conhecido como RS2. Podemos comparar a simplicidade dos modelos de RS2, que preveem um ou dois novos campos, com o número infinito de campos massivos de spin 2 que aparecem nas teorias de Kaluza-Klein com quinta coordenada compacta. O efeito das flutuações na aproximação newtoniana no caso de RS2 reproduz o potencial de Newton com pequenas correções em $1/r_4$ (de ordem cúbica e maiores).

É necessário sublinhar que a característica principal destes modelos do tipo RS2 com a quinta coordenada aberta é que as equações de Einstein sobre a nossa 3-brana, no caso de presença de matéria, são devidamente modificadas com termos proporcionais ao ‘quadrado do tensor de energia-momento’. Nas equações para métricas 4-dimensionais homogêneas e isotrópicas de Friedman-Robertson-Walker (FRW), estes novos termos são proporcionais ao quadrado da densidade da matéria do fluido efetivo. Uma generalização relevante destes modelos é dada pela substituição de AdS_5 , ou seja do **vácuo** 5-dimensional, por soluções do tipo **buraco negro** (BN) no espaço-tempo AdS_5 . Esses buracos negros podem ter seções espaciais com curvatura constante positiva (ou seja esféricos), zero (ou seja buracos negros planos) ou abertos (ou seja hiperbólicos). Nesses casos a 3-brana é um universo FRW emergente com curvatura espacial $K = 0, \pm 1$. A geometria do espaço-tempo 5-dimensional induz sozinha sobre a 3-brana termos correspondentes a uma constante cosmológica 4-dimensional efetiva *positiva*, $\Lambda_4 > 0$, e também termos correspondentes a radiação. Assim temos um mundo-brana onde a matéria é “geometrizada”.

1.3 Resumo dos problemas e dos resultados

Voltando na ideia original da unificação geométrica da gravitação com as outras forças (e os campos de matéria) através de introdução de uma (ou mais) dimensões espaciais extras, fica a pergunta: Seria possível encaixar esse cenário de geometrização da matéria dentro dos modelos específicos (e bastante realísticos) de Randall-Sundrum? Lembrando que o mecanismo principal do RS2 funciona com gravitação “pura” em AdS_5 ou

em BN- AdS_5 , e com a matéria “quadri-dimensional” confinada numa 3-brana posicionada perto da borda ($x_5 = 0$) do espaço AdS_5 ou BN- AdS_5 .

O primeiro problema investigado nessa dissertação representa uma tentativa de responder esta pergunta, incluindo na ação da Relatividade Geral 5-dimensional com constante cosmológica negativa Λ_5 somente termos de origem geométrica do tipo p-branas (com $p = 1$ e $p = 2$), imersos dentro da nossa 3-brana. Demonstramos que no caso de Universos homogêneos e isotrópicos esta escolha geométrica nos permite reproduzir (nas equações de Friedmann) uma densidade do fluido efetivo da matéria que inclui, além de um gás de branas, todos os ingredientes do modelo cosmológico padrão, ou seja radiação, poeira e constante cosmológica efetiva Λ_4 positiva. Uma importante consequência desta construção é que os valores dos parâmetros cosmológicos, como por exemplo Λ_4 e as densidades relativas de poeira ρ_{poeira} e de radiação ρ_{rad} , são realizados em termos de parâmetros geométricos, definidos na ação da Relatividade Geral 5-dimensional junto com a 3-brana com tensão positiva, e com as densidades das 1- e 2-branas.

O problema central nos estudos apresentados nessa dissertação é a descrição detalhada da dependência das possíveis evoluções desses universos do tipo 3-brana com as condições iniciais, cujos valores dependem de relações específicas entre os parâmetros cosmológicos. Mesmo que a forma e o conteúdo (de origem geométrica) da densidade do fluido efetivo permaneçam intactas, nós estabelecemos, no caso mais simples (veja o capítulo 4), que existem onze diferentes tipos de evolução do universo. O exemplo mais representativo é uma família de universos não-singulares (contraíndo e expandindo) e eternamente acelerados, que começam e terminam como espaços do de Sitter. Existe também um universo não-singular único assintoticamente Einstein-estático no passado assintoticamente de Sitter no futuro.

Além da diferença das condições iniciais, existe uma mudança também da forma dos potenciais $V(\sigma)$ do campo escalar $\sigma(t)$ na descrição equivalente do fluido efetivo. Os modelos com $K = 0$, ou seja espacialmente planos, correspondem a uma escolha muito particular das condições iniciais e podem ser somente do tipo big-bang \rightarrow de Sitter, com uma época inicial de desaceleração e época final de aceleração, dominada pela constante cosmológica. Acontece que pequenas variações nas condições iniciais mudam a curvatura espacial para positiva ou negativa, resultando assim em uma variedade infinita de universos com evolução parecida dos com $K = 0$.

Devemos mencionar que existe uma outra família de universos fechados, desacelerados e com duas singularidades, inicial e final (do tipo big-bang \rightarrow big-crunch), correspondentes às restrições diferentes entre os valores de Λ_4 e de $\rho_r \propto M_{BN}$. Uma explicação equivalente para a existência desta variedade de universos singulares está na forma muito particular do potencial $V(\sigma)$ para este regime de condições iniciais. Neste caso as pequenas mudanças nas condições iniciais poderiam resultar em significativas diferenças na

evolução destes universos big-bang→big-crunch, como por exemplo transformando-os em universos com singularidade do tipo big-bang→de Sitter, ou Einstein-estático→big-crunch. Dependendo dos valores dos parâmetros cosmológicos, eles podem ser transformados em universos não-singulares específicos do tipo Einstein-estático, ou começando e terminando como espaços de de Sitter. Todos estes universos ficam dentro de família de universos fechados.

Os métodos usados na descrição das evoluções dos universos e na descrição das mudanças (“transições de fase”) entre eles, são baseados no estudo do sistema dinâmico no plano $(H, \dot{\sigma})$, equivalente às equações de Friedmann. Nos casos mais simples, investigados nos Capitulo 4 e 5, nossa análise começa com a forma explícita das soluções exatas para o fator de escala e do campo escalar (ou da densidade de matéria) como funções do tempo cósmico e dos parâmetros cósmicos, cujos valores diferentes são responsáveis pelas classes distintas de condições iniciais admisíveis.

2 Buracos negros

2.1 Espaço-tempo de Schwarzschild

Na relatividade geral, a geometria de um espaço-tempo d -dimensional com métrica $g_{\mu\nu}$, tensor de curvatura $R_{\mu\nu}$, constante cosmológica Λ e tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ é descrita pelas equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa_d^2}T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que $\frac{1}{\kappa_d^2}$ corresponde a constante gravitacional. As equações (2.1) num espaço-tempo 4-dimensional correspondem a um conjunto de 10 equações diferenciais não lineares, e na maioria dos casos, é muito difícil encontrar soluções exatas. Entretanto pouco tempo depois de Einstein publicar a teoria da relatividade geral [25], Karl Schwarzschild encontrou uma solução [26] e mostrou que, pelo menos na presença de muitas simetrias, como a simetria esférica, as equações de Einstein admitem solução analítica. A seguir encontraremos tal solução.

2.1.1 Métrica de Schwarzschild

Um resultado importante da relatividade geral é o teorema de Birkhoff [27, 28] que diz: qualquer solução das equações de Einstein (2.1) no vácuo de um espaço-tempo esféricamente simétrico e assintoticamente plano possui o seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\Omega_2^2, \quad (2.2)$$

onde $r^2d\Omega_2^2$ é o elemento de linha de uma 2-esfera de raio r com $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Note que a métrica é estática, uma vez que esta não depende do tempo, e esféricamente simétrica, já que as funções $f(r)$ e $h(r)$ não dependem das coordenadas angulares.

A solução de Schwarzschild [26] descreve o campo gravitacional de um corpo neutro, estático, esféricamente simétrico no vácuo, ou seja, assume-se que não há matéria na região externa ao corpo, logo $T_{\mu\nu} = 0$. Pelo teorema de Birkhoff, a métrica de Schwarzschild será da forma (2.2) e as equações de Einstein (2.1) ficam:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0, \quad (2.3)$$

calculando o traço de (2.3), encontramos que $R = 0$ e podemos escrever as equações de Einstein [28, 27] na forma:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

Precisamos calcular o tensor de curvatura, que é dado por:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\delta} \Gamma^\delta_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\delta\nu} \Gamma^\delta_{\beta\mu}, \quad (2.5)$$

em que os $\Gamma^\alpha_{\delta\nu}$, chamados símbolos de Christoffel (ou conexões da métrica), são dados por:

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{g^{\rho\nu}}{2} (\partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\alpha g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}). \quad (2.6)$$

Usando a métrica dada pelo elemento de linha (2.2) em (2.6), obtemos as seguintes componentes das conexões diferentes de zero:

$$\Gamma^0_{10} = g^{00} \frac{\partial_1 g_{00}}{2} = \frac{f'}{2f} \quad (2.7)$$

$$\Gamma^1_{00} = g^{11} \frac{\partial_1 g_{00}}{2} = \frac{f'}{2h} \quad (2.8)$$

$$\Gamma^1_{11} = g^{11} \frac{\partial_1 g_{11}}{2} = \frac{h'}{2h} \quad (2.9)$$

$$\Gamma^i_{1i} = g^{ii} \frac{\partial_1 g_{ii}}{2} = \frac{1}{r}, i = (2, 3) \quad (2.10)$$

$$\Gamma^i_{2i} = g^{ii} \frac{\partial_2 g_{ii}}{2} = \cot \theta, i = (2, 3) \quad (2.11)$$

$$\Gamma^1_{22} = -g^{11} \frac{\partial_1 g_{22}}{2} = -\frac{r}{h} \quad (2.12)$$

Substituindo as conexões (2.7)-(2.12) na relação (2.5), podemos calcular a equação de Einstein no vácuo, dada por (2.4), e encontramos as seguintes componentes diferentes de zero:

$$R_{00} = -\frac{1}{f} \partial_1 \left(\frac{f'}{2h} \right) + \frac{f'^2}{4f^2 h} - \frac{f' h'}{4h^2 f} + \frac{f'}{r h f} = 0 \quad (2.13)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{h} \partial_1 \left(\frac{f'}{2f} \right) + \frac{f'^2}{4f^2 h} + \frac{f' h'}{4h^2 f} + \frac{h'}{r h^2} = 0 \quad (2.14)$$

$$R_{22} = R_{33} = -\frac{r f'}{2h f} + \frac{r h'}{2h^2} + \frac{1}{h} = 0, \quad (2.15)$$

onde denotamos ' para representar a derivada em r . Somando (2.13) e (2.14) obtemos:

$$\frac{f'}{f} + \frac{h'}{h} = 0, \quad (2.16)$$

que implica em

$$f(r) = \frac{const.}{h(r)} = \frac{1}{h(r)}, \quad (2.17)$$

o termo constante de integração pode ser absorvido pela coordenada radial sem perda de generalidade. E usando (2.17) em (2.15), encontramos:

$$-f(r) = \left(1 + \frac{C}{r} \right) = -\frac{1}{h}, \quad (2.18)$$

A partir do limite de campo fraco, encontraremos o valor de C da equação (2.18). Para isto, usaremos geodésicas que descrevem a trajetória de observador em queda livre neste espaço-tempo. A equação da geodésica para este observador é dada por:

$$\ddot{x}^\mu(\tau) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu x(\tau)^\alpha \dot{x}(\tau)^\beta = 0, \quad (2.19)$$

em que $x^\mu = x^\mu(\tau)$, em que τ é o tempo próprio deste observador. Usaremos agora uma aproximação para o limite não relativístico. No regime de baixas velocidades, temos que:

$$\left| \frac{dx^i}{d\tau} \right| \ll \left| \frac{dx^0}{d\tau} \right|, \quad (2.20)$$

portanto apenas as componentes \dot{x}^0 serão relevantes, temos:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{00}^\mu (\dot{x}^0)^2 \approx 0, \quad (2.21)$$

considerando uma métrica estática, temos que $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, e portanto:

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_0 g_{0\mu} + \partial_0 g_{0\nu} - \partial_\nu g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00}, \quad (2.22)$$

usando (2.22) em (2.21), obtemos:

$$\ddot{x}^\mu - \frac{\dot{x}_0^2}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} = 0, \quad (2.23)$$

e agora faremos uma aproximação para campo fraco, em que temos uma métrica de Minkowski perturbada:

$$g_{\mu\nu} = -n_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

em que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. A inversa da métrica será dada por:

$$g^{\mu\nu} = n^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

onde $h^{\mu\nu} = n^{\mu\alpha} n^{\nu\beta} h_{\alpha\beta}$, usando (2.24) em (2.22), considerando apenas termos de primeira ordem, obtemos:

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\nu g_{00} = -\frac{1}{2} (n^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) \partial_\nu (n_{00} h_{00}) = -\frac{1}{2} n^{\mu\nu} \partial_\nu n_{00}, \quad (2.26)$$

portanto, a equação da geodésica fica:

$$\ddot{x}^\mu - \frac{1}{2} \left(\frac{d\dot{x}^0}{d\tau} \right)^2 n^{\mu\nu} \partial_\nu h_{00} = 0, \quad (2.27)$$

para um observador localizado num infinito assintoticamente Minkowski temos que no regime não relativístico $t \rightarrow \tau$, portanto:

$$\frac{d^2}{dt^2} x^i = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} = -\frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.28)$$

esta relação é a mesma para o potencial da gravitação newtoniana

$$\ddot{x}^i = \nabla\phi \quad , \quad \phi = -\frac{MG}{r}, \quad (2.29)$$

onde $G = 1$ é a constante gravitacional. E podemos ver que h_{00} corresponde:

$$h_{00} = -2\phi = \frac{2M}{r}, \quad (2.30)$$

podemos concluir que o termo g_{00} atua como um campo gravitacional newtoniano, e usando o resultado obtido em (2.30) em (2.18), encontramos a relação:

$$g_{00} = -f(r) = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) = n_{00} + h_{00}, \quad (2.31)$$

e portanto

$$h_{00} = \frac{C}{r}, \quad C = -2M, \quad (2.32)$$

e por fim, encontramos que a métrica de Schwarzschild será:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.33)$$

Note que a métrica de Schwarzschild (2.33) é singular em dois pontos: $r = 2M \equiv r_h$ (chamado raio de Schwarzschild) e $r = 0$. A maioria dos corpos observados em nosso universo possuem raio $r > r_h$, portanto, a princípio a singularidade não representaria um problema muito grande uma vez que estamos interessados apenas no campo externo ao corpo. Quando um objeto colapsa até um raio $r < r_h$, forma-se um buracos negro, cujas características discutiremos mais adiante.

2.1.2 Geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild

Vamos agora analisar o comportamento de geodésicas no espaço-tempo de Schwarzschild. Começaremos escrevendo a lagrangiana para a dinâmica de um observador que se move ao longo de uma geodésica [29, 30, 31]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2(\sin^2\theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) \right] = \kappa, \quad (2.34)$$

onde τ é o tempo próprio no referencial da partícula, κ é uma constante com valor $(0, \pm 1)$ e (\cdot) representa a derivada em relação a τ . As equações de Euler-Lagrange serão:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu}, \quad (2.35)$$

que nos dá o vetor momento $\vec{p} = (\rho_\tau, \rho_r, \rho_\theta, \rho_\phi)$, com componentes:

$$\rho_\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \quad (2.36)$$

$$\rho_r = \frac{\dot{r}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (2.37)$$

$$\rho_\theta = r^2 \dot{\theta} \quad (2.38)$$

$$\rho_\phi = r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}. \quad (2.39)$$

A hamiltoniana será dada por:

$$\mathcal{H} = \dot{x}^\mu p^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \rho_\theta^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \rho_r^2 + \frac{\rho_\theta^2}{r^2} + \frac{\rho_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right], \quad (2.40)$$

e temos:

$$\rho_\tau = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = -E = \text{const.} \quad (2.41)$$

e também

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} = 0 \quad (2.42)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} = \text{const.} \quad (2.43)$$

A lagrangiana e hamiltoniana se conservam, portanto a energia do sistema também se conserva. Escolhendo o caso:

$$\rho_\phi = \text{const.} \quad (2.44)$$

$$\dot{\rho}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = - \frac{\rho_\phi^2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.45)$$

a partícula não se movimenta ao longo da coordenada θ , logo podemos fixar:

$$\dot{\theta} = 0 \quad (2.46)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (2.47)$$

e portanto

$$\rho_\phi = r^2 \dot{\phi} = L, \quad (2.48)$$

em que L é uma quantidade que se conserva, correspondente ao momento angular do sistema. Definimos a lagrangiana $\mathcal{L} \equiv 2\kappa = \text{const.}$, então os tipos de geodésica dependem do valor de κ : para $\kappa = -1$ temos geodésicas tipo-tempo, $\kappa = 0$ corresponde a geodésicas nulas e $\kappa = 1$ geodésicas tipo-espaço. Podemos ver isso na equação (2.34) que corresponde ao quadrado do elemento de linha. Usando (2.48) e (2.41) em (2.34), temos:

$$\frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 (\sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] = -\frac{\kappa}{2} \quad (2.49)$$

$$-\kappa = - \frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{L}{r^3}, \quad (2.50)$$

então

$$\frac{1}{2} E^2 = \frac{\dot{r}^2}{2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} + \left(\kappa + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (2.51)$$

Isso nos fornece uma relação o potencial gravitacional efetivo

$$V(r) = \frac{M\kappa}{2} - \frac{\kappa M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3} \quad (2.52)$$

Temos o potencial gravitacional "newtoniano" [32] do problema de dois corpos, e o termo com r^{-3} corresponde a uma "correção relativística" para a gravitação. Fazendo $\partial V/\partial r = 0$, encontramos os pontos críticos deste potencial e portanto suas órbitas fechadas estáveis e instáveis. Para $\kappa = 1$ temos:

$$\partial V/\partial r = 3ML^2 - L^2r + Mr^2 = 0, \quad (2.53)$$

as raízes de (2.53) são:

$$r_{\pm} = \frac{L^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right), \quad (2.54)$$

que correspondem às órbitas fechadas possíveis do sistema. Vemos que para $L^2 = 12M^2$, temos $r_{\pm} = 6M$, que corresponde à única órbita permitida para este caso.

No limite não relativístico "recuperamos" a gravitação newtoniana e, além disto, vimos que a solução de Schwarzschild fornece um termo de correção no potencial efetivo newtoniano, que descreve efeitos gravitacionais, tal como a precessão do periélio de mercúrio [33, 26], que a gravitação newtoniana não consegue descrever.

2.1.3 Estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild

Iremos agora analisar a geodésica radial de um observador com velocidade não relativística que se move num espaço-tempo de Schwarzschild. O observador percorre uma geodésicas tipo-tempo ($\kappa = -1$) na direção radial direcionada a origem. Sua equação de movimento, por (2.50), será:

$$\frac{ds^2}{d\tau^2} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} \quad (2.55)$$

$$= \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d\tau}{dr} \right)^2 \right] \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)} = -1, \quad (2.56)$$

note que, por (2.41), o termo $\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = E^2$, então:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - E^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (2.57)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) + E^2}, \quad (2.58)$$

e por fim, temos:

$$\tau = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r} \right) + E^2}}. \quad (2.59)$$

O tempo próprio (2.59) deste observador é finito e portanto bem definido no espaço-tempo de Schwarzschild para $r \neq 0$. Vamos analisar agora o tempo medido por um segundo

observador, estático, localizado numa região assintoticamente plana do espaço-tempo (a uma distância muito grande em relação a origem), que observa o primeiro observador "cair" no buraco negro. Usando (2.41), temos que:

$$\frac{dt}{d\tau} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E \quad (2.60)$$

$$\frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\tau} \quad (2.61)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}}, \quad (2.62)$$

então

$$t = E \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}}}, \quad (2.63)$$

vemos por (2.63), que $t \rightarrow \infty$ e $\frac{dr}{dt} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 2M$. Este resultado mostra que, de fato, o segundo observador nunca verá o primeiro passar pela superfície $r = 2M$, o horizonte de eventos. Em vez disso, verá uma imagem congelada e com redshift (um desvio para o vermelho devido ao efeito doppler da luz) cada vez maior do primeiro observador, enquanto para o primeiro observador terá passado um intervalo de tempo finito entre o momento em que atravessa o horizonte de eventos e ao cair na singularidade. Isso mostra que a singularidade em $r = r_h = 2M$ na verdade é um problema no sistema de coordenadas escolhido, se tratando portanto de uma singularidade de coordenadas e mostrando que as coordenadas de Schwarzschild não cobrem todo o espaço; podemos então, remover a singularidade em $r = r_h$ das coordenadas de Schwarzschild através de uma mudança de coordenadas. O sistema de coordenada que descreve o espaço de Schwarzschild completo sem a singularidade em $r = r_h$ é o sistema de Kruskal, para encontra-lo partiremos da geodésica nula, dada pela equação (2.50) com $\kappa = 0$, e temos

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad (2.64)$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (2.65)$$

integrando, temos:

$$\Delta t = \pm \left[r + \ln \left(-1 + \frac{2M}{r} \right) \right] + C. \quad (2.66)$$

Vamos agora fazer a mudança de coordenadas:

$$r^* = r - 2M \ln \left(-1 + \frac{2M}{r} \right) \quad (2.67)$$

$$t - t_0 = \pm (r_* - t_{0*}) \quad (2.68)$$

conhecido como coordenadas de tortoise. Definimos agora outra troca de coordenadas:

$$u = t - r_* \quad (2.69)$$

$$v = t + r_*, \quad (2.70)$$

então:

$$r_* = \frac{1}{2}(v - u) \quad (2.71)$$

$$dr_* = \frac{1}{2}(dv - du), \quad (2.72)$$

e o elemento de linha fica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dudv + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.73)$$

agora fazemos outra mudança de coordenadas:

$$U = -\exp\left(-\frac{u}{4M}\right) \quad (2.74)$$

$$V = \exp\left(\frac{v}{4M}\right), \quad (2.75)$$

que nos dà o elemento de linha:

$$ds^2 = -32\frac{M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dU dV + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.76)$$

e por fim, o sistema de Kruskal-Szekeres, definido por:

$$T = \frac{1}{2}(U + V) \quad (2.77)$$

$$X = \frac{1}{2}(V - U), \quad (2.78)$$

com elemento de linha dado por:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{2M}\right) (dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.79)$$

Repare que agora o sistema de coordenadas não possui singularidade em $r = 2M$, somente a singularidade em $r = 0$ continua. Temos que

$$X^2 - T^2 = \exp\left(\frac{r}{2M}\right) \left(\frac{r}{2M} - 1\right) \quad (2.80)$$

as superfícies com r constante são as hipérbolas dadas pela figura 1.

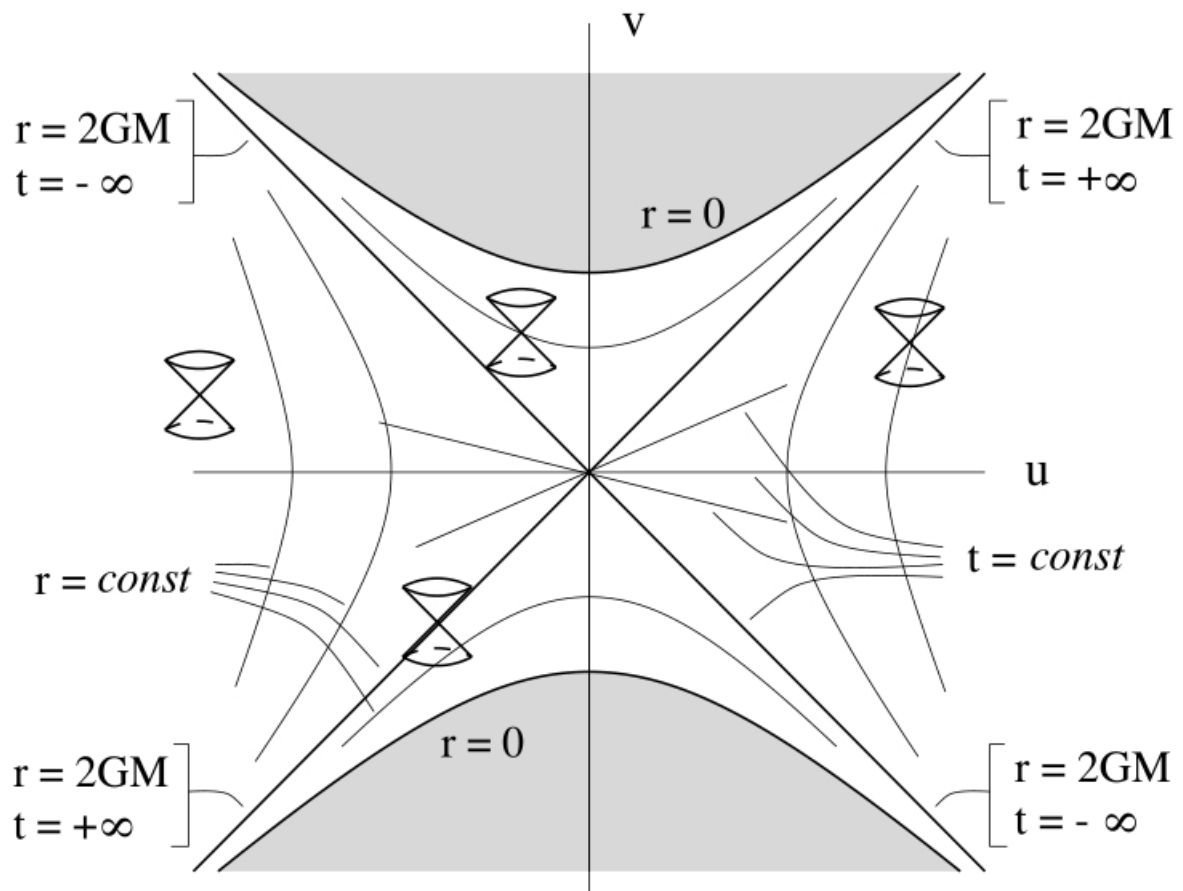


Figura 1 – Diagrama de Kruskal para o espaço-tempo de Schwarzschild. **Fonte:** figura da referência [27].

Podemos transformar a figura 1 num diagrama de Kruskal mostrado na figura 2. Cada ponto do diagrama de Kruskal representa uma 2-esfera. Um observador, ao atravessar r_h (representado pelas retas diagonais), estaria fadado a cair na singularidade e não poderia mais enviar sinais pro lado de fora da região *II*, limitada por r_h , que se chama então de ‘horizonte de eventos’. Esta região é o interior do buraco negro, onde todos os cones de luz apontam na direção da singularidade. A região *I* corresponde à região externa do buraco negro ($r > r_h$), e é assintoticamente plana em $r \rightarrow \infty$. A região *III* é a região *II* com uma reversão temporal, se comportando de maneira oposta a um buraco negro: nada pode entrar em seu interior, embora as coisas possam escapar de seu interior, por este motivo recebe o nome de buraco branco. Por fim, a região *IV*, que é idêntica a região *I* e causalmente desconectada, sendo ligada a região *I* apenas por geodésicas tipo espaço.

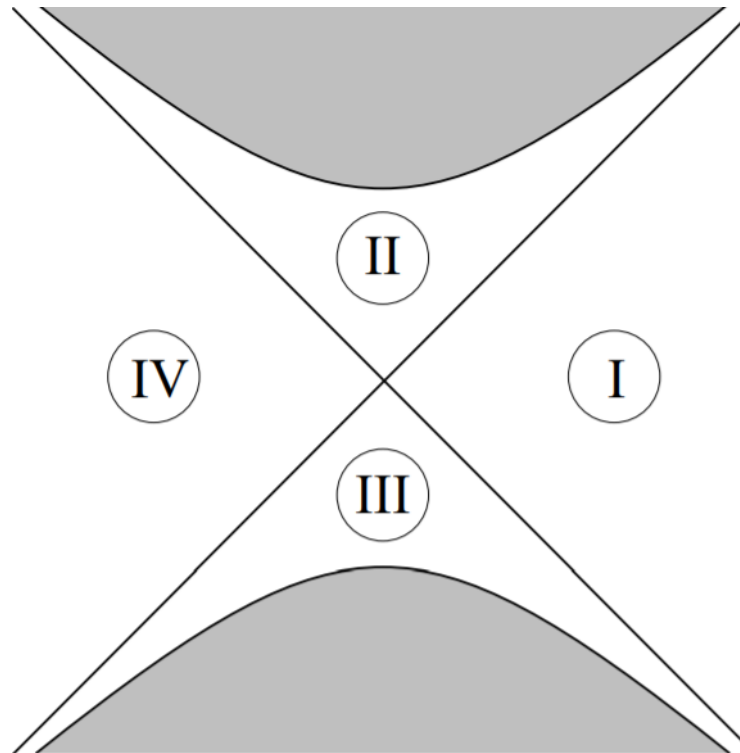


Figura 2 – Regiões do diagrama de Kruskal para o espaço-tempo de Schwarzschild. **Fonte:** figura da referência [27]

A solução de Schwarzschild descreve um buraco negro estático e eterno, portanto, não descreve o colapso gravitacional que dá origem a singularidade. Para "produzirmos" a extensão máxima do espaço-tempo de Schwarzschild, dada pelas coordenadas de Kruskal, precisaríamos ter como condição inicial duas regiões assintoticamente planas ligadas por uma singularidade, não há motivos para acreditarmos que tais condições possam acontecer em nosso universo. O colapso gravitacional que dá origem a singularidades que existem no nosso universo ocorre no fim da vida de estrelas com massa suficientemente grande e não contém o buraco branco.

Uma outra maneira de representarmos uma geometria é através do diagrama de Penrose que descreve toda a variedade numa representação finita. O diagrama de Penrose [34, 35] de um espaço-tempo de Schwarzschild é dado pela figura 3. As geodésicas nulas são representadas por retas diagonais no diagrama, onde I^\pm representam futuro (I^+) e passado (I^-) nulos e as geodésicas nulas começam em I^- e terminam em I^+ ; o infinito tipo espaço é representado por i^0 , e todas as geodésicas tipo espaço começam e terminam em i^0 ; os infinitos tipo-tempo, são os i^\pm , as geodésicas tipo tempo começam em i^- e terminam em i^+ .

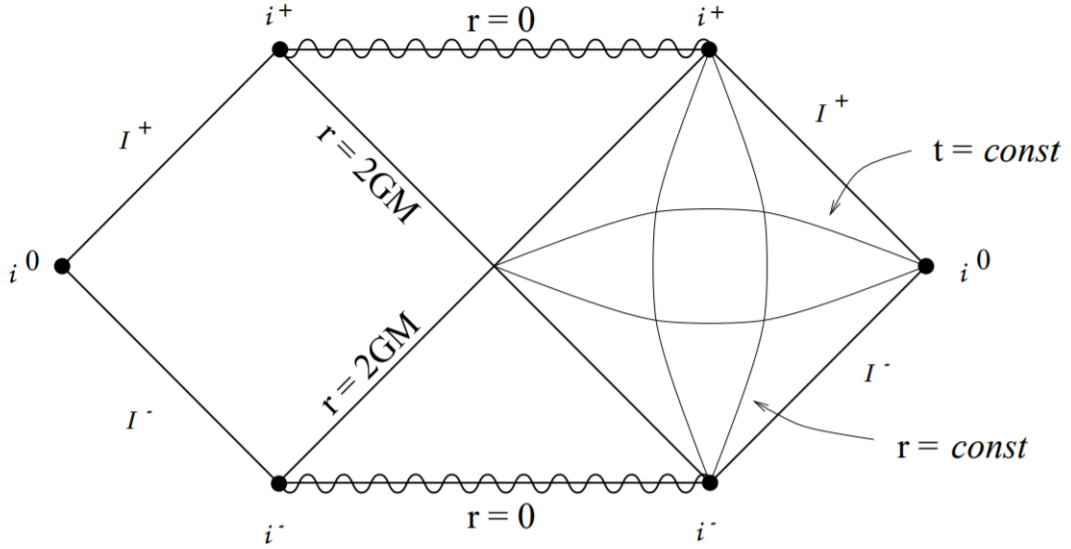


Figura 3 – Diagrama de Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild. **Fonte:** figura da referência [27]

De forma mais geral, a definição formal de um buraco negro se dá como a seguir: seja um espaço-tempo V assintoticamente plano com uma região $M \subset V$, a região M é caracterizada como um buraco negro se seu passado causal não estiver incluso no infinito nulo de V . Um buraco negro é portanto um objeto do qual nem a luz pode escapar [28].

2.2 Espaço-tempo de Anti-deSitter (AdS)

O espaço-tempo de Anti-deSitter d -dimensional (AdS_d) corresponde a solução das equações de Einstein (2.1) para um universo preenchido apenas por constante cosmológica negativa $\Lambda_d < 0$, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$. Então as equações de Einstein (2.1), ficam:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\Lambda_d g_{\mu\nu} \quad (2.81)$$

tirando o traço em (2.81), obtemos:

$$R = \frac{d-2}{2}\Lambda_d, \quad (2.82)$$

e vemos que o espaço-tempo de AdS possui curvatura constante $R < 0$. Para encontrarmos a solução das equações de Einstein precisamos escolher um ansatz para a métrica; vamos escolher um espaço-tempo com folheações tipo-tempo que sejam homogêneas e isotrópicas, portanto, a métrica terá a forma:

$$ds^2 = g(z)(dz^2 - dt^2 + d\Omega_{d-2}^2(k)) \quad (2.83)$$

em que $d\Omega_{d-2}^2(k)$ definem as "coordenadas angulares" em função de k . Os termos diferentes de zero dos símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{00}^1 = \Gamma_{10}^0 = \Gamma_{11}^1 \quad (2.84)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\gamma^{kl}}{2} (\partial_i \gamma_{lj} + \partial_j \gamma_{li} - \partial_l \gamma_{ij}) \quad (2.85)$$

em que usamos ' para denotar a derivada em relação a "z" e $i = (2, 3, \dots, d)$. a componente R_{11} fica:

$$R_{11} = -\frac{1}{2}(d-1)\frac{f''}{f} + \frac{(2d-1)}{4} \left(\frac{f'}{f} \right) \quad (2.86)$$

e (2.81) fornece

$$R_{11} = -\frac{d-2}{2}\Lambda f \quad (2.87)$$

podemos eliminar o termo quadrático usando a componente R_{ij} , dada por:

$$R_{ij} = -\frac{d-2}{2}\Lambda f \gamma_{ij} \quad (2.88)$$

por fim temos:

$$f'' - \lambda f - \kappa f = 0, \quad (2.89)$$

onde $\lambda \equiv \frac{4(d-1)}{d-2}\Lambda$ e $\kappa \equiv \frac{2(d-2)(2d-1)}{d}K$. Para $K = 0$, por exemplo, temos a métrica

$$ds^2 = \frac{dz^2 - dt^2 + \sum_{i=2}^d dx^i dx_i}{z^2}, \quad (2.90)$$

este é conhecido como sistema de coordenadas de Poincaré que possui a mesma estrutura causal de um espaço-tempo de Minkowski. Este sistema não cobre todo o espaço-tempo de AdS_d , uma vez que a métrica (2.90) é singular em $z = 0$, podemos obter um sistema de coordenadas que cobre todo espaço-tempo sobre todo o espaço-tempo.

Uma outra maneira de definir o espaço-tempo de Anti de Sitter é através de um hiperbolóide d-dimensional imerso num espaço-tempo de Minkowski com $d + 1$ dimensões e coordenadas X_0, X_1, \dots, X_d . O hiperbolóide é definido pela quádrlica:

$$-X_0^2 - X_1^2 + \sum_{u=2}^d X_u^2 = -L^2 \quad (2.91)$$

com métrica

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_1^2 + \sum_{u=2}^d dX_u^2 \quad (2.92)$$

a métrica sobre o hiperbolóide é dada por

$$ds^2 = -dX_0^2 - dX_1^2 + \dots + dX_{d-1}^2 - \frac{(-X_0 dX_0 + X_1 dX_1 + X_2 dX_2 + X_3 dX_3 + \dots + X_{d-1} dX_{d-1})^2}{X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - \dots - X_{d-1}^2}. \quad (2.93)$$

2.2.1 Coordenadas no hiperbolóide

Para parametrizar a parte espacial da quádrlica, é conveniente definir as coordenadas angulares dadas por:

$$\omega^1 = \cos \theta^1, \quad (2.94)$$

$$\omega^2 = \sin \theta^1 \cos \theta^2, \quad (2.95)$$

$$\omega^3 = \sin \theta^1 \sin \theta^2 \cos \theta^3 \quad (2.96)$$

$$\omega^n = \sin \theta^1 \sin \theta^2 \dots \sin \theta^{n-1} \cos \theta^n \quad (2.97)$$

$$\omega^d = \sin \theta^1 \sin \theta^2 \sin \theta^3 \dots \sin \theta^d \quad (2.98)$$

com $(0 \leq \theta^1)$, $(\theta^2, \theta^3, \dots, \theta^{d-1} < \pi)$ e $(0 \leq \theta^d < 2\pi)$, e tais que

$$\sum_{i=1}^d \omega^i = 1. \quad (2.99)$$

Isto é uma generalização das coordenadas esféricas em $d - 1$ dimensões, que no caso bidimensional corresponde às coordenadas cartesianas usuais sobre a esfera de raio 1:

$$\omega^1 = \cos \theta, \quad \omega^2 = \sin \theta \cos \phi, \quad \omega^3 = \sin \theta \sin \phi \quad (2.100)$$

Definidas as grandezas angulares ω^i , podemos agora dar alguns exemplos de sistemas de coordenadas que satisfazem a métrica de AdS.

Podemos recuperar a métrica de Poincaré ao escolhermos

$$X_1 = \frac{L^2}{2r} \left(1 + \frac{r^2}{L^4} (L^2 + \sum_i (x_i^2 - t^2)) \right) \quad (2.101)$$

$$X_2 = \frac{r}{L} t \quad (2.102)$$

$$X_i = \frac{r}{L} x_i; i = (3, \dots, d-1) \quad (2.103)$$

$$X_d = \frac{L^2}{2r} \left(1 - \frac{r^2}{L^4} (L^2 - \sum_i x_i^2 + t^2) \right). \quad (2.104)$$

que resulta na métrica

$$ds^2 = \frac{-r^2}{L^2} dt^2 + \frac{L^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{L^2} \sum_i dx_i^2 \quad (2.105)$$

definindo $u \equiv \frac{r}{L^2}$ e $z \equiv \frac{1}{u}$, a métrica (2.105) fica:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \sum_i dx_i^2) \quad (2.106)$$

que está de acordo com (2.90).

2.2.2 Coordenadas globais

O sistema de coordenadas globais que cobre todo o espaço-tempo de AdS é parametrizado por $(t, \rho, \alpha, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-3})$ com

$$X_0 = L \cosh \rho \sin t; \quad X_i = L \omega_i \sinh \rho; \quad X_1 = L \cosh \rho \cos t \quad (2.107)$$

e o elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = L^2(-\cosh \rho dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-2}^2), \quad (2.108)$$

vemos que o tempo t é periódico, o que resulta em curvas tipo-tempo fechadas, podemos contornar este problema ao fixar $\rho \in [0, 2\pi]$, chamado *universal covering space*. Uma forma mais apropriada de escrever (2.108) é através da troca de coordenadas

$$\tan \theta = \sinh \rho, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (2.109)$$

e a métrica fica

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos \theta} (-dt^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Omega_{d-2}^2) \quad (2.110)$$

o fator $\frac{L^2}{\cos \theta}$ diverge quando $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, portanto a hipersuperfície $\theta = \frac{\pi}{2}$ corresponde a borda de AdS.

Podemos ainda fazer a transformação: $r \equiv L \sinh \rho$ e $t' \equiv Lt$, obtemos a seguinte forma para a métrica:

$$ds^2 = -f(r) dt'^2 + f^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.111)$$

com $f = 1 + \frac{r^2}{L^2}$.

Vamos agora analisar geodésicas radiais tipo-luz no espaço-tempo de AdS; para estas geodésica temos $d\Omega_{d-2}^2 = 0$ e $ds^2 = 0$, que no sistema de coordenadas globais (2.110), resulta

$$dt^2 = d\theta^2 \quad (2.112)$$

escolhendo $\theta = 0$ para $t = 0$, vamos ter

$$\theta(t) = \pm t. \quad (2.113)$$

Com isto podemos concluir que um raio de luz chega num tempo finito na borda de AdS, dada por $\theta = \frac{\pi}{2}$, e da mesma forma, se o sinal for reemitido ao chegar na borda do espaço-tempo, este chegaria ao lugar de origem num tempo finito π .

Vamos analisar geodésicas radiais tipo-tempo com $d\Omega_{d-2}^2 = 0$, a métrica é dada por

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos \theta} (-dt^2 + d\theta^2) \quad (2.114)$$

podemos escrever esta equação em termo do tempo próprio $d\tau^2 = -ds^2$, e temos

$$\frac{\cos^2 \theta}{L^2} = \dot{t}^2 - \dot{\theta}^2 \quad (2.115)$$

em que usamos \cdot para denotar a derivada em relação a τ . Precisamos agora resolver a equação da geodésica, dada por

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \quad (2.116)$$

as componentes da métricas diferentes de zero são:

$$\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{tt}^\theta = \Gamma_{t\theta}^t = \tan \theta \quad (2.117)$$

e temos a equação da geodésica

$$\ddot{t} + 2\Gamma_{t\theta}^t \dot{t} \dot{\theta} = 0, \quad (2.118)$$

usando (2.117), obtemos

$$\frac{\ddot{t}}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} \dot{t} \dot{\theta} = 0 \quad (2.119)$$

que pode ser reescrito como a derivada total:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{t}}{\cos^2 \theta} \right) = 0, \quad (2.120)$$

que resulta

$$\dot{t} = C \cos^2 \theta \quad (2.121)$$

substituindo o resultado (2.115), encontramos

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L} \cos \theta \sqrt{L^2 C^2 \cos^2 \theta - 1} \quad (2.122)$$

dividindo (2.121) por (2.122), temos:

$$\frac{dt}{d\theta} = LC \frac{\cos \theta}{\sqrt{L^2 C^2 \cos^2 \theta - 1}} \quad (2.123)$$

integrando, obtemos por fim

$$t = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{\sin \alpha}\right) \quad (2.124)$$

ou

$$\sin \theta = \sin \alpha \sin t \quad (2.125)$$

em que definimos

$$LC = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (2.126)$$

A coordenada θ também é periódica, e a geodésica ao partir do ponto $\theta = 0$ em $t = 0$, chegará numa distância máxima em $\theta = \alpha$ em $t = \frac{\pi}{2}$ e retorna ao ponto inicial depois de um intervalo de tempo $t = \pi$, portanto uma partícula em queda livre no espaço-tempo de

AdS seria atraída ao seu ponto de partida devido a presença da constante cosmológica negativa. A estrutura causal de AdS pode ser descrita pelo diagrama de Penrose 4.

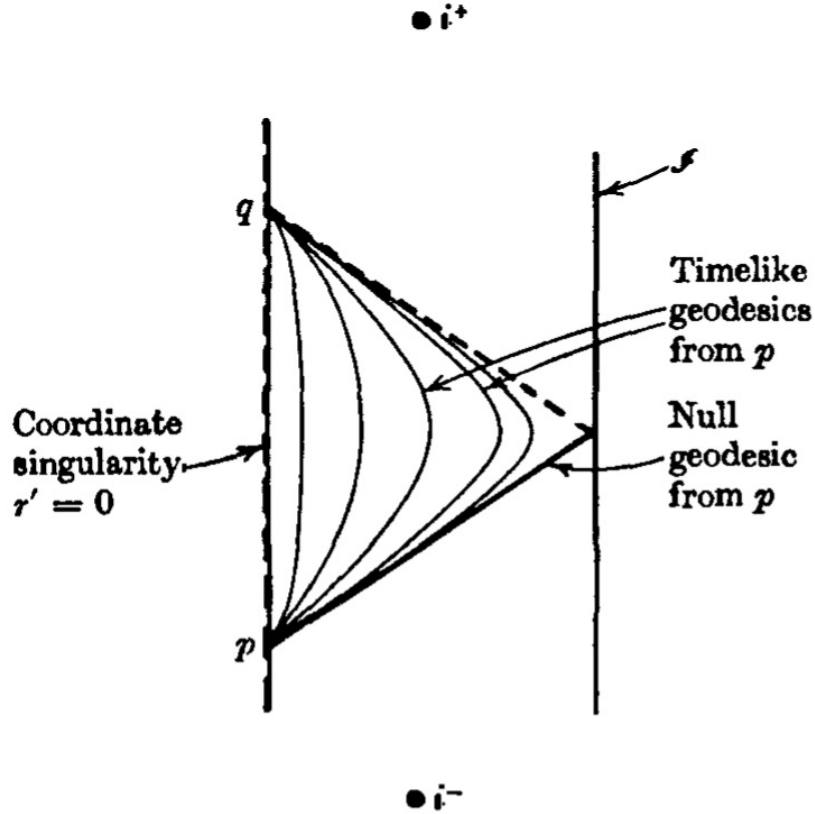


Figura 4 – Diagrama de Penrose de Schwarzschild- AdS_5 . **Fonte:** Figura 20 da referência [35]

2.3 Buraco negro em Anti-deSitter

2.3.1 Métrica de Schwarzschild- AdS_5

Neste trabalho nos interessa um buraco negro em 5 dimensões num espaço-tempo AdS, ou seja, com constante cosmológica negativa.

Consideramos o ansatz

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]; \quad (K = 0, \pm 1) \quad (2.127)$$

onde $f_0 = \chi$, $f_{-1} = \sin \chi$ e $f_1 = \sinh \chi$. A parte entre colchetes representa sessões com simetria máxima, podendo ser plana ($K = 0$), hiperbolica ($K = -1$) e esférica ($K = 1$). Essa é uma generalização da métrica que aparece no teorema de Birkhoff (2.2). Vamos chamar essas coordenadas de "angulares" mas elas só são ângulos para $K = 1$, em que a geometria tem simetria esférica. Podemos reescrever a métrica (2.127) como [36]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega_3^2(K) \quad (2.128)$$

em que:

$$d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2; \quad K = 1 \quad (2.129)$$

$$d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \theta_1(d\theta_2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3); \quad K = 0 \quad (2.130)$$

$$d\Omega_3^2 = d\theta_1^2 + \sinh^2 \theta_1(d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 d\theta_3^2); \quad K = -1 \quad (2.131)$$

A equação de Einstein terá uma constante cosmológica $\Lambda'_5 < 0$, e terá a forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{3}{2L_5^2}g_{\mu\nu} \quad (2.132)$$

podemos tirar o traço da equação e reescrevemos (2.132) como:

$$R_{\mu\nu} = \frac{3}{2L_5^2}g_{\mu\nu} \quad (2.133)$$

onde redefinimos $\frac{3}{2L_5^2} \equiv \frac{3}{2L_5^2}$. As componentes do tensor de Ricci são as mesmas obtidas anteriormente nas equações (2.13) a (2.15), e a equação de Einstein (2.132) nos dá

$$R_{00} = -\partial_1 \left(\frac{f'}{2h} \right) + \frac{f'h'}{4fh} + \frac{f'^2}{4fh} + \frac{3f'}{2rh} = -\frac{3}{2L_5^2}f \quad (2.134)$$

$$R_{11} = \partial_1 \left(\frac{f'}{2f} \right) + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f'h'}{4fh} - \frac{3h'}{2rf} = -\frac{3}{2L_5^2}h \quad (2.135)$$

dividindo (2.134) por f e (2.135) por h e então somando os resultados, encontramos:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{h'}{h} \quad (2.136)$$

$$f = \frac{C}{h} = \frac{1}{h} \quad (2.137)$$

Novamente a constante C pode ser absorvida pela coordenada radial.

Devido a simetria nas coordenadas "angulares", é suficiente calcular R_{22} , os outros termos angulares do tensor de Ricci são equivalentes e não fornecem nenhuma informação nova. A componente R_{22} da equação de Einstein (2.132) resulta:

$$R_{22} = \frac{rf'}{2hf} - \frac{rh'}{2h^2} + \frac{2k}{h} - 2 = r^2\Lambda_5 \quad (2.138)$$

Usando (2.137) em (2.138), encontramos:

$$f' = -\left(\frac{2}{r}\right)f - \left(\frac{-r^2\frac{3}{2L_5^2} + 2}{r}\right) \quad (2.139)$$

e obtemos a forma geral para $f(r)$

$$f(r) = k - \frac{C}{r^2} + \frac{r^2}{2L_5^2}. \quad (2.140)$$

Por fim temos a métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + d\Omega_3^2(k). \quad (2.141)$$

Essa é uma generalização da solução de Schwarzschild. Primeiro temos uma generalização da geometria das sessões com $r = \text{constante}$. Se $K = 1$ temos simetria esférica usual mas para $K = 0$ ou $K = -1$ temos seções planas ou hiperbólicas. Também temos a presença da constante cosmológica negativa. Podemos ver que quando $\frac{3}{2L_5^2} \rightarrow 0$ em (2.140), recuperamos a métrica de Schwarzschild (2.33) (generalizada para os novos k) portanto é válido assumirmos $C \propto M$. De forma análoga, vemos que quando $C \rightarrow 0$ a métrica (2.141) tende as coordenadas (2.111) de AdS_5 .

Vamos chamar essa métrica generalizada de 'Schwarzschild- AdS_5 ', ou de buraco negro- AdS_5 (BN- AdS_5).

2.3.2 Coordenadas de Kruskal

Para encontrarmos as coordenadas de Kruskal de Schwarzschild- AdS_5 , seguiremos a mesma lógica que usamos para Schwarzschild na sessão anterior e novamente, como a métrica depende apenas de r , apenas a parte radial¹ da métrica é importante em nossos cálculos. A componente g_{rr} da métrica é dada pela equação (2.141):

$$f(r) = \frac{r^2}{L_5^2} - \frac{C}{r^2} + k. \quad (2.142)$$

$$C = \omega^2 M, \quad (2.143)$$

$\omega^2 = \frac{4G_5}{3\Gamma(2)}$ e $\Gamma(2)$ é uma função gam, a com raízes

$$r_{\pm}^2 = \frac{L^2}{2} \left(-k \pm \sqrt{k^2 + \frac{4M\omega^2}{L^2}} \right) \quad (2.144)$$

Uma vez que $r_-^2 < 0$ para qualquer k , o equivalente para o raio de Schwarzschild é dado pela raiz positiva $r_+ \equiv r_h$, que é onde a métrica se torna singular e delimita o horizonte de eventos. Podemos reescrever (2.142) como a seguir:

$$f(r) = (r - r_h) \left[\frac{(r + r_h)(r^2 - r_-^2)}{L^2 r^2} \right] \equiv \frac{(r - r_h)}{g(r)}, \quad (2.145)$$

em que definimos

$$\frac{1}{g(r)} = \left[\frac{(r + r_h)(r^2 - r_-^2)}{L^2 r^2} \right]. \quad (2.146)$$

¹ r é de fato coordenada radial apenas para $k=1$, para os demais casos "radial" é apenas força de expressão.

Definindo:

$$r_* = \int \frac{dr}{f(r)} \quad (2.147)$$

e substituindo (2.145) em (2.147) e integrando, obtemos:

$$r_* = g(r_h) \ln(r - r_h) - \ln(r + r_h) + 2 \frac{|r_-|}{r_h} \text{Arc tg} \left(\frac{r}{|r_h|} \right) \quad (2.148)$$

Definimos agora o sistema de coordenadas de Kruskal da seguinte forma:

$$u = t - r_* \quad (2.149)$$

$$v = t + r_* \quad (2.150)$$

$$ds^2 = -f(r)dvdu. \quad (2.151)$$

Buscamos um sistema de coordenadas que descreve todo o espaço-tempo de Schwarzschild- AdS_5 , isto é, buscamos um sistema de coordenadas em que a singularidade em $r = r_h$ seja eliminada. Precisamos de um elemento de linha com a seguinte forma:

$$ds^2 = F(X, T)(-dT^2 + dX^2), \quad (2.152)$$

de modo que $F(X, T)$ seja bem definido em $r = r_h$. Para isto, definimos o sistema de coordenadas de Kruskal da seguinte forma:

$$u = t - r_* \quad (2.153)$$

$$v = t + r_* \quad (2.154)$$

$$ds^2 = -f(r)dvdu, \quad (2.155)$$

fazendo a mudança de coordenadas:

$$U = -\exp\left(-\frac{f'_h u}{2}\right) \quad (2.156)$$

$$V = \exp\left(\frac{f'_h v}{2}\right) \quad (2.157)$$

onde $f'_h = \frac{1}{g(r_h)}$ pela equação (2.145). Obtemos:

$$ds^2 = \frac{-4f(r)}{f_h'^2} \exp(-f'_h r_*(r)) dU dV, \quad (2.158)$$

Por fim definimos:

$$T = \frac{1}{2}(U + V) \quad (2.159)$$

$$X = \frac{1}{2}(V - U), \quad (2.160)$$

podemos escrever (2.158) na forma (2.152):

$$ds^2 = \frac{-4f(r)}{f_h'^2} \exp(-f'_h r_*(r))(-dT^2 + dX^2), \quad (2.161)$$

Este resultado descreve todo o espaço-tempo de Schwarzschild- AdS_5 . Note que a singularidade em $r = r_h$ foi retirada, porém a singularidade em $r = 0$ foi mantida, pois esta, como discutido anteriormente, corresponde a uma singularidade física e portanto não pode ser removida com uma troca de coordenadas. Usando (2.159) e (2.160), obtemos a relação:

$$X^2 - T^2 = (r - r_h) \exp(f'_h G(r)) \quad (2.162)$$

em que, a partir de (2.148), definimos:

$$G \equiv -\ln(r + r_h) + 2 \frac{|r_-|}{r_h} \text{Arc tg} \left(\frac{r}{|r_h|} \right), \quad (2.163)$$

que implica

$$-\exp\left(\frac{|r_-|}{r_h}\right) < T^2 - X^2 < 1, \quad (2.164)$$

O diagrama de kruskal para o espaço-tempo de Schwarzschild- AdS_5 se assemelha ao diagrama de Penrose de AdS mas com a presença de uma singularidade, como mostrado na figura 5.

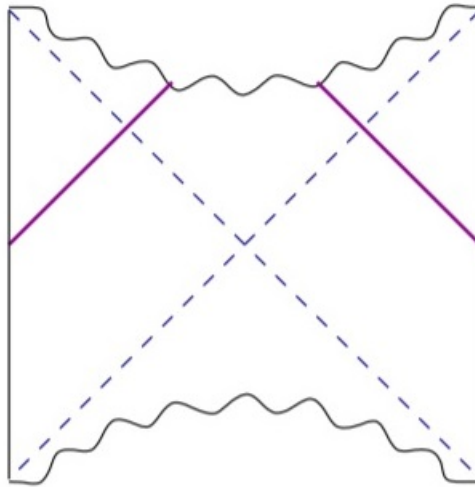


Figura 5 – Diagrama de Penrose de Schwarzschild- AdS_5 . **Fonte:** Figura 2 da referência [37]

3 Hipersuperfícies e Mundos-Brana

Neste capítulo daremos uma breve introdução sobre hipersuperfícies de codimensão 1 imersas num espaço-tempo. Um tratamento completo do assunto pode ser encontrado nos livros [38], [39] e [40] e nas revisões [41, 42]. Queremos descrever a curvatura da hipersuperfície em termos da curvatura do espaço-tempo no qual ela esta inserida e então, usando as equações de Einstein neste espaço-tempo, encontrar a geometria induzida na hipersuperfície. Este estudo é necessário para que possamos descrever a dinâmica das branas, principal tema deste trabalho nos capítulos seguintes.

3.1 Geometria intrínseca e extrínseca de uma hipersuperfície

Seja o espaço-tempo \mathcal{V} com métrica $g_{\mu\nu}$ e dimensão D , e \mathcal{S} uma hipersuperfície de codimensão 1, ou seja, de dimensão $d = D - 1$. Esta pode ser definida localmente através da equação:

$$x^\mu = x^\mu(y^a) \quad (3.1)$$

onde x^μ são coordenadas locais em \mathcal{V} ($\mu = 0, 1, 2, \dots, D - 1$) e y^a coordenadas locais em \mathcal{S} . A normal n_μ à hipersuperfície \mathcal{S} é normalizada por

$$n_\mu n^\mu = \epsilon, \quad (3.2)$$

com o sinal de $\epsilon = \pm 1$ dependendo se a hipersuperfície é tipo-tempo ($\epsilon = 1$) ou tipo-espaço ($\epsilon = -1$). O índice a assume d valores, por exemplo se $\epsilon = 1$ então $a = 0, 1, \dots, d - 1$.

A métrica $g_{\mu\nu}$ de \mathcal{V} define o elemento de linha

$$ds_{\mathcal{V}}^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.3)$$

o elemento infinitesimal, quando restrito a \mathcal{S} , por (3.1), será dado por:

$$dx^\alpha = e_a^\alpha dy^a, \quad (3.4)$$

onde

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}. \quad (3.5)$$

O elemento de linha sobre \mathcal{S} fica:

$$ds_{\mathcal{S}}^2 = h_{ab} dy^a dy^b, \quad (3.6)$$

em que

$$h_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

é a métrica induzida sobre a hipersuperfície \mathcal{S} . Vamos agora fazer as transformações:

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha \quad ; \quad y^a \rightarrow y'^a = y^a, \quad (3.8)$$

com as coordenadas sobre \mathcal{S} mantidas fixas. Os vetores e_a^α se transformam como a seguir:

$$e_a'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial y^a} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^a} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} e_a^\beta \quad (3.9)$$

ou seja, como um tensor contravariante sob transformação de coordenadas em \mathcal{V} .

A restrição $dx^\alpha = e_a^\alpha dy^a$ faz com que deslocamentos tangentes dos dx^α continuem sobre \mathcal{S} , isto é:

$$n_\alpha dx^\alpha = n_\alpha e_a^\alpha dy^a = 0 \quad (3.10)$$

Implica na ortogonalidade:

$$n_\alpha e_a^\alpha = 0. \quad (3.11)$$

Os vetores \vec{e}_a , ortogonais entre si, juntamente com o vetor normal \vec{n} , formam uma base para o espaço tangente de \mathcal{S} .

Vamos agora verificar como transformam os tensores na hipersuperfície \mathcal{S} sob uma transformação de coordenadas da hipersuperfície, temos então:

$$y^a \rightarrow y'^a \quad ; \quad x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x^\alpha, \quad (3.12)$$

e portanto,

$$e_a'^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y'^a} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^b} \frac{\partial y^b}{\partial y'^a} = \frac{\partial y^b}{\partial y'^a} e_b^\alpha \quad (3.13)$$

Que corresponde a uma transformação tensorial covariante sob transformação de coordenadas em \mathcal{S} .

Podemos agora descrever como se transforma a métrica induzida h_{ab} em \mathcal{V} e na hipersuperfície \mathcal{S} . Fazendo uma transformação do tipo (3.8) na métrica $g_{\mu\nu}$:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (3.14)$$

a métrica se transforma como um tensor covariante, e com isto, a h_{ab} se transforma como a seguir:

$$h'_{ab} = e_a'^\alpha e_b'^\beta g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} e_a^\lambda \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\rho} e_b^\rho \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} = \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu e_a^\lambda e_b^\rho g_{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

portanto:

$$h'_{ab} = h_{ab}, \quad (3.16)$$

a métrica induzida h_{ab} se transforma como um campo escalar em \mathcal{V} . Faremos agora uma transformação do tipo (3.12) na hipersuperfície, como as coordenadas x^α se mantêm constantes em \mathcal{S} , temos $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, que resulta:

$$h'_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta g_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^c}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial y^d}{\partial x'^\beta} h_{cd}. \quad (3.17)$$

O ponto em que queremos chegar é: na hipersuperfície \mathcal{S} a métrica induzida se transforma como um tensor covariante, embora em \mathcal{V} se transforme como um campo escalar. Tensores que se transformam como h_{ab} , isto é, que se transformam como tensores covariantes em \mathcal{S} e como campo escalar em \mathcal{V} , denominamos de **d-tensores** e os tensores que se transformam de maneira usual, como os tensores de \mathcal{V} , chamaremos de **D-tensores**. Por exemplo, os e_a^α se transformam como tensores usuais em \mathcal{V} e \mathcal{S} , por tanto são ao mesmo tempo D-tensores em \mathcal{V} e d-tensores em \mathcal{S} .

3.1.1 Derivadas covariantes em \mathcal{S}

A derivada covariante intrínseca à hipersuperfície \mathcal{S} aplicada em um tensor A_α , é um d-tensor definido pela relação (D.3) do apêndice D, e é escrita como a seguir :

$$A_{a|b} = e_a^\alpha e_b^\beta A_{\alpha;\beta}, \quad (3.18)$$

onde usamos $A_{a|b}$ para denotar a derivada covariante intrínseca de A_a e $A_{\alpha;\beta}$ para a derivada covariante usual de A_α . A derivada intrínseca definida acima corresponde à derivada covariante usual na variedade $(\mathcal{S}, h_{\mu\nu})$ com Γ_{bc}^a correspondente a métrica h_{ab} , como veremos a seguir. Usando (3.18), temos:

$$A_{a|b} = e_a^\alpha e_b^\beta A_{\alpha;\beta} = (e_a^\alpha A_\alpha)_{;\beta} e_b^\beta - e_{a;\beta}^\alpha A_\alpha e_b^\beta \quad (3.19)$$

O termo entre parênteses é um escalar em \mathcal{V} , e portanto sua derivada covariante coincide com a derivada comum:

$$(e_a^\alpha A_\alpha)_{;\beta} = (e_a^\alpha A_\alpha)_{,\beta} = A_{a,\beta}, \quad (3.20)$$

portanto

$$(e_a^\alpha A_\alpha)_{;\beta} e_b^\beta = \frac{\partial A_a}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} = \frac{\partial A_a}{\partial y^b} = A_{a,b}, \quad (3.21)$$

e o segundo termo de (3.19) fica:

$$e_b^\beta e_{a;\beta}^\alpha A_\alpha = e_b^\beta e_{\alpha a;b} A^\alpha = e_b^\beta e_{\alpha a;b} e_c^\alpha A^c = \Gamma_{cab} A^c, \quad (3.22)$$

onde

$$\Gamma_{cab} = e_b^\beta e_{\alpha a;b} e_c^\alpha. \quad (3.23)$$

Podemos escrever (3.19) em termos das coordenadas da hipersuperfície \mathcal{S} . Definindo:

$$\Gamma_{ab}^c = h^{cd} \Gamma_{cab} = h^{cd} e_d^\alpha e_b^\beta e_{\alpha a;\beta}, \quad (3.24)$$

temos:

$$A_{a|b} = A_{a,b} - \Gamma_{ab}^c A_c, \quad (3.25)$$

De maneira análoga podemos mostrar que para um tensor de grau qualquer, temos:

$$A_{ab\dots d|f} = e_a^\alpha e_b^\beta \dots e_d^\delta e_f^\phi A_{\alpha\beta\dots\delta;\phi}, \quad (3.26)$$

que pode ser expressa em termos da conexão, como a seguir:

$$A_{ab\dots d|f} = A_{ab\dots d,f} - \Gamma_{af}^c A_{cb\dots d} - \dots - \Gamma_{df}^c A_{ab\dots c}. \quad (3.27)$$

Agora resta mostrar que a conexão Γ_{ab}^d é compatível com a métrica h_{ab} , ou seja:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} h^{cd} (h_{ad,b} + h_{bd,a} - h_{ab,c}), \quad (3.28)$$

o que ocorre apenas se

$$h_{ab|c} = 0. \quad (3.29)$$

Usando a relação (3.27) para a métrica, temos:

$$h_{ab|c} = e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma h_{\alpha\beta;\gamma}, \quad (3.30)$$

em que $h_{\alpha\beta}$ é dado por (D.8), como mostrado a seguir:

$$h_{ab|c} = e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma (g_{\alpha\beta} - \epsilon n_\alpha n_\beta)_{;\gamma}. \quad (3.31)$$

Uma vez que $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, resta apenas analisarmos o termo:

$$h_{ab|c} = -\epsilon e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma (n_{\alpha;\gamma} n_\beta + n_\alpha n_{\beta;\gamma}), \quad (3.32)$$

como $e_a^\alpha n_\alpha = 0$, temos portanto:

$$h_{ab|c} = 0. \quad (3.33)$$

E concluimos que pela equação (3.24), sobre a hipersuperfície \mathcal{S} a conexão compatível com métrica induzida é dada pela projeção sobre \mathcal{S} da derivada covariante dos covetores $e_{\alpha a}$.

3.1.2 Curvatura extrínseca

Seja A^μ um vetor tangente a \mathcal{S} , a derivada intrínseca $A_{a|b}$ é a componente tangencial a \mathcal{S} do D-vetor $V_b^\alpha = A_{;\beta}^\alpha e_b^\beta$, e sua componente normal a \mathcal{S} , dada por $V^\alpha n_\alpha$, pode ser determinada usando a decomposição (D.8), juntamente com (D.12), para $g^{\alpha\beta}$ em que:

$$g^{\alpha\beta} = e^\alpha_a e^\beta_b h^{ab} + \epsilon n^\alpha n^\beta, \quad (3.34)$$

e portanto:

$$V^\alpha_b = g^\alpha_\mu V_b^\mu = (e^\alpha_a e_{\mu c} h^{ac} + \epsilon n^\alpha n_\mu) A^\mu_{;\beta} e_b^\beta, \quad (3.35)$$

que resulta:

$$V^\alpha_b = (h^{ac} e_{\mu c} A^\mu_{;\beta}) e^\alpha_a + (\epsilon n_\mu A^\mu_{;\beta} e^\beta_b) n^\alpha. \quad (3.36)$$

O primeiro termo entre parênteses é a componente tangencial do tensor V^α e podemos reescreve-lo como:

$$h^{ac} e_{\mu c} A^\mu_{;\beta} e^\beta_b = h^{ac} e^\mu_c e^\beta_b A_{\mu;\beta} = h^{ac} A_{a|c} = A^a|_b, \quad (3.37)$$

que, como era esperado, é a derivada covariante intrínseca de V^α . O segundo termo de (3.36) é a parte normal a hipersuperfície \mathcal{S} .

Por definição, temos que A^μ é tangente a \mathcal{S} , ou seja, $A^\mu n_\mu = 0$, temos então:

$$\epsilon n_\mu A^\mu{}_{;\beta} e^\beta{}_b = \epsilon (n^\mu A^\mu)_{;\beta} e^\beta{}_b - \epsilon n_{\mu;\beta} A^\mu e^\beta{}_b = -\epsilon n_{\mu;\beta} A^\mu e^\beta{}_b = -\epsilon n_{\mu;\beta} e^\mu{}_c A^c e^\beta{}_b, \quad (3.38)$$

portanto

$$V^\alpha{}_b = A^\alpha{}_{;\beta} e^\beta{}_b = A^\alpha{}_{|b} e^\alpha{}_a - \epsilon A^a K_{ab} n^\alpha. \quad (3.39)$$

onde definimos a curvatura extrínseca

$$K_{ab} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b n_{\alpha;\beta}. \quad (3.40)$$

Vamos analisar algumas propriedades importantes da curvatura extrínseca. A primeira propriedade é a de simetria, temos que:

$$K_{ab} = K_{ba}. \quad (3.41)$$

Uma vez que os vetores \vec{n} e \vec{e}_a são ortogonais, a simetria de K_{ab} pode ser demonstrada como a seguir:

$$K_{ab} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b n_{\alpha;\beta} = (e^\alpha{}_a e^\beta{}_b n_\alpha)_{;\beta} - e^\alpha{}_{a;\beta} e^\beta{}_b n_\alpha = -e^\alpha{}_{a;\beta} e^\beta{}_b n_\alpha \quad (3.42)$$

Como $e^\alpha{}_a$ e $e^\beta{}_b$ são uma base, a derivada de Lie de um em relação ao outro é nula:

$$\mathfrak{L}_{e_n} e^\beta{}_b = e^\mu{}_a e^\beta{}_{b;\mu} - e^\beta{}_{a;\mu} e^\mu{}_b = 0 \quad (3.43)$$

Usando (3.42) e a ortogonalidade entre \mathbf{n} e \mathbf{e}_a , temos:

$$K_{ab} = -e^\alpha{}_{a;\beta} e^\beta{}_b n_\alpha = -e^\alpha{}_{b;\beta} e^\beta{}_a n_\alpha = e^\alpha{}_b e^\beta{}_a n_{\alpha;\beta}. \quad (3.44)$$

Que demonstra a simetria da curvatura extrínseca.

Vamos agora mostrar uma segunda propriedade da curvatura extrínseca, podemos relacionar K_{ab} com a métrica de \mathcal{S} : Se \mathbf{n} é o vetor normal a \mathcal{S} , vale:

$$K_{ab} = \frac{1}{2} (\mathfrak{L}_{\mathbf{n}} g_{\alpha\beta}) e^\alpha{}_a e^\beta{}_b \quad (3.45)$$

Devido a sua simetria, $K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e^\alpha{}_a e^\beta{}_b = n_{(\alpha;\beta)} e^\alpha{}_a e^\beta{}_b$, ou seja:

$$n_{(\alpha;\beta)} = \frac{1}{2} (n_{(\alpha;\beta)} + n_{\beta;\alpha}) = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\mathbf{n}} g_{\alpha\beta}, \quad (3.46)$$

o que demonstra (3.45). E por fim temos que o traço de K será:

$$K = h^{ab} K_{ab} = h^{ab} e^\alpha{}_a e^\beta{}_b n_{\alpha;\beta} = (g^{\alpha\beta} - \epsilon n^\alpha n^\beta) n_{\alpha;\beta}, \quad (3.47)$$

3.1.3 Equações de Gauss-Codazzi

Nesta seção, veremos que é possível relacionar o tensor de curvatura da hipersuperfície \mathcal{S} , escrito em termos de sua métrica induzida, como a seguir:

$$R^c{}_{dab} = \Gamma^c{}_{db,a} - \Gamma^c{}_{da,b} + \Gamma^c{}_{ma}\Gamma^m{}_{da} - \Gamma^c{}_{mb}\Gamma^m{}_{da}, \quad (3.48)$$

com o tensor de curvatura de \mathcal{S} , que descreve a curvatura do espaço completo, dado por:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\lambda\delta}\Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma}. \quad (3.49)$$

Esta relação é dada através das equações de Gauss-Codazzi (cuja dedução se encontram no apêndice B), que são:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma e_d^\delta = R_{abcd} + \epsilon(K_{ad}K_{bc} - K_{ac}K_{bd}) \quad (3.50)$$

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma}n^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = K_{ab|c} - K_{ac|b}. \quad (3.51)$$

A equação (3.50) mostra a diferença entre o tensor de curvatura intrínseco a \mathcal{S} e a projeção tangencial do tensor de curvatura de \mathcal{V} sobre a hipersuperfície. Enquanto (3.51) mostra a componente normal a \mathcal{S} do tensor de curvatura de \mathcal{V} . Pelas equações de Gauss-Codazzi temos uma visão geométrica melhor de $K_{\mu\nu}$: a curvatura extrínseca nos fornece o quanto da curvatura de \mathcal{V} é realmente 'extrínseca' (exterior) à curvatura de \mathcal{S} .

3.2 Condições de Israel

Queremos descrever uma hipersuperfície \mathcal{S} de codimensão 1 imersa no espaço-tempo \mathcal{V} , tal que \mathcal{S} divide \mathcal{V} em duas regiões \mathcal{V}^+ e \mathcal{V}^- , com métricas $g_{\mu\nu}^+$ e $g_{\mu\nu}^-$. Vamos mostrar que quando colocamos uma distribuição de matéria sobre \mathcal{S} aparece uma descontinuidade geométrica. Buscamos condições que descrevam esta descontinuidade, que mantenham a consistência geométrica do espaço-tempo e que sejam covariantes. Tais condições são as chamadas condições de Israel. As deduções que serão mostradas a seguir são feitas em [43].

Assumiremos que as coordenadas y^a são válidas nos dois lados da hipersuperfície, e definimos a normal n^α com sentido \mathcal{V}^- para \mathcal{V}^+ (figura 6). Definimos a congruência de geodésicas que atravessam \mathcal{S} parametrizadas pelo tempo-próprio (ou distância própria) $l(x^a)$, tal que $l = 0$ quando a geodésica atravessa \mathcal{S} . Podemos então definir a normal como a seguir:

$$n^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial l}; \quad n_\alpha = \epsilon \partial_\alpha l, \quad (3.52)$$

de forma que $n^\alpha n_\alpha = \epsilon$.

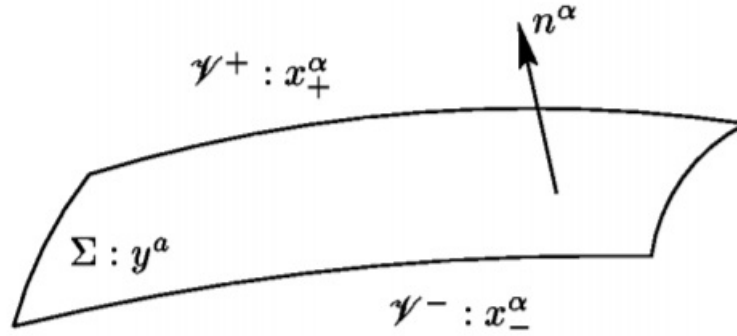


Figura 6 – duas regiões do espaço-tempo separadas pela hipersuperfície. **Fonte:** Figura 3.5 da referência [43]

Usaremos a seguinte notação: Seja um tensor qualquer A , definimos:

$$[A] = A(\mathcal{V}^+)|_{\mathcal{S}} - A(\mathcal{V}^-)|_{\mathcal{S}}, \quad (3.53)$$

$[A]$ é o salto de A sobre \mathcal{S} . Usando esta notação, temos:

$$[n^\alpha] = [e_a^\alpha] = 0, \quad (3.54)$$

a primeira é consequência de (3.52) e da continuidade de l e x^a sobre \mathcal{S} . A segunda surge do fato de as coordenadas y^a de \mathcal{S} serem as mesmas nos dois lados da hipersuperfície.

3.2.1 Primeira condição de Israel

A métrica $g_{\alpha\beta}$ de \mathcal{V} será expressa na forma:

$$g_{\alpha\beta} = \Theta(l)g_{\alpha\beta}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta}^-, \quad (3.55)$$

em que Θ é a função Heaviside, com as propriedades:

$$\Theta^2(l) = \Theta(l); \quad \Theta(l)\Theta(-l) = 0; \quad \frac{d}{dl}\Theta(l) = \delta(l). \quad (3.56)$$

Resta saber se (3.55) fornece resultados corretos das equações de Einstein. Precisamos portanto verificar que quantidades geométricas, tal como o tensor de Riemann, são bem definidas. Pra isto, precisamos verificar como se comportam as derivadas da métrica. Derivando (3.55), temos:

$$g_{\alpha\beta,\nu} = \Theta(l)g_{\alpha\beta,\nu}^+ + \Theta(-l)g_{\alpha\beta,\nu}^- + \epsilon\delta(l)[g_{\alpha\beta}]n_\nu, \quad (3.57)$$

o último termo em (3.57) é singular e gera termos $\Theta(l)\delta(l)$ (que não é uma distribuição bem definida) quando calculamos os símbolos de Christoffel. Precisamos que $[g_{\alpha\beta}] = 0$, logo:

$$0 = [g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = [g_{\alpha\beta}]e_a^\alpha e_b^\beta = [g_{\alpha\beta}e_a^\alpha e_b^\beta] = [h_{ab}], \quad (3.58)$$

a métrica induzida é a mesma nos dois lados de \mathcal{S} e portanto contínua sobre a hipersuperfície. Esta é a primeira condição de Israel.

3.2.2 Tensor de Riemann

Para definirmos a segunda condição de Israel, precisamos calcular o tensor de Riemann, para isto, é necessário calcularmos os símbolos de Christoffel, estes serão:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma}^{-\alpha}, \quad (3.59)$$

em que $\Gamma_{\beta\gamma}^{\pm\alpha}$ é o símbolo de Christoffel construído pela métrica $g_{\alpha\beta}^{\pm}$. Derivando (3.59), obtemos:

$$\Gamma_{\beta\gamma,\nu}^{\alpha} = \Theta(l)\Gamma_{\beta\gamma,\nu}^{+\alpha} + \Theta(-l)\Gamma_{\beta\gamma,\nu}^{-\alpha} + \epsilon\delta(l)[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}]n_{\nu}, \quad (3.60)$$

E o tensor de Riemann fica:

$$R_{\beta\gamma\nu}^{\alpha} = \Theta(l)R_{\beta\gamma\nu}^{+\alpha} + \Theta(-l)R_{\beta\gamma\nu}^{-\alpha} + \delta(l)A_{\beta\gamma\nu}^{\alpha}, \quad (3.61)$$

onde $A_{\beta\gamma\nu}^{\alpha} = \epsilon([\Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}]n_{\gamma} - [\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}]n_{\nu})$. O tensor de Riemann apresenta uma singularidade.

3.2.3 Tensor energia-momento da hipersuperfície

Uma vez que estamos impondo a primeira condição de Israel (3.58), temos que a métrica $g_{\alpha\beta}$ é contínua sobre \mathcal{S} , sua derivada tangencial também será. A descontinuidade da derivada da métrica deverá estar em sua derivada na direção normal dada ao longo da normal n^{α} . Deve então existir o campo tensorial $\kappa_{\alpha\beta}$, tal que

$$[g_{\alpha\beta,\gamma}] = \kappa_{\alpha\beta}n_{\gamma}, \quad (3.62)$$

logo,

$$\kappa_{\alpha\beta} = \epsilon[g_{\alpha\beta,\gamma}]n^{\gamma}, \quad (3.63)$$

e (3.62) implica:

$$[\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}] = \frac{1}{2}(\kappa_{\beta}^{\alpha}n_{\gamma} + \kappa_{\gamma}^{\alpha}n_{\beta} - \kappa_{\beta\gamma}n^{\alpha}), \quad (3.64)$$

e obtemos:

$$A_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} = \frac{\epsilon}{2}(\kappa_{\delta}^{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma} - \kappa_{\gamma}^{\alpha}n_{\beta}n_{\delta} - \kappa_{\delta}^{\beta}n^{\alpha}n_{\gamma} + \kappa_{\gamma}^{\beta}n^{\alpha}n_{\delta}), \quad (3.65)$$

contraindo o primeiro e terceiro índices, obtemos:

$$A_{\alpha\beta} \equiv A_{\alpha\mu\beta}^{\mu} = \frac{\epsilon}{2}(\kappa_{\mu\alpha}n^{\mu}n_{\beta} + \kappa_{\mu\beta}n^{\mu}n_{\alpha} - \kappa n^{\alpha}n_{\beta} + \epsilon\kappa_{\alpha\beta}), \quad (3.66)$$

onde $\kappa \equiv \kappa_{\alpha}^{\alpha}$. Isto corresponde a parte singular do tensor de Ricci obtido de (3.61). Contraindo mais uma vez (3.65), obtemos

$$A \equiv A_{\alpha}^{\alpha} = \epsilon(\kappa_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu} - \epsilon\kappa), \quad (3.67)$$

que corresponde à parte da função delta do escalar de Ricci. Uma vez que o tensor de Einstein possui uma singularidade dada por uma função delta, o tensor de energia-momento tem que ter a mesma forma, então

$$T_{\mu\nu} = \Theta(l)T_{\mu\nu}^{+} + \Theta(-l)T_{\mu\nu}^{-} + S_{\mu\nu}\delta(l), \quad (3.68)$$

logo

$$\kappa_d^2 S_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - \frac{1}{2} A g_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad T_{\mu\nu}^\pm \quad (3.69)$$

é o tensor energia-momento em \mathcal{V}^\pm e κ_d^2 a constante de Newton em d-dimensões. O termo da função delta é associado à fina distribuição de matéria sobre \mathcal{S} com tensor energia momento dado por $S_{\mu\nu}$.

3.2.4 Segunda condição de Israel

O tensor energia-momento de \mathcal{S} é dado explicitamente por:

$$2\kappa_d^2 \epsilon S_{\alpha\beta} = (\kappa_{\mu\alpha} n^\mu n_\beta + \kappa_{\mu\beta} n^\mu n_\alpha - \kappa n^\alpha n_\beta + \epsilon \kappa_{\alpha\beta}), \quad (3.70)$$

e temos que: $S_{\alpha\beta} n^\beta = 0$, ou seja, $S_{\alpha\beta}$ é tangente a \mathcal{S} , portanto podemos escrever:

$$S^{\alpha\beta} = S^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (3.71)$$

então:

$$2\kappa_d^2 S_{ab} = -\kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta - \epsilon (\kappa_{\mu\nu} n^\mu n^\nu - \kappa) h_{ab} = \kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta + h^{mn} \kappa_{\mu\nu} e_m^\mu e_n^\nu h_{ab} \quad (3.72)$$

além disto, temos

$$[n_{\alpha;\beta}] = -[\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma] n_\gamma = \frac{1}{2} (\epsilon \kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\gamma\alpha} n_\beta n^\gamma - \kappa_{\gamma\beta} n_\alpha n^\gamma), \quad (3.73)$$

que nos permite escrever

$$[K_{ab}] = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta = \epsilon \kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta, \quad (3.74)$$

e temos também:

$$[K] = [K_{mn} h^{mn}] = [n_{\mu;\nu} h^{mn} e_m^\mu e_n^\nu] = \frac{\epsilon}{2} \kappa_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta h^{ab}, \quad (3.75)$$

e por fim, temos:

$$S_{ab} = \frac{-\epsilon}{\kappa_d^2} ([K_{ab}] - [K] h_{ab}), \quad (3.76)$$

e o tensor energia-momento em \mathcal{S} será:

$$T_{\mathcal{S}}^{\alpha\beta} = \delta(l) S^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (3.77)$$

Esta forma do tensor de energia-momento é covariante, e portanto não depende do sistema de coordenadas. A equação (3.76) é a segunda condição de Israel. Este resultado descreve a descontinuidade causada pela presença de uma matéria sobre a hipersuperfície dada por $S_{\alpha\beta}$.

3.3 Termo de Gibbons-Hawking

Nesta seção mostraremos que é possível obter um resultado equivalente ao (3.76) utilizando uma abordagem variacional, diferente do que foi feito na seção 3.2. Para isto vamos considerar um espaço-tempo \mathcal{V} com uma borda dada pela hipersuperfície \mathcal{S} .

A ação de Einstein-Hilbert é dada por

$$A_{EH} = \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}} d^d x (R - 2\Lambda), \quad (3.78)$$

onde $\kappa_d^2 = 16\pi G$. Quando fazemos o cálculo variacional escolhemos uma (hiper)superfície onde fixamos $\delta g^{\mu\nu} = 0$, dada pela borda \mathcal{S} de \mathcal{V} . Ao fazer a variação do tensor de Ricci, surge um termo com derivadas da métrica,

$$\delta A_{EH} = \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}} d^d x \sqrt{-g} [G_{ab} \delta g^{ab}] + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}} d^d x \sqrt{-g} \nabla_c [g^{ab} \delta \Gamma^c_{ab} - g^{ck} \delta \Gamma^a_{ak}] \quad (3.79)$$

$$\equiv \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}} d^d x \sqrt{-g} [G_{ab} \delta g^{ab}] + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{S}} d^{d-1} x \sqrt{h} B[n_c], \quad (3.80)$$

em que h é o determinante da métrica induzida da superfície \mathcal{S} e

$$B[n_c] \equiv n_c [g^{ab} \delta \Gamma^c_{ab} - g^{ck} \delta \Gamma^a_{ak}], \quad (3.81)$$

onde n_c é a normal a \mathcal{S} , com $n^a n_a = \epsilon = \pm 1$ correspondendo a hipersuperfícies tipo tempo ou espaço.

O problema está nas derivadas na direção normal da métrica em Γ^c_{ab} : uma vez que fixamos $\delta g^{\mu\nu} = 0$ na borda, para obtermos as equações de movimento corretas não podemos assumir nenhuma condição adicional em relação as derivadas de $g_{\mu\nu}$; usualmente este termo problemático pode ser descartado ao fixar a (hiper)superfície de contorno no infinito (no "final" do espaço-tempo), mas não podemos usar esta estratégia quando queremos descrever um espaço-tempo com uma borda a distância finita.

Para contornarmos este problema, queremos escrever (3.81) na forma:

$$B[n_c] = \delta Q + X_{ab} \delta g^{ab}. \quad (3.82)$$

e então acrescentar a ação de Einstein-Hilbert um termo envolvendo a integral de $-Q$ e desta forma lidar com o termo de borda de modo que o termo problemático com derivadas normais seja cancelado, como mostraremos a seguir (estas deduções são feitas em [44]).

Podemos simplificar (3.81) usando as relações:

$$\delta(\nabla_a n_b) = \nabla_a \delta n_b - (\delta \Gamma^c_{ab}) n_c \quad (3.83)$$

$$\delta(\nabla_a n^a) = \nabla_a \delta n^a - (\delta \Gamma^a_{ac}) n^c, \quad (3.84)$$

então $B[n_c]$ terá a forma:

$$B[n_c] = n_c [g^{ab} \delta \Gamma^c_{ab} - g^{ck} \delta \Gamma^a_{ak}] = \nabla_a (\delta u^a) - \delta(2\nabla_a v^a) (\nabla_a n_b) \delta g^{ab}, \quad (3.85)$$

onde

$$\delta u^a \equiv \delta n^a + g^{ab} \delta n_b, \quad (3.86)$$

note que δu^a compõe o espaço tangente de \mathcal{S} , pois:

$$n_a \delta u^a = n_a \delta n^a + n^a \delta u_a = \delta(n^a n_a) = 0, \quad (3.87)$$

e portanto são ortogonais entre si. Note também que não podemos obter δn^a simplesmente levantando índice em δn_a , pois $\delta n^a = \delta(g^{ab} n_b) = n_b \delta g^{ab} + g^{ab} \delta n_b \neq g^{ab} \delta n_b$.

Para vetores do tipo $\delta u^a \in \mathcal{S}$, podemos expressar $\nabla_a \delta u^a$ em termos da 4-divergência sobre a superfície \mathcal{S} e compatível com a métrica h_{ab} . Temos então a seguinte relação:

$$\nabla_a \delta u^a = D_a \delta u^a - \epsilon a_j \delta u^j, \quad (3.88)$$

onde $a_j = n^i \nabla_i n_j$ e D_a o operador de derivada covariante na superfície correspondente a métrica induzida $h_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$. O segundo termo do lado direito da igualdade de (3.88) pode ser escrito como:

$$a_j \delta u^j = a_j \delta n^j + a^j \delta n_j = a_j n_i \delta g^{ij} + a^i \delta n_i = a_j n_i \delta g^{ij}, \quad (3.89)$$

onde usamos (3.86) e, por (3.87), $a^j \delta n_j = 0$ (δn_a é na direção de n_a), encontramos:

$$\nabla_a \delta u^a = D_a \delta u^a - \epsilon n_i a_j \delta g^{ij}. \quad (3.90)$$

Substituindo este resultado em (3.81), obtemos:

$$B[n_c] = D_a(\delta u^a) - \delta(2\nabla_a n^a) + (\nabla_i n_j - \epsilon n_i a_j) \delta g^{ij}, \quad (3.91)$$

onde temos:

$$K_{ij} \equiv -\nabla_i n_j + \epsilon n_i a_j, \quad (3.92)$$

que corresponde à curvatura intrínseca de S , com as propriedades:

$$K_{ij} = K_{ji} \quad (3.93)$$

$$n^j K_{ij} = n^i K_{ij} = 0 \quad (3.94)$$

$$K = -\nabla_a n^a, \quad (3.95)$$

e podemos escrever $K_{ij} \delta g^{ij} = K_{ij} \delta h^{ij}$, que fornece:

$$B[n_c] = D_a(\delta u^a) + (2\delta K) - K_{ij} \delta h^{ij}, \quad (3.96)$$

considerando o integrando:

$$B\sqrt{h} = \sqrt{h} D_a(\delta u^a) + (2\delta K \sqrt{h}) + \sqrt{h} K h_{ij} \delta h^{ij} - K_{ij} \delta h^{ij} \sqrt{h} \quad (3.97)$$

$$= \sqrt{h} D_a(\delta u^a) + (2\delta K \sqrt{h}) + (K h_{ij} - K_{ij}) \delta h^{ij} \sqrt{h}, \quad (3.98)$$

o termo de borda do variacional (3.80), fica:

$$\int d^d x \sqrt{h} B[n_c] = \int d^3 x \sqrt{h} D_a(\delta u^a) + \delta \int d^3 x (2K\sqrt{h}) + \int d^3 x \sqrt{h} (Kh_{ij} - K_{ij}) \delta h^{ij}. \quad (3.99)$$

Esta é a forma que precisamos para o termo de borda. O primeiro termo pode ser convertido em uma integral de superfície em (d-2) dimensões e usualmente é descartado. O segundo termo pode ser compensado ao adicionar na ação de Einstein-Hilbert (3.78) o seguinte termo:

$$A_{GH} = -\frac{1}{\kappa_d^2} \int d^{d-1} x (2K\sqrt{h}) \quad (3.100)$$

este é chamado termo de Gibbons-Hawking [45], então a ação total fica

$$A_{total} = \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}} d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \frac{1}{\kappa_d^2} \int d^{d-1} x (2K\sqrt{h}), \quad (3.101)$$

e por fim teremos:

$$\delta A_{total} = \delta(A_{EH} + A_{GH}) = \frac{1}{\kappa_d^2} \int d^d x \sqrt{-g} (G_{ab} \delta g^{ab}) + \frac{1}{\kappa_d^2} \int d^{d-1} x \sqrt{h} (Kh_{ij} - K_{ij}) \delta h^{ij}. \quad (3.102)$$

Queremos descrever a dinâmica de uma hipersuperfície com uma distribuição de matéria "fina"; de maneira análoga feita na seção 3.2, teremos a seguinte ação:

$$\begin{aligned} A_{total} = A_{matéria} + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}^+} d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \\ \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\mathcal{V}^-} d^d x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \\ \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\partial\mathcal{V}^+} d^{d-1} x (K\sqrt{h}) + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\partial\mathcal{V}^-} d^{d-1} x (K\sqrt{h}), \end{aligned} \quad (3.103)$$

a variação de (3.103) nos fornece as equações de Einstein usuais mais um termo de borda da hipersuperfície \mathcal{S} dado por

$$\delta A = \delta A_{matéria}|_{\partial\mathcal{V}} + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\partial\mathcal{V}^+} d^{d-1} x \sqrt{h} (Kh_{ij} - K_{ij}) \delta h^{ij} + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\partial\mathcal{V}^-} d^{d-1} x \sqrt{h} (Kh_{ij} - K_{ij}) \delta h^{ij} \quad (3.104)$$

uma vez que a normal em $\partial\mathcal{V}^+$ tem sinal oposto à normal em $\partial\mathcal{V}^-$, então

$$\delta A = \delta A_{matéria}|_{\partial\mathcal{V}} + \frac{1}{\kappa_d^2} \int_{\partial\mathcal{V}} d^{d-1} x \sqrt{h} ([\tau_{ij}]) \delta h^{ij} \quad (3.105)$$

em que

$$\tau_{ij} = Kh_{ij} - K_{ij} \quad (3.106)$$

onde denotamos

$$[\tau_{ij}] = \tau_{ij}^+ - \tau_{ij}^- \quad (3.107)$$

este é chamado tensor de Brown-York [46]. Agora vamos impor a condição de que a métrica é idêntica em ambos os lados da hipersuperfície, desta forma

$$[h_{ij}] \equiv h_{ij}^+ - h_{ij}^- = 0 \quad (3.108)$$

e temos

$$\tau_{ij} = [K]h_{ij} - [K_{ij}]. \quad (3.109)$$

Temos uma "equação de Einstein" para a matéria na hipersuperfície

$$S_{ij} = \frac{-2}{\sqrt{-h}} \frac{\delta A_{matéria}}{\delta h^{ij}} \quad (3.110)$$

e por (3.105) obtemos

$$S_{ij} = \frac{1}{\kappa_d^2} ([K]h_{ij} - [K_{ij}]) \quad (3.111)$$

O tensor (3.111) é o mesmo resultado encontrado na seção 3.2.

3.4 Mundo-brana e equações de Friedmann

Vamos aplicar todas as ferramentas discutidas até agora para descrever um espaço-tempo AdS_5 com uma distribuição de matéria sobre uma hipersuperfície de codimensão 1 (vamos nos referir a tais hipersuperfícies como **branas** no restante deste trabalho). Mostraremos que partindo de conceitos puramente geométricos induzimos uma cosmologia de FRW sobre esta hipersuperfície (brana) e usando a segunda condição de Israel (3.76) obtemos as equações de Friedmann para este universo.

Encontraremos as equações de Friedmann sobre uma brana num espaço-tempo de AdS_5 com um buraco negro. Veremos que partindo apenas de conceitos geométricos do espaço-tempo de AdS_5 e da brana podemos induzir uma certa densidade de matéria e várias classes distintas de universos de FRW sobre esta brana.

Considere um espaço-tempo de Schwarzschild- AdS_5 , \mathcal{V} , preenchido com uma constante cosmológica $\Lambda_5 = -\frac{6}{L^2} < 0$. Assumimos que \mathcal{V} admite folheações espaciais da forma

$$d\mathbf{x}_K^2 \equiv \bar{g}_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.112)$$

A métrica em \mathcal{V} , como discutido no capítulo 2, será da forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + d\Omega_3^2(K), \quad (3.113)$$

em que

$$f(r) = \frac{r^2}{L_5^2} - \frac{C}{r^2} + K. \quad (3.114)$$

em que $C = \omega^2 M$ é dado por (2.143).

Vamos introduzir uma brana \mathcal{S} de codimensão espacial 1 neste espaço-tempo. Queremos que a brana se mova apenas na direção "radial". As coordenadas em \mathcal{V} são X^A , e a posição radial desta brana será denotada por a , isto é

$$X^A = (t(\tau), a(\tau), x^i). \quad (3.115)$$

A restrição da métrica (3.112) nos dá a métrica induzida da brana. Se τ é o tempo próprio de um observador sobre a brana $ds^2/d\tau^2 = -1$ e temos

$$-f(a)\dot{t}^2 + \dot{a}^2/f(a) = -1 \quad (3.116)$$

onde ponto é derivada com τ , substituindo em (3.112), teremos a métrica induzida $g_{\alpha\beta}$ medida por um observador sobre a brana

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + a(\tau)d\mathbf{x}_K^2, \quad (3.117)$$

que é uma geometria de FRW 4-dimensional. O fator de escala observado, $a(\tau)$, é simplesmente a posição da brana em \mathcal{V} . Repare aqui que esta escolha define $a(\tau)$ como um coordenada 'radial', mas $a(\tau)$ também representa o fator de escala da métrica em (3.117). Precisamos ter cuidado com esta definição para preservarmos as dimensões corretas nas equações no restante deste trabalho.

A brana forma a fronteira de dois espaço-tempo ($V^\pm, {}^5g^\pm$) nos quais suas geometrias precisam ser coladas com as condições de Israel. A primeira condição, (3.58), nos dá a continuidade da métrica $g_{\alpha\beta}$ em (3.117), logo, a e τ precisam ser contínuas, e como t não aparece em $g_{\alpha\beta}$, podemos ter um salto na curvatura extrínseca $K_{\alpha\beta}^\pm$ em ambos os lados da brana de forma que seja válida a equação (3.76).

Para encontrarmos $K_{\alpha\beta}^\pm$, precisamos dos vetores normais n_A^\pm . O vetor tangente a superfície (3.115) é \dot{X}^A , então a normal, em ambos os lados da brana, terá que obedecer

$$n_A \dot{X}^A = n_t \dot{t} + n_a \dot{a} = 0.$$

A solução será portanto, $n_a = \alpha \dot{a}$, $n_a = -\alpha \dot{t}$. Vamos escolher as normais em cada lado da brana definidas com sinais opostos, então

$$n_A^\pm = \pm(\dot{a}(\tau), -\dot{t}^\pm(\tau), \mathbf{0}). \quad (3.118)$$

O cálculo de $K_{\alpha\beta}$ é o mesmo em ambos os lados \pm , por isto vamos omitir os índices por enquanto. Usaremos das seguintes propriedades.

As componentes da métrica em \mathcal{V} são

$${}^5g_{tt} = -f, \quad {}^5g_{aa} = \frac{1}{f}, \quad {}^5g_{ij} = a^2 \bar{g}_{ij}, \quad {}^5g^{tt} = -\frac{1}{f}, \quad {}^5g^{aa} = f, \quad {}^5g^{ij} = \frac{1}{a^2} \bar{g}^{ij}.$$

e também $e^A_\alpha \equiv \partial X^A / \partial x^\alpha$, definido no capítulo 3

$$e^t_\alpha = \dot{t} \delta_{\alpha 0}, \quad e^a_\alpha = \dot{a} \delta_{\alpha 0}, \quad e^{x^i}_\alpha = \delta_{\alpha i}.$$

Note que a componente 0 em e^A_0 se refere à componente τ tipo tempo da brana. Denotaremos as componentes em \mathcal{V} com índices definidos neste espaço, isto é, n_t , n_a , etc.

As derivadas das componentes do vetor normal são

$$\partial_t n_t = \ddot{a}/\dot{t}, \quad \partial_a n_a = -\ddot{t}/\dot{a}, \quad \partial_t n_a = -\dot{t}/\dot{t}, \quad \partial_a n_t = \ddot{a}/\dot{a}.$$

Com a identidade (3.116)

$$f\dot{t}^2 - \frac{\dot{a}^2}{f} = 1, \quad (3.119)$$

$$f\dot{t}\ddot{t} - \dot{a}\frac{\ddot{a}}{f} + \frac{1}{2}\dot{a}f'(t^2 + \frac{\dot{a}^2}{f^2}) = 0. \quad (3.120)$$

Onde $f' \equiv df/da$. A curvatura extrínseca é

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}e^A{}_\alpha e^B{}_\beta \mathcal{L}_n{}^5 g_{AB} \quad (3.121)$$

e a derivada de Lie da métrica é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n{}^5 g_{AB} &= -f\dot{t}\partial_a{}^5 g_{AB} + \partial_A n_B + \partial_B n_A \\ &+ \frac{\dot{a}}{f}(\partial_B{}^5 g_{At} + \partial_A{}^5 g_{Bt}) + \dot{t}f(\partial_B{}^5 g_{AZ} + \partial_A{}^5 g_{BZ}). \end{aligned} \quad (3.122)$$

A componente $K_{00} = e^A{}_0 e^B{}_0 \frac{1}{2} \mathcal{L}_n{}^5 g_{AB}$.

$$K_{00} = t\ddot{a} - \dot{a}\ddot{t} + \frac{1}{2}\dot{t}f'(t^2 f - 3\frac{\dot{a}^2}{f}).$$

Podemos eliminar \ddot{t} usando (3.120), e simplificando com (3.119). A forma final será

$$K_{00} = \frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}f'}{f\dot{t}}. \quad (3.123)$$

A outra componente diferente de zero é K_{ij} . Na direção espacial apenas o primeiro termo de (3.122) é diferente de zero. Usando $e^A{}_j = \delta_j^A$, temos

$$K_{ij} = -af\dot{t}\bar{g}_{ij}. \quad (3.124)$$

Veja que $K_{0i} = 0$ já que a brana é isotrópica. Agora vamos encontrar o traço

$$K = -\frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}f'}{f\dot{t}} - 3f\frac{\dot{t}}{a}, \quad (3.125)$$

e o quadrado

$$K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = \left(\ddot{a} + \frac{1}{2}f'\right)^2 \frac{1}{f^2\dot{t}^2} + 3\dot{t}^2 \frac{f^2}{a^2}. \quad (3.126)$$

As condições de Israel definidas em (3.2) fazem o tensor de energia-momento $S_{\alpha\beta}$ da brana na descontinuidade de $K_{\alpha\beta}$ com a eq (3.76) dá essa descontinuidade

$$\Delta K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{\kappa_5^2} \left(S_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} S g_{\alpha\beta} \right). \quad (3.127)$$

em que Δ é a diferença dos lados da brana e em que κ_5^2 é o equivalente da constante de Newton 5-dimensional. O tensor energia-momento da brana é

$$S_{\alpha\beta} \equiv -\lambda g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}, \quad (3.128)$$

onde a tensão da brana é λ e a matéria da brana é $\tau_{\alpha\beta}$

$$\tau_{00} = \rho, \quad \tau_{ij} = a^2 P \bar{g}_{ij}. \quad (3.129)$$

As equações são dadas pelas componentes 00- e ij da equação (3.127):

$$\frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}f'}{f\dot{t}} = \frac{1}{3}\kappa_5^2(\lambda - 2\rho - 3P), \quad (3.130)$$

$$f\dot{t} = \frac{1}{3}\kappa_5^2 a(\lambda + \rho). \quad (3.131)$$

Em que a é contínuo mas t não é e

$$f \equiv -\frac{1}{4L_5^2} a^2 \Lambda_5. \quad (3.132)$$

Precisamos escrever estas equações na forma das equações de Friedmann para o fator de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$. Precisamos que as equações sejam funções apenas de a portanto precisamos eliminar os termos com \dot{t} . Usaremos que na direção normal nos lados \pm , a diferença de $K_{\alpha\beta}$ é a soma nas equações (3.130) e (3.131).

$$\frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}f'^+}{f\dot{t}^+} + \frac{\ddot{a} + \frac{1}{2}f'^-}{f\dot{t}^-} = \frac{1}{3}\kappa_5^2(\lambda - 2\rho - 3P), \quad (3.133a)$$

$$f\dot{t}^+ + f\dot{t}^- = \frac{1}{3}\kappa_5^2 a(\lambda + \rho). \quad (3.133b)$$

Essas equações formam um sistema de duas variáveis. Podemos encontrar outra equação. O espaço-tempo de \mathcal{V} é vácuo, então

$${}^5R_{AB} - \frac{1}{2}{}^5R {}^5g_{AB} = -\frac{3}{2L_5^2} {}^5g_{AB},$$

E usando a projeção do escalar de Ricci sobre a brana (3.50)

$$\begin{aligned} R &= ({}^5g^{BD} - n^B n^D) ({}^5R_{BD} - {}^5R_{ABCD} n^A n^C) + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\beta\alpha} \\ &= {}^5R - 2 {}^5R_{AB} n^A n^B + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

que nos dá

$$R = -\frac{3}{L_5^2} + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\beta\alpha}.$$

Que é válida em ambos os lados da brana, mas R é contínuo sobre a brana, e tomando a diferença temos

$$-2\Lambda_5 + \Delta(K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\beta\alpha}) = 0$$

onde Delta é a diferença nos dois lados da brana. Usando (3.125) e (3.126)

$$K^2 - K^{\alpha\beta}K_{\beta\alpha} = 6f^2\dot{t}^2/a^2 + 6\frac{(\ddot{a} + \frac{1}{2}f')}{a},$$

e tomando a diferença em ambos os lados da brana obtemos uma nova equação

$$f^2\Delta\dot{t}^2 + \frac{1}{2}a\Delta f' = a^2\frac{1}{2L_5^2}.$$

Usando $a\Delta f' = -\frac{1}{3}a^2\Lambda_5$, temos

$$\Delta(f\dot{t})^2 = -\frac{1}{2}a\Delta f' + a^2\frac{1}{2L_5^2} = a^2\frac{3}{4L_5^2},$$

o lado esquerdo da equação é $(f^+t^+ + f^-t^-)(f^+t^+ - f^-t^-)$, e com a equação (3.133b), obtemos

$$\frac{\kappa_5^2 a}{3}(\rho + \lambda)\Delta f\dot{t} = \frac{a^2\Lambda_5}{2}.$$

Combinando com (3.133b), a solução será

$$f^\pm t^\pm = \frac{\kappa_5^2 a(\rho + \lambda)}{6} \pm \frac{9a\frac{3}{2L_5^2}}{4\kappa_5^2(\rho + \lambda)}. \quad (3.134)$$

usando a equação (3.119) podemos usar

$$(f^\pm t^\pm)^2 = \dot{a}^2 + f^\pm$$

então a soma

$$(f^+t^+)^2 + (f^-t^-)^2 = 2\dot{a}^2 + f^+ + f^- = 2\dot{a}^2 + 2(K - C/a^2) - \frac{(\frac{3}{2L_5^2})a^2}{3}$$

nos dá, juntamente com a equação (3.134),

$$(\dot{a}/a)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\lambda\kappa_5^4\rho}{18} + \frac{\frac{3}{L_5^2} + \frac{1}{3}\kappa_5^4\lambda^2}{12} + \frac{\kappa_5^4\rho^2}{36} + \frac{C}{a^4}; \quad (3.135)$$

Por fim, podemos escrever como

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\kappa_4^2\rho}{3} + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{\kappa_4^2(\rho^2/\lambda)}{6} + \frac{C}{a^4}. \quad (3.136)$$

Em que definimos

$$\kappa_4^2 \equiv \frac{1}{6}\lambda\kappa_5^4$$

e a constante cosmológica 4-dimensional ¹ sobre a brana é dada por

$$\Lambda_4 \equiv \frac{1}{4}\left(\frac{3}{L_5^2} + \frac{1}{3}\kappa_5^4\lambda^2\right), \quad (3.137)$$

¹ note que κ_4 precisa ter dimensão de distância² para estar de acordo com o princípio variacional, e uma vez que κ_5 tem dimensão de distância², então λ é por definição proporcional a distância²

A contante $C = \omega M$ dada por (2.143) resultante da massa do buraco negro é reponsável pela parte de radiação do universo emergente sobre a brana.

A segunda equação pode ser encontrada tomando a derivada d/dt da equação (3.135) e usando a equação de conservação $\dot{\rho} + 3H(P + \rho) = 0$ e outra equação de Friedmann é

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{3\kappa_4^2}{2}\rho + \frac{\kappa_4^2}{2}\rho^2 P + \frac{\kappa_4^2}{2}\rho^3 + 3\kappa_4^2\rho^2 + \frac{\Lambda_4}{3} \quad (3.138)$$

em que P é a pressão do fluido

Uma dedução equivalente das equações de Friedmann para uma brana com densidade de energia constante pode ser encontrada no apêndice E.

4 Mundo-brana com densidade de energia constante

No capítulo anterior, mostramos que uma brana imersa no espaço-tempo de AdS_5 tem a geometria de um universo FRW com uma equação de Friedmann modificada. Neste capítulo vamos analisar o que acontece quando a brana tem uma tensão constante, e então resolver essas equações de Friedmann e encontrar a dinâmica dos universos induzidos sobre a brana, que chamamos de **mundos-brana**.

4.1 Equações de Friedmann para brana com tensão constante

Considere uma brana com tensão constante \mathcal{H}_4 . Esse é o caso mais simples da equação (3.128), com $\rho = 0$ e $\lambda \sim \mathcal{H}_4$. A equação (3.136) mostra que teremos um universo com radiação e constante cosmológica. Note que o termo proporcional a ρ^2 na equação de Friedmann modificada se anula, e a equação fica uma equação de Friedmann **comum** para radiação e constante cosmológica. A dedução das equações de Friedmann induzidas sobre a brana nesse caso direto é feita também no apêndice E, elas são

$$H^2 = \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{1}{3}\Lambda_4 - \frac{K}{a^2}, \quad (4.1)$$

$$\ddot{a} + \frac{a}{L_5^2} + \frac{\rho_r}{a} = \left(\frac{\kappa_5}{3}\right)^2 a, \quad (4.2)$$

onde ρ_r e Λ_4 são definidos aqui como (veja eq.(E.23))

$$\begin{aligned} \rho_r &= \omega M \\ \frac{1}{3}\Lambda_4 &= \left(\frac{\lambda^2 \kappa_5^4}{6} - \frac{1}{L_5^2}\right) \end{aligned}$$

Note que essas definições são um pouco diferentes do capítulo anterior.

Note que para termos um universo assintoticamente dS_4 devemos impor a condição $\frac{\lambda^2}{9\kappa_5^4} > \frac{1}{\kappa_5^2 L_5^2}$, que nos garante $\Lambda_4 > 0$. Repare que a densidade relativa de radiação $\rho_r = \omega M$ depende diretamente da massa M do buraco negro 5-dimensional. Portanto a radiação deste universo é criada pelo termo da massa buraco negro.

Para descrever as propriedades destes universos homogêneos e isotrópicos, devemos resolver as equações de Friedmann (4.2) dos mundos-brana e analisar as propriedades de todas as possíveis soluções. Vamos mostrar que existem onze tipos diferentes de soluções das equações (4.2), representando diferentes histórias de evolução dos universos de FRW preenchidos por radiação e constante cosmológica positiva, dependendo dos parâmetros Λ_4 , ρ_r deste modelo.

As equações de Friedmann para um fluido perfeito são equivalentes às de um universo preenchido por um campo escalar autointeragente e, por conveniência, vamos usar este formalismo para a análise da dinâmica dos universos emergentes. A ação para um campo escalar autointeragente é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma - V(\sigma) \right). \quad (4.3)$$

O campo σ e o potencial $V(\sigma)$ se relacionam com a pressão e densidade de energia de um fluido perfeito, ρ e p , da seguinte forma:

$$\rho = \frac{\dot{\sigma}^2}{2} + V(\sigma), \quad p = \frac{\dot{\sigma}^2}{2} - V(\sigma). \quad (4.4)$$

Para um espaço-tempo de FRW, encontramos as seguintes equações de campo correspondentes às equações de Friedmann,

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} = -\partial_\sigma V(\sigma) \quad (4.5)$$

$$\dot{H} = \frac{\kappa_4^2}{4} \dot{\sigma}^2 + \frac{K}{a^2} \quad (4.6)$$

$$\kappa_4^2 \left(V(\sigma) + \frac{1}{2} \dot{\sigma}^2 \right) = 6H^2 + \frac{6K}{a^2}. \quad (4.7)$$

É importante enfatizar que essas são equações de Friedmann usuais porque o termo com ρ^2 na equação (3.136) se anula nesse caso em que a brana tem apenas tensão constante.

4.2 Sistema de primeira ordem e solução das equações de Friedmann

Para descrevermos a evolução do universo emergente, precisamos resolver o sistema de equações diferenciais dado pelas equações (4.5), (4.6) e (4.7). O restante do capítulo é dedicado a resolução deste sistema e análise dos resultados.

Nosso objetivo é transformar o sistema de equações de segunda ordem (4.5)-(4.7) em um sistema equivalente de *primeira* ordem, e assim classificar as soluções usando um diagrama de fase. Para isso definimos o fator de Hubble, ou seja, a primeira derivada de a , como uma função do campo escalar:

$$H^2 \equiv \frac{\kappa_5^2}{6} W^2(\sigma). \quad (4.8)$$

E também definimos uma função auxiliar $\gamma(\sigma)$ dada por

$$\gamma(\sigma) = \sqrt{1 - \frac{4K}{a^2 W^2(\sigma)}} \quad (4.9)$$

Assim podemos reescrever (4.6) como

$$\dot{H} = -\frac{\gamma(\sigma)W(\sigma)}{2}, \quad (4.10)$$

e usando (4.9) em (4.6) e (4.7), para $\dot{\sigma} \neq 0$, obtemos

$$\dot{\sigma} = 2 \left(\frac{\partial_\sigma W(\sigma)}{\gamma(\sigma)} \right) \quad (4.11)$$

O potencial então deve satisfazer uma relação de consistência:

$$V(\sigma) = -2 \left(\frac{\partial_\sigma W(\sigma)}{\gamma(\sigma)} \right)^2 + \frac{3}{2} (\gamma(\sigma) W(\sigma))^2 + \frac{6K}{a^2} = -2 \left(\frac{\partial_\sigma W(\sigma)}{\gamma(\sigma)} \right)^2 + \frac{3}{2} (W(\sigma))^2 \quad (4.12)$$

Todas as soluções do sistema de primeira ordem

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\kappa_5^2}{6} W^2(\sigma), \quad \dot{\sigma} = 2 \left(\frac{\partial_\sigma W(\sigma)}{\gamma(\sigma)} \right) \quad (4.13)$$

são soluções das equações de Friedmann (mas o contrário não é verdade, é necessário que o sistema de primeira ordem satisfaça a relação (4.12)).

Podemos também escrever W como função de a usando a forma obtida para H através da equação da continuidade de um fluido. Para um universo preenchido com radiação e constante cosmológica temos

$$W^2(a) = \frac{1}{3} \Lambda_4 + \rho_r / a^4. \quad (4.14)$$

A partir daqui esse será o caso que vai nos interessar. Com a mudança de variável $W(\sigma) = W(a^2)$, as equações (4.11) e (4.12) ficam:

$$\dot{\sigma}(t) = \sqrt{aW(a^2)} \sqrt{-2a \frac{dW(a^2)}{da^2}} \quad (4.15)$$

$$e \quad V = \frac{1}{2} a^2 \frac{dW(a^2)}{da^2} + \frac{3}{2} W^2(a^2). \quad (4.16)$$

Para o universo de radiação com constante cosmológica, temos

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\rho_r}}{a^2} \quad (4.17)$$

$$V(a^2) = \frac{1}{2} \Lambda_4 + \frac{\rho_r}{2a^4} \quad (4.18)$$

Esta escolha de W nos dá a seguinte relação:

$$V(a^2) = \frac{1}{3} \Lambda_4 + \frac{1}{2} W^2 \quad (4.19)$$

Comparando com a equação (4.16) vemos que esta relação não depende de derivadas, o que torna a análise do potencial mais simples. Acima, escrevemos $W(a)$ porque sabemos como o fator de Hubble se comporta com a em um universo de radiação com constante cosmológica. Mas o potencial de um campo escalar é uma função do *campo*. Então devemos achar $V(\sigma)$. Para isso, precisamos achar $a(\sigma)$ e substituir na equação (4.19). Dividindo (4.17) por \dot{a} e usando (4.10), obtemos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}} = \int \frac{dX}{\left(\sqrt{\left[X - \frac{2K}{\sqrt{\rho_r}} \right]^2 - \frac{4K^2}{\rho_r} + \frac{1}{3} \Lambda_4} \right)}, \quad (4.20)$$

em que $X = \left(\frac{\sqrt{\rho_r}}{a^2}\right)$, portanto, dado os valores de K , ρ_r e $\Lambda_4 k$ podemos encontrar a função do potencial ao substituir o resultado de (4.20) em (4.18), podemos encontrar o seu potencial correspondente. As soluções dessa integral dependem dos valores dos parâmetros, como veremos abaixo.

Para descrever o espaço de fase, vamos redefinir as primeiras derivadas do sistema de primeira ordem como

$$u(t) \equiv -\dot{\sigma}(t) \quad (4.21)$$

$$v(t) = -2H \quad (4.22)$$

As equações de Friedmann ficam

$$\dot{u} = uv, \quad (4.23)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4), \quad (4.24)$$

este sistema de equações apresenta um invariante dado por

$$b = -\frac{2K}{\sqrt{\rho_r}} = \frac{v^2 - u^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4}{2u} = \text{constante}. \quad (4.25)$$

que fixa as condições iniciais do sistema e correlaciona as propriedades do universo emergente com o espaço-tempo de AdS₅. As equações (4.23), (4.24) e (4.25) são suficientes para descrever todas as soluções das equações de Friedmann. Definimos:

$$g_{\pm} = v \pm u \quad (4.26)$$

portanto,

$$v = \frac{1}{2}(g_+ + g_-) \quad (4.27)$$

$$u = \frac{1}{2}(g_+ - g_-) \quad (4.28)$$

usando (4.24), obtemos:

$$g_{\pm} = \frac{1}{2}(g_{\pm}^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4) \quad (4.29)$$

$$\int \frac{2dg_{\pm}}{(g_{\pm} + \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4})(g_{\pm} - \alpha)} = \int dt \quad (4.30)$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\frac{g_{\pm} - \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{g_{\pm} + \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} = c_{\pm} + \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t \quad (4.31)$$

Dadas as condições iniciais $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$, obtemos:

$$c_{\pm} = \frac{v_0 \pm u_0 - \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{v_0 \pm u_0 + \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \quad (4.32)$$

temos por (4.31)

$$v \pm u = \sqrt{\Lambda_4} \left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) = g_{\pm} \quad (4.33)$$

e por fim, usando (4.28) e (4.27), encontramos

$$u = \frac{\sqrt{\Lambda_4}}{2} \left(\left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) - \left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) \right) \quad (4.34)$$

$$v = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \left(\left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) + \left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) \right) \quad (4.35)$$

com algumas manipulações o sistema (u, v) acima pode ser escrito como a seguir:

$$u(t) = \frac{u_0}{\left[\cosh \left(\frac{\sqrt{\Lambda_4} t}{2} \right) - \frac{v_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t}{2} \right) \right]^2 - \left[\frac{u_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t}{2} \right) \right]^2} \quad (4.36)$$

$$v(t) = \frac{v_0 \cosh \left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t \right) - (v_0^2 - u_0^2 + \Lambda_4) \frac{\sinh \left(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t \right)}{2\alpha}}{\left[\cosh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t}{2} \right) - \frac{v_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t}{2} \right) \right]^2 - \left[\frac{u_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t}{2} \right) \right]^2}, \quad (4.37)$$

as condições iniciais (u_0, v_0) são vinculadas com os parâmetros do espaço-tempo de BN- AdS_5 através do invariante (4.25).

As equações (4.36) e (4.37) possuem o mesmo denominador que se anula em dois valores de t dados por

$$\left[\cosh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t_{\pm}}{2} \right) - \frac{v_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t_{\pm}}{2} \right) \right]^2 - \left[\frac{u_0}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}} \sinh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t_{\pm}}{2} \right) \right]^2 = 0, \quad (4.38)$$

onde obtemos

$$\tanh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t_{\pm}}{2} \right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{v_0 \pm u_0}. \quad (4.39)$$

Podemos definir sem perda de generalidade t_{\pm} como novo parâmetro de contorno do sistema (u, v) . Temos que t_{\pm} será real quando $|\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{v_0 \pm u_0}| < 1$ e imaginário se a desigualdade não for válida. Para t_{\pm} imaginário, definimos a troca de variável $t_{\pm} = \Re(t_{\pm}) + i \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}$, que mapeia $\tanh \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} t_{\pm}}{2} \right)$ em $\text{cth} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \Re(t_{\pm})}{2} \right)$ para $|\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{v_0 \pm u_0}| > 1$.

Por fim, o invariante b em função das novas contantes t_{\pm} , fica:

$$b = \sqrt{\Lambda_4} \text{cth} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} (t_- - t_+) \right) \quad (4.40)$$

As condições iniciais do sistema (u, v) dependem diretamente dos parâmetros do definidos pelo espaço-tempo de AdS_5 através do invariante (4.25) e, uma vez fixadas tais

condições, podemos resolver as equações (4.36) e (4.37) e obter as soluções das equações de Friedmann que buscamos. Veremos a seguir que obtemos vários tipos de evoluções diferentes dependendo do valor das constantes do sistema. Resta encontrar o fator de escala e campo escalar, que podem ser obtidos integrando as equações (4.37) e (4.36). Integrando (4.27), temos

$$v = -2\dot{H} \rightarrow \int -2\frac{da}{a} = \int \frac{\sqrt{\Lambda_4}}{2} \left(\left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) + \left(\frac{1 + c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}}{1 - c_{\pm} \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4 t}} \right) \right) dt \quad (4.41)$$

obtemos

$$2H = -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}t + \ln(1 - c_+ \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}t)(1 - c_- \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}t), \quad (4.42)$$

usando $\dot{A} = H$ e $a = \exp 2A$, obtemos

$$\exp 2H = a^2 = \exp -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}t(1 - c_+ \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}t)(1 - c_- \exp \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}t) \quad (4.43)$$

que pode ser reescrita como

$$a^2 = -\frac{K}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{(t-t_+)\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{(t-t_-)\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{(t_+-t_-)\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}. \quad (4.44)$$

Repare que o fator de escala dado por (4.44) é inversamente proporcional a $\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, isto devido nossa escolha em definir $a(t)$ com dimensão [1] de distância na seção 3.4. O termo $\frac{1}{3}\Lambda_4$, com dimensão espacial [2], aparece para que $a(t)$ tenha a dimensão correta. Para encontrar a solução para o campo σ , basta integrar (4.36), e obtemos

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sqrt{2} \ln \left| \frac{\sinh\left(\frac{t_-\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{(t-t_+)\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{t_+\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{(t-t_-)\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)} \right| \quad (4.45)$$

em que σ_0 é o valor do campo em $t = 0$. As equações (4.44) e (4.45) são soluções gerais do sistema e com as condições iniciais podemos obter suas soluções particulares.

4.3 Evolução dos universos

A história desses universos é dada pela evolução temporal do fator de escala (4.44) e do campo escalar (4.45). Analizaremos os diferentes tipos soluções e veremos que podemos ter várias classes diferentes de universos induzidos (mesmo que o fluido seja o mesmo) que dependem das condições iniciais fixadas pelo invariante dado pela equação (4.25).

Nossa classificação das diferentes histórias cósmicas será feita a partir da investigação das seguintes propriedades das soluções:

- i Curvatura espacial, ou seja, universos fechados ($K = 1$), abertos ($K = -1$) ou planos ($K = 0$).
- ii Existência ou não de uma ou mais singularidades do tipo Big-Bang (BB) ou Big-Crunch (BC).

A existência ou não de singularidades em universos homogêneos e isotrópicos pode ser garantida pela divergência ou não dos invariantes R , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ ¹. O escalar de Ricci R pode ser obtido tirando o traço das equações de Einstein

$$R = 6\frac{k}{a^2} + 6\dot{H} + 12H = 4\Lambda_4, \quad (4.46)$$

e vemos que para o nosso caso ele é sempre constante. Por isso para podermos determinar se uma solução tem ou não singularidade precisamos calcularmos o invariante $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, que pode ser escrito em geral como

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{\rho^2}{3} \left(1 + 2\frac{\Lambda_4}{\rho} \left(\frac{\Lambda_4}{\rho} - 1 \right) \right), \quad (4.47)$$

portanto, dada a densidade $\rho(t)$ vamos poder classificar se os universos possuem ou não singularidades.

- iii Períodos de aceleração e/ou desaceleração.

A aceleração do fator de escala pode ser determinada substituindo $\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2$ em (4.24) e encontramos

$$q(t) \equiv \frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}\Lambda_4 - u^2 \right). \quad (4.48)$$

Os universos serão acelerados para $|u| < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, e desacelerados para $|u| > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$.

- iv Épocas de contração ou expansão.

É trivial analisarmos se um universo está em uma fase de expansão e/ou contração: basta analisarmos o sinal de $v = -2H$. Se $v > 0$, temos universos em contração enquanto $v < 0$ corresponde a universos em expansão.

Também é crucial analisar as formas dos potenciais do campo escalar em função dos diferentes valores dos parâmetros $(\frac{1}{L^2}, M, \lambda)$ que definem as condições iniciais. Veremos que o formato da função $V(\sigma)$ poderá mudar muito drasticamente entre as diferentes classes de soluções o que pode ser interpretado como "transições de fase" (ver seção 4.4).

Para classificar os diferentes tipos de solução, a melhor maneira é fazermos a análise do diagrama de fase do sistema (u, v) , em que $u = \dot{\sigma}(t)$ é proporcional a energia do campo escalar e $v = -2H$ é proporcional ao fator de Hubble. O diagrama é formado por um

¹ Para um universo homogêneo e isotrópico, $R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} \propto R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, e portanto é suficiente calcularmos o invariante $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ para mostrar se existe ou não singularidade.

número infinito de curvas com características distintas, e facilita a classificação dos tipos de soluções de acordo com as características (i)-(v) que listamos acima.

As curvas que definem o diagrama de fase de (u, v) podem ser obtidas através do invariante (4.25). Para $|b|^2 \neq \frac{1}{3}\Lambda_4$, a equação (4.25) corresponde a um número infinito de hipérbolas com equação

$$v^2 - (u + b)^2 = -(b^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4^2). \quad (4.49)$$

Dependendo do valor de b temos seis classes diferentes de hipérbolas. Para $|b|^2 = \frac{1}{3}\Lambda_4$, as hipérbolas se degeneram nas retas separatrizes

$$v = \pm(u + b). \quad (4.50)$$

Estas separatrizes, convenientemente, dividem o semiplano (u, v) em seis regiões com histórias de universo diferentes. Temos um total de 11 tipos diferentes de histórias de universo que são caracterizadas de acordo com as condições iniciais fixadas em cada um dos casos.

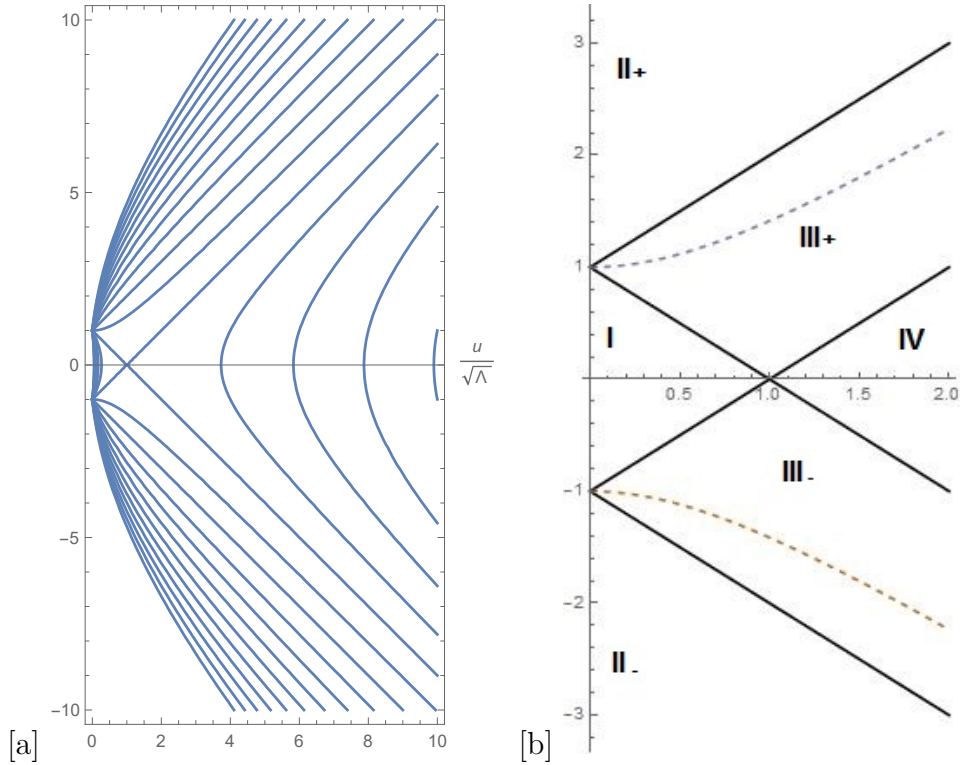


Figura 7 – [a] Curvas do diagrama $(\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}, \frac{v}{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}})$; [b] Regiões definidas pelas retas separatrizes e pelas hipérbolas tracejadas. As hipérbolas tracejadas representam universos planos ($K = 0$), entre essas hipérbolas (regiões I, III e IV) temos universos fechados ($K = 1$) e acima e abaixo (regiões II) temos universos abertos ($K = -1$).

O diagrama de fase do sistema (u, v) , descrito pelas equações (4.49) e (4.50), está representado na figura 7. Os diferentes tipos de soluções estão na figura 7[a], e as

separatrizes e as regiões que classificam os tipos de solução na figura 7[b]. O diagrama é simétrico em relação ao eixo u e por isso é suficiente considerarmos apenas a região $u > 0$.

4.3.1 Pontos fixos - Universo estático de Einstein e dS_4

As soluções nas regiões I, II e III do diagrama (u, v) na figura 7 todas começam ou terminam nos pontos $(\pm\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, 0)$ e $(0, \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4})$. Estes são os vértices do triângulo no centro da figura 7[b], onde as separatrizes tocam os eixos u e v . Cada um desses pontos é por si só uma solução porque eles são pontos fixos do sistema de primeira ordem e essas são as primeiras soluções que vamos analisar.

Universo 1

A primeira solução que iremos analisar é dada pelo ponto fixo $(0, \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4})$. As propriedades correspondentes aos itens de nossa classificação são as seguintes.

- i** Esta solução corresponde a um único universo fechado ($K = 1$).
- ii** O universo é não-singular e com tempo de vida infinito.
- iii e iv** O universo é estático porque $v = -2H = 0$. Assim o fator de escala é constante e portanto $q(t) = 0$. Este tipo de solução é conhecido como universo estático de Einstein [47].

Universo 2

A segunda solução é representada pelos pontos $(\pm\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, 0)$.

- i** Esta solução corresponde a universos abertos ($K = -1$), planos ($K = 0$) ou fechados ($K > 0$).
- ii** Não apresentam singularidade e são eternos.
- iii** Estes universos são sempre acelerados ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$).
- iv** Estas soluções compõem universos com fator de Hubble constante dado por $v = -2H = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$. Assim, o ponto $(-\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, 0)$ corresponde a um universo eterno de dS_4 (uma breve discussão sobre este tipo de universo se encontra no apêndice C) sempre em expansão ($v < 0$). Enquanto $(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, 0)$ corresponde a um universo de dS_4 que se contrai. Ou seja a diferença entre ambos é que o sentido da coordenada temporal é invertido.

4.3.2 Separatrizes

As retas separatrizes (4.50) correspondem a curvas únicas do diagrama de fase (u, v) que separam o diagrama em diferentes regiões em que as soluções são qualitativamente

diferentes. Isso acontece porque as retas são obtidas a partir de condições iniciais bem específicas dadas por $|b|^2 = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ e portanto qualquer perturbação nas condições iniciais do sistema leva a histórias de universo bem diferentes. Discutiremos esta propriedade com mais detalhes no final do capítulo.

As equações da reta, dadas por (4.50) com $|b|^2 = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, ficam

$$v = \pm(u \pm \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}). \quad (4.51)$$

São 4 retas por causa da combinação dos sinais + e - e como as duas retas que cruzam o ponto fixo $(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, 0)$ são soluções diferentes temos ao todo 3 pares de soluções, que listaremos a seguir.

Universo 3

As separatrizes com equação de reta $v = \pm(u - \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4})$ para $u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, são fixadas pelos pontos $(u = 0, v = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}) \rightarrow (u = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, v = 0)$. Essas retas formam o triângulo no diagrama, representado em detalhe na figura 8, ligando os pontos fixos discutidos acima.

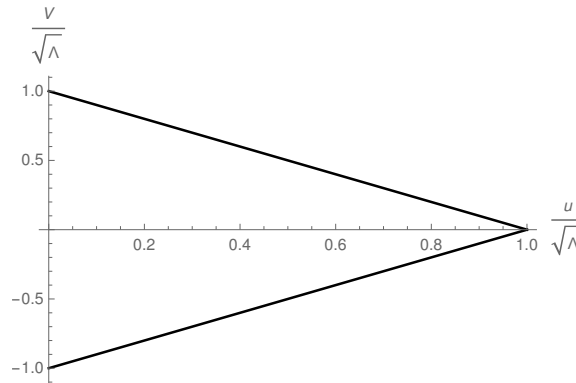


Figura 8 – Curva no diagrama (u, v) para universos tipo 3

O invariante é dado pela equação (4.40), em que $|b|^2 = \frac{1}{3}\Lambda_4$ e $t_- \rightarrow \infty$. Fixando $t_+ = 0$ o fator de escala e campo escalar ficam

$$a^2(t) = \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \exp\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \quad (4.52)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sqrt{2} \ln \left\| 2 \exp\left(\frac{-t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \right\|, \quad (4.53)$$

As propriedades dessas soluções são:

- (i) Estas separatrizes correspondem apenas a universos fechados ($K = 1$).

- (ii) Os universos correspondentes são não-singulares com tempo de vida infinito
- (iii) São sempre acelerados ($u, \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$).
- (iv) Este universo tem apenas uma fase de expansão (contração), para $v < 0$, ($v > 0$) começa (termina) em dS_4 e termina (começa) num universo estático de Einstein.

O potencial neste caso é dado por

$$\frac{V(\sigma)}{\frac{1}{3}\Lambda_4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \quad (4.54)$$

e o gráfico do potencial é mostrado na figura 9.

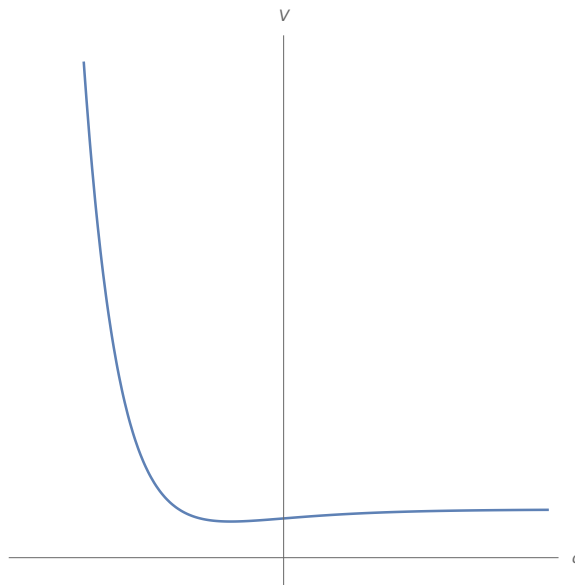


Figura 9 – Gráfico do potencial na separatriz tipo universo 3

Universo 4

As outras separatrizes são as retas com $v = \pm(u - \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4})$ com $|b|^2 = \frac{1}{3}\Lambda_4$ e $u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$. As curvas no diagrama (u, v) são mostradas na figura 10 em que o eixo vertical está deslocado para a direita e o ponto de encontro em $v = 0$ corresponde ao ponto fixo do universo estático de Einstein, ou seja ao vértice à direita do triângulo na figura 8. Essas separatrizes são retas que se estendem até o infinito em $u \rightarrow \infty$.

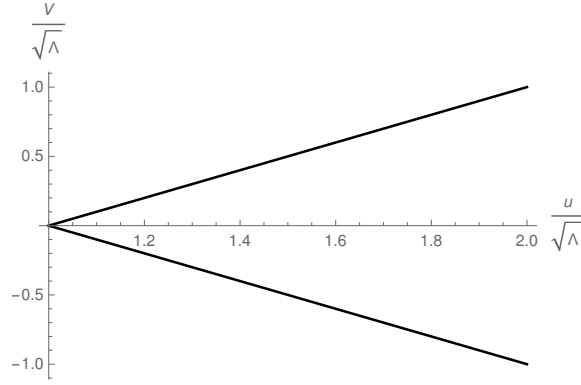


Figura 10 – Curva do diagrama para universo tipo 4

As condições iniciais correspondem a t_{\pm} reais em que $t_{+} \rightarrow \infty$ e fixamos $t_{-} = 0$. O fator de escala e campo escalar ficam:

$$a^2(t) = k \frac{\frac{1}{3}\Lambda_4}{2} \exp\left(-\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \quad (4.55)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sqrt{2} \ln \left\| \frac{2 \exp\left(-\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)} \right\| \quad (4.56)$$

- (i) Estas soluções correspondem a universos fechados ($K = 1$).
- (ii) São singulares.
- (iii) Estes universos são desacelerados ($u > \sqrt{\Lambda_4}$).

(iv) Possuem apenas uma fase de expansão (contração). Para $v < 0$, o universo começa numa singularidade e expande até um raio máximo e terminando num universo estático de Einstein dado pelo ponto $(\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, 0)$. Para $v > 0$ o processo é equivalente a uma inversão temporal, o universo começa em um universo estático de Einstein e decresce até terminar em uma singularidade.

O potencial nesta região é dado por

$$\frac{V(\alpha)}{\frac{1}{3}\Lambda_4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \quad (4.57)$$

e o gráfico deste potencial é a figura 11.

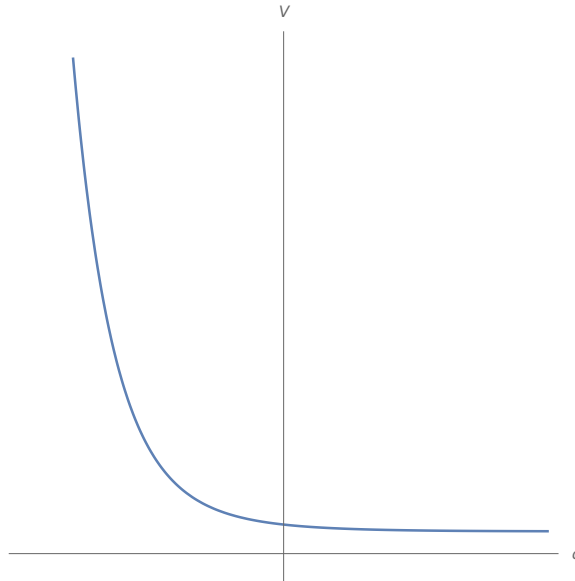


Figura 11 – Gráfico do potencial na separatriz tipo universo 4.

Universo 5

Por fim temos as separatrizes correspondentes as retas $(v = \pm(u + \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}))$. As curvas no diagrama (u, v) são mostradas na figura 12. Elas saem dos pontos fixos correspondentes a universos dS e vão até $u \rightarrow +\infty$.

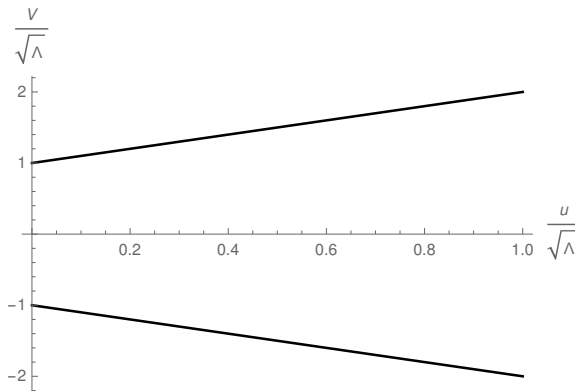


Figura 12 – Curva do diagrama para universo tipo 5

Agora vamos ter $t_+ \rightarrow -\infty$ e podemos fixamos $t_- = 0$. Então o fator de escala e campo escalar ficam

$$a^2(t) = -\frac{\frac{1}{3}\Lambda_4}{2} \exp\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \quad (4.58)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sqrt{2} \ln \left\| \frac{2 \exp\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)} \right\| \quad (4.59)$$

(i) Estas separatrizes correspondem a universos abertos $K = -1$.

(ii) Os universos são singulares, comçam (terminam) numa singularidade e terminam (começam) em dS_4 .

(iii) possuem uma fase acelerada próximo de dS_4 ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$) e desacelerado próximo da singularidade ($u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$)

(iv) Este universo tem apenas uma fase de expansão (contração), para $v < 0$, ($v > 0$) começa (termina) em dS_4 e termina (começa) num universo estático de Einstein.

O potencial nesta região é dado por

$$\frac{V(\alpha)}{\frac{1}{3}\Lambda_4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \exp\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \quad (4.60)$$

representado na figura 13.

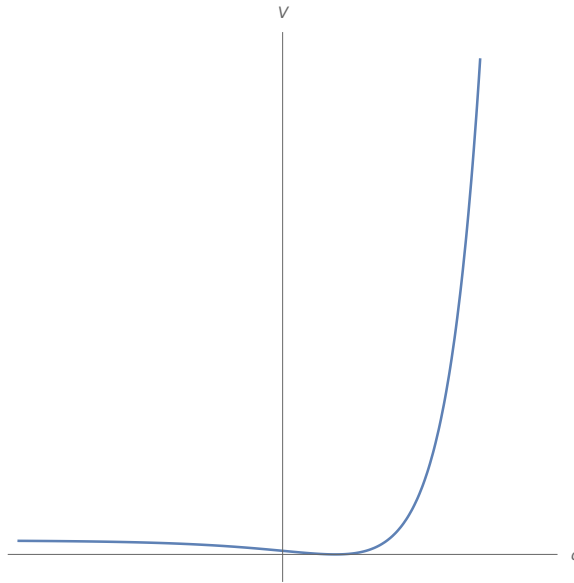


Figura 13 – Gráfico do potencial na separatriz tipo universo 5.

A partir de agora vamos analisar as soluções nas regiões limitadas pelas separatrizes. Vamos dividir a classificação com base no ítem (i) das propriedades que listamos, ou seja, vamos classificar primeiro todos os universos planos ($K = 0$), depois os abertos ($K = -1$) e por fim os fechados ($K = 1$).

4.3.3 Universos planos ($K=0$)

Universo 6

As curvas que correspondem a universos planos podem ser obtidas fazendo $K = 0$ em (4.25),

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{3}\Lambda_4^2 \quad (4.61)$$

que são as hipérbolas tracejadas da figura 7[b] e mostradas separadamente na figura 14.

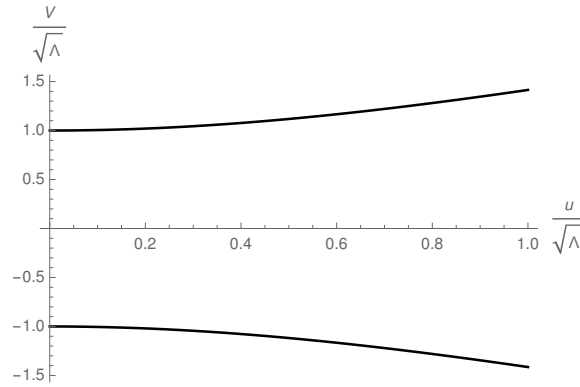


Figura 14 – Curva do diagrama para universo tipo 6

O fator de escala e campo escalar são dados por

$$a^2(t) = 2 \left\| \sinh \left(\frac{2t\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \right) \right\| \quad (4.62)$$

$$\sigma(t) = \mp \sqrt{2} \ln \left\| \operatorname{cth} \left(\frac{t\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \right) \right\|, \quad (4.63)$$

com invariante $b = -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \tanh \left(\frac{2\sigma^*}{\sqrt{2}} \right)$.

(ii) Os universos são singulares e começam (terminam) numa singularidade num tempo $t \rightarrow -\infty$ e terminam (começam) num universo de dS_4 .

(iii) Os universos possuem uma fase acelerada ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$) e outra desacelerada ($u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$).

(iv) Novamente, este universo tem apenas uma fase de expansão (contração), para $v < 0$ ($v > 0$).

O potencial é dado por (4.18) com $|b| > \sqrt{\Lambda_4}$, e temos

$$\frac{V(\sigma)}{\frac{1}{3}\Lambda_4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cosh^2 \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right)} \left(\sinh \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right) + \sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \right)^2, \quad (4.64)$$

com gráfico dado na figura 15.

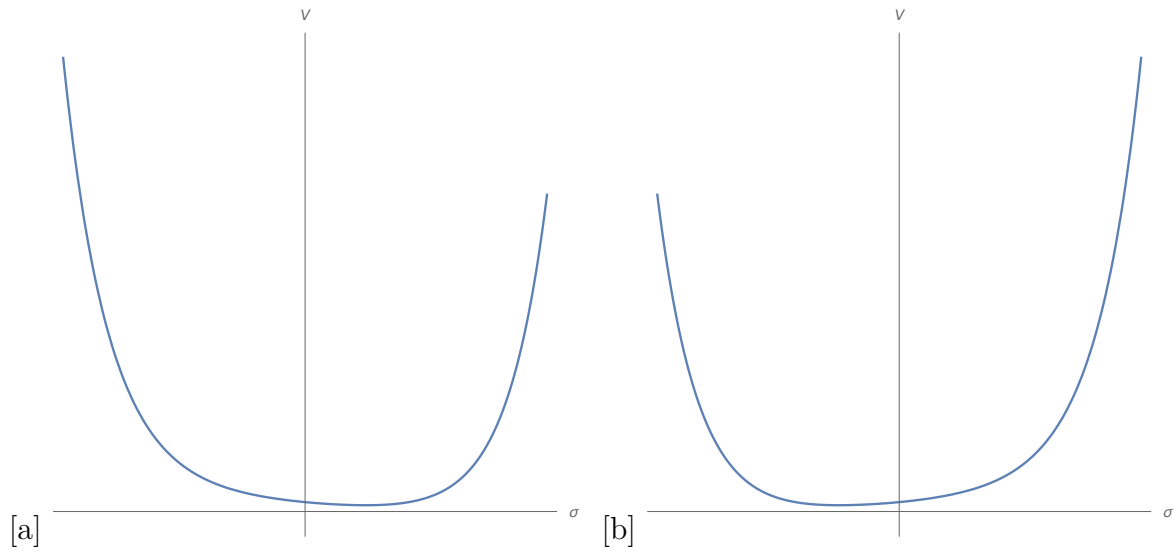


Figura 15 – [a] Gráfico do potencial para $\sigma^* > 0$. [b] Gráfico do potencial para $\sigma^* < 0$.

4.3.4 Universos abertos ($K = -1$)

Universo 7

As curvas correspondentes a universos abertos são obtidas fazendo $K = -1$ na equação do invariante (4.25) com $b > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ e são dadas por

$$v^2 - (u + b)^2 = -(b^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4^2) \quad (4.65)$$

Vamos ter um número infinito de hipérbolas e universos correspondentes a esta região. As curvas no diagrama (u, v) são do tipo mostrado na figura 16.

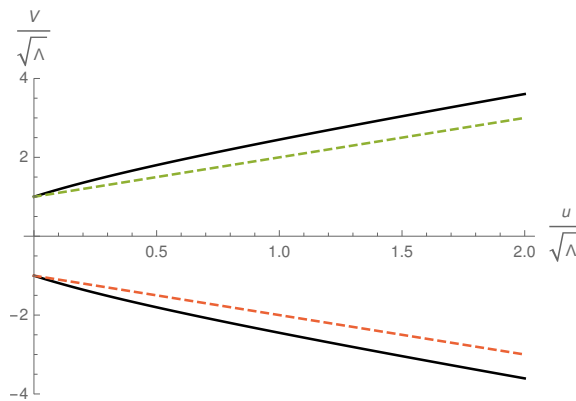


Figura 16 – Curva do diagrama para universo tipo 7. As separatrizes estão como linhas tracejadas.

Na região $b < |\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}|$ vamos ter que os t_{\pm} são reais e podemos fixar $t_{\pm} = \mp \frac{\sigma^* 2}{\sqrt{2\Lambda_4}}$. O fator de escala e campo escalar, com invariante $b = \sqrt{\Lambda_4} \text{cth} \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right)$, ficam:

$$a^2(t) = \frac{2}{\Lambda_4} \frac{\sinh \left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}} \right) \sinh \left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}} \right)}{\cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right)} \quad (4.66)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\sinh \left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}} \right)}{\sinh \left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}} \right)} \right\| \quad (4.67)$$

(ii) Estes universos são singulares começam (terminam) numa singularidade (Big Bang) e terminam (começam) em dS_4 .

(iii) Possuem uma fase acelerada ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$) e outra desacelerada ($u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$)

(iv) Novamente, este universo tem apenas uma fase de expansão (contração), para $v < 0$ ($v > 0$).

O potencial nesta curva é dado por

$$\frac{V(\sigma)}{\frac{1}{3}\Lambda_4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \sinh^2 \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right)} \left(\cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) - \cosh \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 \quad (4.68)$$

com gráfico dado pela figura 17.

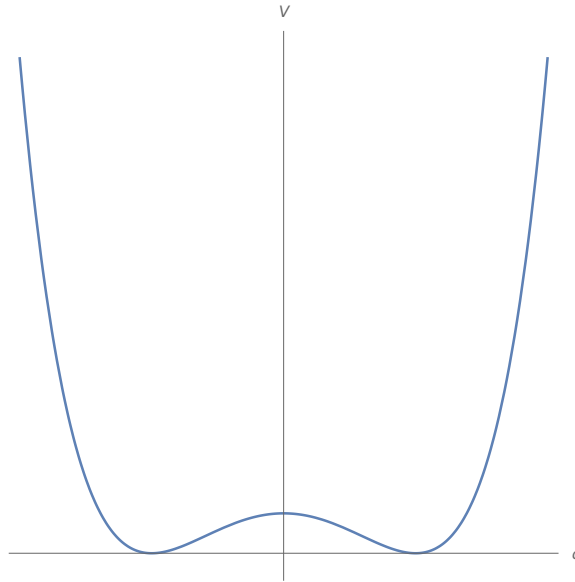


Figura 17 – Gráfico do potencial tipo universo 7.

Universo 8

Na região $0 > b > -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ temos um número infinito de curvas do tipo mostrado na figura 18.

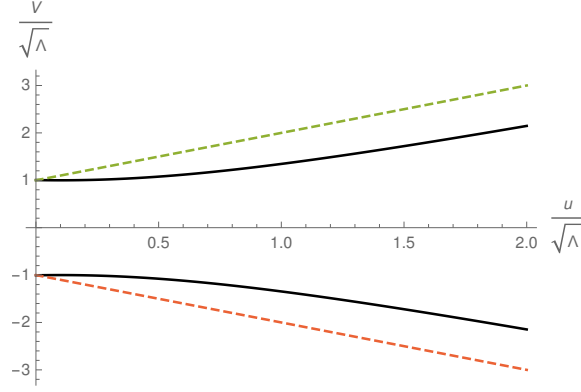


Figura 18 – Curva do diagrama para universo tipo 8

Agora $t_{(\mp)}$ é real e $t_{(\pm)}$ imaginário, e novamente podemos definir $\Re(t_+) = -\Re(t_-) = \frac{\sigma^{*2}}{\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}$. O invariante fica $b = -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \tanh\left(\frac{2\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)$, e o fator de escala e campo escalar para $v > 0$ ficam respectivamente:

$$a^2(t) = -\frac{2}{\frac{1}{3}\sqrt{\Lambda_4}} \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right) \cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\sinh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (4.69)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \operatorname{cth} \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)} \right\|. \quad (4.70)$$

Já para $v < 0$, vamos ter

$$a^2(t) = -\frac{2}{\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right) \cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\sinh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (4.71)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \tanh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\cosh\left(\frac{-\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}}\right)} \right\|. \quad (4.72)$$

Ou seja ambas as soluções são ligadas por uma reflexão temporal. Temos as propriedades

(ii) Os universos são singulares. Para $v > 0$ começam grandes como dS_4 e contraem até terminar numa singularidade. Para $v < 0$ começam numa singularidade e expandem sendo assintoticamente dS_4 .

(iii) Nesta região os universos possuem uma fase acelerada ($u < \sqrt{\Lambda_4}$) e outra desacelerada ($u > \sqrt{\Lambda_4}$).

(iv) Os universos desta região estão sempre em contração ($v > 0$) ou expansão ($v < 0$).

O potencial dado por (4.18) com $|b| > \sqrt{\Lambda_4}$, será:

$$\frac{V(\sigma)}{\frac{1}{3}\Lambda_4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2 \cosh^2\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)} \left(\sinh\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right) \right)^2, \quad (4.73)$$

que é o mesmo da equação (4.64) com gráfico dado na figura 15.

4.3.5 Universos fechados ($K = 1$)

Os universos fechados podem ter características bem diferentes. Podem ser singulares ou não-singulares, podem apresentar um fase acelerada, e desacelerados ou ambas.

Universo 9

Começaremos analisando a região $b < -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ com $u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ e as curvas no diagrama (u, v) são do tipo mostrado na figura 19.

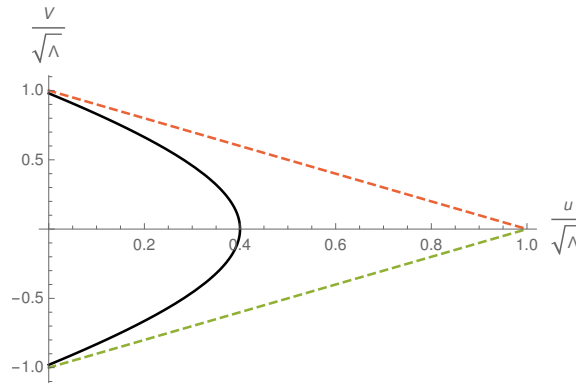


Figura 19 – Curva do diagrama para universo tipo 9

Nesta região, t_{\pm} é imaginário e $\Re(t_+) > \Re(t_-)$, podemos fazer uma translação temporal de modo que fixe a diferença $\Re(t_+ - t_-)$, podemos então definir $\Re(t_{\pm}) = \pm \frac{\sigma^* 2}{\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}$, o fator de escala, campo escalar e invariante ficam respectivamente

$$a^2(t) = \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)} \quad (4.74)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)} \right\| \quad (4.75)$$

$$b = -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \operatorname{cth} \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.76)$$

(ii) Estes universos são não singulares.

(iii) São sempre acelerados ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$).

(iv) Possuem 2 fases, uma de expansão e uma de contração, começam num universo de dS_4 com raio $ar = \infty$, decrescem até um raio mínimo em ($H = 0$), e voltam a crescer indefinidamente tendo geometria assintótica novamente de um universo de dS_4 .

O potencial neste caso é o mesmo na equação (4.68).

Universo 10

Na região $b < -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ com $u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ e as curvas no diagrama (u, v) são do tipo mostrado na figura 20.

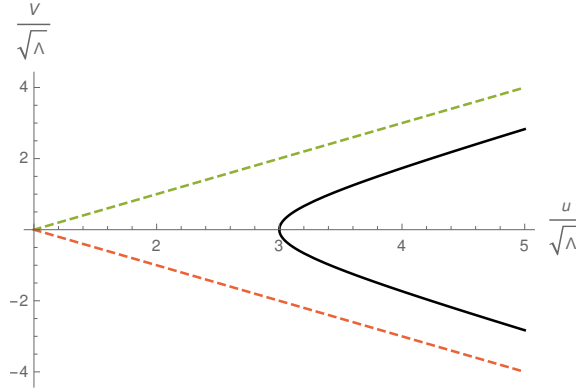


Figura 20 – Curva do diagrama para universo tipo 10

Aqui podemos fixar $t_+ = -t_- = \frac{\sigma^* 2}{\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}$, com invariante $b = -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \text{cth}(2t_+)$. O fator de escala e campo escalar ficam:

$$a^2 = \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\cosh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (4.77)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)} \right\| \quad (4.78)$$

(ii) Estes universos são os únicos com tempo de vida finito, e possuem duas singularidades, uma no início de sua vida (Big-Bang) e outra no final (Big-Crunch).

(iii) Os universos são sempre desacelerados ($u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$).

(iv) E novamente possuem 2 fases, uma de expansão e uma de contração, começam numa singularidade (Big Bang) no instante t_- , crescem até um raio máximo em $t = \frac{t_+ - t_-}{2}$ e então voltam a diminuir até "morrer" em outra singularidade no tempo t_+ (Big Crunch).

O potencial é dado por (4.18) com $k > 0$ ($b < 0$) e $X > |b| + \sqrt{b^2 - \alpha}$

$$\frac{V(\sigma)}{\alpha^2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{|b|}{\alpha} \sqrt{\frac{b^2}{\alpha^2} + 1} \cosh\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) \right)^2 \quad (4.79)$$

O potencial nesta região é dado por

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2 \sinh^2\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)} \left(\cosh\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) + \cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right) \right)^2. \quad (4.80)$$

O potencial possui mínimo em $\sigma = 0$, como mostrado na figura 21.

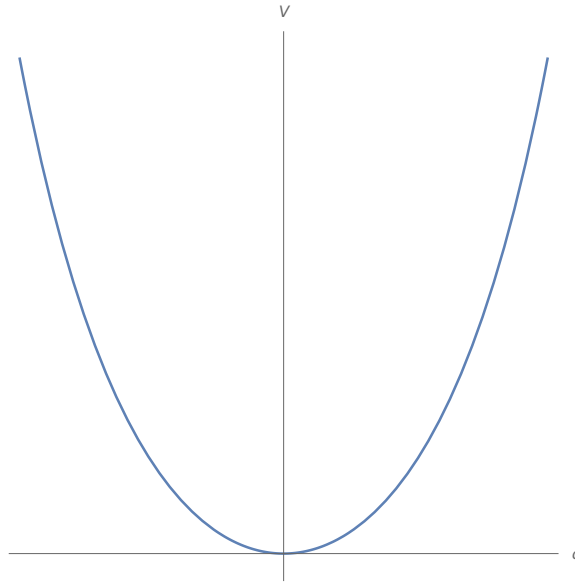


Figura 21 – gráfico do potencial na região IV

Universo 11

E por último vamos ter os universos com $0 < b < -\sqrt{\Lambda_4}$ com curvas no diagrama (u, v) mostradas na figura 22.

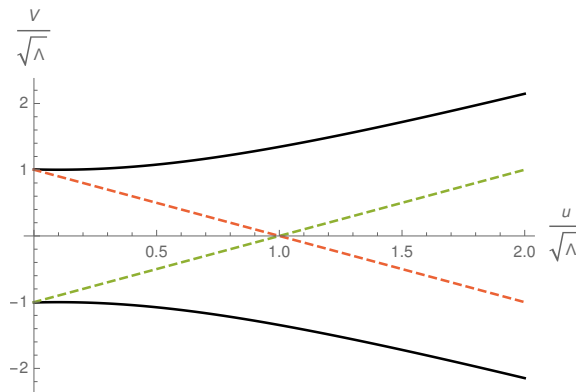


Figura 22 – Curva do diagrama para universo tipo 11

Estas soluções possuem $t_{(\mp)}$ real e $t_{(\pm)}$ imaginário, e novamente podemos definir $\Re(t_+) = -\Re(t_-) = \frac{\sigma^* 2}{\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}$, o invariante fica $b = -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \tanh\left(\frac{2\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)$, e o fator de escala e campo escalar para as regiões $v > 0$ ficam respectivamente:

$$a^2(t) = \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right) \cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\sinh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (4.81)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \operatorname{cth} \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)}{\cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)} \right\|, \quad (4.82)$$

aqui os universos começam em dS_4 com raio arbitrariamente grande e diminuem até terminar numa singularidade Para $v < 0$, temos:

$$a^2(t) = k \frac{2}{\Lambda_4} \frac{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{\Lambda_4}} \right)}{\sqrt{3}} \cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right) \sinh(\sqrt{2}\sigma^*) \quad (4.83)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \tanh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\cosh \left(\frac{-\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)}{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}} \right)} \right\| \quad (4.84)$$

Para $v > 0$ temos uma inversão temporal.

(ii) Estes universos são singulares, começam numa singularidade (Big Bang) e terminam em dS_4 .

(iii) Possuem duas fases, uma acelerada na região $u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ e outra desacelerada em $u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$. (iv) Estão sempre em expansão ou contração, começando (terminando) numa singularidade e terminando (começando) assintoticamente em dS_4 .

O potencial aqui é o mesmo obtido na equação (4.73).

4.4 Inventário das histórias dos universos

Podemos fazer um inventário das soluções que descrevemos anteriormente de acordo com suas características mais importantes.

Em primeiro lugar temos as soluções únicas, dadas por condições iniciais bem específicas. Estas soluções são os pontos fixos e as retas separatrizes.

Pontos fixos

São três pontos fixos, que correspondem ao universo estático de Einstein (universo 1) e a universos de dS_4 (universos 2). Com exceção do universo 10, todas as demais soluções tendem assintoticamente a pelo menos um desses pontos fixos.

Separatrizes

São no total seis retas separatrizes: duas referentes a universos fechados e não singulares (universos 3); duas para universos fechados singulares (universos 4) e 2 para universos abertos e singulares (universos 5). As separatrizes separam o diagrama de fase em 6 regiões com histórias de universo diferentes (como mostrado na figura 7 [b]).

Região I

Esta região corresponde a universos fechados ($K = 1$), sempre acelerados, não singulares e com uma fase de contração e outra de expansão. Apenas os universos do tipo 9 se incluem nesta região.

Regiões II_{\pm}

Estas regiões incluem universos abertos ($K = -1$), com duas fases de aceleração, singulares e uma única fase de contração/expansão. Estão incluídos os universos 7 e 8 (e também inclui a separatriz referente ao universo 5, que classificamos separadamente).

Região III_{\pm}

Nesta região os universos são singulares e possuem uma fase acelerada e uma desacelerada. Esta região inclui universos abertos, planos e fechados. Inclui os universos do tipo 11 referentes a universos fechados $K = 1$, o tipo 7 para $K = -1$ e o universo 6 que é a única solução plana com $K = 0$.

Região IV

Esta é a única região com universos de tempo de vida finito e inclui os universos do tipo 10. Os universos são fechados ($K = 1$), desacelerados e possuem duas singularidades: começam com uma singularidade do tipo BB se expandem até um raio máximo, e voltam a diminuir até terminar em outra singularidade BC.

Podemos interpretar as diferentes regiões da seguinte maneira. As retas separatrizes são definidas por condições iniciais únicas, ou seja, qualquer perturbação nas condições iniciais vai mudar completamente a história do universo em questão. Um exemplo simples pode ser feito usando a separatriz referente ao universo 3 (que corresponde a um mundo não singular do tipo $dS_4 \rightarrow$ Einstein). Esta solução é obtida quando $b = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, que em termos dos parâmetros geométricos de BN- dS_5 e da brana, fica

E por fim, dentre todas as histórias de evoluções dos universos induzidos que obtemos, as soluções que mais se assemelham com modelo padrão do nosso universo, são as soluções referentes a região III_- do diagrama de fase. Os mundos dessa região começam com um Big-Bang e passam por uma fase inicial de desaceleração e outra de aceleração terminando assintoticamente em dS_4 . Apesar disso não existe uma fase de inflação e principalmente não existe uma era dominada por poeira durante a fase desacelerada (porque todos os universos têm apenas radiação e constante cosmológica).

5 Mundo-brana com gás de cordas

No capítulo 4 resolvemos as equações de Friedmann para uma brana com tensão constante \mathcal{H}_4^2 e obtivemos um universo emergente preenchido por uma constante cosmológica positiva e radiação. Este é um modelo simplificado do nosso próprio universo, sem matéria (bariônica). É válido questionarmos se podemos obter nosso universo usando este formalismo de mundos-brana. Isto é, podemos obter, além dos termos de radiação e constante cosmológica, uma densidade de matéria? Tentaremos agora responder a estas perguntas.

5.1 Gás de branas e gás de cordas

A princípio buscamos um modelo de universo emergente que seja do tipo Λ CDM, ou seja, queremos que este seja preenchido por um fluido do tipo

$$\rho_{\Lambda CDM} = \Lambda + \frac{\rho_{\text{radiação}}}{a^4} + \frac{\rho_{\text{matéria}}}{a^3} \quad (5.1)$$

No capítulo anterior obtivemos a radiação e a constante cosmológica a partir de parâmetros geométricos do espaço-tempo 5-dimensional, ou seja, a constante cosmológica Λ_5 de AdS_5 , e da massa do buraco negro. Agora precisamos de mais um termo com a^{-3} , e queremos que ele também tenha origem geométrica. Os novos tipos de fontes de energia "geométricas" que podemos colocar no espaço-tempo são p-branas, discutidas no Apêndice F. Como a dimensão espacial de AdS_5 é 4, podemos ter $p = 4, 3, 2, 1$. A 4-brana é simplesmente a constante cosmológica Λ_5 de AdS que já consideramos. A 3-brana é na verdade a brana sobre a qual nosso universo 4-dimensional está induzido, nosso mundo-brana. E agora podemos colocar 2- e 1-branas. Vamos fazer isso e colocar um **gás** de 2- e 1-branas dentro do universo emergente.¹ Geometricamente, as 1-branas são cordas e as 2-branas são "paredes de domínio" ou seja membranas espaciais (tais como folhas de papel). Vamos então chamar os gases de gás de cordas e de branas, respectivamente.

Como a dimensão espacial do universo emergente é 3, a equação de estado para estes gases é dada por (F.11),

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{p}{3}. \quad (5.2)$$

¹ Podemos fazer uma analogia com as Matryoshka, também conhecidas por bonecas russas, que é um brinquedo que constitui-se de uma série de bonecas colocadas umas dentro das outras, da maior (exterior) até a menor (a única que não é oca). Essencialmente nós adicionamos superfícies dentro de outras e no final obtemos um universo com a matéria geometrizada de uma certa forma. Devemos ressaltar que as 1-branas não estão dentro das 2-branas, apesar de as 1-branas e as 2-branas estarem dentro da 3-brana que está dentro da 4-brana.

Usando este resultado, a densidade de energia tem a forma (F.13)

$$\rho = \rho_0 a^{p-3}. \quad (5.3)$$

Devido ao termo quadrático da equação de Friedmann modificada (3.136), podemos obter um termo a^{-3} com um fluido que tenha densidade

$$\rho = \frac{\rho_{\text{corda}}}{a^2} + \frac{\rho_{\text{brana}}}{a} \quad (5.4)$$

que é a densidade total da soma de um gás de cordas com um gás de (2-)branas como se pode ver na equação (5.3). Assim podemos obter o termo de poeira a^{-3} usando os objetos geométricos. Mas apesar disso veja que na equação de Friedmann modificada (3.136) obtemos

$$H^2 + K/a^2 = \frac{1}{3}\kappa_4^2 \left(\frac{\rho_{\text{corda}}}{a^2} + \frac{\rho_{\text{brana}}}{a} \right) + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{1}{6}\kappa_4^2 \left[\left(\frac{2\rho_{\text{corda}}\rho_{\text{brana}}}{a^3} + \frac{\rho_{\text{brana}}^2}{a^2} + \frac{\rho_{\text{corda}}^2}{a^4} \right) / \lambda \right] + C/a^4 \quad (5.5)$$

onde λ é a tensão na brana. Obtemos respectivamente os termos de poeira, radiação e curvatura espacial "efetiva" de ordem a^{-3} , a^{-4} e a^{-2} (a curvatura espacial "efetiva" depende do termo de curvatura espacial K com uma contribuição dada pelos gás de cordas e de branas) que queríamos mas também obtemos um termo da ordem a^{-1} , que pelos dados observacionais não deve existir e portanto $\rho_{\text{brana}} = 0$, mas isso anula também o termo de poeira. Ou seja, não é possível obtermos apenas um termo de poeira nas equações de Friedmann, este termo vem sempre acompanhado de um termo do tipo gás de branas.

Para encontrarmos um modelo mais próximo do Λ CDM, podemos ajustar os parâmetros ρ_{brana} , ρ_{corda} , λ e K de modo que o termo de ordem a^{-1} se torne desprezível (isto é: $\rho_{\text{brana}} \rightarrow 0$) mas mantendo os termos de densidade relativa de poeira ($\propto a^{-3}$) e curvatura espacial efetiva ($\propto a^{-2}$) finitos e de acordo com os dados observacionais. Desta forma obtendo um modelo de universo emergente de mundos-brana mais realístico e em concordância com as observações.

Por outro lado é interessante discutirmos o modelo apenas com o gás de cordas porque ele dá uma nova fonte "geométrica" de radiação para o mundo-brana. O gás de cordas sozinho tem densidade

$$\rho = \rho_0 a^{-2}, \quad (5.6)$$

em que $\rho_0 \equiv \rho_{\text{corda}}$ é uma constante. Substituindo a densidade (5.6) na equação (3.136), obtemos

$$H^2 + K/a^2 = \frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0 a^{-2} + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \frac{1}{6}\kappa_4^4 (\rho_0^2 a^{-4} / \lambda) + C/a^4. \quad (5.7)$$

ou de forma mais conveniente, definimos as novas variáveis

$$H^2 = -K'/a^2 + \frac{1}{3}\Lambda_4 + \rho'_r/a^4 \quad (5.8)$$

onde

$$\begin{aligned} K' &= K - \frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0 \\ \rho'_r &= C + \frac{1}{6}\kappa_4^4 \frac{\rho_0^2}{\lambda}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ou seja, o gás de cordas vai redefinir os termos constantes das equações de Friedmann ², com exceção do termo referente a constante cosmológica induzida Λ_4 que é o mesmo do capítulo 4, ou seja a presença do gás de cordas não altera o termo da constante cosmológica do universo induzido.

Assim, com a redefinição das constantes (5.9), vemos que a forma encontrada da equação de Friedmann (5.8) é a mesma obtida anteriormente na equação (4.1) e portanto a forma do diagrama (u, v) e das soluções também são as mesmas discutidas no capítulo 4. Precisamos apenas discutir as consequências físicas dessa redefinição das constantes.

5.2 Mundos-brana em AdS_5 sem buraco negro

O gás de cordas contribui diretamente no surgimento da radiação nos mundos-brana, que antes era devido apenas a massa do buraco negro. Uma consequência disto é que mesmo quando a massa do buraco negro $C = \omega M = 0$, vamos ter um termo de densidade relativa de radiação dado por

$$\rho'_r = \frac{1}{6}\kappa_4^2 \frac{\rho_0^2}{\lambda}. \quad (5.10)$$

e a equação (5.8) mantém a mesma forma obtida no capítulo 4 mas agora o termo de radiação é dado unicamente pela densidade relativa do gás de cordas (5.10).

As equações para u e v tem a mesma forma que (4.36) e (4.37) o que muda são apenas os termos constantes que agora denotamos com linha (') que define o invariante b' ,

$$b' = -\frac{2K'}{\sqrt{\rho'_r}} = \frac{v^2 - u^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4}{2u} = \text{constante}. \quad (5.11)$$

Outra mudança importante é o termo K' que agora depende do parâmetro $\frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0$ e não descreve mais a curvatura espacial do universo. O diagrama de fase está na figura 23, que é idêntica a figura 7, mas com a nova interpretação dos parâmetros. As condições iniciais agora são fixadas por (5.11) e os t_{\pm} em função das novas constantes ficam

$$b' = \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4} \text{cth} \left(\frac{\sqrt{\Lambda_4}}{2}(t_- - t_+) \right) \quad (5.12)$$

As formas das soluções para $a(t)$ e $\sigma(t)$ são as mesmas do capítulo anterior dadas por (4.44) e (4.45). Vamos analisar o que acontece no sistema de equações (u, v) e com seu diagrama de fase e as consequências físicas do novo parâmetro K' .

² Neste ponto é importante enfatizar que K' não descreve a curvatura espacial, discutiremos isso com mais detalhes mais a frente

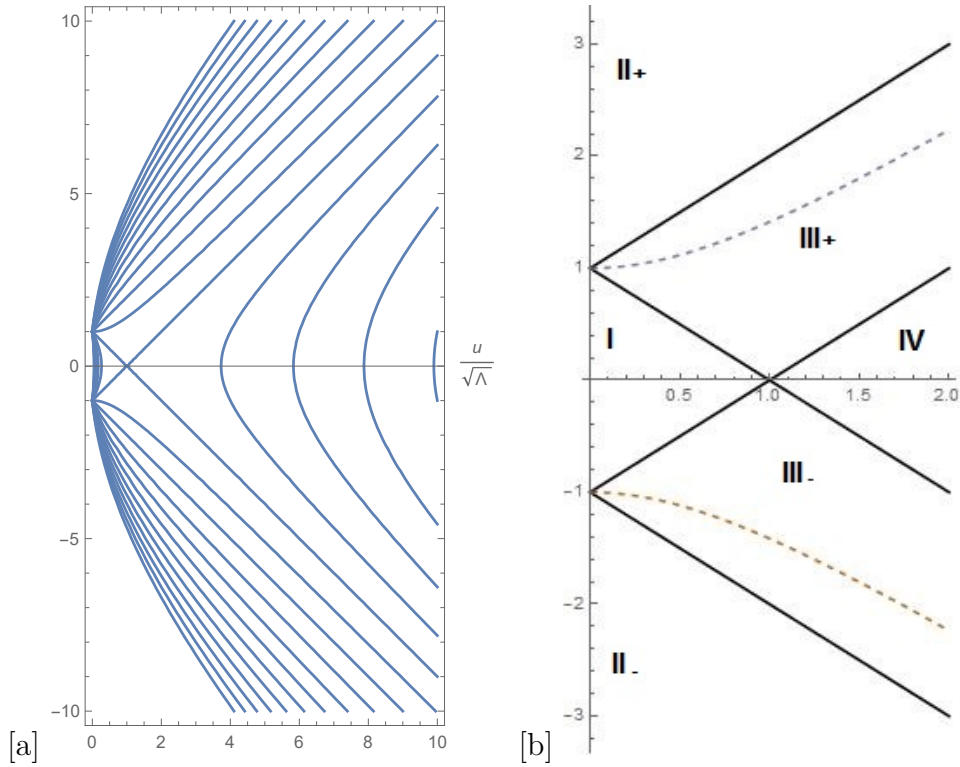
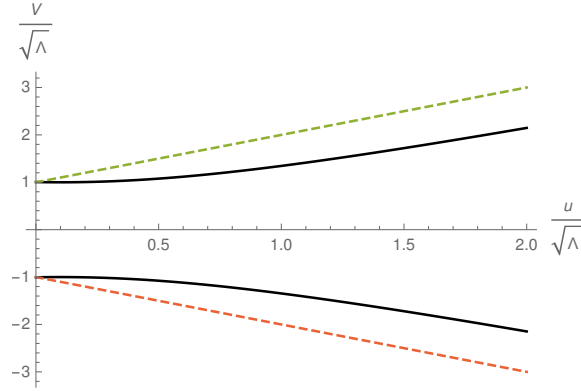


Figura 23 – [a] Curvas do diagrama $(\frac{u}{\sqrt{\Lambda_4}}, \frac{v}{\sqrt{\Lambda_4}})$; [b] Regiões definidas pelas retas separatrizes. As hipérboles tracejadas representam universos com $K' = 0$, entre essas hipérboles temos universos $K' = 1$ e acima e abaixo temos universos abertos $K' = -1$.

A primeira mudança que podemos observar é que agora para universos fechados ($K = 1$) quando $K' = 0$ temos um valor crítico $\rho'_{\text{crit}} = \frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0 = 1$. As curvas correspondentes para este caso são dadas pela equação da hipérbole

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{9}\Lambda_4^2 \quad (5.13)$$

No capítulo 4 estas soluções correspondiam a universos planos ($K = 0$), mas agora representam universos fechados ($K > 0$). Ou seja, devido ao termo de gás cordas, as curvas do diagrama de fase nesta região são "deslocadas" pra cima para $v > 0$ e pra baixo para $v < 0$. E as curvas referentes a esta solução agora são do tipo 8, representadas na figura 24.


 Figura 24 – Curva do diagrama para universos de curvatura espacial $K = 0$ e $K' < 0$

As soluções para o fator de escala e campo escalar agora são dadas pelas equações (4.62) e (4.63)

$$a^2(t) = 2 \left\| \sinh \left(\frac{2t\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \right) \right\| \quad (5.14)$$

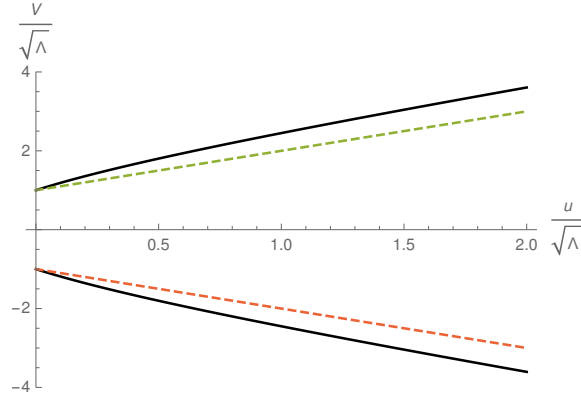
$$\sigma_{III_{\pm}}(t) = \mp \sqrt{2} \ln \left\| \text{cth} \left(\frac{t\sqrt{2\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \right) \right\|. \quad (5.15)$$

Este universo começa (termina) numa singularidade e termina (começa) em de Sitter no tempo passando por uma fase de expansão (contração) acelerada e uma desacelerada.

Ainda para universos fechados ($K = 1$) e também para o caso plano ($K = 0$), outra mudança que temos acontece para $|K| < \rho'_r$, teremos que $K' < 0$ embora a curvatura espacial $K \geq 0$. Isto vai implicar que as curvas do diagrama de fase nesta região são "deslocadas" pelo termo de gás de cordas. A equação da hipérbole para $K' < 0$ fica

$$v^2 - (u + b')^2 = -(b'^2 - \frac{1}{9}\Lambda_4^2) \quad (5.16)$$

Antes estas curvas correspondiam a universos abertos $K = -1$, agora incluem também universos com $K \geq 0$. E agora as curvas são do mesmo tipo dos universos 7 mostradas na figura 25. Nesta região os universos induzidos passam por uma fase acelerada ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$) e outra desacelerada ($u > \sqrt{v\Lambda_4}$), começam (terminam) numa singularidade (Big Bang) e terminam (começam) em dS_4 .


 Figura 25 – Curva do diagrama para universos de curvatura espacial $K \geq 0$ e $K' < 0$

Para $|b'|^2 < \Lambda_4$, as soluções correspondem as equações (4.81) e (4.82) dadas por

$$a^2(t) = k \frac{2}{\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t}{L}\right) \cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\sinh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (5.17)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \operatorname{cth} \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)}{\cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}\right)} \right\|. \quad (5.18)$$

Para $|b'|^2 > \Lambda_4$, as soluções correspondem as equações (4.66) e (4.67) dadas por

$$a^2(t) = |k| \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)} \quad (5.19)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)} \right\| \quad (5.20)$$

e novamente os universos induzidos possuem uma fase acelerada ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$) e outra desacelerada ($u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$), começam (terminam) numa singularidade e terminam (começam) em dS_4 . Para $K < 0$, temos que o invariante $|b'| > |b|$, mas a evolução dos universos não muda comparado com o caso estudado no capítulo 4. Eles possuem uma fase acelerada ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$) e outra desacelerada ($u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$), começam (terminam) numa singularidade e terminam (começam) em dS_4 . O fator de escala e campo escalar são dados por (4.66) e (4.67)

$$a^2(t) = |k| \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)} \quad (5.21)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\sinh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)} \right\| \quad (5.22)$$

E por fim, nas curvas referentes a universos fechados ($K = 1$) em que $0 < \frac{1}{6}\kappa_4^2 \rho_0^2 / \lambda < 1$, vamos ter 3 tipos diferentes de universos em que $K' > 0$. A dinâmica nestes 3 casos que mostraremos a seguir é a mesma obtida no capítulo 4, a única mudança se dá pelo invariante que agora é dado por (5.11). Por este motivo, vamos falar brevemente sobre as características de cada um dos três tipos de universos.

Para $|b'|^2 > \frac{1}{3}\Lambda_4$ temos universos sempre acelerados ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$), que começam num universo de dS_4 com raio arbitrariamente grande, decrescem até um raio mínimo em ($H = 0$), e voltam a crescer até terminar novamente num universo de dS_4 . As curvas destes universos são dadas pela figura 26. O fator de escala e campo escalar são dados pelas equações (4.74) e (4.75) que são mostradas a seguir

$$a^2(t) = k \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\cosh\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}}\right)} \quad (5.23)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} - \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} + \frac{\sigma^*}{2\sqrt{2}}\right)} \right\| \quad (5.24)$$

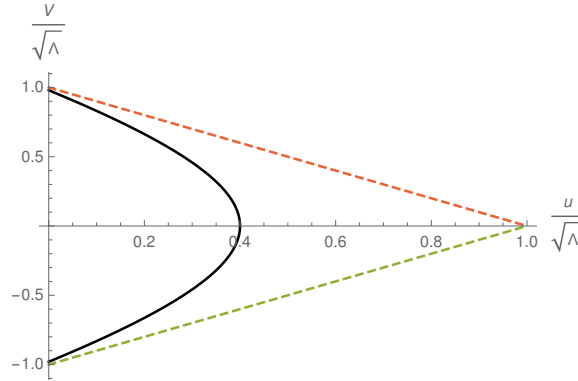


Figura 26 – Curva do diagrama para universos com $K = 1$ e $K' > 0$ para $|b'|^2 > \Lambda_4$ no intervalo ($u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$)

No intervalo $u > \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, as curvas são dadas pela figura 27. Os universos são desacelerados, começam numa singularidade (Big Bang) no instante t_0 , crescem até um raio máximo e então diminui até terminar em outra singularidade num tempo finito (Big Crunch), correspondendo a única classe de universos com vida finita. As equações para o fator de escala e campo escalar são dadas pelas equações (4.77) e (4.78) mostradas a seguir

$$a^2 = k \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right) \sinh\left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2}\right)}{\cosh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (5.25)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \frac{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \right)}{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}}{2} \right)} \right\| \quad (5.26)$$

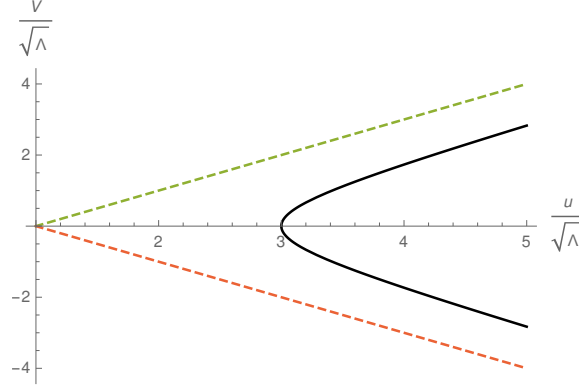


Figura 27 – Curva do diagrama para universos com $K = 1$ e $K' > 0$ para $|b'|^2 > \frac{1}{3}\Lambda_4$ no intervalo ($u > \sqrt{\Lambda_4}$)

E finalmente, para $0 < b' < -\frac{1}{3}\Lambda_4$, as curvas são dadas pela figura 28. O fator de escala e campo escalar para $v > 0$ são dados por (4.81) e (4.82) mostrados a seguir

$$a^2(t) = k \frac{2}{\frac{1}{3}\Lambda_4} \frac{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right) \cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)}{\sinh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (5.27)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \operatorname{cth} \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)}{\cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)} \right\|, \quad (5.28)$$

Este caso corresponde a um número infinito de universos singulares com uma fase acelerada e outra desacelerada, começam em de Sitter no tempo $t \rightarrow -\infty$ e terminam numa singularidade. Para $v < 0$ o fator de escala e campo escalar são dados por (4.83) e (4.84) mostrados a seguir

$$a^2(t) = k \frac{2}{\Lambda_4} \frac{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right) \cosh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)}{\sinh(\sqrt{2}\sigma^*)} \quad (5.29)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{2} \ln \left\| \tanh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2}} \right) \frac{\cosh \left(\frac{-\sigma^*}{\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}} \right)}{\sinh \left(\frac{\sigma^*}{\sqrt{2} + \frac{t\sqrt{\Lambda_4}}{\sqrt{3}}} \right)} \right\| \quad (5.30)$$

Agora os universos tem uma fase acelerada e outra desacelerada, começam numa singularidade no tempo $t \rightarrow -\infty$ e se expandem indefinidamente terminando em de Sitter.

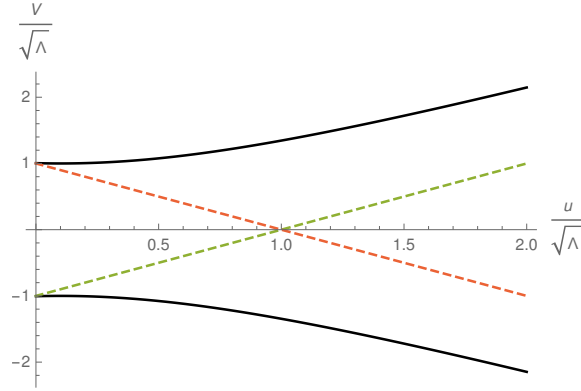


Figura 28 – Curva do diagrama para universos com $K = 1$ e $K' > 0$ para $0 < b' < -\Lambda_4$

A constante cosmológica é a mesma do capítulo 4, portanto, os universos mostrados nesta seção também podem passar por uma transição de fase nas regiões próximas das separatrizes ($|b| = \Lambda_4$) de forma análoga a que mostramos na seção 4.4. A diferença é que o invariante b' tem uma contribuição do termo de cordas e fica

$$b' = \frac{2K'}{\sqrt{\rho'_r}} = 2 \left(K - \frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0 \right) \left(\frac{1}{6}\kappa_4^4 \frac{\rho_0^2}{\lambda} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.31)$$

5.3 Mundos-brana em AdS_5 com buraco negro e gás de cordas

Para o caso em que há buraco negro ($C = \omega M > 0$) junto com o gás de cordas, as equações que descrevem a dinâmica dos universos induzidos são as mesmas discutidas na seção anterior, mas agora a equação (5.9) fica

$$\begin{aligned} K' &= K - \frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0 \\ \rho'_r &= C + \frac{1}{6}\kappa_4^4 \frac{\rho_0^2}{\lambda}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

e temos uma nova redefinição dos parâmetros. A discussão feita na seção 5.2 referente ao valor crítico $K' = 0$ para $\frac{1}{3}\kappa_4^2 \rho_0 = K = 1$ e sobre o deslocamento das soluções continua válida para o caso com buraco negro. Por isso vamos discutir apenas as consequências do novo termo ρ'_r . O invariante b' em termos das novas constantes é dado por

$$b' = -\frac{2K'}{\sqrt{\rho'_r}} = \frac{v^2 - u^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4}{2u} = \text{constante}. \quad (5.33)$$

Como já dissemos, o termo de densidade de radiação do capítulo 4 agora recebe uma contribuição do gás de branas e portanto $\rho'_r > \rho_r$ e $|b'| < |b|$. Em outras palavras, o gás de cordas 'cria' mais radiação no universo induzido. Como o termo de constante cosmológica $\frac{1}{3}\Lambda_4$ é o mesmo independente da presença do gás de cordas, uma consequência direta do novo termo ρ'_r acontece próximo das retas separatrizes. Vamos observar uma transição de fase em relação aos universo que discutimos no capítulo 4.

No capítulo 4, para $b = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$ e $K = 1$, temos *separatrizes* correspondentes a universos do tipo 3, com curva correspondente no diagrama de fase

$$v = \pm(u - \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}) \quad (5.34)$$

representada na figura 8. Para $u < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$, o fator de escala e campo escalar são dados por (4.52) e (4.53) que correspondem a universos fechados e sempre acelerados, começam (terminam) num universo estático de Einstein e terminam (começam) em dS_4 . Agora, ao acrescentarmos o gás de cordas sobre a brana, o invariante será dado por b' e como $|b'| < |b|$, vamos ter

$$b' = -\frac{2K'}{\sqrt{\rho_r'}} = 2(K - \frac{1}{3}\kappa_4^2\rho_0)(C + \frac{1}{6}\kappa_4^4\frac{\rho_0^2}{\lambda})^{\frac{-1}{2}} < b < \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}, \quad (5.35)$$

logo, $b' < -\sqrt{\frac{1}{3}\Lambda_4}$. A curva correspondente no diagrama de fase então é dada por

$$v^2 - (u + b)^2 = -(b^2 - \frac{1}{3}\Lambda_4^2) \quad (5.36)$$

que **não** é mais uma separatriz, e que corresponde a região III_{\pm} com curvas de universo tipo 11 representadas pela figura 29. As soluções do fator de escala na região III_- são dadas por (4.83) e (4.84) e na região III_+ por (4.81) e (4.82), que correspondem a universos fechados ($K = 1$), singulares e com uma fase acelerada e uma desacelerada, começam (terminam) numa singularidade, e terminam (começam) em dS_4 .

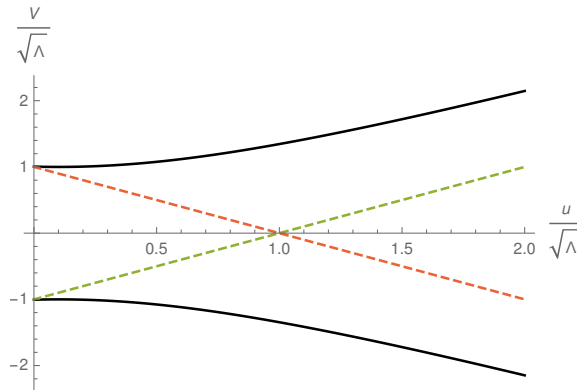


Figura 29 – Curva do diagrama para universo tipo 11.

Ou seja, em resumo, no exemplo acima um universo do tipo 3 (não singular) passa a corresponder a um universo tipo 11 (singular) com a introdução do gás de cordas. Assim a contribuição do gás de cordas na densidade de radiação dos universos emergentes produz uma transição de fase na região do diagrama próxima das retas separatrizes. (Este efeito também acontece nas separatrizes referentes a universos do tipo 5, mas este é um exemplo menos drástico porque a evolução do universo é qualitativamente basicamente a mesma.)

6 Conclusão

A elegância da realização do nosso universo 4-dimensional como um mundo-brana, ou seja uma hiper-superfície embutida no espaço-tempo AdS_5 com um buraco negro, está no fato que introduzindo uma dimensão espacial a mais podemos considerar somente conceitos e objetos puramente geométricos em 4+1-dimensões e obter um universo emergente de FRW com densidade de matéria sobre a brana.

Devido à modificação das equações de Einstein para a métrica induzida sobre nossa 3-brana, a partir das contribuições provenientes da geometria extrínseca, junto com as densidades geométricas das 2-branas e do "gás de cordas cósmicas" (1-branas) nós deduzimos a densidade do fluido efetivo

$$\rho_{eff} = \Lambda_4 + \frac{\rho_{corda}}{a^2} + \frac{\rho_{brana}}{a} + \frac{\rho_{poeira}}{a^3} + \frac{\rho_r}{a^4} \quad (6.1)$$

que envolve os ingredientes do modelo cosmológico padrão: radiação e poeira, junto com os termos de gás de branas e cordas e uma curvatura espacial efetiva (que depende de K e do termo de gás de cordas ρ_{corda}). Uma parte da densidade relativa de radiação, a constante ρ_r , é determinada pelo valor da massa do buraco negro 5-dimensional. A forma desta densidade, como os parâmetros cosmológicos (as constantes definindo ρ_{eff}), são de origem geométrica.

Os problemas resolvidos nos capítulos 4 e 5 são:

(a) A construção explícita das soluções do tipo FRW para o fator de escala $a(t)$ e para o campo escalar $\sigma(t)$;

(b) A investigação dos comportamentos diferentes dos universos com os métodos de sistemas dinâmicos de primeira ordem, dependendo dos valores relativos dos parâmetros cosmológicos para universos fechados ($K = 1$), abertos ($K = -1$) e planos ($K = 0$).

Objetivo principal desta investigação é a descrição e a classificação das diferentes histórias do universo em função dos valores diferentes destes parâmetros, correspondentes a diferentes classes de condições iniciais.

No capítulo 4 analisamos a evolução dos mundos-brana para uma 3-brana (universo 4-dimensional) imersa num espaço-tempo de $BN-AdS_5$ preenchido por radiação e constante cosmológica positiva. A análise das propriedades das soluções nos permitiu concluir que existem onze tipos de universos com evoluções diferentes: singulares, com uma ou duas singularidades do tipo big-bang ou big-crunch; não-singulares do tipo ricochete, começando e terminando num universo de de Sitter; ou o caso particular de um universo acelerado começando num universo estático de Einstein e terminando como universo de de Sitter. Todos esses universos são eternamente acelerados, como no caso de dS-dS, ou

desacelerados, como os universos com duas singularidades do tipo big-bang/big-crunch. Uma outra família infinita de universos fechados tem propriedades mais próximas das observadas em nosso universo, do tipo big-bang-dS em expansão eterna, e períodos de desaceleração e aceleração final. Existe somente um universo com $K = 0$ em expansão do tipo big-bang-dS, e um outro em contração começando como dS e terminando com uma singularidade final "big-crunch". As pequenas mudanças dos valores dos parâmetros (ou das condições iniciais) ao redor daquelas exclusivas para os universos planos leva a mudanças drásticas nas propriedades dos universos "vizinhos": os universos planos sofrem uma "transição" para universos fechados ou abertos. Um fenômeno similar de mudanças significativas das características dos universos é observada no caso do universo do tipo Einstein-estático-de Sitter, que se tornam universos do tipo dS-dS ou big-bang-dS, quando pequenas variações das condições iniciais são consideradas. Estes fenômenos poderiam ser compreendidos comparando os potenciais do campo escalar nestes casos. As mudanças das histórias dos universos produzidas pelas pequenas variações dos parâmetros do fluido efetivo (constante cosmológica Λ_4 e densidade relativa da radiação ρ_r) correspondem a uma mudança significativa da forma do potencial do campo escalar.

No capítulo 5 nós analisamos o que acontece com os modelos mais simples discutidos no capítulo 4, introduzindo um termo de matéria do tipo gás de cordas sobre a 3-brana imersa num espaço AdS_5 ou no espaço BN- AdS_5 . Mostramos que a forma efetiva das equações de Friedmann fica a igual a do Capítulo 4, e as propriedades dos diferentes universos é determinada pelo mesmo sistema dinâmico. Porém as condições iniciais de cada solução agora dependem também de um novo parâmetro ρ_{corda} , a densidade relativa do gás de cordas. Este novo termo de matéria "geométrica" contribui diretamente para o termo representando densidade radiação, e na ausência do buraco negro, com $M = 0$ dá, sozinho, a origem da radiação sobre a 3-brana. Vimos na seção 5.1 que esta contribuição dada pelo gás de brana "levanta" as hipérbolas do diagrama de fase (u, v) , e faz com que próximo dos pontos críticos dados por $b_0 = \sqrt{\Lambda_4}$ os universos sofram uma transição, podendo mudar totalmente sua evolução. Isto é, os universos que antes eram singulares passam a ser não-singulares e vice-versa.

Neste trabalho nós conseguimos descrever de forma bem sucedida a dependência das evoluções do universo do tipo mundo-brana no caso específico quando a geometria 5-dimensional induz um fluido efetivo composto de radiação e uma constante cosmológica positiva. No início do capítulo 5 nós discutimos um caso mais realístico em que consideramos sobre a brana junto com um gás de corda (1-brana) um gás de brana (2-brana) também. Nós obtivemos um termo de densidade de matéria induzida correspondente a poeira, entre outros ingredientes do modelo cosmológico padrão. Existem evidências que o sistema dinâmico $(H, \dot{\sigma})$ descrevendo este caso mais realístico, mesmo bem complicado, permite ainda uma classificação completa das possíveis evoluções do universo FRW em função das condições iniciais.

Apêndices

APÊNDICE A – Convenções e notações

Neste trabalho de monografia usamos as seguintes convenções.

— Usamos a assinatura da métrica definida como $(- + + +)$.

— Usamos a convenção de Einstein para a soma de índices repetidos. Por exemplo,

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \equiv \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad \text{e} \quad \delta_{ij}x^i \equiv \sum_{i=1}^3 \delta_{ij}x^i. \quad (\text{A.1})$$

— Usamos unidades naturais em que a velocidade da luz $c = 1$.

APÊNDICE B – Dedução das equações de Gauss-Codazzi

A seguir vamos demonstrar as equações (3.50) e (3.51). Usando (3.39) para o vetor e_a^α , temos:

$$(e_a^\alpha)_{;\beta} e_b^\beta = \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha, \quad (\text{B.1})$$

onde usamos $(e_c^\alpha)_|_\alpha = \delta_c^a$ e $(e_c^\alpha)^a_{|b} = \Gamma_{bc}^a$. Derivando (B.1) e contraindo com e_c^γ , encontramos:

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} = e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + e_{a;\beta}^\alpha e_{b;\gamma}^\beta e_c^\gamma, \quad (\text{B.2})$$

usando (B.1) no segundo termo:

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} = e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma + \Gamma_{bc}^d e_{a;\beta}^\alpha e_d^\beta - \epsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\alpha, \quad (\text{B.3})$$

usando (B.1) novamente no segundo termo, obtemos:

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} = e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma - \epsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n^\alpha + \Gamma_{bc}^d (\Gamma_{ad}^c e_c^\alpha - \epsilon K_{ad} n^\alpha), \quad (\text{B.4})$$

temos que a derivada covariante:

$$(\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma = (\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - (\epsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (\Gamma_{ab}^d e_d^\beta - \epsilon K_{ab} n^\beta)) e_c^\gamma \quad (\text{B.5})$$

pode ser reescrita como:

$$(\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma = \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d e_c^\gamma e_{d;\gamma}^\alpha - \epsilon K_{ab,c} n^\alpha - \epsilon K_{ab} e_c^\gamma n_{;\gamma}^\alpha \quad (\text{B.6})$$

novamente substituindo (B.1) no segundo termo, obtemos:

$$(\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma = \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d (\Gamma_{dc}^f e_f^\alpha - \epsilon K_{dc} n^\alpha) - \epsilon K_{ab,c} n^\alpha - \epsilon K_{ab} e_c^\gamma n_{;\gamma}^\alpha, \quad (\text{B.7})$$

de acordo com (B.1), temos:

$$(e_{a;\beta}^\alpha e_b^\beta)_{;\gamma} e_c^\gamma = (\Gamma_{ab}^d e_d^\alpha - \epsilon K_{ab} n^\alpha)_{;\gamma} e_c^\gamma \quad (\text{B.8})$$

igualando (B.4) e (B.7) temos então:

$$e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = \Gamma_{ab,c}^d e_d^\alpha + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{dc}^f e_f^\alpha - \epsilon \Gamma_{ab}^d K_{dc} n^\alpha - \quad (\text{B.9})$$

$$\epsilon K_{ab,c} n^\alpha - \epsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma - \Gamma_{bc}^d \Gamma_{ad}^f e_f^\alpha + \epsilon \Gamma_{bc}^d K_{ad} n^\alpha + \epsilon K_{bc} e_{a;\beta}^\alpha n_{;\gamma}^\beta, \quad (\text{B.10})$$

por fim, calculando o comutador:

$$e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma - e_{a;\gamma\beta}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = (\Gamma_{ab,c}^f - \Gamma_{ac,b}^f + \Gamma_{ab}^d \Gamma_{dc}^f - \Gamma_{ac}^d \Gamma_{db}^f) e_f^\alpha - \quad (\text{B.11})$$

$$\epsilon n^\alpha (K_{ab,c} - \Gamma_{ac}^d K_{db} - K_{ac,b} + \Gamma_{ab}^d K_{dc}) + \epsilon K_{ac} n_{;\gamma}^\alpha e_b^\gamma - \epsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma. \quad (\text{B.12})$$

Note que o primeiro termo entre parênteses é o tensor de Riemann R_{acb}^f em \mathcal{V} , somando e subtraindo $\Gamma_{bc}^d K_{da}$ no segundo termo entre parênteses, obtemos:

$$e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = -R_{abc}^f e_f^\alpha - \epsilon n^\alpha (K_{ab|c} - K_{ac|b}) + \epsilon K_{ac} n_{;\gamma}^\alpha e_b^\gamma - \epsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\alpha e_c^\gamma. \quad (\text{B.13})$$

O tensor de Riemann pode ser escrito como:

$$V_{;\alpha\beta}^\mu - V_{;\beta\alpha}^\mu = -R_{\nu\alpha\beta}^\mu V^\nu, \quad (\text{B.14})$$

portanto:

$$e_{a;\beta\gamma}^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = -R_{\nu\beta\gamma}^\alpha e_a^\nu e_b^\beta e_c^\gamma e_c^\delta, \quad (\text{B.15})$$

obtemos portanto:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = R_{abc}^m e_m^\mu + \epsilon n^\mu (K_{ab|c} - K_{ac|b}) + \epsilon K_{ab} n_{;\gamma}^\mu e_c^\gamma - \epsilon K_{ac} n_{;\gamma}^\mu e_b^\gamma \quad (\text{B.16})$$

A projeção tangencial ao longo de e_d^μ resulta:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma e_d^\delta = R_{abcd} + \epsilon (K_{ad} K_{bc} - K_{ac} K_{db}), \quad (\text{B.17})$$

E sua projeção normal ao longo de n_{mu} será:

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = K_{ab|c} - K_{ac|b}. \quad (\text{B.18})$$

Estas são as equações de Gauss-Codazzi.

APÊNDICE C – Espaço-tempo de de Sitter

O espaço de de Sitter em 4 dimensões pode ser definido como um hiperbolóide imerso em um espaço-tempo de Minkowski com dimensão 5 com coordenadas $\{X_0, X_1, \dots, X_4\}$. O hiperbolóide é definido pela quádrlica

$$-X_0^2 + \sum_u X_u^2 = L^2, \quad (\text{C.1})$$

e a métrica de Minkowski é

$$dS^2 = -dX_0^2 + \sum_{u=1}^4 dX_u^2 \quad (\text{C.2})$$

Diferenciando a equação da quádrlica (C.1), isolando X_4^2 e substituindo na métrica (C.2), temos a métrica intrínseca sobre o hiperbolóide

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 - \frac{(-X_0 dX_0 + X_1 dX_1 + X_2 dX_2 + X_3 dX_3)^2}{X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2} \quad (\text{C.3})$$

Podemos parametrizar a superfície imersa no espaço de 5 dimensões utilizando apenas 4 coordenadas.

C.1 Sistema de coordenadas globais

As coordenadas X^u podem ser escritas como:

$$X^0 = L \sinh t \quad (\text{C.4})$$

$$X^i = L \omega^i \cosh t \quad (\text{C.5})$$

em que ω^i é descrito na seção 2.2.1 Este sistema, além de satisfazer a equação da quádrlica, cobre toda a superfície do hiperbolóide, o que justifica a maneira como é chamado. A métrica pode ser escrita como:

$$ds^2 = L^2(-dt^2 + \cosh^2 t d\Omega_3^2) \quad (\text{C.6})$$

onde $d\Omega_3^2 = \sum_{i=1}^3 (d\omega^i)^2$, fornece o elemento de linha sobre uma hipersfera. No sistema global, a superfície do hiperbolóide é fatiada em 3-esferas para t constante.

Repare que a métrica (C.6) é uma métrica FRW com $K > 0$ e fator de escala $a(t) = \cosh t$. Portanto o espaço de de Sitter pode ser representado como um universo de Friedmann com curvatura positiva.

C.2 Sistema de coordenadas planas

Agora as coordenadas são escolhidas como:

$$X^0 = L \sinh t + \frac{1}{2L} e^{t/L} \sum_i (x^i)^2 \quad (\text{C.7})$$

$$X^i = x^i e^{t/L} \quad (\text{C.8})$$

$$X^4 = L \cosh t - \frac{1}{2L} e^{t/L} \sum_i (x^i)^2 \quad (\text{C.9})$$

com $i = 1, 2, 3$. Este sistema, ao contrário das coordenadas globais, não cobre toda a superfície do hiperbolóide, uma vez que $X^4 + X^0 = L e^{-t} > 0$. Com isto, o sistema cobre apenas metade do hiperbolóide. A métrica é escrita como:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t/L} \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{C.10})$$

Fazendo t constante, temos espaços euclidianos planos. Esta métrica é de FRW com a constante de Hubble $H = \dot{a}/a$ igual ao inverso do raio do hiperbolóide:

$$H = 1/L \quad (\text{C.11})$$

Ou seja: o espaço-tempo de de Sitter (mais precisamente, metade do hiperbolóide) descreve um universo plano preenchido apenas por uma constante cosmológica

$$\Lambda = \sqrt{3/L}. \quad (\text{C.12})$$

C.3 Sistema de coordenadas estáticas

Neste sistema escolhemos as coordenadas como:

$$X^0 = \sqrt{L^2 - r^2} \frac{\sinh t}{L} \quad (\text{C.13})$$

$$X^1 = \sqrt{L^2 - r^2} \frac{\cosh t}{L} \quad (\text{C.14})$$

$$X^i = r \omega^{i-1} \quad (\text{C.15})$$

com $i = 1, 2$. Podemos novamente ver que a equação do hiperbolóide é satisfeita e a métrica pode ser escrita como:

$$ds^2 = - \left(1 - r^2/L^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 - r^2/L^2)} + r^2 d\Omega_2^2 \quad (\text{C.16})$$

Na esfera $r = L$ temos que $(1 - \frac{1}{L^2} r^2) = 0$, que é uma singularidade da métrica. Quando a coordenada radial r cruza a fronteira $r = L$, o coeficiente $(1 - \frac{1}{L^2} r^2)$ muda de sinal, e as coordenadas tipo-espaço e tipo-tempo se invertem. Os cones de luz então se inclinam para fora da superfície do horizonte, tornando impossível o contato causal entre as regiões com $r < L$ e $r > L$.

Esta situação é análoga ao que acontece em um buraco negro, cuja métrica, a métrica de Schwarzschild, é dada por [28]

$$ds_{BN}^2 = - \left(1 - r_M^2/r^2\right) dt^2 + \left(1 - r_M^2/r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{C.17})$$

onde $r_M = 2GM/c^2$ é chamado de raio de Schwarzschild, e delimita o horizonte de eventos, de dentro do qual a luz não consegue escapar. Mas repare que no buraco negro temos um efeito “inverso”: a luz não consegue *sair* de dentro da esfera de raio $r = r_M$, enquanto no horizonte de de Sitter a luz não consegue *entrar* na esfera de raio $r = L$.

APÊNDICE D – Decomposição de tensores sobre uma hipersuperfície

Seja $A^{\alpha\beta\dots}$ um vetor tangente à hipersuperfície \mathcal{S} , ou seja:

$$n_\alpha A^{\alpha\beta\dots} = n_\beta A^{\alpha\beta\dots} = n_\delta A^{\alpha\beta\dots\delta\dots} = \dots = 0, \quad (\text{D.1})$$

com n_α normais a \mathcal{S} , tal que: $n_\alpha n^\alpha = \pm 1$. Temos que $A^{\alpha\beta}$ é ortogonal a vetor normal n_α e portanto tangente a \mathcal{S} . Podemos usar a condição de ortogonalidade (3.11) para compará-los com os D-tensores e_a^α , tangentes a $A^{\alpha\beta}$, usando a relação a seguir:

$$A^{\alpha\beta} = e_a^\alpha e_b^\beta \dots A^{ab\dots} \quad (\text{D.2})$$

vemos que (D.2) satisfaz a condição (D.1), de maneira análoga temos:

$$A_{ab} = e_a^\alpha e_b^\beta \dots A^{\alpha\beta\dots}. \quad (\text{D.3})$$

Podemos escrever a inversa da métrica, $g^{\alpha\beta}$, em termos da métrica induzida h^{ab} , da seguinte forma:

$$g^{\alpha\beta} = e_a^\alpha e_b^\beta h^{ab} + \epsilon n^\alpha n^\beta. \quad (\text{D.4})$$

Que de fato nos fornece o produto interno no espaço tangente de \mathcal{S} com base (e_a^α, n^α) , uma vez que fornece o produto interno correto para os vetores de sua base, como mostraremos a seguir: O produto dos vetores ortogonais \vec{e}_a e \vec{n} , dado por:

$$g_{\alpha\beta} n^\alpha e_b^\beta = (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} e_c^\mu e_d^\nu h^{cd} + \epsilon n_\alpha n_\beta) n^\alpha e_b^\beta = 0, \quad (\text{D.5})$$

satisfaz a condição de ortogonalidade entre os tensores n^α e e_b^β . Da mesma forma que o produto entre os vetores tangentes n_α e n_β :

$$g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \epsilon (n_\alpha n^\alpha)^2 = \epsilon, \quad (\text{D.6})$$

também fornece o resultado esperado. E por fim, o produto entre os vetores tangentes e_a e \vec{e}_b , nos dá:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta &= (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} e_c^\mu e_d^\nu h^{cd} + \epsilon n_\alpha n_\beta) e_a^\alpha e_b^\beta \\ &= g_{\alpha\mu} e_a^\alpha e_c^\mu g_{\beta\nu} e_b^\beta e_d^\nu h^{cd} = h_{ac} h_{bd} h^{cd} = \delta_a^d h_{bd} = h_{ab}, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

que nos fornece o resultado esperado e está de acordo com (3.7). Podemos decompor um tensor qualquer $T^{\mu\nu\dots}$ em uma parte ortogonal e outra tangencial a hipersuperfície \mathcal{S} , para isto usaremos o projetor:

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \epsilon n^\alpha n^\beta, \quad (\text{D.8})$$

que se transforma como um tensor covariante em \mathcal{S} . O tensor $h^\mu_\alpha T^{\mu\nu\dots}$ será tangencial a \mathcal{S} :

$$n_\mu h^\mu_\alpha T^{\mu\nu\dots} = n_\mu (g^\mu_\alpha - \epsilon n^\mu n_\alpha) T^{\mu\nu\dots} = (1 - \epsilon n^\mu n_\mu) n_\alpha T^{\mu\nu\dots} = 0, \quad (\text{D.9})$$

e a projeção para todos os índices fica:

$$T^{\mu\nu\dots} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \dots T^{\alpha\beta\dots}. \quad (\text{D.10})$$

Podemos então escrever $T^{\mu\nu\dots}$ em parte puramente tangencial e outra normal:

$$T^{\mu\nu\dots} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \dots T^{\mu\nu\dots} + n_\alpha n_\beta \dots T^{\alpha\beta\dots} n^\mu n^\nu, \quad (\text{D.11})$$

onde o primeiro termo do lado direito da igualdade corresponde a parte tangencial e o segundo à normal a \mathcal{S} . O projetor (D.8) é uma extensão da métrica induzida h^{ab} para todo espaço \mathcal{V} , e comparando (D.8) e (D.4) vemos que:

$$h^{\alpha\beta} = e^\alpha_a e^\beta_b h^{ab}, \quad (\text{D.12})$$

que corresponde á relação (D.2). É importante ressaltar que, embora h^{ab} seja um d-tensor, e portanto, se transforma como escalar em \mathcal{V} , sua extensão, $h^{\alpha\beta}$, se comporta como tensor de ordem dois.

APÊNDICE E – Equações de Friedmann para uma brana com densidade de energia constante

Vamos encontrar as equações de Friedmann usando uma abordagem variacional para o caso de uma brana com densidade de energia e tensão λ constantes. A langrangiana de matéria sobre a brana é dada por

$$\frac{1}{\kappa_4^2} \int d^4x \mathcal{L} = \frac{\lambda}{\kappa_4^2} \int_{\partial V} d^4x \sqrt{-h} \quad (\text{E.1})$$

em que $\kappa_4^2 = 8\pi G_4$ é a constante de Newton 4-dimensional. A ação¹ com a parte da matéria (E.1), usando (3.102) fica:

$$S_d = \frac{1}{\kappa_5^2} \int_V d^5x \sqrt{-g} \left(R + \frac{3}{L_5^2} \right) + \frac{1}{\kappa_4^2} \int_{\partial V} d^4x \sqrt{-h} K + \frac{\lambda}{\kappa_4^2} \int_{\partial V} d^4x \sqrt{-h} \quad (\text{E.2})$$

em que $\kappa_5^2 = 16\pi G_5$, $\kappa_4^2 = 8\pi G_4$ e g_{ab} é a métrica em \mathcal{V} com $(a, b = 0, 1, 2, 3, 4)$ e $h_{\mu\nu}$ é a métrica induzida e $(\mu, \nu) = 0, 1, 2, 3$.

A métrica induzida pode ser escrita como em termos de $g_{\mu\nu}$ como a seguir

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu \quad (\text{E.3})$$

que corresponde ao projetor (D.8) definido na seção anterior. E a curvatura extrínseca é definida como:

$$K_{\mu\nu} = h^\alpha{}_\mu h^\beta{}_\nu \nabla_\alpha n_\beta. \quad (\text{E.4})$$

E usando as definições da seção 3.2, as equações de movimento serão:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = -\frac{3}{2L_5^2} g_{ab} \quad (\text{E.5})$$

$$K_{\mu\nu} - K h_{\mu\nu} = -2\lambda h_{\mu\nu} \quad (\text{E.6})$$

Tirando o traço na segunda equação, obtemos $K = \frac{4\lambda^2}{3}$, portanto:

$$K_{\mu\nu} = \frac{\kappa_5^2 \lambda^2}{3} h_{\mu\nu} \quad (\text{E.7})$$

. Vamos agora descrever o espaço-tempo de Schwarzschild-Anti-de-Sitter. Considere as coordenadas do tipo $(t, a, d\Omega_3)$, pelo teorema de Birkhoff, temos:

$$dS_5^2 = -f(a)dt^2 + f^{-1}(a)da^2 + a^2 d\Omega_3^2(k) \quad (\text{E.8})$$

¹ A ação (E.2) apresenta um termo de Gibbons-Hawking referente a borda do espaço-tempo de Schwarzschild-AdS, porém este termo é descartado ao fixar a borda do espaço no infinito.

Onde $k = \pm 1, 0$ é a curvatura e $f(a) = \frac{a^2}{L_5^2} + k - \frac{\omega_4 M_5}{a^2}$, com $\omega = \frac{16\pi G_5}{3V_3}$ e $V_3 = 2\pi^2\Gamma(2)$. Para encontrar as equações da brana considere:

$$dS_4^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)d\Omega_2^2 \quad (\text{E.9})$$

Com vetores tangentes $u^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ e normal n^a , de modo que:

$$n^a u_a = 0 \quad (\text{E.10})$$

$$n^a n_a = 1, \quad (\text{E.11})$$

Podemos usar o elemento de linha em \mathcal{V} sobre a brana com as coordenadas $x^a = (t(\tau), a(\tau), d\Omega_3)$ em função das coordenadas da brana, como a seguir:

$$dS_5^2|_{brana} = \left(-\dot{t}^2 f(a) + \frac{\dot{a}^2}{f(a)} \right) d\tau^2 + a^2(\tau)d\Omega_3^2 = -dt^2 + a^2(\tau)d\Omega_2^2. \quad (\text{E.12})$$

Portanto

$$-\dot{t}^2 f(a) + \frac{\dot{a}^2}{f(a)} = -1 \quad (\text{E.13})$$

Que representa a condição $u^a u_a = -1$, e portanto:

$$u^a(\tau) = (\dot{t}(\tau), \dot{a}(\tau), 0, 0). \quad (\text{E.14})$$

Então, n_a será:

$$n_a \equiv (-\dot{a}(\tau), \dot{t}(\tau), 0, 0, 0). \quad (\text{E.15})$$

Vemos que n_a satisfaz $n_a n^a = 1$ e $u^a n_a = 0$. Vamos agora calcular a curvatura extrínseca. Os termos diferentes de zero para a parte angular de $K_{\mu\nu}$ serão:

$$K_{\theta_i \theta_i} h^a_{\theta_i} h^b_{\theta_i} = h^a_{\theta_i} \nabla_{(a} n_{\theta_i)} = -\Gamma^a_{\theta_i \theta_i} \quad (\text{E.16})$$

Usando a métrica:

$$g_{ab} = (-f, f^{-1}, a^2 \gamma_{\theta_1}, a^2 \gamma_{\theta_2}, a^2 \gamma_{\theta_3}) \quad (\text{E.17})$$

O único termo diferente de zero é:

$$\Gamma^1_{\theta_i \theta_i} = \frac{f}{2} \frac{\partial}{\partial a} (g_{\theta_i \theta_i}) = -f a \gamma_{\theta_i \theta_i}. \quad (\text{E.18})$$

E portanto:

$$K_{\theta_i \theta_i} = -f a \dot{\gamma}_{\theta_i \theta_i}, \quad (\text{E.19})$$

que usando (E.7), obtemos

$$f \dot{t} = \frac{\lambda}{3} a. \quad (\text{E.20})$$

Temos então:

$$\dot{a}^2 = \dot{t}^2 f^2 - f, \quad (\text{E.21})$$

substituindo $f(a) = \frac{a^2}{L_5^2} + K - \frac{\omega_4 M_5}{a^2}$, resulta:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{\lambda^2 \kappa_5^2}{6} - \frac{1}{L_5^2} - \frac{K}{a^2} + \frac{\omega_4 M_5}{a^4} \quad (\text{E.22})$$

A equação (E.22) que corresponde a primeira equação de Friedmann para um universo preenchido por radiação e constante cosmológica. Repare que esta equação equivale à (3.136) com $\rho = \text{const.}$ com os termos constantes redefinidos Definindo

$$\begin{aligned} \rho_r &= \omega_4 M_5 \\ \frac{1}{3} \Lambda_4 &= \left(\frac{\lambda^2 \kappa_5^4}{6} - \frac{1}{L_5^2} \right) \\ \rho_m &= \frac{1}{3\kappa_5^2} \Lambda_4 + \frac{\rho_r}{\kappa_5^2 a^4}, \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

a equação (E.22) fica

$$H^2 = \kappa_5^2 \frac{\rho_m}{6} - \frac{K}{a^2}. \quad (\text{E.24})$$

esta forma corresponde a maneira mais usual da equação de Friedmann. Vamos agora encontrar a segunda equação de Friedmann. Considere agora a projeção tangencial de $K_{\mu\nu}$:

$$K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u^\nu h^a{}_\mu h^b{}_\nu \nabla_a n_b = u^a u^b \nabla_a n_b = -u^a u_b \nabla_a u^b, \quad (\text{E.25})$$

$$(\text{E.26})$$

onde usamos $\nabla_a(u^b n_b) = u^b \nabla_a n_b + n_b \nabla_a u^b = 0$. Portanto:

$$K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -n_b (u^\alpha \partial_\alpha u^b + u^a \Gamma^b{}_{ac} u^c), \quad (\text{E.27})$$

em que:

$$u^\alpha \partial_\alpha u^b = u^0 \partial_0 u^b = \dot{u}^b. \quad (\text{E.28})$$

Então:

$$K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -n_b (\dot{u}^b + u^a \Gamma^b{}_{ac} u^c). \quad (\text{E.29})$$

Nos resta calcular os Γ restantes. Os únicos termos que não são nulos são:

$$\Gamma^1{}_{00} = \frac{1}{2} f' f \quad (\text{E.30})$$

$$\Gamma^1{}_{11} = -\frac{f'}{2f} \quad (\text{E.31})$$

$$\Gamma^0{}_{01} = \frac{f'}{2f} \quad (\text{E.32})$$

Substituindo em (E.29), obtemos:

$$K_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \dot{a}\ddot{t} - \dot{t}\ddot{a} + \frac{3f'}{2f} \dot{t}\dot{a}^2 - \frac{1}{2} \dot{t}^3 f' f. \quad (\text{E.33})$$

Podemos excluir a dependência em \ddot{t} , como faremos a seguir. Considere a derivada em relação a τ de (E.13):

$$\frac{d}{d\tau}(i^2 f^2 - \dot{a}^2) = \frac{d}{d\tau}f, \quad (\text{E.34})$$

que fornece:

$$\ddot{t} = \frac{f'\dot{a}}{2f^2\dot{t}} + \frac{\dot{a}\ddot{a}}{f^2\dot{t}} - \frac{f'}{f}\dot{a}\dot{t}, \quad (\text{E.35})$$

substituindo em (E.33), obtemos:

$$K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \frac{\ddot{a}}{\dot{t}f} \left(\frac{\dot{a}^2}{f} - i^2 f \right) + \frac{f'}{2f\dot{t}} \left(\frac{\dot{a}^2}{f} + i^2 \dot{a}^2 - f^2 i^4 \right) \quad (\text{E.36})$$

Note que, usando $\frac{\dot{a}^2}{f} + i^2 f = -1$,

$$\frac{\dot{a}^2}{f} + i^2 \dot{a}^2 - f^2 i^4 = i^2 f - 1 + i^2 f \left(\frac{\dot{a}^2}{f} - f i \right) = i^2 f - 1 - i^2 f = -1, \quad (\text{E.37})$$

e portanto:

$$K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -\frac{\ddot{a}}{f\dot{t}} - \frac{f'}{2f\dot{t}} = -\frac{\left(\ddot{a} + \frac{f'}{2}\right)}{f\dot{t}}. \quad (\text{E.38})$$

Vamos em seguida deduzir as equações de Friedmann usando os resultados obtidos. Usando $K_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} \frac{\mathcal{H}_4}{3}$, temos:

$$K_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = h_{\mu\nu} \frac{\lambda}{3} u^\mu u^\nu, \quad (\text{E.39})$$

$$(\text{E.40})$$

Que nos leva:

$$\ddot{a} + \frac{f'}{2} = \frac{\lambda}{3} f \dot{t}, \quad (\text{E.41})$$

temos que:

$$f' = \frac{df}{da} = \frac{2a}{L_5^2} + \frac{2\rho_r}{a^4} \quad (\text{E.42})$$

Logo

$$\ddot{a} + \frac{a}{L_5^2} + \frac{\rho_r}{a^2} = \left(\frac{\kappa_5}{3} \right)^2 a. \quad (\text{E.43})$$

Esta corresponde a segunda equação de Friedmann para um universo preenchido por radiação e constante cosmológica.

Encontramos as equações de Friedmann para um universo FRW preenchido por radiação e constante cosmológica positiva, usando (E.23) e (E.23) obtemos

$$H^2 = \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{1}{3}\Lambda_4 - \frac{K}{a^2}, \quad (\text{E.44})$$

$$\ddot{a} + \frac{a}{L_5^2} + \frac{\rho_r}{a^2} = \left(\frac{\kappa_5}{3} \right)^2 a, \quad (\text{E.45})$$

onde ρ_r e Λ_4 são dados por E.23. Este resultado mostra que, partindo de conceitos puramente geométricos de um espaço-tempo de Schwarzschild-AdS₅ com uma brana,

induzimos um universo com radiação e constante cosmológica positiva (com $\Lambda_4 \neq \frac{1}{L_5^2}$) sobre esta brana. As características deste universo induzido dependem apenas dos parâmetros geométricos $(M, \kappa_5^2, \frac{1}{L_5^2})$ que descrevem o espaço-tempo 5-dimensional e do termo constante de energia superficial da brana (λ).

APÊNDICE F – Equação de estado para um gás de p-branas

Nesta seção iremos encontrar a equação de estado para um gás de p-branas. A dedução a seguir é apresentada em [48].

Sejam x^μ , com $\mu = 0, 1, 2, \dots, d$ coordenadas no espaço \mathcal{V} de métrica $g_{\alpha\beta}$ no qual se move uma p-brana com coordenadas em sua folha-mundo dadas por σ^A , com $A = 0, 1, \dots, p$ e métrica induzida h_{ab} . A ação de Dirac-Born-Infeld que descreve a dinâmica de um gás de p-branas é dada por

$$S_p = -\tau_p \int d^{p+1} |h|^{\frac{1}{2}} \quad (\text{F.1})$$

O parâmetro τ_p é a 'tensão' na brana. Esta ação é simplesmente a integral covariante do volume da brana. Descrevendo a brana como uma superfície parametrizada pelas equações

$$x^\mu = X^\mu(\sigma),$$

podemos escrever a ação como uma integral sobre o espaço-tempo,

$$S_p = -\tau_p \int d^{d+1} x \int d^{d+1} \sigma |h|^{\frac{1}{2}} \delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)). \quad (\text{F.2})$$

O tensor de energia-momento será portanto

$$T^{\mu\nu} = -2|g|^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta S_p}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (\text{F.3})$$

A dependência em $g_{\mu\nu}$; temos

$$\delta\sqrt{-h} = \frac{\sqrt{-h}}{2} \delta h_{ab} \quad (\text{F.4})$$

e $\frac{\delta h_{ab}}{\delta g_{\mu\nu}} = X^\mu_{,a} X^\nu_{,b}$, logo

$$T^{\mu\nu}(x) = -\tau_p \int d^{p+1} \sigma |h|^{\frac{1}{2}} h^{ab} X^\mu_{,a} X^\nu_{,b} \delta^{p+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)). \quad (\text{F.5})$$

A densidade de energia ρ da brana é dada pela componente T^{00} , e seu vetor momento T^{0j} . Vamos escolher a seguinte parametrização

$$\sigma^0 = X^0, \quad h_{00} = -\sqrt{-h}, \quad h_{0a} = 0 \quad (\text{F.6})$$

em que $a = 1, \dots, p$. Temos então a componente do tensor energia-momento

$$T^{00} = \tau_p \int d^{p+1} \sigma \delta^{d+1}(x^0 - \sigma^0) \quad (\text{F.7})$$

integrando em σ^0 , obtemos a densidade de energia

$$\rho = \tau_p \int d^p \sigma^d (x^j - X^j(\sigma)) \quad E = \int d^p x \rho(x^j) = \tau_p V_p \quad (\text{F.8})$$

é a energia total da brana, com o volume da brana $V_p = \int d^p \sigma$.

A pressão é obtida a partir da média espacial do traço $g_{ij}T^{ij}$; uma vez que $X^0_{,a} = \sigma^0_{,a} = 0$, temos $h_{ab} = g_{\mu\nu}X^\mu_{,a}X^\nu_{,b} = g_{ij}X^i_{,a}X^j_{,b}$; contraindo com h^{ab} , temos $h^{ab}h_{ab} = h^{ab}X^i_{,a}X_{i,b}$, então

$$h^{ab}X^i_{,a}X_{i,b} = h^{00}\dot{X}^2 + h^{ab}h_{ab} \quad (\text{F.9})$$

como $-\sqrt{-h} = h_{00} = X^\mu_{,0}X_{\mu,0} = -1 + X^2$, e por fim

$$T^i_{\ i} = \tau_p \int d^p \sigma [(p+1)\dot{X}^i\dot{X}_i - p]\delta^{d+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)) \quad (\text{F.10})$$

a pressão é dada por

$$P \equiv \frac{\langle T^i_{\ i} \rangle}{d} = \left[(p+1) \frac{\langle \dot{X}^i\dot{X}_i \rangle}{d} - \frac{p}{d} \right] \int d^p \sigma \delta^{p+1}(x^\mu - X^\mu(\sigma)).$$

em que a integral é a densidade de energia (F.8), e temos a equação de estado

$$\frac{P}{\rho} = \omega_p \quad (\text{F.11})$$

com $\omega_p = \frac{p+1}{d}v^2 - \frac{p}{d}$. No limite não relativístico, $v^2 \approx 0$, e obtemos

$$\omega_p = -\frac{p}{d} \quad (\text{F.12})$$

está é a equação de estado que buscavamos.

Usando as equações de Friedmann e da continuidade, obtemos

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \quad (\text{F.13})$$

em que ρ é a constante de integração.

Referências

- [1] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. Citado na página 7.
- [2] Andrei Linde. Inflationary cosmology. In *Inflationary Cosmology*, pages 1–54. Springer, 2008. Citado na página 7.
- [3] R Adam, PAR Ade, N Aghanim, Y Akrami, MIR Alves, F Argüeso, M Arnaud, F Arroja, M Ashdown, J Aumont, et al. Planck 2015 results-i. overview of products and scientific results. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A1, 2016. Citado na página 7.
- [4] Maurizio Gasperini. *Elements of string cosmology*. Cambridge University Press, 2007. Citado na página 7.
- [5] Fernando Quevedo. Lectures on string/brane cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 19(22):5721, 2002. Citado na página 7.
- [6] Robert H Brandenberger. String gas cosmology: progress and problems. *Classical and Quantum Gravity*, 28(20):204005, 2011. Citado na página 7.
- [7] Robert H Brandenberger. Introduction to early universe cosmology. *arXiv preprint arXiv:1103.2271*, 2011. Citado na página 7.
- [8] Roy Maartens and Kazuya Koyama. Brane-world gravity. *Living Reviews in Relativity*, 13(1):5, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 10.
- [9] Philippe Brax, Carsten van de Bruck, and Anne-Christine Davis. Brane world cosmology. *Reports on Progress in Physics*, 67(12):2183, 2004. Citado na página 7.
- [10] James E Lidsey. Inflation and braneworlds. In *The Early Universe and Observational Cosmology*, pages 357–379. Springer, 2004. Citado na página 7.
- [11] Maurizio Gasperini and Gabriele Veneziano. The pre-big bang scenario in string cosmology. *Physics Reports*, 373(1-2):1–212, 2003. Citado na página 7.
- [12] Abdel Perez-Lorenzana. An introduction to extra dimensions. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 18, page 224. IOP Publishing, 2005. Citado na página 8.
- [13] Hubert FM Goenner. On the history of unified field theories. *Living reviews in relativity*, 7(1):2, 2004. Citado na página 8.
- [14] Theodor Kaluza. Zum unitätsproblem der physik. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite p. 966-972, pages 966–972, 1921. Citado na página 8.

- [15] Oskar Klein. The atomicity of electricity as a quantum theory law. *Nature*, 118(2971):516, 1926. Citado na página 8.
- [16] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906, 1926. Citado na página 8.
- [17] James Martin Overduin and Paul S Wesson. Kaluza-klein gravity. *Physics Reports*, 283(5-6):303–378, 1997. Citado na página 8.
- [18] Gary W Gibbons and David L Wiltshire. Spacetime as a membrane in higher dimensions. *Nuclear Physics B*, 287:717–742, 1987. Citado na página 9.
- [19] Matt Visser. An exotic class of kaluza-klein models. *Physics Letters B*, 159(1):22–25, 1985. Citado na página 9.
- [20] Lisa Randall and Raman Sundrum. Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370, 1999. Citado na página 9.
- [21] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- [22] Raman Sundrum. Tasi 2004 lectures: to the fifth dimension and back (2005). *arXiv preprint hep-th/0508134*. Citado na página 9.
- [23] Keiichi Akama. An early proposal of "brane world". *arXiv preprint hep-th/0001113*, 2000. Citado na página 10.
- [24] Csaba Csaki. Extra dimensions and branes. In *Particle Physics And Cosmology: The Quest for Physics Beyond the Standard Model (s)(TASI 2002)*, pages 605–698. World Scientific, 2004. Citado na página 10.
- [25] A Einstein. Die feldgleichungen der gravitation sitzungsberichte der preussischen akademie der wissenschaften. *Berlin p844*, 1915. Citado na página 13.
- [26] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *arXiv preprint physics/9905030*, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 18.
- [27] Sean M Carroll. Lecture notes on general relativity. *arXiv preprint gr-qc/9712019*, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 13, 21, 22 e 23.
- [28] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 13, 23 e 92.
- [29] L Landau, Evgeni Mikhailovich Lifshitz, Jose Lourenco Cindra, and Jose Nicodemos T Rabelo. *Teoria do campo*. 1980. Citado na página 16.

- [30] Ray d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, USA, 1899. Citado na página 16.
- [31] Wolfgang Rindler. *Essential relativity: special, general, and cosmological*. Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 16.
- [32] Marcus AM de Aguiar. Tópicos de mecânica clássica. *Livraria da Física, 1a edição*, 2011. Citado na página 18.
- [33] Albert Einstein. Erklärung der perihelionbewegung der merkur aus der allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., vol. 47, No. 2, pp. 831-839, 1915*, 47:831–839, 1915. Citado na página 18.
- [34] Roger Penrose. Republication of: Conformal treatment of infinity. *General Relativity and Gravitation*, 43(3):901–922, 2011. Citado na página 22.
- [35] Stephen W Hawking and George Francis Rayner Ellis. *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 28.
- [36] Luis Lehner, Robert C Myers, Eric Poisson, and Rafael D Sorkin. Gravitational action with null boundaries. *Physical Review D*, 94(8):084046, 2016. Citado na página 28.
- [37] Lukasz Fidkowski, Veronika Hubeny, Matthew Kleban, and Stephen Shenker. The black hole singularity in ads/cft. *Journal of High Energy Physics*, 2004(02):014, 2004. Citado na página 32.
- [38] N. Straumann. *General Relativity, with Applications to Astrophysics*. 2004. Citado na página 33.
- [39] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, volume 1. 2004. Citado na página 33.
- [40] Eric Poisson. *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004. Citado na página 33.
- [41] Ericourgoulhon. 3+ 1 formalism and bases of numerical relativity. *arXiv preprint gr-qc/0703035*, 2007. Citado na página 33.
- [42] Yaser Tavakoli. Lecture ii: Hamiltonian formulation of general relativity. 2014. Citado na página 33.
- [43] Eric Poisson. An advanced course in general relativity. *lecture notes at University of Guelph*, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

-
- [44] T Padmanabhan. A short note on the boundary term for the hilbert action. *Modern Physics Letters A*, 29(08):1450037, 2014. Citado na página [42](#).
- [45] Gary W Gibbons and Stephen W Hawking. Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*, 15(10):2738, 1977. Citado na página [44](#).
- [46] J David Brown and James W York Jr. Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action. *Physical Review D*, 47(4):1407, 1993. Citado na página [44](#).
- [47] Albert Einstein. Kosmologische betrachtungen zur allgemeinen relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 142-152., 1917. Citado na página [59](#).
- [48] Timon Boehm and Robert Brandenberger. On t-duality in brane gas cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2003(06):008, 2003. Citado na página [100](#).