

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Kim Castro Lemos Filho

**UMA REVISÃO SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA EM UM
CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO**

VITÓRIA
2017

KIM CASTRO LEMOS FILHO

**UMA REVISÃO SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Wesley Spalenza.
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Marcos Tadeu D'Azeredo Orlando.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Raphael Góes Furtado.
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2017

**UMA REVISÃO SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA EM UM
CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO**

K. C. LEMOS FILHO

**UMA REVISÃO SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA EM UM
CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ALEXANDRE NOGUEIRA

Vitória

10 de março de 2017

© 2017, K. C. LEMOS FILHO.
Todos os direitos reservados.

LEMOS FILHO, K. C.

D1234p UMA REVISÃO SOBRE A MECÂNICA QUÂNTICA
EM UM CENÁRIO DE COMPRIMENTO MÍNIMO / K. C.
LEMOS FILHO. — Vitória, 2017
xi, 63 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do
Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira

1. — Dissertações. 2. — Dissertações. I. Orientador.
II. Título.

CDU 000.0*00.00

[Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:
`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`
onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:
`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

À minha família.

Agradecimentos

O autor agradece:

- A Deus por permitir que eu chegasse até aqui com saúde e capacidade de realizar este trabalho.
- À minha família pelo apoio e ajuda, mas em especial à minha esposa e à minha mãe pela ajuda e apoio que recebi de ambas durante toda minha jornada na pós-graduação.
- Ao meu orientador, o Prof. Dr. José Alexandre Nogueira, pela paciência e por todo o suporte dado ao decorrer de toda a pesquisa.
- Ao fomento fornecido pela FAPES.

"The force will be with you. Always"
(Obi-Wan Kenobi)

Resumo

A teoria quântica tem se mostrado bem sucedida desde o seu nascimento no início do século XX. Mas, novas ideias que surgem no cenário da física podem alterar alguns fundamentos da mecânica quântica, uma dessas ideias é da existência de um comprimento mínimo observável. Neste trabalho, nós faremos uma revisão das principais modificações causadas na mecânica quântica devido à existência de um comprimento mínimo.

Palavras-chave: Mecânica Quântica, Comprimento Mínimo, Princípio da Incerteza Generalizado (GUP), Equação de Schrödinger.

Abstract

Quantum theory has shown to be well succeeded since its birth at the beginning of the last century. But new ideas that emerged in the physics scenario can change some of quantum mechanics fundamentals, one of these ideas is the existence of a minimum measurable length. In this work we will review the main changes in quantum mechanics arising from the existence of this minimum length.

Keywords: Quantum mechanics , Minimum Length, Generalized Uncertainty Principle (GUP), Schrödinger's Equation.

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Mecânica Quântica Ordinária	4
2.1 Introdução	4
2.2 Postulados da Mecânica Quântica	4
2.3 Observáveis e Relações de Comutação	5
2.4 Representações nos Espaços de Posição e Momento	6
2.5 Relações de Incerteza e o Princípio de Incerteza de Heisenberg	8
2.6 Dinâmica Quântica - A Equação de Schrödinger	9
2.6.1 A Equação de Schrödinger Dependente e Independente do Tempo	9
2.6.2 Densidade de Corrente de Probabilidade	10
2.7 Conclusão	10
3 Mecânica Quântica Ordinária: Aplicações da Equação de Schrödinger	12
3.1 Introdução	12
3.2 Potencial Degrau	12
3.2.1 Caso 1 - Energia da Partícula Menor que o Potencial	14
3.2.2 Caso 2 - Energia da Partícula Maior que o Potencial	16
3.3 Potencial Barreira	19
3.3.1 Caso 1 - Energia da Partícula Menor que o Potencial	20
3.3.2 Caso 2 - Energia da Partícula Maior que o Potencial	21
3.4 Poço Quadrado Infinito	22
3.5 Conclusão	24
4 Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo	25
4.1 Introdução	25
4.2 Princípio de Incerteza Generalizado	25

4.2.1	Relação de Comutação	27
4.3	Representação no Espaço de Hilbert	28
4.3.1	Representação no Espaço dos Momentos	28
4.3.2	Análise Funcional do Operador Posição	30
4.4	Recuperação da Informação da Posição e Representação Espaço de Quaseposição 31	31
4.4.1	Estados de Máxima Localização	31
4.4.2	Transformação para Funções de Onda de Quase-Posição	34
4.4.3	Representação de Quaseposição	35
4.5	Outra Representação para os Operadores Posição e Momento	36
4.6	Conclusão	39
5	Mecânica Quântica num Cenário de Comprimento Mínimo: Aplicações da Equação de Schrödinger	40
5.1	Introdução	40
5.2	Potencial Degrau	41
5.2.1	Caso 1 - $E < V_0$	42
5.2.2	Caso 2 - $E > V_0$	43
5.3	Potencial Barreira	45
5.3.1	Caso 1 - $E < V_0$	45
5.3.2	Caso 2 - $E > V_0$	46
5.4	Poço Quadrado Infinito	47
5.5	Conclusão	49
6	Conclusão	50
	Referências Bibliográficas	52
	Apêndice A Apêndice A - Código Mathematica relativo à Seção 5.3.1	54
	Apêndice B Apêndice B - Código Mathematica relativo à Seção 5.3.2	59

Capítulo 1

Introdução

No início do século XX a física sofreu uma grande mudança de paradigma com o nascimento da Teoria Quântica. Já em seu início, a teoria conseguiu grandes sucessos, como a lei de Planck para a radiação de corpo negro [1]. E, com o passar dos anos, a teoria foi se mostrando cada vez mais bem sucedida.

Hoje, a mecânica quântica já possui uma base sólida e tornou possível um grande avanço para o entendimento da física da natureza e para a tecnologia. Duas peças muito importantes para a base da Mecânica Quântica são o Princípio de Incerteza de Heisenberg [2] e a Equação de Schrödinger [3]. Tanto o Princípio de Incerteza, quanto a Equação de Schrödinger foram providenciais para o entendimento de como a matéria se comporta a nível atômico e molecular. Entretanto, atualmente (quase 100 anos depois) a física tem avançado grandemente e novas ideias têm surgido. Algumas dessas novas ideias podem trazer atualizações interessantes para as bases da Mecânica Quântica. Uma ideia que tem sido bastante abordada por pesquisadores na atualidade é a ideia da existência de um comprimento mínimo, o tópico principal de nosso trabalho.

As ideias de existência de um comprimento mínimo não são tão novas quanto aparentam. Já no fim da década de 20 se especulava acerca do assunto através de ideias sobre a capacidade de divisibilidade do espaço. Entretanto, apenas com o advento da Teoria Quântica de Campos a ideia começou a tomar forma.

Com o advento da Teoria Quântica de Campos foi possível mesclar, ou unir, a Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade Especial. Entretanto, ainda não foi possível unir a Mecânica Quântica, e até mesmo a Teoria Quântica de Campos, com a Teoria da Relatividade Geral. E é nesse contexto que surge a ideia de um comprimento mínimo.

O conceito de comprimento mínimo surge como uma possível solução para um problema que foi detectado pela primeira vez por Matvei Bronstein, o problema da quantização da gravidade [4]. Atualmente, já existem algumas teorias que abordam a ideia da gravitação quântica, em especial a Gravitação Quântica de Laço (Loop Quantum Gravity), que aponta para a existência de uma resolução máxima (ou de um comprimento mínimo) no espaço como uma possível saída para o problema da renormalização [5].

Mas surge uma pergunta: quais seriam os efeitos observados devido à existência desse comprimento mínimo? Mais ainda, quais as consequências dessa existência para os fundamentos e ferramentas da Mecânica Quântica?

Na literatura conhecida, raramente se encontra uma resposta bem detalhada para estas últimas questões. A maioria dos autores que atacam os problemas da mecânica quântica para um cenário de comprimento mínimo não se preocupa em descrever, em detalhes, as nuances da teoria. Muitas vezes nos deparamos com conceitos e cálculos que não são bem explicados, o que dificulta o entendimento da ideia do comprimento mínimo.

Sendo assim, nosso objetivo neste trabalho será descrever, de forma mais detalhada, a mecânica quântica num cenário de comprimento mínimo. Para isso vamos analisar a construção da teoria da mecânica quântica levando em conta a existência de um comprimento mínimo, ou seja, estudaremos como se alteram as relações de comutação e as representações (em especial, referentes aos operadores posição e momento e às representações no espaço de posição e no espaço dos momentos). Entretanto, é importante ressaltar que nosso objetivo não será comprovar a existência do comprimento mínimo. Assumiremos como verdade a existência de um comprimento mínimo e teremos como objetivo principal analisar quais as consequências da inserção deste na teoria concernente à Mecânica Quântica.

Neste estudo, buscamos tornar o leitor mais familiarizado à mecânica quântica num cenário de comprimento mínimo. Para isso, faremos uma breve revisão da mecânica quântica como a conhecemos, além de analisar a solução de alguns casos conhecidos de aplicação da equação de Schrödinger. Posteriormente, reconstruiremos a mecânica quântica levando em conta o comprimento mínimo. Estudaremos as relações de comutação, representações nos espaços de posição e momento, além de descrever as limitações da representação no espaço de posição e como contornar esse problema. Por fim, analisaremos a solução da equação de Schrödinger para os mesmos casos tratados para a mecânica quântica usual com o objetivo de comparar os resultados obtidos, além de tornar o leitor ainda mais familiarizado com o formalismo relacionado ao comprimento mínimo. Para tal seguiremos a seguinte sequência:

- Capítulo 2 - Mecânica Quântica Ordinária - Neste capítulo revisaremos os conceitos da Mecânica Quântica como a conhecemos e repassaremos as estruturas básicas da teoria. Estudaremos os postulados da mecânica quântica, a definição de observável, o princípio da incerteza de Heisenberg, as representações nos espaços de posição e momento e, por fim, a equação de Schrödinger.
- Capítulo 3 - Mecânica Quântica Ordinária: Aplicações da Equação de Schrodinger - Neste capítulo analisaremos alguns exemplos de solução da equação de Schrödinger que serão usados como base para compararmos resultados obtidos com comprimento mínimo. Mais especificamente, estudaremos o potencial degrau, o potencial barreira e o poço quadrado infinito.
- Capítulo 4 - Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo - No terceiro capítulo deste trabalho veremos as mudanças na mecânica quântica devido à existência

de um comprimento mínimo. Reconstituiremos alguns conceitos fundamentais, entre eles o princípio da incerteza (que será o meio de introduzirmos a ideia de comprimento mínimo na teoria), as representações e, por fim, introduziremos a representação que é útil para contornar os problemas gerados na representação de posição devido à presença do comprimento mínimo, a representação de quaseposição.

- Capítulo 5 - Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo: Aplicações da Equação de Schrödinger - Neste capítulo abordaremos algumas visões já existentes acerca dos problemas resolvidos no capítulo 3, porém com comprimento mínimo. Uma vez realizadas as soluções dos três potenciais já citados, faremos as devidas análises e comparações em relação aos resultados obtidos no Capítulo 3.
- Capítulo 6 - Conclusão - Um breve resumo das análises e a subsequente conclusão atingida após os diversos passos apresentados nos capítulos anteriores.

Capítulo 2

Mecânica Quântica Ordinária

2.1 Introdução

A hipótese quântica de Planck foi proposta no início do século XX como possível solução para o problema da radiação de corpo negro [1]. Planck supôs que a energia emitida (ou absorvida) por um sistema não era contínua, mas sim discreta. Essa ideia foi posteriormente usada por Albert Einstein para explicar um fenômeno que hoje conhecemos como efeito fotoelétrico [6].

Com esses primeiros sucessos da teoria surgiram outros pesquisadores interessados em estudar mais a fundo as consequências e desdobramentos dessa teoria. Alguns nomes conhecidos que se aventuraram nesses estudos são: Heisenberg, Schrödinger, Pauli e Dirac.

Hoje, a teoria que tem por base os estudos realizados pelos pesquisadores citados e de outros é conhecida como Mecânica Quântica e seu foco encontra-se no entendimento e na descrição de fenômenos de escala molecular, atômica ou subatômica (uma vez que não é possível observar efeitos quânticos em escalas superiores).

Neste capítulo faremos uma breve revisão de alguns conceitos fundamentais da Mecânica Quântica Ordinária¹ iniciando por seus postulados e, posteriormente, revendo conceitos e expressões matemáticas importantes.

2.2 Postulados da Mecânica Quântica

Para conhecermos bem uma teoria física não basta entender apenas a descrição matemática desta, devemos buscar entender os conceitos que a fundamentam e dão origem a toda a construção matemática. Isso vale também para a Mecânica Quântica Ordinária. A fundamentação da mecânica quântica encontra-se, além da hipótese de Planck, nos seguintes postulados:

¹Chamaremos de Mecânica Quântica Ordinária a descrição em oposição àquela com a introdução do comprimento mínimo.

- Em um certo instante de tempo fixado t_0 , o estado físico de um sistema é definido por se especificar um *ket* $|\psi\rangle$ pertencente ao espaço de estados \mathcal{E} ¹;
- Toda quantidade física mensurável \mathcal{A} é descrita por um operador atuando em \mathcal{E} ; Este operador é denominado um *observável*;
- O único resultado possível da medida de uma quantidade física \mathcal{A} é um dos autovalores do observável correspondente ;
- Quando uma quantidade física \mathcal{A} é medida em um sistema no estado normalizado $|\psi\rangle$, a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de se obter o autovalor não degenerado a_n do correspondente observável é: $\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$ onde $|u_n\rangle$ é o autovetor normalizado associado ao autovalor a_n ;²
- Se a medida de uma quantidade física \mathcal{A} em um sistema no estado $|\psi\rangle$ resulta em a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção normalizada³, $\frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_n|\psi\rangle}}$, de $|\psi\rangle$ dentro do autosubespaço associado a a_n ;
- A evolução temporal do vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ é governada pela *equação de Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

onde \hat{H} é o observável associado à energia total do sistema.

Tendo como base estes postulados começaremos nossa revisão de alguns tópicos importantes da Mecânica Quântica Ordinária.

2.3 Observáveis e Relações de Comutação

Na Mecânica Quântica as grandezas físicas (mensuráveis) são descritas por operadores autoadjuntos, os quais geralmente são representados por matrizes quadradas. Considerando dois operadores \hat{A} e \hat{B} , a *relação de comutação entre \hat{A} e \hat{B}* é definida como

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.2)$$

Dessa definição de comutadores podemos classificar pares de observáveis como *observáveis compatíveis* ou *observáveis incompatíveis*. Dizemos que dois observáveis \hat{A} e \hat{B} são compatíveis se seu comutador é nulo. Caso contrário, estes são incompatíveis.

Se considerarmos, por exemplo, os operadores de posição, \hat{x} , e de momento, \hat{p} temos a seguinte relação de comutação [8]:

¹Este espaço é um espaço de Hilbert e também pode ser denotado por \mathcal{H} .

²Esta definição é válida para espectros discretos e não degenerados. Para os outros casos veja [7].

³O operador \hat{P}_n é chamado de operador de projeção e é definido como $\hat{P}_n := \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i|$, onde g_n é a degenerescência de a_n .

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (2.3)$$

Sendo assim, os operadores de posição e momento são observáveis incompatíveis.

2.4 Representações nos Espaços de Posição e Momento

Na Mecânica Quântica, a função de onda contém todas as informações sobre o sistema e é a partir dela que calculamos os valores esperados de grandezas físicas, tais como momento e posição. Entretanto, para que possamos usar a função de onda devemos saber, antes de mais nada, em que representação esta se encontra¹.

Para os propósitos deste trabalho lembraremos apenas como funcionam as representações de funções de onda no espaço dos momentos e no espaço de posição. Os operadores posição e momento estão relacionados com seus autoestados tais que

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (2.4)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (2.5)$$

Mas, $|x\rangle$ e $|p\rangle$ não pertencem ao espaço de Hilbert, pois não são normalizáveis. Se $\langle x|x'\rangle$ é a amplitude de probabilidade da partícula localizada em x ser encontrada em x' então $\langle x|x'\rangle = 0$ se $x \neq x'$. Mas o que se espera, pela interpretação de probabilidade, é $\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle x|x'\rangle|^2 dx = 1$ o que é contraditório, já que o integrando é nulo. O que leva a expressão $\langle x|\psi\rangle$ a não fazer sentido.

Para resolver essa questão fazemos uma aproximação tal que os autovetores dos operadores \hat{x} e \hat{p} sejam descritos por sequências de estados físicos com incertezas da posição e do momento tendendo a zero. Para o operador \hat{x} os autovetores $|x\rangle$ podem ser considerados uma sequência de estados $|\phi_x^{\Delta x}\rangle$ para os quais o valor esperado do operador \hat{x} é x de forma que sua incerteza tende a zero. Logo, podemos definir a função de onda no espaço da posição de uma partícula como

$$\psi(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \phi_x^{\Delta x} | \psi \rangle, \quad (2.6)$$

de maneira que primeiro projetamos a função de onda $|\psi\rangle$ sobre os autoestados e, posteriormente, tomamos o limite. Assim, contornamos o problema por definir uma sequência de estados aproximadamente localizados em x e tomarmos o limite em que essa aproximação é cada vez mais precisa. E, nesse limite, os estados $\phi_x^{\Delta x}$ são ortonormais. Sendo assim, ao utilizarmos essa aproximação podemos usar os autoestados dos operadores posição e momento como bases para a representação das funções de onda.

¹Não nos aprofundaremos nos detalhes e nuances algébricas da teoria quântica para o caso ordinário. Entretanto, se o leitor desejar uma boa referência sobre as representações de funções de onda sugerimos [7] ou [8]

Considerando que $|x\rangle$ e $|p\rangle$ são autoestados, respectivamente, dos operadores posição e momento (ou seja, $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$ e $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$), temos que

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \quad (2.7)$$

ou,

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle. \quad (2.8)$$

A atuação dos operadores posição (\hat{x}) e momento (\hat{p}) sobre os vetores de estado $|\psi\rangle$ definirá em qual representação a função de onda se encontra. Para o caso da representação no espaço de posição (Eq. (2.7)) temos

$$\hat{x}.\psi(x) = \langle x|\hat{x}|\psi\rangle = x \langle x|\psi\rangle = x\psi(x) \quad (2.9)$$

e

$$\hat{p}.\psi(x) = \langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\partial_x \langle x|\psi\rangle = -i\hbar\partial_x\psi(x). \quad (2.10)$$

Entretanto, para o caso de usarmos a representação no espaço dos momentos (Eq. (2.8)), temos

$$\hat{p}.\psi(p) = \langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p \langle p|\psi\rangle = p\psi(p) \quad (2.11)$$

e

$$\hat{x}.\psi(p) = \langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\partial_p \langle p|\psi\rangle = i\hbar\partial_p\psi(p). \quad (2.12)$$

Note que a função de onda representa os coeficientes (coordenadas) do vetor de estado $|\psi\rangle$ projetado (expandido) na base do espaço de representação.

Vamos tentar obter uma expressão para $\langle x|p\rangle$. Para isso, vamos relacionar as representações de momento e posição para um certo vetor de estado $|\psi\rangle$ usando a relação de completudeza, $\int |p\rangle \langle p| dp = 1$, de forma que

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \langle x| \left(\int dp |p\rangle \langle p| \right) |\psi\rangle = \int dp \langle x|p\rangle \psi(p). \quad (2.13)$$

De outra forma, podemos escrever

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \langle p| \left(\int dx |x\rangle \langle x| dx \right) |\psi\rangle = \int dx \langle p|x\rangle \psi(x). \quad (2.14)$$

As Eqs. (2.13) e (2.14) mostram que as representações da função de onda nos espaços de momento e posição devem ser vistas como transformadas de Fourier, que para uma função $f(x)$ qualquer são dadas, na mecânica quântica por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{\frac{ipx}{\hbar}} g(p). \quad (2.15)$$

Dessa forma, temos, para as relações nas Eqs.(2.13) e (2.14),

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}, \quad (2.16)$$

e,

$$\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}. \quad (2.17)$$

Mais adiante, veremos que esta última representação (no espaço dos momentos) será fundamental para trabalharmos com a Mecânica Quântica num cenário de comprimento mínimo.

2.5 Relações de Incerteza e o Princípio de Incerteza de Heisenberg

Usando a desigualdade de Schwarz e os fatos de que os valores esperados para operadores hermitianos e anti-hermitianos são, respectivamente, reais puros e imaginários puros podemos mostrar que, para dois observáveis \hat{A} e \hat{B}

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|, \quad (2.18)$$

onde:

$$\Delta A := \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle}. \quad (2.19)$$

Para os operadores posição e momento a Eq. (2.18) conduz à relação matemática que representa o *Princípio de Incerteza de Heisenberg para a posição e momento*:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.20)$$

Fisicamente, o Princípio de Incerteza descreve a impossibilidade de se medir, simultaneamente, posição e momento com precisão infinita. A Fig. (2.1) ilustra essa situação. As incertezas de posição e momento estão associadas uma à outra. Se uma é extremamente baixa (tende a zero) a outra é extremamente alta (tende ao infinito).

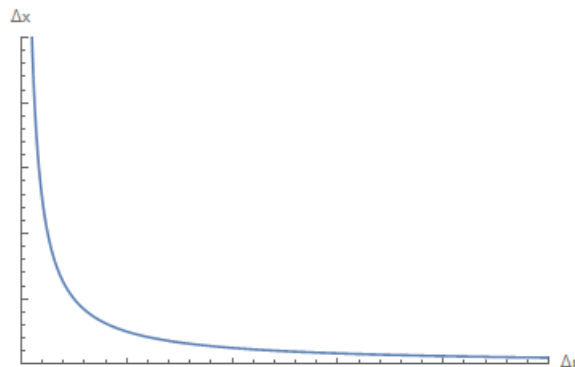


Figura 2.1.

Relação de Incerteza da Mecânica Quântica Ordinária

2.6 Dinâmica Quântica - A Equação de Schrödinger

Como vimos na seção 2.2, a equação de Schrödinger, Eq. (2.1), é a equação que descreve a evolução temporal de um sistema quântico.

Consistente com os postulados de de Broglie e de Einstein ($\lambda = \frac{h}{p}$ e $\nu = \frac{E}{h}$, respectivamente) [9], a equação de Schrödinger foi formulada no fim de 1925 e publicada em 1926 [3].

Na mecânica clássica, a equação de movimento de um sistema é fornecida pela Segunda Lei de Newton, $\vec{F} = m\vec{a}$, utilizada para prever matematicamente como o sistema se comportará a qualquer momento, dadas as condições iniciais. Na mecânica quântica, o análogo da lei de Newton é a equação de Schrödinger para o sistema quântico (geralmente átomos, moléculas e partículas subatômicas, sejam elas livres, ligadas ou localizadas).

2.6.1 A Equação de Schrödinger Dependente e Independente do Tempo

Usando que $\hat{H} := i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ e que, para uma partícula de massa m sujeita a um potencial $V(\vec{r}, t)$, $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}, t)$, a equação de Schrödinger fica

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \hat{p}^2 + V(\vec{r}, t) \right] |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle. \quad (2.21)$$

Na representação do espaço de posição a equação de Schrödinger dependente do tempo fica, então, dada por

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Considerando que o potencial é independente do tempo e que $|\psi_E(t)\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |\varphi_E\rangle$ são os autoestados do operador \hat{H} (energia), ou seja, $\hat{H} |\psi_E(t)\rangle = E |\psi_E(t)\rangle$, temos a equação de Schrödinger independente do tempo,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right] \varphi_E(\vec{r}) = E \varphi_E(\vec{r}). \quad (2.23)$$

No caso unidimensional, a equação de Schrödinger independente do tempo fica

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi_E(x) = E \varphi_E(x). \quad (2.24)$$

A Eq. (2.23) possui várias aplicações, sendo algumas discutidas no próximo capítulo. E, assim como na forma dependente do tempo, o potencial é a chave para a solução da equação.

É importante ressaltar porém que existem condições para que a função de onda seja fisicamente plausível. A função de onda deve ser finita em todos os pontos e deve ter um valor único e, para que a função de onda seja normalizável, ela deve zerar quando x for para o infinito. Em geral sua derivada primeira pode ser contínua.

2.6.2 Densidade de Corrente de Probabilidade

O significado físico da função de onda é de natureza estatística de modo que podemos obter que a probabilidade de se encontrar uma partícula numa certa região é dada pelo quadrado da norma da função de onda, ou seja,

$$\int |\Psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (2.25)$$

E, a partir da definição da norma e da equação de Schrödinger independente do tempo, podemos obter a densidade de corrente de probabilidade, j .

A densidade de corrente de probabilidade representa a taxa com que a probabilidade "flui" através da coordenada x . E, para obter a densidade de corrente de probabilidade, primeiramente, derivamos o quadrado da norma da função de onda com relação ao tempo

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} = \frac{\partial [\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)]}{\partial t} = \Psi(x, t) \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial t} + \Psi^*(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Agora usando o equivalente unidimensional da Eq. (2.22) e sua conjugada complexa temos que

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi(x, t), \quad e \quad (2.27)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi^*(x, t). \quad (2.28)$$

Substituindo as Eqs. (2.27) e (2.28) na Eq. (2.26), e usando a regra da cadeia para simplificar alguns termos obtemos que

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[\Psi(x, t) \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial x} - \Psi^*(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (2.29)$$

Definindo a densidade de corrente de probabilidade como

$$j(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left[\Psi(x, t) \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial x} - \Psi^*(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} \right], \quad (2.30)$$

obtemos a equação da continuidade, dada por

$$\frac{\partial |\Psi(x, t)|^2}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0. \quad (2.31)$$

2.7 Conclusão

Neste capítulo abordamos resumidamente alguns tópicos de Mecânica Quântica que serão fundamentais para esse trabalho, em especial o Princípio de Incerteza de Heisenberg na seção 2.5 e a introdução da Equação de Schrödinger. No próximo capítulo veremos algumas aplicações importantes da Equação de Schrödinger. Aplicações estas que revisitaremos no

capítulo 5 considerando a existência de um comprimento mínimo e, conseqüentemente, uma incerteza mínima para a posição.

Capítulo 3

Mecânica Quântica Ordinária: Aplicações da Equação de Schrödinger

3.1 Introdução

No capítulo anterior apresentamos a equação de Schrodinger e os fundamentos da Mecânica Quântica Ordinária. Agora, neste capítulo, analisaremos as soluções de alguns exemplos de aplicações para a Equação de Schrödinger: potencial degrau, potencial barreira e o poço quadrado infinito.

3.2 Potencial Degrau

O potencial degrau é representado matematicamente como

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Graficamente, o potencial degrau é mostrado na Fig. 3.1.

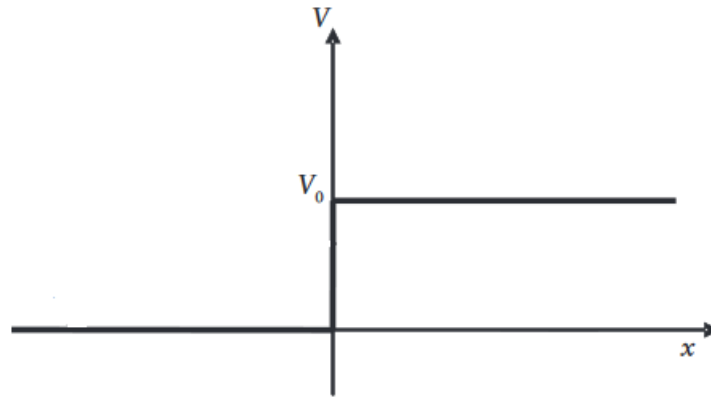


Figura 3.1.

Representação do Potencial Degrau.

Antes de iniciarmos a resolução deste problema é conveniente analisarmos as condições que devem ser impostas sobre a função de onda (solução).

Para o potencial degrau, dividiremos a solução em duas partes: $\varphi_I(x)$, para a região I ($x < 0$) e $\varphi_{II}(x)$, para a região II ($x > 0$).

Como já dissemos, $|\varphi(x)|^2$ representa a amplitude de probabilidade, então $\varphi(x)$ deve ser finita em todos os pontos, $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) \equiv \text{finita}$, e, também, contínua, $\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0)$.

Para determinarmos a condição de continuidade ou não da derivada primeira de $\varphi(x)$, vamos considerar a equação de Schrödinger calculada nos pontos $x = 0^+$ e $x = 0^-$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(0^+)}{dx^2} + V_0\varphi(0^+) = E\varphi(0^+) \quad (3.1)$$

e,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(0^-)}{dx^2} = E\varphi(0^-). \quad (3.2)$$

No limite $x = 0$, temos

$$\frac{d^2\varphi_{II}(0^+)}{dx^2} - \frac{d^2\varphi_I(0^-)}{dx^2} = \frac{-2m}{\hbar^2} V_0\varphi(0). \quad (3.3)$$

A Eq. (3.3) mostra que a derivada segunda de $\varphi(x)$, em $x = 0$, $\frac{d^2\varphi(0)}{dx^2}$, deve ser descontínua.

Agora, integrando a equação de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} V(x)\varphi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(x) dx, \quad (3.4)$$

que, pode ser escrita,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right) dx + \int_{-\epsilon}^0 0 \cdot \varphi(x) dx + \int_0^{\epsilon} V_0\varphi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(x) dx. \quad (3.5)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$, devido à continuidade de $\varphi(x)$, temos

$$\frac{d\varphi_I(0)}{dx} = \frac{d\varphi_{II}(0)}{dx}. \quad (3.6)$$

O que mostra a continuidade da derivada primeira de $\varphi(x)$.

3.2.1 Caso 1 - Energia da Partícula Menor que o Potencial

A situação que analisaremos se encontra representada na Fig. 3.2, a seguir.

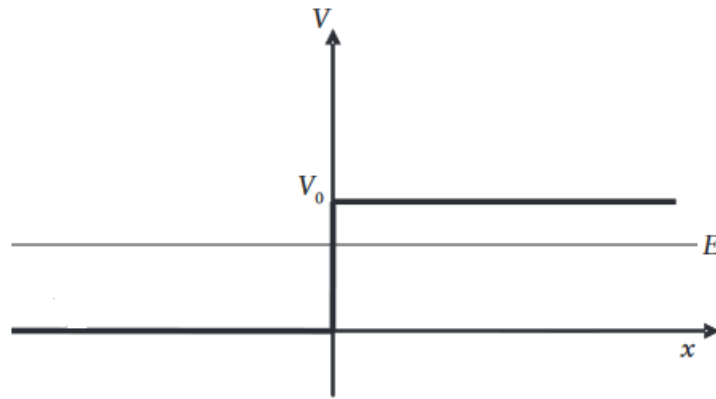


Figura 3.2.

Representação do Potencial Degrau para o caso $E < V_0$.

Na região I o potencial é nulo, logo a solução da equação de Schrödinger é a mesma que para uma partícula livre, ou seja,

$$\varphi_I(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, x < 0, \quad (3.7)$$

onde

$$k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (3.8)$$

Para a região II a equação de Schrödinger toma a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi_{II}(x)}{dx^2} + (V_0 - E)\varphi_{II}(x) = 0. \quad (3.9)$$

Reescrevendo a Eq. (3.9) obtemos

$$\frac{d^2\varphi_{II}(x)}{dx^2} - k_{II}^2\varphi_{II}(x) = 0, \quad (3.10)$$

onde:

$$k_{II} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \quad (3.11)$$

A solução da Eq. (3.10) tem a forma

$$\varphi_{II}(x) = Ce^{k_{II}x} + De^{-k_{II}x}, x > 0. \quad (3.12)$$

Levando em conta que a função de onda deve ser finita, fazemos $C = 0$ e, portanto,

$$\varphi_{II}(x) = De^{-k_{II}x}, x > 0. \quad (3.13)$$

Como citado anteriormente, devemos ter $\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0)$. Assim,

$$A + B = D. \quad (3.14)$$

Além disso, da Eq. (3.6), temos

$$ik_I(A - B) = -k_{II}D. \quad (3.15)$$

Das Eqs. (3.14) e (3.15) podemos obter:

$$B = -\left(\frac{k_{II} + ik_I}{k_{II} - ik_I}\right)A; \quad (3.16)$$

$$D = \frac{-2ik_I}{(k_{II} - ik_I)}A. \quad (3.17)$$

Assim, as soluções $\varphi_I(x)$ e $\varphi_{II}(x)$ ficam

$$\varphi_I(x) = Ae^{ik_Ix} - \left(\frac{k_{II} + ik_I}{k_{II} - ik_I}\right)Ae^{-ik_Ix} \quad (3.18)$$

e,

$$\varphi_{II}(x) = \frac{-2ik_I}{(k_{II} - ik_I)}Ae^{-k_{II}x}. \quad (3.19)$$

Podemos interpretar os termos dessas soluções como termos incidente, refletido e transmitido, sendo eles:

$$\varphi_{inc}(x) = Ae^{ik_Ix}; \quad (3.20)$$

$$\varphi_{ref}(x) = -\left(\frac{k_{II} + ik_I}{k_{II} - ik_I}\right)Ae^{-ik_Ix}; \quad (3.21)$$

$$\varphi_{trans}(x) = \frac{-2ik_I}{(k_{II} - ik_I)}Ae^{-k_{II}x}. \quad (3.22)$$

Usando a definição de corrente de probabilidade mostrada no capítulo 2, podemos obter a corrente de probabilidade incidente, j_{inc} , e a corrente de probabilidade refletida, j_{ref} , como sendo¹:

¹Ainda é possível obter que $j_{trans} = 0$.

$$j_{inc} = \frac{\hbar k_I |A|^2}{m}; \quad (3.23)$$

$$j_{ref} = -\frac{\hbar k_I |A|^2}{m}. \quad (3.24)$$

Assim, podemos calcular o coeficiente de reflexão, R , como sendo

$$R = \frac{|j_{ref}|}{|j_{inc}|} = 1. \quad (3.25)$$

Como $R = 1$ teremos reflexão total da onda de probabilidade incidente sobre o degrau de potencial.

Podemos ainda obter a densidade de probabilidade para as regiões I e II. Usando que $p_I(x) = |\varphi_I(x)|^2$ e $p_{II}(x) = |\varphi_{II}(x)|^2$ temos

$$p_I(x) = |A|^2 \left[2 - 2Re \left[\left(\frac{k_{II} - ik_I}{k_{II} + ik_I} \right) e^{2ik_I x} \right] \right] \quad (3.26)$$

e,

$$p_{II}(x) = \frac{4k_I^2 |A|^2}{k_{II}^2 + k_I^2} e^{-2k_{II} x}. \quad (3.27)$$

O gráfico da densidade de probabilidade é mostrado a seguir, na Fig. 3.3.

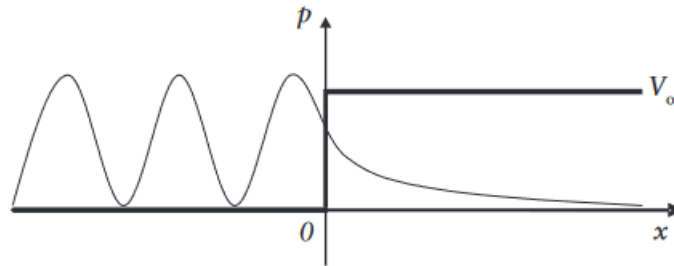


Figura 3.3.

Densidade de Probabilidade de partícula quântica incidindo sobre degrau de potencial com $E < V_0$.

Note que, na região II ($x > 0$), a probabilidade de encontrarmos a partícula é não-nula. Isto seria impossível pela Mecânica Clássica, pois, nessa região temos $E < V_0$. Por esse motivo essa região é dita classicamente proibida. É possível ver na Fig. 3.3, que a probabilidade de encontrarmos a partícula em $x > 0$ decai exponencialmente à medida que nos afastamos da origem. Esse fenômeno é chamado de penetração de barreira.

3.2.2 Caso 2 - Energia da Partícula Maior que o Potencial

Agora analisaremos o caso $E > V_0$. Uma representação gráfica da situação encontra-se na Fig. 3.4, a seguir.

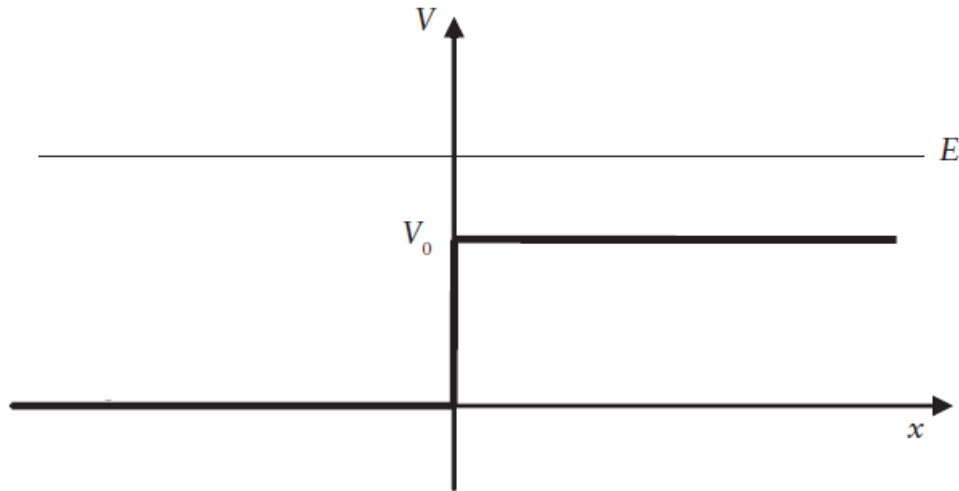


Figura 3.4.

Representação Potencial Degrau e da Energia da partícula quântica - Caso $E > V_0$

Na região I, a solução terá a mesma forma da solução para esta região no caso $E < V_0$, ou seja,

$$\varphi_I(x) = Ae^{ik_Ix} + Be^{-ik_Ix}, x < 0, \quad (3.28)$$

onde

$$k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (3.29)$$

Já para a região II, a equação de Schrödinger pode ser escrita como

$$\frac{d^2\varphi_{II}(x)}{dx^2} + k_{II}^2\varphi_{II}(x) = 0, x > 0, \quad (3.30)$$

onde

$$k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}. \quad (3.31)$$

A solução para a Eq. (3.30) tem a forma

$$\varphi_{II}(x) = Ce^{ik_{II}x} + De^{-ik_{II}x}, x > 0. \quad (3.32)$$

Entretanto, como não existe onda refletida na região II, fazemos $D = 0$. Assim, temos

$$\varphi_{II}(x) = Ce^{ik_{II}x}. \quad (3.33)$$

Impondo novamente as condições de continuidade já citadas no caso 1, obtemos

$$A + B = C, \quad (3.34)$$

e

$$k_I(A - B) = k_{II}C. \quad (3.35)$$

Resolvendo o sistema composto pelas Eqs. (3.34) e (3.35) temos:

$$B = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \right) A; \quad (3.36)$$

$$C = \frac{2k_I}{(k_{II} + k_I)} A. \quad (3.37)$$

Reescrevendo as soluções temos

$$\varphi_I(x) = Ae^{ik_Ix} + \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \right) Ae^{-ik_Ix} \quad (3.38)$$

e

$$\varphi_{II}(x) = \frac{2k_I}{(k_{II} + k_I)} Ae^{ik_{II}x}. \quad (3.39)$$

De forma análoga ao caso 1, podemos obter as correntes de probabilidade incidente e refletida. Mas, para este caso, também podemos obter a corrente de probabilidade transmitida. Assim, temos:

$$j_{inc} = \frac{\hbar k_I |A|^2}{m}; \quad (3.40)$$

$$j_{ref} = -\frac{\hbar k_I}{m} \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \right)^2 |A|^2; \quad (3.41)$$

$$j_{trans} = \frac{4\hbar k_{II} k_I^2 |A|^2}{m(k_I + k_{II})^2}. \quad (3.42)$$

Usando que os coeficientes de transmissão, T , e de reflexão, R , são definidos como $T = \frac{|j_{trans}|}{|j_{inc}|}$ e $R = \frac{|j_{ref}|}{|j_{inc}|}$ e também que $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ e $k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$, podemos obter:

$$R = \frac{(1 - \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}})^2}{(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}})^2}; \quad (3.43)$$

$$T = \frac{4\sqrt{1 - \frac{V_0}{E}}}{(1 + \sqrt{1 - \frac{V_0}{E}})^2}. \quad (3.44)$$

Note também que, como esperado, $R + T = 1$.

É importante observar que o fato de partículas serem refletidas, mesmo com $E > V_0$, que classicamente seriam transmitidas, é mais uma manifestação das propriedades ondulatórias das partículas quânticas.

3.3 Potencial Barreira

Trataremos o caso de uma partícula quântica de massa m que incide sobre uma barreira, definida pelo seguinte perfil de energia potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } 0 < x < a. \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$$

Como se trata de uma barreira, $V_0 > 0$. O caso que analisaremos está representado graficamente na Fig. 3.5.

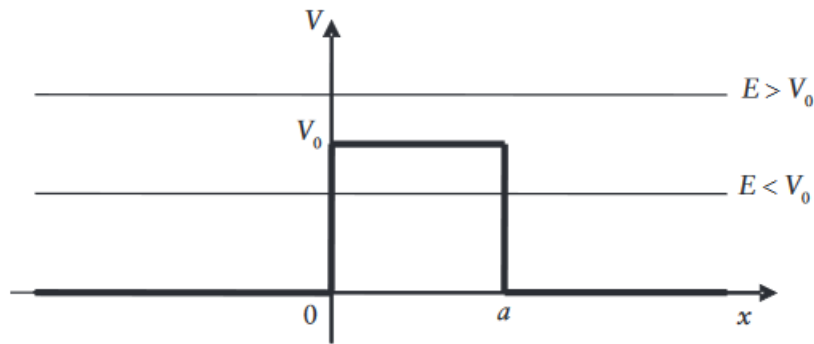


Figura 3.5.

Representação do potencial barreira e das energias da partícula para $E > V_0$ e $E < V_0$

Uma vez que $V(x)$ é finito, a análise realizada no problema anterior também se aplica aqui em cada um dos pontos de descontinuidade do potencial. Então, temos que $\varphi(x \rightarrow \pm\infty) \equiv \text{finita}$ e que $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ deve ser contínua em $x = 0$ e $x = a$.

Nas regiões I ($x < 0$) e III ($x > a$) a solução da equação de Schrödinger é a mesma que para a partícula livre, ou seja,

$$\varphi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, x < 0, \quad (3.45)$$

e

$$\varphi_{III}(x) = Ce^{ikx}, x > a, \quad (3.46)$$

onde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, e de forma análoga ao que fizemos para o potencial degrau, desconsideramos uma onda incidente vindo da direita para a esquerda na região $x > a$ e, portanto, teremos $D = 0$.

A partir de agora, como no problema anterior, consideraremos os casos $E < V_0$ e $E > V_0$.

3.3.1 Caso 1 - Energia da Partícula Menor que o Potencial

Nesse caso, para a região $0 < x < a$, temos que o potencial $V(x) = V_0$. Assim, a solução da equação de Schrödinger fica

$$\varphi_{II}(x) = Fe^{k'x} + Ge^{-k'x}, 0 < x < a, \quad (3.47)$$

onde $k' = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

Combinando as Eqs. (3.45), (3.46) e (3.47) e usando as condições de continuidade de $\varphi(x)$ e de sua derivada podemos relacionar as constantes das soluções. Para $x = 0$, encontramos que

$$A + B = F + G \quad (3.48)$$

e,

$$ik(A - B) = k'(F - G). \quad (3.49)$$

Para $x = a$, temos que

$$Ce^{ika} = Fe^{k'a} + Ge^{-k'a} \quad (3.50)$$

e

$$ikCe^{ika} = K(Fe^{k'a} - Ge^{-k'a}). \quad (3.51)$$

Manipulando as Eqs. (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) é possível escrever os coeficientes de reflexão e de transmissão como sendo, respectivamente:

$$R = \left[1 + \frac{4k^2k'^2}{(k^2 + k'^2)^2 \sinh^2(k'a)} \right]^{-1}; \quad (3.52)$$

$$T = \left[1 + \frac{(k^2 + k'^2)^2 \sinh^2(k'a)}{4k^2k'^2} \right]^{-1}. \quad (3.53)$$

A densidade de probabilidade $p(x) = |\varphi(x)|^2$ está representada na Fig. 3.6, a seguir.

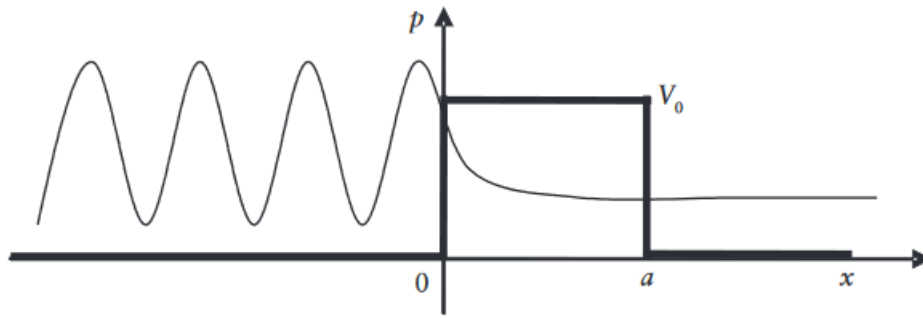


Figura 3.6.

Densidade de probabilidade para o caso $0 < E < V_0$

O fato de o coeficiente de transmissão ter um valor diferente de zero demonstra que uma partícula pode atravessar uma barreira de potencial que seria completamente intransponível se prevalecesse o ponto de vista da Mecânica Clássica. Esse fenômeno é chamado de tunelamento, ou efeito túnel.

3.3.2 Caso 2 - Energia da Partícula Maior que o Potencial

Para este segundo caso a solução da equação de Schrödinger na região $0 < x < a$ é

$$\varphi(x) = Fe^{ik'x} + Ge^{-ik'x}, 0 < x < a, \quad (3.54)$$

onde $k' = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$.

De maneira análoga a que fizemos no caso 1, podemos obter os coeficientes de reflexão e transmissão como sendo:

$$R = \left[1 + \frac{4k^2k'^2}{(k^2 + k'^2)^2 \text{sen}^2(k'a)} \right]^{-1}; \quad (3.55)$$

$$T = \left[1 + \frac{(k^2 + k'^2)^2 \text{sen}^2(k'a)}{4k^2k'^2} \right]^{-1}. \quad (3.56)$$

O gráfico da densidade de probabilidade para o caso em questão é mostrado a seguir na Fig. 3.7.

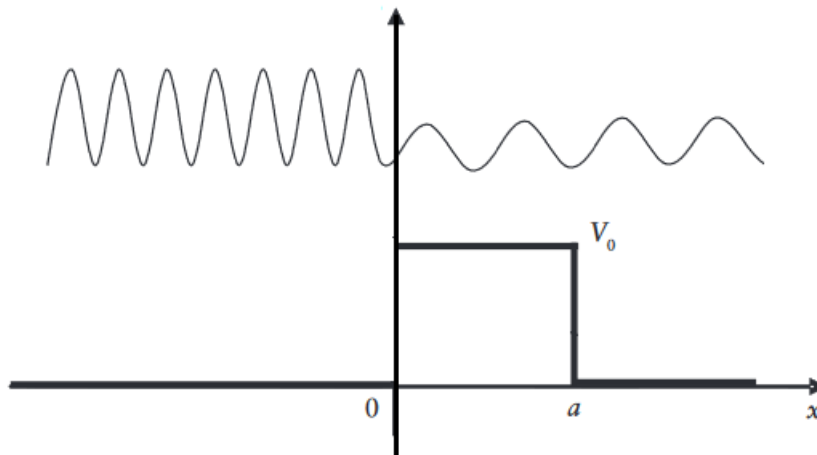


Figura 3.7.

Densidade de probabilidade para o caso $E > V_0$

3.4 Poço Quadrado Infinito

Para o caso de um poço quadrado infinito temos um potencial tal que

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{para } x > a. \end{cases}$$

O poço quadrado infinito encontra-se representado na Fig. 3.8, a seguir

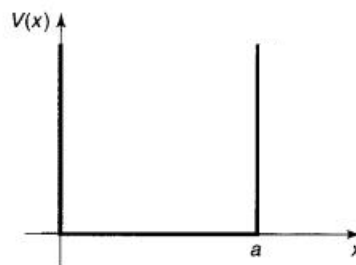


Figura 3.8.

Representação do poço quadrado infinito.

Dividimos o problema em três regiões: região I ($x < 0$), região II ($0 \leq x \leq a$) e região III ($x > a$).

Nas regiões I e III, fora do poço, a probabilidade de se encontrar a partícula é nula e, portanto, $\varphi_I(x) = \varphi_{III}(x) = 0$.

Na região II o potencial é nulo e, dessa forma, podemos escrever a equação de Schrödinger na forma

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -k^2\varphi(x), \quad (3.57)$$

onde $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

A solução para a Eq. (3.57) pode ser escrita como

$$\varphi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx). \quad (3.58)$$

No caso do poço infinito a derivada primeira é descontínua, o que pode ser visto na Eq. (3.4) ao se colocar o potencial indo para o infinito. Mas, a continuidade da função de onda é válida e, portanto

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0. \quad (3.59)$$

Usando que $\varphi(0) = 0$, podemos concluir que $B = 0$ e a função de onda fica

$$\varphi(x) = A\sin(kx). \quad (3.60)$$

E, para $\varphi(a) = 0$, temos $A\sin(ka) = 0$. Como não queremos $A = 0$ (solução trivial e não normalizável), temos $\sin(ka) = 0$, que nos leva a concluir que $ka = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$. Mas, $ka = 0$ também implicaria em $\varphi(x) = 0$. Assim, tomamos

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (3.61)$$

onde $n = 1, 2, 3, \dots$

Utilizando a definição de k podemos obter os valores possíveis para E , representados na Fig. 3.9. São estes,

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}. \quad (3.62)$$

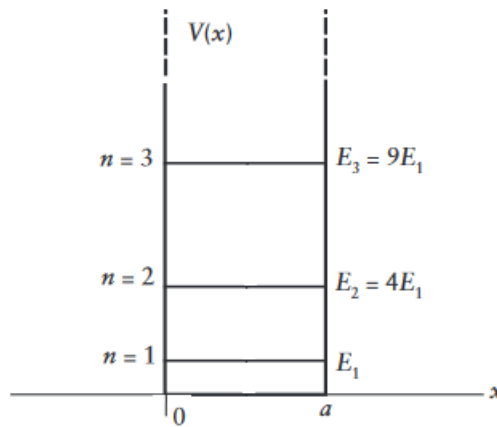


Figura 3.9.

Energias no Poço quadrado infinito.

Por fim, normalizaremos $\varphi(x)$ para obter A , ou seja

$$\int_0^a |A|^2 \text{sen}^2(kx) dx = \frac{a}{2} |A|^2 = 1. \quad (3.63)$$

Dessa forma, $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$ e as soluções dentro do poço são

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \quad (3.64)$$

3.5 Conclusão

Neste capítulo analisamos as soluções da equação de Schrödinger para alguns potenciais específicos de acordo com a Mecânica Quântica Ordinária. A partir do próximo capítulo, avaliaremos a Mecânica Quântica levando em conta a existência de um comprimento mínimo. E, posteriormente, no Capítulo 5, retornaremos aos potenciais estudados neste Capítulo 3 para resolver novamente a equação de Schrödinger para cada um deles, porém agora, num cenário com comprimento mínimo.

Capítulo 4

Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo

4.1 Introdução

Neste capítulo iniciaremos o tratamento da Mecânica Quântica considerando a existência de um comprimento mínimo. Devemos lembrar, entretanto, que neste trabalho não buscaremos demonstrar a existência desse comprimento mínimo. Assumimos essa premissa como verdadeira, ou seja, consideramos que o comprimento mínimo é uma realidade e estudamos seus efeitos na teoria da Mecânica Quântica.

Um cenário de comprimento mínimo pode ser introduzido de três formas diferentes [10]:

- Um Princípio da Incerteza Generalizado (Generalized Uncertainty Principle - GUP);
- A ideia de Relatividade Especial Deformada (Deformed Special Relativity - DSR);
- Uma Modificação nas Relações de Dispersão (Modified Dispersion Relations - MDR).

Em nosso trabalho, partiremos da ideia de um Princípio da Incerteza Generalizado (GUP) e redefiniremos algumas relações da Mecânica Quântica fazendo as devidas alterações para a presença de uma incerteza mínima na posição.

4.2 Princípio de Incerteza Generalizado

O conceito de um generalização do Princípio de incerteza consiste em modificar a relação de incerteza de Heisenberg, Eq. (2.12) para momento e posição, da mecânica quântica ordinária de forma que, do lado direito da inequação, apareçam termos relacionados à posição e/ou ao momento que limitem a incerteza na posição e/ou no momento. Uma das maneiras de se fazer isso é através da relação

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \alpha(\Delta x)^2 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma]. \quad (4.1)$$

Mas, a Eq.(4.1) nos daria não apenas uma incerteza mínima na posição como também uma limitação na incerteza do momento. Sendo assim, consideramos uma forma mais simples que não gere limitações referentes ao momento. Para isso utilizaremos a seguinte relação

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma]. \quad (4.2)$$

A Eq. (4.2) acima nos dá exatamente o que queremos, uma relação de incerteza que gera uma limitação na incerteza da posição, um valor mínimo que Δx pode atingir. Os termos β e γ são positivos e independentes de Δx , mas podem depender de $\langle \hat{x} \rangle$ e $\langle \hat{p} \rangle$ ¹. Graficamente podemos representar esta relação conforme mostra a Fig. 4.1.

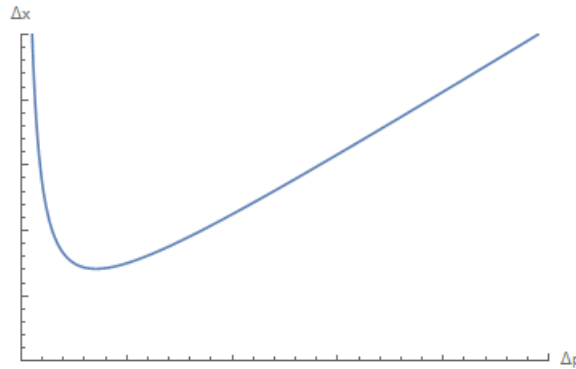


Figura 4.1.

Relação de Incerteza Generalizada

Ao observar o gráfico anterior, mostrado na Fig. 4.1, é fácil notar que existe, agora um valor mínimo para a incerteza da posição Δx . Podemos calcular esse valor mínimo para a incerteza na posição por, primeiramente, isolar Δx na eq. (4.2) e obter

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma]. \quad (4.3)$$

Reorganizando temos que

$$\Delta x \geq \frac{\hbar(1 + \gamma)}{2\Delta p} + \frac{\hbar\beta(\Delta p)}{2}. \quad (4.4)$$

Tomando a situação limítrofe (igualdade) podemos escrever Δx como função de Δp

$$\Delta x = f(\Delta p) = \frac{\hbar(1 + \gamma)}{2\Delta p} + \frac{\hbar\beta(\Delta p)}{2}. \quad (4.5)$$

¹Mais adiante, na demonstração da relação de incerteza a partir da relação de comutação entre \hat{x} e \hat{p} definiremos essa relação.

Para garantir o valor mínimo fazemos $\gamma = 0$. Assim,

$$\Delta x = f(\Delta p) = \frac{\hbar}{2\Delta p} + \frac{\hbar\beta(\Delta p)}{2}. \quad (4.6)$$

Derivando em relação a Δp e igualando a 0,

$$\left. \frac{df(\Delta p)}{d\Delta p} \right|_{\Delta p_M} = \frac{-\hbar}{2\Delta p_M^2} + \frac{\hbar\beta}{2} = 0. \quad (4.7)$$

Dessa forma, encontramos o valor de Δp que minimiza¹ a incerteza na posição como sendo

$$\Delta p_M = \sqrt{\frac{1}{\beta}}. \quad (4.8)$$

Portanto, o valor mínimo de Δx , ou o Δx_0 , é

$$\Delta x_0 = \hbar \sqrt{\beta} \quad (4.9)$$

Outra maneira de se obter o valor de Δx_0 é tomar a igualdade na Eq. (4.2) e, após reorganizá-la, resolver a equação como uma equação de segundo grau em Δp [5].

Mas, como era de se esperar, a existência desse Δx_0 e a modificação na relação de incerteza faz com que outras relações também se alterem. Analisaremos agora algumas destas alterações.

4.2.1 Relação de Comutação

Como a relação de incerteza geral para dois observáveis depende do comutador entre eles, se modificamos a relação de incerteza entre posição e momento, seu comutador também se alterará. Aqui tomaremos uma nova relação de comutação entre posição e momento e mostraremos que ela leva à relação de incerteza desejada. Consideremos que a relação de comutação tem a seguinte forma:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2). \quad (4.10)$$

Para mostrar que a relação de comutação acima gera o princípio da incerteza na forma desejada usaremos a relação

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|. \quad (4.11)$$

Para os operadores posição e momento temos que

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle i\hbar(1 + \beta\hat{p}^2) \rangle|. \quad (4.12)$$

¹Ao tomarmos a derivada segunda para o ponto obtido, notamos que esta é positiva, logo o ponto é um ponto de mínimo.

Mas o valor médio da expressão à direita na Eq. (4.12) se reduz ao valor esperado de p , e este é positivo. Assim podemos aplicar o módulo e obter

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} i\hbar (1 + \beta \langle \hat{p}^2 \rangle). \quad (4.13)$$

Usando que $\langle \hat{p}^2 \rangle = (\Delta p)^2 + \langle \hat{p} \rangle^2$, a inequação se torna

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} i\hbar (1 + \beta (\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2). \quad (4.14)$$

O termo $\beta \langle \hat{p} \rangle^2$ é o termo γ da Eq. (4.2). Assim, mostramos que partindo da relação de comutação (4.10) obtemos a Eq. (4.2):

4.3 Representação no Espaço de Hilbert

Na Mecânica Quântica Ordinária \hat{x} e \hat{p} são operadores cujos autovetores podem ser usados para representar funções de onda, como mostram as Eqs. (2.4) e (2.5). E, nessas equações, $|x\rangle$ e $|p\rangle$ são autoestados do operador posição e momento, respectivamente. Este estado $|x\rangle$ representa uma partícula que está exatamente localizada no ponto x , ou seja, não há nenhuma incerteza associada à sua posição (a incerteza Δx é nula) e o mesmo vale para os estados $|p\rangle$ relativos ao operador momento.

Rigorosamente falando, esses autoestados da posição e do momento não representam estados físicos pois não são normalizáveis e não se encontram no espaço de Hilbert. Porém, como os operadores posição e momento são autoadjuntos e seus autoestados podem ser aproximados com precisão arbitrária por sequências de estados físicos ($|\psi_n\rangle$) de forma que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta x_{|\psi_n\rangle} = 0 \quad (4.15)$$

e,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Delta p_{|\psi_n\rangle} = 0. \quad (4.16)$$

Entretanto, devemos nos lembrar que agora estamos trabalhando com uma incerteza mínima na posição, o que impossibilita criar uma representação com significado físico baseada nos estados $|x\rangle$, uma vez que estes levariam a uma incerteza nula na posição.

Devido às limitações com relação a posição a nós impostas pela existência de um comprimento mínimo, usaremos a representação da função de onda no espaço dos momentos.

4.3.1 Representação no Espaço dos Momentos

Como vimos anteriormente, a inserção de um comprimento mínimo na teoria gera uma limitação quanto à representação da função de onda, pois implica no fato de não haver nenhum estado físico que seja autoestado do operador posição, já que um autoestado teria incerteza nula, o que não é possível para o operador posição segundo nossa hipótese inicial. Sendo assim, representaremos os vetores de estado apenas no espaço dos momentos. Entre-

tanto, como veremos, os estados de máxima localização são estados fisicamente aceitáveis e poderemos usá-los para definir uma representação de quaseposição [5].

Para a representação no espaço dos momentos temos que $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, a atuação dos operadores posição e momento sobre os vetores de estado são dadas por

$$\hat{p}.\psi(p) = \langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p\psi(p), \quad (4.17)$$

e,

$$\hat{x}.\psi(p) = \langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar(1 + \beta p^2)\frac{\partial\psi(p)}{dp}. \quad (4.18)$$

Os operadores posição e momento atuam como operadores no domínio S_∞ das funções que decaem mais rápido que qualquer potência. E, nesse domínio, ambos são simétricos, ou seja,

$$(\langle\psi|\hat{p})|\phi\rangle = \langle\psi|(\hat{p}|\phi\rangle) \quad (4.19)$$

e

$$(\langle\psi|\hat{x})|\phi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\phi\rangle), \quad (4.20)$$

com o produto interno assim definido:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p)\phi(p). \quad (4.21)$$

Como a atuação de \hat{p} retorna apenas p sua simetria é facilmente vista. E a simetria de \hat{x} é demonstrada a seguir:

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\phi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^* i\hbar(1 + \beta p^2)(\partial_p\phi). \quad (4.22)$$

Reorganizando temos

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\phi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} i\hbar(1 + \beta p^2)\psi^*(\partial_p\phi). \quad (4.23)$$

Usando que

$$\partial_p(\psi^*\phi) = \phi(\partial_p\psi^*) + \psi^*(\partial_p\phi). \quad (4.24)$$

Substituindo a Eq. (4.22) na Eq. (4.23), obtemos

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\phi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} i\hbar(1 + \beta p^2)[\partial_p(\phi\psi^*) - \phi(\partial_p\psi^*)], \quad (4.25)$$

$$\langle\psi|\hat{x}|\phi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\phi\rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p(\phi\psi^*) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} i\hbar(1 + \beta p^2)\phi(\partial_p\psi^*). \quad (4.26)$$

Note que a primeira integral da Eq. (4.26) se anula, pois no infinito as função de onda se anulam (por definição). Assim,

$$\langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle = \langle \psi | (\hat{x} | \phi \rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \left[-i\hbar(1 + \beta p^2) \phi(\partial_p \psi^*) \right]. \quad (4.27)$$

A integral da Eq. (4.27) pode ser reescrita como

$$\langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle = \langle \psi | (\hat{x} | \phi \rangle) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} [i\hbar(1 + \beta p^2) (\partial_p \psi)]^* \phi = (\langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle). \quad (4.28)$$

Assim, mostramos a simetria do operador posição.

Podemos, ainda, determinar a relação de completeza para autoestados do operador momento de

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) \phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle \psi | p \rangle \langle p | \phi \rangle = \langle \psi | \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| \right] | \phi \rangle$$

e, portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p| = 1. \quad (4.29)$$

O produto interno entre autoestados do operador momento pode ser obtido de

$$\langle p' | \psi \rangle = \psi(p') = \langle p' | \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} [\langle p' | p \rangle] \psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \delta(p - p') \psi(p)$$

e, dessa forma,

$$\langle p | p' \rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (4.30)$$

Agora que analisamos o comportamento da representação no espaço dos momentos e a ação do operador momento, vamos partir para uma análise funcional do operador posição.

4.3.2 Análise Funcional do Operador Posição

Baseado no que vimos sobre a atuação do operador posição no espaço dos momentos, podemos obter a seguinte equação de autovalores para o operador \hat{x} :

$$\begin{aligned} \langle p | \hat{x} | \psi_\lambda \rangle &= \langle p | \lambda | \psi_\lambda \rangle, \\ i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi_\lambda(p) &= \lambda \psi_\lambda(p). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Reescrevendo a Eq. (4.31) temos

$$\frac{d\psi_\lambda}{\psi_\lambda} = -i \frac{\lambda dp}{\hbar(1 + \beta p^2)}. \quad (4.32)$$

Resolvendo, obtemos os autovetores formais do operador posição como

$$\psi_\lambda(p) = c \exp\left[\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(p\sqrt{\beta})\right]. \quad (4.33)$$

Como estes são normalizáveis, temos que

$$1 = cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} = cc^* \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \quad (4.34)$$

E, por fim, obtemos

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left[\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(p\sqrt{\beta})\right]. \quad (4.35)$$

Entretanto, vale lembrar que, devido à relação de incerteza estabelecida anteriormente, estes autovetores formais não são estados físicos.

Antes de prosseguirmos, calcularemos o produto interno entre estados formais de posição $|\psi_\lambda\rangle$. Temos que

$$\langle \psi_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \exp\left[\frac{-1(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(p\sqrt{\beta})\right]. \quad (4.36)$$

Para resolver esta integral usamos a substituição $u = \frac{-1(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(p\sqrt{\beta})$ o que nos leva a $du = \frac{-1(\lambda - \lambda')}{\hbar\sqrt{\beta}} \cdot \frac{dp}{1 + \beta p^2}$ e, por fim, após a aplicação dos limites de integração, obtemos

$$\langle \psi_{\lambda'} | \psi_\lambda \rangle = \frac{2\hbar\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda - \lambda')} \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda - \lambda'}{2\hbar\sqrt{\beta}} \pi\right). \quad (4.37)$$

Note, a partir da Eq. (4.37), que os autoestados formais não são mais naturalmente ortogonais.

4.4 Recuperação da Informação da Posição e Representação Espaço de Quaseposição

Como vimos, a presença de uma incerteza mínima na posição conduz a um problema quanto ao estudo acerca dos autovetores do operador posição. Uma vez que a matriz de elementos referente ao operador posição não tem mais significado físico, não podemos mais usar a interpretação física usual para falar de posição. Contudo, as informações sobre a posição continuam acessíveis e para que possamos recuperar essas informações partiremos de um estudo envolvendo os estados de máxima localização.

4.4.1 Estados de Máxima Localização

Calcularemos explicitamente os estados $|\psi_x^{ML}\rangle$ de máxima localização em torno de uma posição x . Estes estados têm as seguintes propriedades:

$$\langle \psi_x^{ML} | \hat{x} | \psi_x^{ML} \rangle = x, \quad (4.38)$$

e,

$$(\Delta x)_{|\psi_x^{ML}\rangle} = \Delta x_0 \quad (4.39)$$

Agora, de posse desses estados, vamos refazer a dedução da relação de incerteza. Para cada estado na representação da álgebra de Heisenberg, podemos deduzir, da positividade da norma,

$$\| [\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)] |\psi\rangle \| \geq 0; \quad (4.40)$$

que

$$\langle \psi | [(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 - \left(\frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} \right)^2 (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2] |\psi\rangle \geq 0. \quad (4.41)$$

A Eq. (4.41) implica que

$$\langle \psi | (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 |\psi\rangle - \left(\frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} \right)^2 \langle \psi | (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 |\psi\rangle \geq 0. \quad (4.42)$$

Logo,

$$(\Delta x)^2 - \left(\frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} \right)^2 (\Delta p)^2 \geq 0, \quad (4.43)$$

e, portanto,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|}{2}. \quad (4.44)$$

Assim, fica claro que o estado $|\psi\rangle$ obedecerá a relação mostrada na equação anterior (Eq. (4.44)). Ou seja, no limite da região física permitida, o estado $|\psi\rangle$ obedece a relação

$$[\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)] |\psi\rangle = 0. \quad (4.45)$$

Representando a Eq. (4.45) no espaço dos momentos obtemos a seguinte equação diferencial

$$\left[i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p - \langle \hat{x} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2} (p - \langle \hat{p} \rangle) \right] \psi(p) = 0. \quad (4.46)$$

Resolvendo a Eq. (4.46) temos

$$\psi(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{4(\Delta p)^2}} \exp \left[\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar \sqrt{\beta}} - \frac{[1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2] \langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta p)^2 \sqrt{\beta}} \right) \text{arc tan}(p \sqrt{\beta}) \right]. \quad (4.47)$$

Como vimos anteriormente, os estados com incerteza mínima na posição (ou os estados

de máxima localização) que estamos buscando só podem ser obtidos fazendo $\langle \hat{p} \rangle = 0$ (vale a pena lembrar que este valor esperado do momento é representado pelo fator γ no princípio de incerteza generalizado - Eq. (4.2)). Considerando que $\langle \hat{p} \rangle = 0$ e escolhendo $\Delta p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ para que o valor da incerteza da posição seja o mínimo possível ($\Delta x_0 = \hbar \sqrt{\beta}$) a Eq. (4.47) conduz à função de onda de máxima localização no espaço dos momentos,

$$\psi_x^{ML}(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-i \frac{\langle \hat{x} \rangle \arctan(p \sqrt{\beta})}{\hbar \sqrt{\beta}}\right), \quad (4.48)$$

onde,

$$1 = NN^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} = N^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}. \quad (4.49)$$

Assim, o fator de normalização N pode ser escrito como

$$N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}. \quad (4.50)$$

Mas antes de escrevermos a forma final dos estados de máxima localização, devemos lembrar das premissas estabelecidas nas Eqs. (4.40) e (4.41). Assim, escrevemos os estados de máxima localização como

$$\psi_x^{ML}(p) = N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-i \frac{x \arctan(p \sqrt{\beta})}{\hbar \sqrt{\beta}}\right). \quad (4.51)$$

Esses estados generalizam as ondas planas no espaço dos momentos ou as funções delta de Dirac no espaço das posições, que descreveriam a máxima localização na mecânica quântica ordinária. E, ao contrário dos autoestados do operador posição, que carecem de significado físico, esses estados de máxima localização são estados físicos verdadeiros e de energia finita, visto que

$$\langle \psi_x^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_x^{ML} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m\beta}. \quad (4.52)$$

Entretanto, deve-se observar que, devido à imprecisão do espaço, os estados de máxima localização não são mutuamente ortogonais,

$$\langle \psi_{x'}^{ML} | \psi_x^{ML} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \exp\left(-i \frac{(x - x') \arctan(p \sqrt{\beta})}{\hbar \sqrt{\beta}}\right), \quad (4.53)$$

$$\langle \psi_{x'}^{ML} | \psi_x^{ML} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\tilde{p}}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{1 + \frac{\text{sen}^2(\tilde{p})}{\cos^2(\tilde{p})}} \exp\left(-i \frac{(x - x')}{\hbar \sqrt{\beta}} \tilde{p}\right), \quad (4.54)$$

$$\langle \psi_{x'}^{ML} | \psi_x^{ML} \rangle = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x - x'}{2\hbar \sqrt{\beta}} - \left(\frac{x - x'}{2\hbar \sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \text{sen} \left(\frac{x - x'}{2\hbar \sqrt{\beta}} \pi \right). \quad (4.55)$$

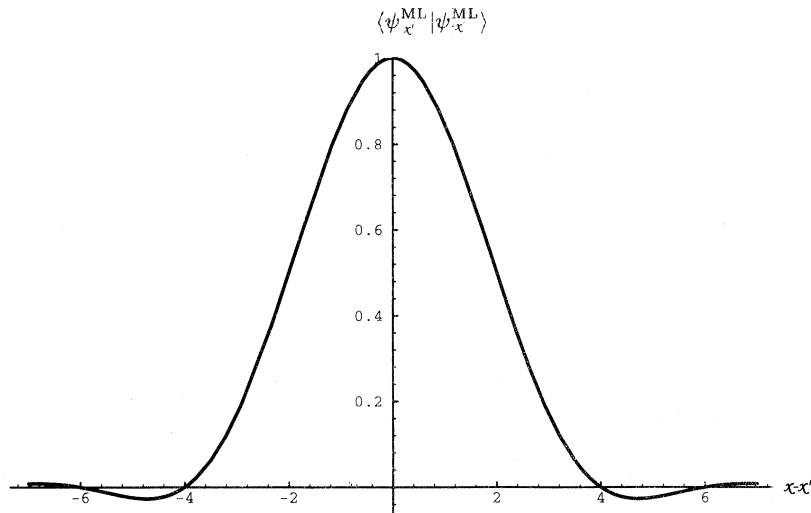


Figura 4.2.

Gráfico de $\langle \psi_{x'}^{ML} | \psi_x^{ML} \rangle$ sobre $x - x'$ em unidades de $\hbar \sqrt{\beta} = \Delta x_0$

Os polos do primeiro fator na Eq. (4.55) são cancelados pelos zeros da função seno. E, como podemos ver na Fig. 4.2, para o comprimento do pico principal note que a curva produz a superposição dos dois estados de máxima localização, cada um com um desvio padrão de Δx_0 .

4.4.2 Transformação para Funções de Onda de Quase-Posição

Na mecânica quântica ordinária, costuma-se expandir os estados $|\psi\rangle$ na base dos autoestados da posição $|x\rangle$. No entanto, não possuímos mais autoestados do operador posição. Entretanto, podemos, ainda, projetar um estado arbitrário $|\psi\rangle$ sobre um estado de máxima localização $|\psi_x^{ML}\rangle$ para obtermos a amplitude de probabilidade de encontrarmos a partícula em torno da posição x . Assim, a denominada função de onda de quaseposição é dada por

$$\psi^{qp}(x) := \langle \psi_x^{ML} | \psi \rangle. \quad (4.56)$$

No limite $\beta \rightarrow 0$ (ausência de efeitos devido a existência de uma incerteza mínima da posição) reobtemos a função de onda para a posição ordinária: $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$.

Podemos escrever a transformação de uma função de onda na representação dos momentos para a função de onda na representação de quaseposição da seguinte maneira:

$$\psi^{qp}(x) = \langle \psi_x^{ML} | \psi \rangle = \langle \psi_x^{ML} | \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \langle \psi_x^{ML} | p \rangle \langle p | \psi \rangle, \quad (4.57)$$

assim,

$$\psi^{qp}(x) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1+\beta p^2)^{3/2}} \exp\left[\frac{ix \arctan(p\sqrt{\beta})}{\hbar\sqrt{\beta}}\right] \psi^{qp}(p). \quad (4.58)$$

Esta transformação é uma generalização de uma transformada de Fourier e é invertível. Dessa forma, ainda podemos escrever a transformação da função de onda na representação de quaseposição para a função de onda na representação dos momentos como

$$\psi(p) = \frac{1}{\hbar\sqrt{8\pi\sqrt{\beta}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx (1+\beta p^2)^{1/2} \exp\left[\frac{-ix \arctan(p\sqrt{\beta})}{\hbar\sqrt{\beta}}\right] \psi(x). \quad (4.59)$$

A função de onda de quaseposição de um autoestado do momento $\psi_{\tilde{p}}(p) = \delta(p - \tilde{p})$, de energia $E = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$, continua sendo uma onda plana e^{ikx} , com $k = \frac{\arctan(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}$. Então, a relação de dispersão modificada para seu comprimento fica

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\arctan(\sqrt{2mE\beta})}, \quad (4.60)$$

visto que, por definição, $k = \frac{\lambda}{2\pi}$.

O valor para o comprimento de onda mínimo é simplesmente obtido tomando o limite da tangente tendendo ao infinito, que ocorre para um argumento igual a $\frac{\pi}{2}$. Assim, simplesmente substituir o denominador da Eq. (4.60) pelo seu limite ($\frac{\pi}{2}$) resultaria em

$$\lambda_{min.} = \lambda_0 = 4\hbar\sqrt{\beta}. \quad (4.61)$$

E, em contraste com a mecânica quântica ordinária, temos

$$E(\lambda) = \tan^2\left(\frac{2\pi\hbar\sqrt{\beta}}{\lambda}\right) \frac{1}{2m\beta}. \quad (4.62)$$

4.4.3 Representação de Quaseposição

Nesta subseção descreveremos a representação de quaseposição segundo a álgebra de Heisenberg. Usando as Eqs. (4.21) e (4.59) podemos escrever o produto escalar dos estados em termos das funções de onda de quaseposição como

$$\langle \psi | \phi \rangle = (8\pi\hbar^2\sqrt{\beta})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp dx dx' \exp\left[i(x-x') \frac{\arctan(p\sqrt{\beta})}{\hbar\sqrt{\beta}}\right] \psi^{qp*}(x) \phi^{qp}(x'). \quad (4.63)$$

Podemos ainda avaliar a operação dos operadores posição e momento nas funções de onda na representação de quaseposição. Atuando o operador momento temos

$$\langle \psi_x^{ML} | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_x)}{\sqrt{\beta}} \psi^{qp}(x), \quad (4.64)$$

e, atuando o operador posição temos

$$\langle \psi_x^{ML} | \hat{x} | \psi \rangle = \left[x + \beta \frac{\tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_x)}{\sqrt{\beta}} \right] \psi^{qp}(x). \quad (4.65)$$

É importante lembrar e pontuar neste momento que não estamos lidando aqui com o mesmo espaço de estados físicos da mecânica quântica ordinária e que, apenas quando fazemos $\beta \rightarrow 0$ retornamos ao espaço de posição ordinário. Deve-se ter em mente que existem algumas limitações quando se usa a quaseposição. Por exemplo, só é possível trabalhar com funções de onda com comprimentos de onda associados maiores que o comprimento de onda mínimo (λ_0) e que somente com essa condição satisfeita é possível definir o operador momento. Mas, também é importante destacar a importância da representação de quaseposição: esta representação possibilita termos um significado físico, ou seja, uma interpretação física direta.

4.5 Outra Representação para os Operadores Posição e Momento

Neste trabalho, descrevemos e utilizamos em nossas análises a representação dos operadores posição e momento propostas por A. Kempf, G. Magnano e R.B. Mann [5]. Contudo, no espaço de quaseposição a expressão para o operador posição envolve derivadas de x no argumento de uma tangente (veja Eq. (4.65)), o que pode levar a problemas muito complexos, tais como, potenciais que conduzem a uma equação de Schrödinger com derivadas de altas ordens.

A fim de se contornar este problema, P. Pedram propôs a seguinte representação para os operadores posição e momento¹ [12]

$$\hat{x} = \hat{x}_o \quad (4.66)$$

e

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(\sqrt{\beta} \hat{p}_o), \quad (4.67)$$

onde \hat{x}_o e \hat{p}_o são os operadores posição e momento da mecânica quântica ordinária que satisfazem a relação de comutação canônica

$$[\hat{x}_o, \hat{p}_o] = i\hbar. \quad (4.68)$$

É fácil ver que os operadores \hat{x} e \hat{p} , como representados em (4.66) e (4.67), satisfazem a relação de comutação modificada

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta \hat{p}^2), \quad (4.69)$$

a qual conduz ao princípio de incerteza generalizado (GUP).

¹Como podemos verificar em [11], A. Kempf já havia notado isso.

Os operadores \hat{x} e \hat{p} continuam sendo simétricos, ou seja,

$$\langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \phi \rangle \quad (4.70)$$

e

$$\langle \psi | P | \phi \rangle = \langle \psi | (P | \phi \rangle), \quad (4.71)$$

porém, com respeito ao produto interno

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp \psi^*(p) \phi(p). \quad (4.72)$$

A simetria de \hat{p} é óbvia e a simetria de \hat{x} pode ser vista através da integração¹

$$\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp \psi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p) = \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp \psi^*(p) \left[i\hbar \frac{\partial \psi(p)}{\partial p} \right]^* \phi(p). \quad (4.73)$$

A propriedade de simetria dos operadores posição e momento garante que todos os valores esperados sejam reais.

De forma análoga a que utilizamos durante o tratamento da representação K.M.M., podemos escrever as relações de ortogonalidade e completeza como

$$\langle p' | p \rangle = \delta(p - p'), \quad (4.74)$$

e,

$$\int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp |p\rangle \langle p| = 1. \quad (4.75)$$

Considerando $u_x = \langle p|x\rangle$, podemos escrever a seguinte equação de autovalores

$$\hat{x}u_x(p) = xu_x(p), \quad (4.76)$$

que tem como solução

$$u_x(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left(\frac{-ipx}{\hbar}\right). \quad (4.77)$$

Usando a relação de completeza (4.75) podemos obter ainda a função de onda no espaço de posição como

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} e^{\frac{ipx}{\hbar}} \psi(p) dp. \quad (4.78)$$

Agora, analisaremos como ficam os estados de máxima localização nesta representação. Inicialmente, temos, como na representação K.M.M.,

¹Note que $\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar \frac{\partial \psi(p)}{\partial p}$.

$$\langle \psi_x^{ML} | \hat{x} | \psi_x^{ML} \rangle = x, \quad (4.79)$$

e,

$$\Delta x_{|\psi_x^{ML}\rangle} = \Delta x_{mn.} = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (4.80)$$

E, estes estados maximamente localizados também satisfazem

$$\left[x - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (p - \langle \hat{p} \rangle) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (4.81)$$

No espaço dos momentos, a Eq. (4.81) fica

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial p} - \langle \hat{x} \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2} \left(\frac{\tan(\sqrt{\beta}p)}{\sqrt{\beta}} - \langle \hat{p} \rangle \right) \right] \psi(p) = 0, \quad (4.82)$$

que tem como solução

$$\psi(p) = N \cdot \exp \left[\left(-\frac{i}{\hbar} \langle \hat{x} \rangle + \frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2} \langle \hat{p} \rangle \right) p + \left(\frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta \langle \hat{p} \rangle^2}{2(\Delta p)^2} \right) \frac{\ln[\cos(\sqrt{\beta}p)]}{\beta} \right]. \quad (4.83)$$

Usando o valor crítico de Δp (Eq. (4.8)), que gera a incerteza mínima na posição e gera $\langle \hat{p} \rangle = 0$, podemos escrever a função de onda de máxima localização como

$$\psi_x^{ML}(p) = N \cdot \cos(\sqrt{\beta}p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}. \quad (4.84)$$

Após a normalização, encontramos $N = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}}$. Assim,

$$\psi_x^{ML}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \cos(\sqrt{\beta}p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}}. \quad (4.85)$$

Esses estados de máxima localização não são ortogonais,

$$\langle \psi_x^{ML} | \psi_{x'}^{ML} \rangle = \left(\sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \right)^2 \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp \cos^2(\sqrt{\beta}p) e^{-\frac{ip(x-x')}{\hbar}} = \left(\frac{8\beta^{3/2}\hbar^3}{\pi} \right) \frac{\text{sen} \left[\frac{\pi(x-x')}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right]}{(x-x')^3 - 4\beta\hbar^2(x-x')}. \quad (4.86)$$

Agora, para encontrar a função de onda na representação de quaseposição,

$$\begin{aligned} \psi^{qp}(x) &= \langle \psi_x^{ML} | \psi \rangle = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}}^{\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}} dp \cos(\sqrt{\beta}p) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(p) = \\ &= \psi^{qp}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(x + \hbar\sqrt{\beta}) + \psi(x - \hbar\sqrt{\beta})], \end{aligned} \quad (4.87)$$

ou seja, a superposição das funções de onda para $x + \hbar\sqrt{\beta}$ e $x - \hbar\sqrt{\beta}$.

Por fim, vejamos como se altera a equação de Schrödinger. Temos

$$\langle \psi_x^{ML} | \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right] | \psi \rangle = E \langle \psi_x^{ML} | \psi \rangle, \quad (4.88)$$

que se torna, nesta representação,

$$\left[\frac{\tan^2(i\hbar \sqrt{\beta} \frac{\partial}{\partial x})}{2m \sqrt{\beta}} + V(x) \right] \psi^{qp}(x) = E \psi^{qp}(x). \quad (4.89)$$

Podemos usar a aproximação $\hat{p} = \hat{p}_0 \left(1 + \frac{\beta \hat{p}_0^2}{3} \right)$ para obtermos a equação de Schrödinger até a ordem β ,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi^{qp}(x)}{dx^2} + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4 \psi^{qp}(x)}{dx^4} + V(x) \psi^{qp}(x) = E \psi^{qp}(x). \quad (4.90)$$

4.6 Conclusão

Neste capítulo abordamos as modificações geradas na mecânica quântica (especialmente na álgebra de Heisenberg) devido à existência de um comprimento mínimo, ou de uma incerteza mínima na posição. As descrições que fizemos acerca das representações nos espaços dos momentos e de quaseposição serão agora muito úteis para a análise dos potenciais aplicados à equação de Schrödinger. Mas vale a pena ressaltar que nossa descrição neste capítulo foi baseada, principalmente nas representações propostas por Achim Kempf [5]. Existem outras representações, como por exemplo a de Pouria Pedram [12] também citada neste capítulo (que utilizaremos na resolução da equação de Schrödinger no Capítulo 5), que também podem ser muito úteis na análise de alguns problemas associados à mecânica quântica num cenário de comprimento mínimo.

No próximo capítulo resolveremos a equação de Schrödinger para alguns potenciais, porém tendo como base o que foi discutido neste capítulo 4.

Capítulo 5

Mecânica Quântica num Cenário de Comprimento Mínimo: Aplicações da Equação de Schrödinger

5.1 Introdução

Agora que já conhecemos as principais alterações que a existência de um comprimento mínimo causa na mecânica quântica ordinária, estamos aptos a abordar alguns dos problemas mais estudados na mecânica quântica considerando a existência de um comprimento mínimo: o potencial degrau, a barreira de potencial e o potencial de poço infinito.

Como é bem conhecido, tais potenciais cujos valores sofrem saltos em determinados pontos são idealizações de potenciais que, embora suaves, têm seus valores variando abruptamente em regiões muito, muito pequenas do espaço. Então, parece-nos bem razoável supor que tais saltos ocorram nas "posições" que são dadas pelos valores médios do operador posição nos estados de máxima localização. Consequentemente, um salto que, classicamente, ocorre na posição x_i , consideraremos que, quanticamente, ocorre em $\langle \psi_{x_i}^{ML} | \hat{x} | \psi_{x_i}^{ML} \rangle$.

É claro que, em um cenário de comprimento mínimo, o estudo destes potenciais é conveniente ser realizado no espaço de quaseposição. Portanto, em essência, o estudo destes potenciais consiste em encontrar as soluções da equação de Schrödinger escrita no espaço de quaseposição, com os operadores posição e momentona representação da seção 4.5, isto é,

$$\langle \psi_{x_i}^{ML} | \hat{x} | \psi \rangle = x \psi^{qp}(x) \quad (5.1)$$

e

$$\langle \psi_{x_i}^{ML} | \hat{p} | \psi \rangle = \frac{\tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_x)}{\sqrt{\beta}} \psi^{qp}(x). \quad (5.2)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo, até ordem β , no espaço de quaseposição com os operadores na representação anterior fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi^{qp}(x)}{dx^2} + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4 \psi^{qp}(x)}{dx^4} + V(x) \psi^{qp}(x) = E \psi^{qp}(x). \quad (5.3)$$

Analogamente à mecânica quântica ordinária, é possível através da equação de Schrödinger dependente do tempo obter a corrente de probabilidade [13]. Da mesma forma que foi feito na seção 2.6.2, se multiplicarmos a equação de Schrödinger pelo conjugado complexo de $\psi^{qp}(x)$, ou seja, $\psi^{qp*}(x)$, e multiplicarmos a conjugação complexa da equação de Schrödinger por $\psi^{qp}(x)$ podemos obter, após algumas manipulações com as derivadas, a corrente de probabilidade j .

A equação de Schrödinger dependente do tempo, agora, tem a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi^{qp}(x, t)}{dx^2} + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4 \Psi^{qp}(x, t)}{dx^4} + V(x) \Psi^{qp}(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi^{qp}(x, t)}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Após as manipulações citadas anteriormente, obtemos

$$j = j_{ord} + j_{\beta_1} + j_{\beta_2} \quad (5.5)$$

onde

$$j_{ord} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\Psi^{qp}(x, t) \frac{\partial \Psi^{qp*}(x, t)}{\partial x} - \Psi^{qp*}(x, t) \frac{\partial \Psi^{qp}(x, t)}{\partial x} \right], \quad (5.6)$$

$$j_{\beta_1} = -\frac{i\beta \hbar^3}{m} \left[\Psi^{qp*}(x, t) \frac{\partial^3 \Psi^{qp}(x, t)}{\partial x^3} - \Psi^{qp}(x, t) \frac{\partial^3 \Psi^{qp*}(x, t)}{\partial x^3} \right] \quad (5.7)$$

e

$$j_{\beta_2} = -\frac{i\beta \hbar^3}{m} \left[\frac{\partial \Psi^{qp}(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi^{qp*}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi^{qp*}(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi^{qp}(x, t)}{\partial x^2} \right]. \quad (5.8)$$

5.2 Potencial Degrau

Como já vimos, o potencial degrau é descrito pela função

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Então, precisamos resolver a equação de Schrödinger¹ para as duas regiões, $x < 0$ e $x > 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_I(x)}{dx^2} + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4 \psi_I(x)}{dx^4} = E \psi_I(x), x < 0 \quad (5.9)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4 \psi_{II}(x)}{dx^4} + V_0 \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x), x > 0. \quad (5.10)$$

¹A partir deste ponto, por simplicidade, usaremos $\psi^{qp}(x)$ como $\psi(x)$, ou seja, abandonaremos o índice qp

A existência de um comprimento mínimo modifica, não só a equação de Schrödinger, mas também as condições de contorno. Uma vez que $|\psi(x)|^2$ representa a amplitude de probabilidade da partícula estar maximamente localizada em torno de x , a função de onda $\psi(x)$ deve ser, ainda, contínua em todos os pontos. Então, no limite $x = 0$, $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$.

Agora, vamos calcular a equação de Schrödinger para os pontos $x = 0^-$ e $x = 0^+$ e tomar o limite $x = 0$,

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2\psi_{II}(0)}{dx^2} - \frac{d^2\psi_I(0)}{dx^2} \right] + \frac{\beta\hbar^4}{3m} \left[\frac{d^4\psi_{II}(0)}{dx^4} - \frac{d^4\psi_I(0)}{dx^4} \right] = V_0\psi_{II}(0). \quad (5.11)$$

Para que $\psi_{II}(0)$ possa assumir valores diferentes de zero, a derivada quarta de $\psi(x)$ deve ser descontínua, isto é,

$$\frac{d^4\psi_{II}(0)}{dx^4} \neq \frac{d^4\psi_I(0)}{dx^4}. \quad (5.12)$$

Para que $\frac{d^4\psi(x)}{dx^4}$ seja bem definida e tenha uma descontinuidade finita em $x = 0$, devemos impor que as derivadas primeira, segunda e terceira sejam contínuas em $x = 0$.

Como fizemos no Capítulo 3, estudaremos os dois casos: $E < V_0$ e $E > V_0$.

5.2.1 Caso 1 - $E < V_0$

Neste caso, a equação de Schrödinger fica

$$\frac{d^2\varphi_I}{dx^2} - \frac{2\beta\hbar^2}{3} \frac{d^4\varphi_I}{dx^4} + k_0^2\varphi_I = 0, x < 0 \quad (5.13)$$

e

$$\frac{d^2\varphi_{II}}{dx^2} - \frac{2\beta\hbar^2}{3} \frac{d^4\varphi_{II}}{dx^4} - k_1^2\varphi_{II} = 0, x < 0 \quad (5.14)$$

onde

$$k_0 := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (5.15)$$

e

$$k_1 := \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}. \quad (5.16)$$

As soluções das equações acima são

$$\varphi_I(x) = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} + C_1e^{k_\beta x} + D_1e^{-k_\beta x} \quad (5.17)$$

$$\varphi_{II}(x) = A_2e^{k'x} + B_2e^{-k'x} + C_2e^{k'_\beta x} + D_2e^{-k'_\beta x}, \quad (5.18)$$

onde

$$k := k_0 \left(1 - \frac{\beta\hbar^2}{3} k_0^2 \right), \quad (5.19)$$

$$k' := k_1 \left(1 + \frac{\beta \hbar^2}{3} k_1^2 \right), \quad (5.20)$$

$$k_\beta := \sqrt{\frac{3}{2\beta \hbar^2} \left(1 + \frac{\beta \hbar^2}{3} k_0^2 \right)} \quad (5.21)$$

e

$$k'_\beta := \sqrt{\frac{3}{2\beta \hbar^2} \left(1 - \frac{\beta \hbar^2}{3} k_1^2 \right)}. \quad (5.22)$$

Uma vez que $\varphi_I(x \rightarrow -\infty)$ e $\varphi_{II}(x \rightarrow \infty)$ devem ser finitas, temos que $D_1 = A_2 = C_2 = 0$.

Agora, das condições de contorno $\frac{d^{(n)}\varphi_I(0)}{dx^{(n)}} = \frac{d^{(n)}\varphi_{II}(0)}{dx^{(n)}}$, para $n = 0, 1, 2$ e 3 , obtemos o sistema composto pelas seguintes equações

$$A_1 + B_1 + C_1 = B_2 + D_2 \quad (5.23)$$

$$ik(A_1 - B_1) + k_\beta C_1 = -k' B_2 - k'_\beta D_2 \quad (5.24)$$

$$-k^2(A_1 + B_1) + k_\beta^2 C_1 = k'^2 B_2 + k'^2_\beta D_2 \quad (5.25)$$

$$-ik^3(A_1 - B_1) - k_\beta^3 C_1 = -k'^3 B_2 - k'^3_\beta D_2, \quad (5.26)$$

cuja solução até $\mathcal{O}(\beta)$ é

$$B_1 = \left(\frac{k_0 - ik_1}{k_0 + ik_1} \right) A_1 - \frac{2i\beta \hbar^2 k_0 k_1 (k_0 - ik_1)}{3(k_0 + ik_1)}, \quad (5.27)$$

$$B_2 = \frac{2k_0}{k_0 + k_1} A_1 + \frac{2\beta \hbar^2 k_0 [2k_0^2 - ik_1(k_0 + ik_1)]}{3(k_0 + ik_1)}, \quad (5.28)$$

$$C_1 = \frac{2\beta \hbar^2 k_0 (k_0 - ik_1)}{3} A_1, \quad (5.29)$$

$$D_2 = -\frac{2\beta \hbar^2 k_0 (k_0 - ik_1)}{3} A_1. \quad (5.30)$$

Os resultados acima, mostram que B_1 e B_2 são de $\mathcal{O}(\beta^0)$ e C_1 e D_2 de $\mathcal{O}(\beta)$. Então, no limite $\beta = 0$, os resultados da mecânica quântica ordinária são recuperados.

Por fim, o coeficiente de reflexão

$$R = \left| \frac{B_1}{A_1} \right|^2 = 1, \quad (5.31)$$

como esperávamos.

5.2.2 Caso 2 - $E > V_0$

Neste caso, a equação de Schrödinger fica

$$\frac{d^2\varphi_I(x)}{dx^2} - \frac{2\beta\hbar^2}{3} \frac{d^4\varphi_I(x)}{dx^4} + k_0^2\varphi_I(x) = 0, x < 0 \quad (5.32)$$

e

$$\frac{d^2\varphi_{II}(x)}{dx^2} - \frac{2\beta\hbar^2}{3} \frac{d^4\varphi_{II}(x)}{dx^4} + k_2^2\varphi_{II}(x) = 0, x > 0, \quad (5.33)$$

onde

$$k_0 := \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (5.34)$$

e

$$k_2 := \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}. \quad (5.35)$$

As soluções das equações anteriores são

$$\varphi_I(x) = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx} + C_1e^{k_\beta x} + D_1e^{-k_\beta x} \quad (5.36)$$

$$\varphi_{II}(x) = A_2e^{k''x} + B_2e^{-k''x} + C_2e^{k''_\beta x} + D_2e^{-k''_\beta x}, \quad (5.37)$$

onde

$$k := k_0 \left(1 - \frac{\beta\hbar^2}{3} k_0^2 \right), \quad (5.38)$$

$$k'' := k_2 \left(1 - \frac{\beta\hbar^2}{3} k_2^2 \right), \quad (5.39)$$

$$k_\beta := \sqrt{\frac{3}{2\beta\hbar^2}} \left(1 + \frac{\beta\hbar^2}{3} k_0^2 \right) \quad (5.40)$$

e

$$k''_\beta := \sqrt{\frac{3}{2\beta\hbar^2}} \left(1 + \frac{\beta\hbar^2}{3} k_2^2 \right). \quad (5.41)$$

Uma vez que $\varphi_I(x \rightarrow -\infty)$ e $\varphi_{II}(x \rightarrow \infty)$ devem ser finitas, temos que $D_1 = C_2 = 0$. Considerando que não haja onda refletida na região $x > 0$ devemos tomar $B_2 = 0$.

Das condições de contorno $\frac{d^{(n)}\varphi_I(0)}{dx^{(n)}} = \frac{d^{(n)}\varphi_{II}(0)}{dx^{(n)}}$, para $n = 0, 1, 2$ e 3 , obtemos o sistema de equações

$$A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + D_2 \quad (5.42)$$

$$ik(A_1 - B_1) + k_\beta C_1 = -k''A_2 - k''_\beta D_2 \quad (5.43)$$

$$-k^2(A_1 + B_1) + k_\beta^2 C_1 = k''^2 A_2 + k''_\beta^2 D_2 \quad (5.44)$$

$$-ik^3(A_1 - B_1) - k_\beta^3 C_1 = -k''^3 A_2 - k''_\beta^3 D_2, \quad (5.45)$$

cuja solução até $\mathcal{O}(\beta)$ é

$$B_1 = \left(\frac{-k_0 + k_2}{k_0 + k_2} \right) A_1 + \frac{2\beta\hbar^2 k_0 k_2 (k_0 - k_2)}{3(k_0 + k_2)} A_1, \quad (5.46)$$

$$A_2 = \frac{2k_0}{k_0 + k_2} A_1 + \frac{2\beta\hbar^2 k_0 [2k_0(k_0^2 - k_2^2) + k_2(k_0^2 - 3k_2^2)]}{3(k_0 + k_2)^2} A_1, \quad (5.47)$$

$$C_1 = -\frac{2\beta\hbar^2 k_0 (k_0 - k_2)}{3} A_1, \quad (5.48)$$

$$D_2 = -\frac{2\beta\hbar^2 k_0 (k_0 - k_2)}{3} A_1. \quad (5.49)$$

Vemos que, como no caso anterior, os coeficientes B_1 e A_2 são de $\mathcal{O}(\beta^0)$ e C_1 e D_2 de $\mathcal{O}(\beta)$. Também podemos observar que, no limite $\beta = 0$, os resultados da mecânica quântica ordinária são recuperados.

Por fim, os coeficientes de reflexão e transmissão até $\mathcal{O}(\beta)$, respectivamente, são

$$R = \left(\frac{-k_0 + k_2}{k_0 + k_2} \right)^2 - \frac{4\beta\hbar^2 k_0 k_2 (k_0 - k_2)^2}{3(k_0 + k_2)^2}, \quad (5.50)$$

$$T = \frac{4k_0^2}{(k_0 + k_2)^2} + \frac{8\beta\hbar^2 k_0^2 [2k_0(k_0^2 - k_1^2) + k_1(k_0^2 - 3k_1^2)]}{3(k_0 + k_1)^3}. \quad (5.51)$$

5.3 Potencial Barreira

Vamos considerar nesta seção o problema de uma partícula de massa m "incidindo" em uma barreira de potencial $V(x)$ dado por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } 0 < x < a \\ 0 & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Uma vez que a descontinuidade do potencial é finita em $x = 0$ e $x = a$, nossa análise anterior sobre a continuidade da função de onda e de suas derivadas continua válida.

Como no problema anterior, existem dois casos a serem estudados: $E > V_0$ e $E < V_0$.

5.3.1 Caso 1 - $E < V_0$

Para este caso temos que

$$\varphi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} + C_1 e^{k_\beta x}, x < 0, \quad (5.52)$$

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x} + C_2 e^{k'_\beta x} + D_2 e^{-k'_\beta x}, 0 < x < a \quad (5.53)$$

e

$$\varphi_I(x) = A_3 e^{ikx} + D_3 e^{-k_\beta x}, x > a, \quad (5.54)$$

Impondo a continuidade da função de onda e de suas derivadas nos pontos $x = 0$ e $x = a$, $\frac{d^n \varphi_I(0)}{dx^n} = \frac{d^n \varphi_{II}(0)}{dx^n}$ e $\frac{d^n \varphi_{II}(a)}{dx^n} = \frac{d^n \varphi_{III}(a)}{dx^n}$, com $n = 0, 1, 2, 3$, obtemos o sistema de equações

$$A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2 + D_2, \quad (5.55)$$

$$ikA_1 - ikB_1 + k_\beta C_1 = k'A_2 - k'B_2 + k'_\beta C_2 - k'_\beta D_2, \quad (5.56)$$

$$-k^2 A_1 - k^2 B_1 + k_\beta^2 C_1 = k'^2 A_2 + k'^2 B_2 + k_\beta^2 C_2 + k_\beta^2 D_2, \quad (5.57)$$

$$-ik^3 A_1 + ik^3 B_1 + k_\beta^3 C_1 = k'^3 A_2 - k'^3 B_2 + k_\beta^3 C_2 - k_\beta^3 D_2, \quad (5.58)$$

$$e^{k'a} A_2 + e^{-k'a} B_2 + e^{k'_\beta a} C_2 + e^{-k'_\beta a} D_2 = e^{ika} A_3 + e^{-k_\beta a} D_3, \quad (5.59)$$

$$k' e^{k'a} A_2 - k' e^{-k'a} B_2 + k'_\beta e^{k'_\beta a} C_2 - k'_\beta e^{-k'_\beta a} D_2 = ik e^{ika} A_3 - k_\beta e^{-k_\beta a} D_3, \quad (5.60)$$

$$k'^2 e^{k'a} A_2 + k'^2 e^{-k'a} B_2 + k_\beta^2 e^{k'_\beta a} C_2 + k_\beta^2 e^{-k'_\beta a} D_2 = -k^2 e^{ika} A_3 + k_\beta^2 e^{-k_\beta a} D_3, \quad (5.61)$$

$$k'^3 e^{k'a} A_2 - k'^3 e^{-k'a} B_2 + k_\beta^3 e^{k'_\beta a} C_2 - k_\beta^3 e^{-k'_\beta a} D_2 = -ik^3 e^{ika} A_3 - k_\beta^3 e^{-k_\beta a} D_3. \quad (5.62)$$

A solução do sistema acima foi encontrada por meio do software Mathematica 11.0, e o código com os respectivos resultados gerados se encontram no apêndice A. Devido a complexidade dos resultados, a análise da solução requer um longo e enfadonho trabalho, o qual está além dos nossos objetivos.

5.3.2 Caso 2 - $E > V_0$

Para este caso temos que

$$\varphi_I(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} + C_1 e^{k_\beta x}, x < 0, \quad (5.63)$$

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{ik'x} + B_2 e^{-ik'x} + C_2 e^{k'_\beta x} + D_2 e^{-k'_\beta x}, 0 < x < a \quad (5.64)$$

e

$$\varphi_{III}(x) = A_3 e^{ikx} + D_3 e^{-k_\beta x}, x > a, \quad (5.65)$$

Impondo a continuidade da função de onda e de suas derivadas primeira, segunda e terceira nos pontos $x = 0$ e $x = a$, obtemos o sistema de equações

$$A_1 + B_1 + C_1 = A_2 + B_2 + C_2 + D_2, \quad (5.66)$$

$$ikA_1 - ikB_1 + k_\beta C_1 = ik''A_2 - ik''B_2 + k''_\beta C_2 - k''_\beta D_2, \quad (5.67)$$

$$-k^2A_1 - k^2B_1 + k_\beta^2 C_1 = -k''^2A_2 - k''^2B_2 + k''_\beta^2 C_2 + k''_\beta^2 D_2, \quad (5.68)$$

$$-ik^3A_1 + ik^3B_1 + k_\beta^3 C_1 = ik''^3A_2 + ik''^3B_2 + k''_\beta^3 C_2 - k''_\beta^3 D_2, \quad (5.69)$$

$$e^{ik''a}A_2 + e^{-ik''a}B_2 + e^{k''_\beta a}C_2 + e^{-k''_\beta a}D_2 = e^{ika}A_3 + e^{-k_\beta a}D_3, \quad (5.70)$$

$$ik''e^{ik''a}A_2 - ik''e^{-ik''a}B_2 + k''_\beta e^{k''_\beta a}C_2 - k''_\beta e^{-k''_\beta a}D_2 = ik e^{ika}A_3 - k_\beta e^{-k_\beta a}D_3, \quad (5.71)$$

$$-k''^2e^{ik''a}A_2 - k''^2e^{-ik''a}B_2 + k''_\beta^2 e^{k''_\beta a}C_2 + k''_\beta^2 e^{-k''_\beta a}D_2 = -k^2 e^{ika}A_3 + k_\beta^2 e^{-k_\beta a}D_3, \quad (5.72)$$

$$-ik''^3e^{ik''a}A_2 + k''^3e^{-ik''a}B_2 + k''_\beta^3 e^{k''_\beta a}C_2 - k''_\beta^3 e^{-k''_\beta a}D_2 = -ik^3 e^{ika}A_3 - k_\beta^3 e^{-k_\beta a}D_3. \quad (5.73)$$

A solução do sistema anterior foi encontrada através do software Mathematica 11.0, e o código utilizado, juntamente com as respectivas soluções, encontra-se no Apêndice B. Da mesma forma que no caso anterior, devido a sua complexidade, nós não realizaremos uma análise da solução.

5.4 Poço Quadrado Infinito

Por fim, vamos considerar o potencial de um poço quadrado infinito,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ 0 & \text{para } 0 < x < a \\ \infty & \text{para } x > a. \end{cases}$$

Uma vez que nas regiões $x < 0$ e $x > a$ o potencial é infinito, a equação Schrödinger modificada impõe que a função de onda nessas regiões deve ser nula, isto é, a densidade de probabilidade de encontrarmos a partícula nessas regiões deve ser nula.

Integrando a equação de Schrödinger modificada temos

$$\frac{-\hbar^2}{2m}[\varphi'(x_1+\epsilon) - \varphi'(x_1-\epsilon)] + \frac{\beta\hbar^4}{3m}[\varphi'''(x_1+\epsilon) - \varphi'''(x_1-\epsilon)] + \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} V(x)\varphi(x)dx = E \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} \varphi(x)dx, \quad (5.74)$$

onde $x_1 = 0$ ou a . Agora, tomando o limite $\epsilon = 0$, fica claro que a derivada terceira de $\varphi(x)$, em x_1 , tem uma descontinuidade infinita. Essa descontinuidade não finita da derivada terceira de $\varphi(x)$ não permite considerarmos a derivada segunda de $\varphi(x)$ contínua. Agora, sobre a derivada primeira não temos informações. Em uma primeira hipótese, vamos considerar que a derivada primeira seja contínua nos pontos $x = 0$ e $x = a$,

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0$$

e

$$\frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(a)}{dx} = 0.$$

A solução da equação de Schrödinger para o interior do poço é dada por

$$\varphi(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} + C_1 e^{k_\beta x} + D_1 e^{-k_\beta x}. \quad (5.75)$$

Redefinindo as constantes como $A_1 := \frac{B-iA}{2}$, $B_1 := \frac{B+iA}{2}$, $C_1 := \frac{D+C}{2}$ e $D_1 := \frac{D-C}{2}$, a solução pode ser convenientemente escrita como

$$\varphi(x) = A \text{sen}(kx) + B \text{cos}(kx) + C \text{senh}(k_\beta x) + D \text{cosh}(k_\beta x). \quad (5.76)$$

Das condições de contorno obtemos o sistema de equações

$$B + D = 0, \quad (5.77)$$

$$kA + k_\beta C = 0, \quad (5.78)$$

$$A \text{sen}(ka) + B \text{cos}(ka) + C \text{senh}(k_\beta a) + D \text{cosh}(k_\beta a) = 0, \quad (5.79)$$

$$kA \text{cos}(ka) - kB \text{sen}(ka) + k_\beta C \text{cosh}(k_\beta a) - k_\beta D \text{senh}(k_\beta a) = 0. \quad (5.80)$$

O sistema de equações acima somente admitirá solução não-trivial se o determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & k_\beta & 0 \\ \text{sen}(ka) & \text{cos}(ka) & \text{senh}(k_\beta a) & \text{cosh}(k_\beta a) \\ k \text{cos}(ka) & -k \text{sen}(ka) & k_\beta \text{cosh}(k_\beta a) & -k_\beta \text{senh}(k_\beta a) \end{vmatrix}$$

for nulo. Portanto,

$$2 \text{cos}(ka) \text{cosh}(k_\beta a) + \frac{k^2 + k_\beta^2}{k_\beta k} \text{sen}(ka) \text{senh}(k_\beta a) - \text{cosh}(2k_\beta a) = 1. \quad (5.81)$$

A equação acima mostra que a energia somente pode assumir valores para os quais a equação transcendental é satisfeita. Contudo, uma rápida avaliação do limite $\beta \rightarrow 0$ mostra também que $k_\beta \rightarrow \infty$ e que, portanto, no limite $\beta \rightarrow 0$ a equação é inconsistente. Assim, nossa hipótese da continuidade da derivada primeira não é adequada, pois conduz a uma inconsistência. Mas a ausência das duas equações de continuidade da derivada primeira nos deixa com um sistema de duas equações para quatro incógnitas.

Esse problema tem sido contornado [14] considerando que, para $x = 0$, as soluções $\text{cos}(kx)$ e $\text{cosh}(k_\beta x)$ devem ser descartadas e que, para $x = a$, a solução $\text{senh}(k_\beta x)$ também deve ser descartada. Assim, temos

$$\varphi(x) = A \text{sen}(kx). \quad (5.82)$$

A condição de contorno $\varphi(x = a) = 0$ nos permite determinar a energia como

$$\left(k_0 - \frac{\beta \hbar^2 k_0^3}{3}\right)a = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.83)$$

Fazendo $k_0 = \frac{n\pi}{a} + A\beta$ temos que

$$A = \frac{n^3 \pi^3 \hbar^2}{3a^3}. \quad (5.84)$$

Então, $k_0 = \frac{n\pi}{a} \left(1 + \frac{\beta n^3 \pi^3 \hbar^2}{3a^3}\right)$.

Assim, a energia é dada por

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m} \left(1 + \frac{2\beta \pi^2 \hbar^2 n^2}{3a^2}\right), n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.85)$$

Note que, no limite $\beta = 0$ recuperamos o resultado da mecânica quântica ordinária.

5.5 Conclusão

A análise dos casos dos potenciais para a equação de Schrödinger em um cenário de comprimento mínimo nos conduziu a resultados que mostram, como era esperado, que a presença de um comprimento mínimo e, conseqüentemente, de uma incerteza mínima na posição gera diferenças nas soluções e nos parâmetros obtidos ao final dos cálculos.

Nos três casos é possível notar que houve alterações relacionadas ao comprimento mínimo. Entretanto, é interessante observar que em todos os casos, no limite $\beta = 0$, era possível retornar aos resultados da mecânica quântica ordinária.

Capítulo 6

Conclusão

Conforme mencionado na introdução deste trabalho, a inserção de uma incerteza mínima na posição traz mudanças à teoria quântica. E, nosso objetivo era compreender melhor essas mudanças e os novos desdobramentos causados por essas mudanças. E, antes de começar essa análise, fizemos uma breve revisão da mecânica quântica ordinária.

Logo nos dois primeiros capítulos deste trabalho pudemos observar que, de fato, a mecânica quântica ordinária é uma teoria muito bem sucedida e muito bem embasada. E, conforme vimos no capítulo 3, através da equação de Schrödinger é possível compreender muito bem o comportamento de partículas quânticas em situações bem definidas. E além das situações tratadas neste trabalho há várias outras possibilidades de uso para a equação de Schrödinger.

Já no capítulo 4 foi possível ver que, apesar de bem estabelecida, a mecânica quântica ordinária pode evoluir e sofrer modificações para se adaptar às novas teorias, como a ideia de um comprimento mínimo. E, neste capítulo, vimos que a ideia de uma mecânica quântica em um cenário de comprimento mínimo pode ser bem descrita sem grandes perdas devido às limitações impostas pela existência de um comprimento mínimo e , conseqüentemente, de uma incerteza mínima na posição. Descrevemos, de uma forma que fique clara ao leitor, o formalismo da mecânica quântica em um cenário de comprimento mínimo e suas conseqüências.

Por fim, no capítulo 5, como uma forma de aplicar o que vimos no capítulo anterior, observamos que a inserção de um comprimento mínimo na mecânica quântica gera alterações relevantes na própria equação de Schrödinger e nos resultados obtidos a partir desta, quando comparados com os resultados da mecânica quântica ordinária. Entre essas mudanças é possível destacar as alterações dependentes do comprimento mínimo que aparecem nos coeficientes de transmissão e reflexão, e a mudança na expressão para os níveis de energia para uma partícula quântica para o caso do poço quadrado infinito.

Mas, apesar dessas mudanças, a teoria se comporta bem quando fazemos o limite $\beta \rightarrow 0$, ou seja, retornamos à mecânica quântica ordinária. Mesmo com as alterações, vimos que a conservação dos coeficientes de reflexão e transmissão se manteve. Além disso, a

expressão obtida para os níveis de energia no poço quadrado infinito nitidamente retorna à expressão da mecânica quântica ordinária no limite $\beta \rightarrow 0$.

Sendo assim, a mecânica quântica em um cenário de comprimento mínimo, apesar de ainda estar em fase de construção, apresenta resultados não só interessantes, mas também compatíveis com a mecânica quântica ordinária. E, neste trabalho, pudemos, assim como desejado, estudar e compreender de forma mais clara os desdobramentos causados pela existência de uma incerteza mínima na posição. Entretanto, como foi dito no capítulo 5, existem tópicos e análises de problemas mais avançadas relativas a solução da equação de Schrödinger modificada. Agora, de posse do "background" necessário, seria possível, em outra pesquisa, realizar essas análises.

Referências Bibliográficas

- [1] Planck, M. On the law of the energy distribution in the normal spectrum. *Ann. Phys* **4**, 90 (1901).
- [2] Heisenberg, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Zeitschrift für Physik* **43**, 172–198 (1927).
- [3] Schrödinger, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review* **28**, 1049 (1926).
- [4] Hossenfelder, S. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Rev. Relativity* **16**, 90 (2013).
- [5] Kempf, A., Mangano, G. & Mann, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev.* **D52**, 1108–1118 (1995).
- [6] Arons, A. & Peppard, M. Einstein’s proposal of the photon concept—a translation of the annalen der physik paper of 1905. *American Journal of Physics* **33**, 367–374 (1965).
- [7] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloe, F. *Quantum Mechanics, Volume 1* (Wiley, 1991).
- [8] Sakurai, J. J. & Napolitano, J. *Modern quantum mechanics* (Addison-Wesley, 2011).
- [9] Eisberg, R. & Resnick, R. *Física Quântica* (Elsevier, 1979).
- [10] Hossenfelder, S. A note on theories with a minimal length. *Classical and Quantum Gravity* **23**, 1815 (2006). URL <http://stacks.iop.org/0264-9381/23/i=5/a=N01>.
- [11] Kempf, A. & Mangano, G. Minimal length uncertainty relation and ultraviolet regularization. *Phys. Rev. D* **55**, 7909–7920 (1997). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.7909>.
- [12] Pedram, P. New approach to nonperturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty. *Phys. Rev. D* **85**, 024016 (2012). URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.024016>.
- [13] Das, S. & Vagenas, E. C. Phenomenological implications of the generalized uncertainty principle this paper was presented at the theory canada 4 conference, held at centre

- de recherches mathématiques, montréal, québec, canada on 4–7 june 2008. *Canadian Journal of Physics* **87**, 233–240 (2009). URL <http://dx.doi.org/10.1139/P08-105>. <http://dx.doi.org/10.1139/P08-105>.
- [14] Nozari, K. & Azizi, T. Some aspects of gravitational quantum mechanics. *General Relativity and Gravitation* **38**, 735–742 (2006).

Apêndice A

Apêndice A - Código Mathematica relativo à Seção 5.3.1

No código a seguir temos que:

$$A_1 = x, \tag{A.1}$$

$$B_1 = y, \tag{A.2}$$

$$C_1 = z, \tag{A.3}$$

$$A_2 = w, \tag{A.4}$$

$$B_2 = u, \tag{A.5}$$

$$C_2 = r, \tag{A.6}$$

$$D_2 = t, \tag{A.7}$$

$$A_3 = v, \tag{A.8}$$

$$D_3 = s. \tag{A.9}$$

In[1]= Solve[{x + y + z == w + u + r + t, I * k * x - I * k * y + k_β * z == k₁ * w - k₁ * u + k_{β1} * r - k_{β1} * t,
 [resolve [unidade ... [unidade imaginária

$$-k^2 * x - k^2 * y + k_{\beta}^2 * z == k_1^2 * w + k_1^2 * u + k_{\beta1}^2 * r + k_{\beta1}^2 * t,$$

$$-I * k^3 * x + I * k^3 * y + k_{\beta}^3 * z == k_1^3 * w - k_1^3 * u + k_{\beta1}^3 * r - k_{\beta1}^3 * t,$$

[unidade i... [unidade imaginária

$$e^{k_1 * a} * w + e^{-k_1 * a} * u + e^{k_{\beta1} * a} * r + e^{-k_{\beta1} * a} * t == e^{I * k * a} * v + e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

$$k_1 * e^{k_1 * a} * w - k_1 * e^{-k_1 * a} * u + k_{\beta1} * e^{k_{\beta1} * a} * r - k_{\beta1} * e^{-k_{\beta1} * a} * t == I * k * e^{I * k * a} * v - k_{\beta} * e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

[unidade imaginária

$$k_1^2 * e^{k_1 * a} * w + k_1^2 * e^{-k_1 * a} * u + k_{\beta1}^2 * e^{k_{\beta1} * a} * r + k_{\beta1}^2 * e^{-k_{\beta1} * a} * t == -k^2 * e^{I * k * a} * v + k_{\beta}^2 * e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

$$k_1^3 * e^{k_1 * a} * w - k_1^3 * e^{-k_1 * a} * u + k_{\beta1}^3 * e^{k_{\beta1} * a} * r - k_{\beta1}^3 * e^{-k_{\beta1} * a} * t == -I * k^3 * e^{I * k * a} * v - k_{\beta}^3 * e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

[unidade imaginária

{x, y, z, w, u, r, t, v, s}]

... Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{4k(k + i k_{\beta})} w \right. \right. \\
\left. \left(2(i k + k_1)(k_1 - k_{\beta}) + \frac{2e^{a(k_1 + k_{\beta1})}(-i k + k_1)(k_1 + k_{\beta})(k + i k_{\beta1})(k_{\beta} + k_{\beta1})}{(k - i k_{\beta1})(-k_{\beta} + k_{\beta1})} - \right. \right. \\
\left. \left(e^{a(k_1 - k_{\beta1})}(-i k + k_1)(k_1 + k_{\beta})(k_1 + k_{\beta1}) \left(-i k k_{\beta} + i k k_{\beta1} - k_{\beta} k_{\beta1} + k_{\beta1}^2 - \right. \right. \right. \\
\left. \left. \left. \frac{e^{2a k_{\beta1}}(-i k + k_{\beta1})^2(k_{\beta} + k_{\beta1})^2}{(i k + k_{\beta1})(-k_{\beta} + k_{\beta1})} \right) \right) / (k_{\beta1}(-i k + k_{\beta1})(k_{\beta} + k_{\beta1})) + \right. \\
\left. (e^{-a k_{\beta1}}(k + i k_1)(-k_{\beta} k_{\beta1}(k_{\beta}^2((e^{a k_1} - 2e^{a k_{\beta1}} + e^{a(k_1 + 2k_{\beta1})})k + i e^{a k_1}(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}) + \right. \\
k_{\beta1}^2((e^{a k_1} + 2e^{a k_{\beta1}} + e^{a(k_1 + 2k_{\beta1})})k + i e^{a k_1}(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}) + \\
2e^{a k_1}k_{\beta}k_{\beta1}((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1})) + \\
k_1(k_{\beta}^2 - k_{\beta1}^2)(k_{\beta1}((e^{a k_1} - 2e^{a k_{\beta1}} + e^{a(k_1 + 2k_{\beta1})})k + i e^{a k_1}(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}) + \\
k_{\beta}(e^{a k_1}(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(e^{a k_1} - 2e^{a k_{\beta1}} + e^{a(k_1 + 2k_{\beta1})})k_{\beta1})) + \\
k_1^2(2e^{a k_1}k_{\beta}k_{\beta1}((1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}) + \\
k_{\beta1}^2(e^{a k_1}(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(e^{a k_1} - 2e^{a k_{\beta1}} + e^{a(k_1 + 2k_{\beta1})})k_{\beta1}) + \\
k_{\beta}^2(e^{a k_1}(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(e^{a k_1} + 2e^{a k_{\beta1}} + e^{a(k_1 + 2k_{\beta1})})k_{\beta1})) \\
(k_1^3(i k_{\beta}^2((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k^2 + 2i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - (-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}^2) + \\
i k_{\beta1}^2((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k^2 + 2i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - (-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}^2) + \\
2k_{\beta}k_{\beta1}(i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k^2 - 2(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}^2)) + \\
k k_{\beta}k_{\beta1}(2k_{\beta}k_{\beta1}((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k^2 + 2i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - (-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}^2) + \\
k_{\beta1}^2((1 + e^{2a k_{\beta1}} + 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k^2 + 2i(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - \\
(1 + e^{2a k_{\beta1}} - 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k_{\beta1}^2) + k_{\beta}^2((1 + e^{2a k_{\beta1}} - 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k^2 + \\
2i(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - (1 + e^{2a k_{\beta1}} + 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k_{\beta1}^2)) - \\
k_1^2(k_{\beta1}^2((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(1 + e^{2a k_{\beta1}} - 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k_{\beta1})(k^2 + k_{\beta1}^2) + \\
i k_{\beta}^3((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k^2 + 2i(1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - (-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}^2) + \\
k_{\beta}k_{\beta1}(2(1 + e^{2a k_{\beta1}})k^3 + 3i(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k^2 k_{\beta1} + i(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k_{\beta1}^3) + \\
k_{\beta}^2((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k^3 + i(3 + 3e^{2a k_{\beta1}} + 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k^2 k_{\beta1} - \\
3(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1}^2 - i(1 + e^{2a k_{\beta1}} - 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k_{\beta1}^3)) + \\
k_1(k_{\beta}^3((-1 + e^{2a k_{\beta1}})k + i(1 + e^{2a k_{\beta1}} - 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k_{\beta1})(k^2 + k_{\beta1}^2) - k k_{\beta1}^3 \\
((1 + e^{2a k_{\beta1}} - 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k^2 + 2i(-1 + e^{2a k_{\beta1}})k k_{\beta1} - (1 + e^{2a k_{\beta1}} + 2e^{a(k_1 + k_{\beta1})})k_{\beta1}^2)) \left. \right\}$$

$$\begin{aligned}
& k_1^3 \left(2 e^{a k_{\beta 1}} \left(1 + e^{2 a k_1} \right) k_{\beta}^3 k_{\beta 1} + e^{a k_1} \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta}^2 \left(k^2 + k_{\beta 1}^2 \right) + \right. \\
& \quad \left. e^{a k_1} \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1}^2 \left(k^2 + k_{\beta 1}^2 \right) + \right. \\
& \quad \left. 2 k_{\beta} k_{\beta 1} \left(e^{a k_1} \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k^2 + \left(e^{a k_1} - e^{a k_{\beta 1}} - e^{a \left(2 k_1 + k_{\beta 1} \right)} + e^{a \left(k_1 + 2 k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1}^2 \right) \right) \right) / \\
& \left(\left(k - i k_1 \right) \left(k - i k_{\beta} \right) \left(k - i k_{\beta 1} \right) \left(k + i k_{\beta 1} \right) \right. \\
& \quad \left(-k_{\beta} k_{\beta 1} \left(k_{\beta}^2 \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. k_{\beta 1}^2 \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} + 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 k_{\beta} k_{\beta 1} \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) \right) \right) - \\
& \quad k_1 \left(k_{\beta}^2 - k_{\beta 1}^2 \right) \left(k_{\beta 1} \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. k_{\beta} \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) \right) + \\
& \quad k_1^2 \left(2 k_{\beta} k_{\beta 1} \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. k_{\beta 1}^2 \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. k_{\beta}^2 \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} + 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) \right) \right) \Big), \\
s \rightarrow & \left(2 e^{a k_{\beta}} w \left(k + i k_1 \right) \left(k_1 - k_{\beta 1} \right) \left(k_1 + k_{\beta 1} \right) \left(e^{a k_{\beta 1}} \left(-1 + e^{2 a k_1} \right) k_1^2 k_{\beta 1} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. i e^{a k_{\beta 1}} \left(-1 + e^{2 a k_1} \right) k k_{\beta} k_{\beta 1} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. k_1 \left(k_{\beta 1} \left(i \left(e^{a k_1} - e^{a k_{\beta 1}} - e^{a \left(2 k_1 + k_{\beta 1} \right)} + e^{a \left(k_1 + 2 k_{\beta 1} \right)} \right) k - e^{a k_1} \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. k_{\beta} \left(i e^{a k_1} \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + \left(-e^{a k_1} + e^{a k_{\beta 1}} + e^{a \left(2 k_1 + k_{\beta 1} \right)} - e^{a \left(k_1 + 2 k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) \right) \right) \right) \Big) / \\
& \left(\left(i k + k_{\beta} \right) \left(k_{\beta} k_{\beta 1} \left(k_{\beta}^2 \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. k_{\beta 1}^2 \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} + 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 k_{\beta} k_{\beta 1} \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) \right) \right) + \\
& \quad k_1 \left(k_{\beta}^2 - k_{\beta 1}^2 \right) \left(k_{\beta 1} \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. k_{\beta} \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) \right) - \\
& \quad k_1^2 \left(2 k_{\beta} k_{\beta 1} \left(\left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. k_{\beta 1}^2 \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} - 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) + \right. \\
& \quad \left. k_{\beta}^2 \left(\left(-1 + e^{2 a k_{\beta 1}} \right) k + i \left(1 + e^{2 a k_{\beta 1}} + 2 e^{a \left(k_1 + k_{\beta 1} \right)} \right) k_{\beta 1} \right) \right) \right) \Big) \Big\}
\end{aligned}$$

Apêndice B

Apêndice B - Código Mathematica relativo à Seção 5.3.2

No código a seguir temos que:

$$A_1 = x, \tag{B.1}$$

$$B_1 = y, \tag{B.2}$$

$$C_1 = z, \tag{B.3}$$

$$A_2 = w, \tag{B.4}$$

$$B_2 = u, \tag{B.5}$$

$$C_2 = r, \tag{B.6}$$

$$D_2 = t, \tag{B.7}$$

$$A_3 = v, \tag{B.8}$$

$$D_3 = s. \tag{B.9}$$

Solve[

resolve

$$\{x + y + z == w + u + r + t, I * k * x - I * k * y + k_{\beta} * z == I * k_2 * w - I * k_2 * u + k_{\beta 2} * r - k_{\beta 2} * t,$$

$$-k^2 * x - k^2 * y + k_{\beta}^2 * z == -k_2^2 * w - k_2^2 * u + k_{\beta 2}^2 * r + k_{\beta 2}^2 * t,$$

$$-I * k^3 * x + I * k^3 * y + k_{\beta}^3 * z == -I * k_2^3 * w + I * k_2^3 * u + k_{\beta 2}^3 * r - k_{\beta 2}^3 * t,$$

$$e^{I * k_2 * a} * w + e^{-I * k_2 * a} * u + e^{k_{\beta 2} * a} * r + e^{-k_{\beta 2} * a} * t == e^{I * k * a} * v + e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

$$I * k_2 * e^{I * k_2 * a} * w - I * k_2 * e^{-I * k_2 * a} * u + k_{\beta 2} * e^{k_{\beta 2} * a} * r - k_{\beta 2} * e^{-k_{\beta 2} * a} * t ==$$

$$I * k * e^{I * k * a} * v - k_{\beta} * e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

$$-k_2^2 * e^{I * k_2 * a} * w - k_2^2 * e^{-I * k_2 * a} * u + k_{\beta 2}^2 * e^{k_{\beta 2} * a} * r + k_{\beta 2}^2 * e^{-k_{\beta 2} * a} * t ==$$

$$-k^2 * e^{I * k * a} * v + k_{\beta}^2 * e^{-k_{\beta} * a} * s,$$

$$-I * k_2^3 * e^{I * k_2 * a} * w + I * k_2^3 * e^{-I * k_2 * a} * u + k_{\beta 2}^3 * e^{k_{\beta 2} * a} * r - k_{\beta 2}^3 * e^{-k_{\beta 2} * a} * t ==$$

$$-I * k^3 * e^{I * k * a} * v - k_{\beta}^3 * e^{-k_{\beta} * a} * s\},$$

{x, y, z, w, u, r, t, v, s}]

*** Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{1}{4k(k + i k_{\beta})} w \right. \right.$$

$$\left. \left(-2(k + k_2)(k_2 + i k_{\beta}) - \frac{2e^a(i k_2 + k_{\beta 2})(-k + k_2)(k_2 - i k_{\beta})(k + i k_{\beta 2})(k_{\beta} + k_{\beta 2})}{(k - i k_{\beta 2})(-k_{\beta} + k_{\beta 2})} + \right. \right.$$

$$\left. \left(e^{i a k_2 - a k_{\beta 2}}(-k + k_2)(k_2 - i k_{\beta})(i k_2 + k_{\beta 2}) \left(-i k k_{\beta} + i k k_{\beta 2} - k_{\beta} k_{\beta 2} + k_{\beta 2}^2 - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{e^{2 a k_{\beta 2}}(-i k + k_{\beta 2})^2(k_{\beta} + k_{\beta 2})^2}{(i k + k_{\beta 2})(-k_{\beta} + k_{\beta 2})} \right) \right) / (k_{\beta 2}(-i k + k_{\beta 2})(k_{\beta} + k_{\beta 2})) +$$

$$(e^{-a k_{\beta 2}}(-k + k_2)(k_{\beta} k_{\beta 2}(k_{\beta}^2((e^{i a k_2} - 2e^{a k_{\beta 2}} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}})k + i e^{i a k_2}(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}) +$$

$$k_{\beta 2}^2((e^{i a k_2} + 2e^{a k_{\beta 2}} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}})k + i e^{i a k_2}(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}) +$$

$$2e^{i a k_2}k_{\beta}k_{\beta 2}((-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k + i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2})) +$$

$$k_2(k_{\beta}^2 - k_{\beta 2}^2)(k_{\beta 2}(-i(e^{i a k_2} - 2e^{a k_{\beta 2}} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}})k + e^{i a k_2}(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}) +$$

$$k_{\beta}(-i e^{i a k_2}(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k + (e^{i a k_2} - 2e^{a k_{\beta 2}} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2})) +$$

$$k_2^2(2e^{i a k_2}k_{\beta}k_{\beta 2}((1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k + i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}) +$$

$$k_{\beta 2}^2(e^{i a k_2}(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k + i(e^{i a k_2} - 2e^{a k_{\beta 2}} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}) +$$

$$k_{\beta}^2(e^{i a k_2}(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k + i(e^{i a k_2} + 2e^{a k_{\beta 2}} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}))$$

$$(k_{\beta}^3(k_{\beta}^2(-i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^2 + 2(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} + i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}^2) +$$

$$k_{\beta}^2(-i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^2 + 2(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} + i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}^2) +$$

$$2k_{\beta}k_{\beta 2}(-i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^2 + 2(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} + i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}^2)) +$$

$$k k_{\beta}k_{\beta 2}(2k_{\beta}k_{\beta 2}(-i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^2 + 2(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} + i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}^2) +$$

$$k_{\beta}^2(-i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}} + 2e^{a(i k_2 + k_{\beta 2})})k^2 + 2(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} +$$

$$i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2e^{a(i k_2 + k_{\beta 2})})k_{\beta 2}^2) + k_{\beta}^2(-i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2e^{a(i k_2 + k_{\beta 2})})k^2 +$$

$$2(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} + i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}} + 2e^{a(i k_2 + k_{\beta 2})})k_{\beta 2}^2)) +$$

$$k_2^2(k_{\beta 2}^2(-i(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k + (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2e^{a(i k_2 + k_{\beta 2})})k_{\beta 2})(k^2 + k_{\beta 2}^2) +$$

$$k_{\beta}^3((-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^2 + 2i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k k_{\beta 2} - (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}^2) +$$

$$k_{\beta}k_{\beta 2}(-2i(1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^3 + 3(-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k^2 k_{\beta 2} + (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}})k_{\beta 2}^3) +$$

$$\begin{aligned}
v \rightarrow & \left(2 e^{-i a k} w (k_2 - i k_{\beta 2}) (k_2 + i k_{\beta 2}) (-i e^{a k_{\beta 2}} (-1 + e^{2 i a k_2}) k_2^2 k_{\beta 2} (-k_{\beta}^2 + k_{\beta 2}^2) - \right. \\
& i e^{a k_{\beta 2}} (-1 + e^{2 i a k_2}) k_2^2 k_{\beta}^2 k_{\beta 2} (-k_{\beta}^2 + k_{\beta 2}^2) + \\
& i e^{a k_{\beta 2}} (-1 + e^{2 i a k_2}) k_2^2 (k^2 + k_{\beta}^2) k_{\beta 2} (-k_{\beta}^2 + k_{\beta 2}^2) + \\
& k_2 k_{\beta} (2 e^{a k_{\beta 2}} (1 + e^{2 i a k_2}) k^2 k_{\beta 2}^3 + e^{i a k_2} (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta}^3 (k^2 + k_{\beta 2}^2) + \\
& e^{i a k_2} (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta} k_{\beta 2}^2 (k^2 + k_{\beta 2}^2) + \\
& 2 k_{\beta}^2 k_{\beta 2} ((e^{i a k_2} - e^{a k_{\beta 2}} - e^{a (2 i k_2 + k_{\beta 2})} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}}) k^2 + e^{i a k_2} (1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}^2)) + \\
& k_2^3 (2 e^{a k_{\beta 2}} (1 + e^{2 i a k_2}) k_{\beta}^3 k_{\beta 2} + e^{i a k_2} (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta}^2 (k^2 + k_{\beta 2}^2) + \\
& e^{i a k_2} (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}^2 (k^2 + k_{\beta 2}^2) + \\
& 2 k_{\beta} k_{\beta 2} (e^{i a k_2} (1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k^2 + (e^{i a k_2} - e^{a k_{\beta 2}} - e^{a (2 i k_2 + k_{\beta 2})} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}^2)))) / \\
& \left((k + k_2) (k - i k_{\beta}) (k - i k_{\beta 2}) (k + i k_{\beta 2}) (k_{\beta} k_{\beta 2} (k_{\beta}^2 (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k + \right. \\
& i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + k_{\beta 2}^2 ((1 + e^{2 a k_{\beta 2}} + 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k + i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& 2 k_{\beta} k_{\beta 2} ((-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2})) + \\
& k_2 (k_{\beta}^2 - k_{\beta 2}^2) (k_{\beta 2} (i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k - (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta} (i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k - (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k_{\beta 2})) + \\
& k_2^2 (2 k_{\beta} k_{\beta 2} ((1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta 2}^2 ((-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta}^2 ((-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} + 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k_{\beta 2})))) , \\
s \rightarrow & \left(2 e^{a k_{\beta}} w (k - k_2) (k_2 - i k_{\beta 2}) (-i k_2 + k_{\beta 2}) (e^{a k_{\beta 2}} (-1 + e^{2 i a k_2}) k_2^2 k_{\beta 2} + \right. \\
& i e^{a k_{\beta 2}} (-1 + e^{2 i a k_2}) k k_{\beta} k_{\beta 2} + \\
& k_2 (k_{\beta 2} ((e^{i a k_2} - e^{a k_{\beta 2}} - e^{a (2 i k_2 + k_{\beta 2})} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}}) k + i e^{i a k_2} (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta} (e^{i a k_2} (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + i (e^{i a k_2} - e^{a k_{\beta 2}} - e^{a (2 i k_2 + k_{\beta 2})} + e^{i a k_2 + 2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2})))) / \\
& \left((i k + k_{\beta}) (k_{\beta} k_{\beta 2} (k_{\beta}^2 (-i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k + (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \right. \\
& k_{\beta 2}^2 (-i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} + 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k + (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& 2 k_{\beta} k_{\beta 2} (-i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + (1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2})) + \\
& k_2 (k_{\beta}^2 - k_{\beta 2}^2) (k_{\beta 2} ((1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k + i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta} ((-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k_{\beta 2})) + \\
& k_2^2 (2 k_{\beta} k_{\beta 2} (-i (1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta 2}^2 (-i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} - 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k_{\beta 2}) + \\
& k_{\beta}^2 (-i (-1 + e^{2 a k_{\beta 2}}) k + (1 + e^{2 a k_{\beta 2}} + 2 e^{a (i k_2 + k_{\beta 2})}) k_{\beta 2})))) \} \}
\end{aligned}$$