

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Michael França Gusson

**POTENCIAL DELTA DE DIRAC EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

VITÓRIA
2016

MICHAEL FRANÇA GUSSON

**POTENCIAL DELTA DE DIRAC EM UM CENÁRIO DE COMPRIMENTO
MÍNIMO**

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. José André Lourenço.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Bernardo Brunoro Dilem.
Instituto Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Júlio Cesar Fabris.
Universidade Federal do Espírito Santo

**VITÓRIA
2016**

**POTENCIAL DELTA DE DIRAC EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

M. F. GUSSON

**POTENCIAL DELTA DE DIRAC EM UM CENÁRIO DE
COMPRIMENTO MÍNIMO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. JOSÉ ALEXANDRE NOGUEIRA

Vitória
14 de junho de 2016

© 2016, M. F. GUSSON.
Todos os direitos reservados.

GUSSON, M. F.

D1234p POTENCIAL DELTA DE DIRAC EM UM CENÁRIO
DE COMPRIMENTO MÍNIMO / M. F. GUSSON. —
Vitória, 2016
xi, 54 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do
Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira

1. — Dissertações. 2. — Dissertações. I. Orientador.
II. Título.

CDU 000.0*00.00

[Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:
`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`
onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:
`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`
desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

A minha mãe.

Agradecimentos

O autor agradece:

- A toda a minha família e em especial a minha mãe, Elizabeti Zoppi França, por mesmo em meio a todas as dificuldades que passamos nunca deixou de me incentivar a prosseguir nos estudos, sempre acreditando em meu potencial e na minha capacidade.
- A todos os professores que tive ao longo da minha vida acadêmica pela formação e instrução que me forneceram. Aos membros da banca examinadora pelo tempo e o compromisso dedicados a este trabalho. Agradeço, em especial, ao prof. Dr. José Alexandre Nogueira pela dedicação e por ter fornecido todas as condições necessárias para a concretização deste trabalho e do importante passo que ele representa na minha vida acadêmica.
- À Minha namorada Renata Bisi, pelo companheirismo e por sempre estar ao meu lado nas horas boas e ruins dividindo comigo as euforias e as aflições que a Física me proporciona.
- A todos os meus amigos do PPGFIs, Eddy, David, Tays, Felipe, Álefe, André, Carla, Badke, Mãozinha, Denis, Edson, Nicolas, Mariniel, Pedro, Ingrid, Isaac e todos os outros que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho. Ao sempre eficiente, secretário do PPGFIS, José Carlos Coutinho.
- Ao fomento fornecido pela CAPES.

“Para entender uma ciência é necessário conhecer sua história.”

(Auguste Comte)

Resumo

Teorias que propõem a unificação da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica, por exemplo a Gravitação Quântica e a Teoria de Cordas, apontam para a existência de um valor mínimo de comprimento observável. A existência deste implica em uma generalização do Princípio da Incerteza de Heisenberg, de modo a não admitir mais uma incerteza nula na posição, modificando assim a álgebra da Mecânica Quântica.

Esta modificação na álgebra sugere uma reavaliação dos resultados obtidos nas situações usuais do contexto quântico. Neste trabalho é abordado o problema do potencial delta δ , sob um contexto de comprimento mínimo, e discutido as consequências e resultados relacionadas a esta generalização.

Palavras-chave: Barreira de Potencial Delta de Dirac, Comprimento Mínimo, Princípio da Incerteza Generalizado (GUP).

Abstract

Theories that propose the unification of general relativity and quantum mechanics, for example the Quantum Gravity and String Theory, point to the existence of a minimum value of observable length. The existence of this implies a generalization of the Heisenberg's uncertainty principle, so as to no more admit a null uncertainty in position, thus modifying the algebra of quantum mechanics.

This change in algebra suggests a re-evaluation of the results obtained in the usual situations of the quantum context. In this dissertation is discussed the problem of the potential delta δ , under the context of a minimum length, and discussed the consequences and results related to this generalization.

Keywords: Dirac Delta Potential , Minimum Length, Generalized Uncertainty Principle (GUP).

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
1 Introdução	1
2 Revisão da Mecânica Quântica Ordinária	4
2.1 Introdução à Mecânica Quântica Ordinária	4
2.2 Comutadores e Princípio da Incerteza	7
2.2.1 Observáveis Compatíveis e Incompatíveis	7
2.2.2 Relação de Incerteza	8
2.3 Funções de Onda no Espaço de Posição e Momento	10
2.4 Solução de Onda Plana	13
2.5 Dinâmica Quântica: A Equação de Schrödinger	14
2.6 Mecânica Quântica Ordinária: Considerações Finais	15
3 Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo	16
3.1 Comprimento Mínimo	16
3.2 Princípio de Incerteza Generalizado	17
3.3 Espaço de Hilbert	19
3.3.1 Representação no Espaço dos Momentos	21
3.3.2 Análise do Operador Posição	22
3.4 Recuperando as Informações da Posição	23
3.4.1 Estados de Máxima Localização	24
3.4.2 Transformações das Funções de Onda	26
3.5 Comprimento Mínimo: Considerações Finais	27
4 Potencial Delta de Dirac na Mecânica Quântica Ordinária	29
4.1 A Delta de Dirac e o Problema do Potencial	29
4.2 Solução do Potencial Delta de Dirac na Mecânica Quântica Ordinária	31
4.2.1 Estado Ligado	32

4.2.2	Estados de Espalhamento	34
4.3	Potencial Delta: Considerações Finais	37
5	Potencial Delta de Dirac em um Cenário de Comprimento Mínimo	38
5.1	Definindo a Delta em um Cenário de Comprimento Mínimo	38
5.2	Solução do Potencial Delta de Dirac em um Cenário de Comprimento Mínimo	42
5.2.1	Estado Ligado	45
5.2.2	Estado de Espalhamento	47
5.3	Potencial Delta em um Cenário de Comprimento Mínimo: Considerações Finais	49
6	Conclusão	50
	Referências Bibliográficas	52

Capítulo 1

Introdução

Na primeira metade do século XX a Física foi marcada por duas grandes revoluções que romperam com os pressupostos até então inquestionáveis da Mecânica Clássica a qual descrevia satisfatoriamente a maioria das situações físicas consideradas naquele momento. A aplicação do Eletromagnetismo de Maxwell para explicar a radiação de corpo negro levou à catástrofe do ultravioleta, resultado considerado absurdo, induzindo uma reinterpretação das propriedades da matéria (e das ondas eletromagnéticas) e na forma como ela interage. Nesta reinterpretação foi reformulado o conceito de medida o que viria a originar a Mecânica Quântica¹. Com a comprovação empírica da finitude e invariância da velocidade da luz em referenciais inerciais houve um quebra de paradigma com as noções de espaço e tempo absoluto, unificando-os em uma única entidade o espaço-tempo. Posteriormente, com o advento da Teoria da Relatividade Geral o espaço-tempo veio a ser interpretado como o campo gravitacional que interage com a matéria nele contido, contrariando a ideia clássica de que o espaço e o tempo eram apenas um pano de fundo para os fenômenos físicos que ali ocorriam. Isto tornou a Mecânica Clássica obsoleta no seu conceito de tempo e de espaço assim como no papel desempenhado pela matéria nele contido.

Ambas as teorias, a da relatividade e a quântica, foram estudadas e desenvolvidas independentemente na primeira metade do século XX. Na segunda metade surgiu a Teoria Quântica de Campos, sendo considerada uma unificação da Mecânica Quântica e da Relatividade Restrita, esta teoria descreve o comportamento quântico da matéria tendo em vista a invariância da velocidade da luz. O passo seguinte foi o desafio de conciliar os princípios da Mecânica Quântica com a natureza geométrica da Relatividade Geral elaborando uma teoria que descreva o espaço-tempo, e conseqüentemente o campo gravitacional, de forma quântica.

Dentre as teorias candidatas a fornecerem a tão desejada unificação da Relatividade Geral e Mecânica Quântica as mais promissoras são a Teoria de Cordas e a Gravitação Quântica de Laços. Um fato interessante a respeito das teorias que se propõem a quantificar a gravidade é que todas elas apontam para a existência de um *comprimento mínimo*, isto

¹A teoria quântica que surgiu na primeira metade do século XX será referida aqui como Mecânica Quântica Ordinária.

é, uma escala mínima de comprimento possível de se observar e conseqüentemente uma máxima resolução possível das medidas espaciais. O argumento das teorias de quantização da gravitação em favor da existência de um comprimento mínimo é de que as altas energias utilizadas na tentativa de se sondar as pequenas distâncias da escala de Planck $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ perturbam significativamente a estrutura do espaço-tempo através de efeitos gravitacionais sendo assim existiria um limite máximo de localizabilidade possível de ser observada.

Este comprimento mínimo, aparentemente inerente a teorias de gravitação quântica, tem como conseqüência uma modificação da Mecânica Quântica consolidada até então, esta formulação quântica que não leva em consideração a existência de um comprimento mínimo não nulo, seguindo a tendência dos textos bibliográficos, será referida como Mecânica Quântica Ordinária em confronto com a formulação em um cenário de comprimento mínimo que é chamada simplesmente de Mecânica Quântica². A modificação da Mecânica Quântica Ordinária é feita associando-se ao comprimento mínimo uma incerteza mínima não nula Δx_0 nas medidas de posição de forma que agora não é mais possível se ter nenhuma partícula como pontual e nem estar precisamente localizada em um ponto. A existência da incerteza nula associada ao comprimento mínimo por sua vez exige uma modificação na relação de incerteza de Heisenberg. A modificação que será proposta aqui é da seguinte forma

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma], \quad (1.1)$$

sendo que ao se tomar a incerteza na posição arbitrariamente pequena as incertezas da posição e do momento deixam de satisfazer a relação acima. Várias conseqüências surgem ao se modificar a relação de incerteza, uma delas é que apesar de os autoestados do operador posição ainda existirem eles não representam mais estados físicos, uma vez que estes forneceriam incerteza nula na posição, outra é a modificação da relação de comutação entre os operadores posição \hat{x} e operador momento \hat{p} . É importante notar que sempre se espera que quando se considera o limite $\beta \rightarrow 0$ a relação acima retorna ao resultado ordinário, isto é interessante, pois sempre que se quiser comparar os resultados obtidos nesta nova formulação com os da Mecânica Quântica Ordinária basta tomar este limite, o que corresponde a supor a existência de um comprimento mínimo igual a zero $\Delta x_0 = 0$. Esta ideia é um análogo ao Princípio da Correspondência da Mecânica Quântica em relação a Mecânica Clássica, isto é, ao se tomar o valor de $\hbar = 0$ nos resultados quânticos ordinários, deve-se resgatar os resultado clássicos, no formulação que será discutida aqui ao se considerar a situação em que o comprimento mínimo é nulo deve-se retomar os resultados da Mecânica Quântica Ordinária.

Esta reformulação dos fundamentos da Mecânica Quântica Ordinária de modo a comportar a existência do comprimento mínimo sugere a reavaliação de alguns resultados obtidos no contexto ordinário. Seguindo a tendência de [1-5], que revisam resultados como os da partícula livre, do poço de potencial quadrado e do oscilador harmônico sob a hipótese do comprimento mínimo o objetivo deste trabalho é rever os resultados do Potencial Delta de Dirac em um cenário de comprimento mínimo e comparar os resultados com os da Mecânica

²Este trabalho se restringirá a formulação quântica não relativística

Quântica Ordinária. Para isto o trabalho foi dividido da seguinte forma:

- No capítulo 1 é feita uma breve introdução do assunto visando situar o leitor quanto ao panorama geral do contexto em que está este trabalho. Além de apresentar os aspectos mais importantes e os objetivos.
- No capítulo 2 é feita uma revisão de Mecânica Quântica Ordinária. Ela é introduzida a partir dos postulados e então se constrói alguns conceitos mais importantes e que sofrerão modificação quando se inserir o comprimento mínimo como, por exemplo, a relação de incerteza.
- No capítulo 3 o comprimento mínimo é inserido na teoria quântica. Isto é feito através de uma breve motivação qualitativa para a existência do comprimento mínimo, depois é abordado como que este modifica a relação de incerteza e de comutação da Mecânica Quântica Ordinária. Discute-se também a modificação da álgebra de Heisenberg e a construção do espaço de quaseposição, para se resgatar informações da posição da partícula, diante da impossibilidade de se obter informações físicas na representação da posição.
- No capítulo 4 a Delta de Dirac é definida e discutida quando inserida na Mecânica Quântica Ordinária na forma de um potencial. Este capítulo serve de referência para os resultados que serão obtidos posteriormente com a inserção do comprimento mínimo, pois ao se tomar a situação em que o comprimento mínimo é zero deve-se resgatar os resultados obtidos neste capítulo.
- No capítulo 5 é que de fato se concretiza o objetivo deste trabalho. Neste capítulo são utilizados os resultados obtidos com a inserção do comprimento mínimo na álgebra da Mecânica Quântica Ordinária para se resolver o potencial delta sob a hipótese do comprimento mínimo. Isto é feito de forma análoga ao capítulo anterior, porém com a modificação do potencial delta e da equação de Schrödinger para o espaço da quaseposição.
- No capítulo 6 os resultados do capítulo anterior são confrontados com os resultados obtidos com o potencial delta na Mecânica Quântica Ordinária. Isto é feito através dos resultados obtidos para as energias dos estados ligados e dos coeficientes de reflexão e de transmissão dos estados de espalhamento.

Capítulo 2

Revisão da Mecânica Quântica Ordinária

2.1 Introdução à Mecânica Quântica Ordinária

No final do século XIX, parte da comunidade científica pensava que a Física atingira seu clímax [6]. A Mecânica Newtoniana já estabelecida explicava com grande precisão o comportamento dos corpos. Fenômenos elétricos e magnéticos haviam sido unificados em uma única teoria, o Eletromagnetismo. Estabelecidas as regras que regiam o comportamento dos corpos massivos e dos fenômenos ondulatórios, restaria apenas o trabalho de aplicá-las nas mais diversas situações. Não haveria fenômenos que não pudessem ser explicados, havendo apenas a necessidade de levar em consideração as peculiaridades de cada sistema.

No entanto, no estudo da radiação eletromagnética emitida por corpos que reemitem toda a radiação que incide sobre eles, sistemas conhecidos como corpos negros, não podiam ser explicados satisfatoriamente pelas teorias consagradas até então. Planck, para solucionar esse problema, postulou que a energia não era emitida ou absorvida de forma contínua, mas de forma discreta levando ao desenvolvimento do que hoje se chama de Primórdios da Teoria Quântica [7].

Em 1905, Einstein utilizou a hipótese de Planck da discretização da energia para explicar a emissão de elétrons por superfícies metálicas quando atingidas por radiação eletromagnética de frequências elevadas como a ultravioleta [8]. Essa característica corpuscular contrastava com a natureza ondulatória já aceita das radiações eletromagnéticas.

Diante das hipóteses de Planck e Einstein, observou-se que fenômenos ondulatórios poderiam apresentar características corpusculares. O passo seguinte foi dado por De Broglie que sugeriu que corpúsculos como os elétrons e núcleos atômicos também apresentariam características ondulatórias. O duplo comportamento, ora de onda ora de matéria, ficou conhecido como dualidade onda-partícula.

Para conciliar a natureza corpuscular e ondulatória em uma mesma entidade física, aparentemente contraditórias, Heisenberg propôs o Princípio da Incerteza. Neste princípio,

ele argumenta que embora as partículas sejam pontuais, é impossível se medir com precisão arbitrariamente grande seu momento linear e sua posição no espaço de forma simultânea [9]. Há um particular interesse na proposta de Heisenberg neste trabalho, pois quando submetida a uma generalização, ela leva a um "corte" na precisão da posição, limitando-a assim a uma incerteza mínima.

O indeterminismo do Princípio da Incerteza é conflitante com o determinismo Clássico. A descrição Clássica de um sistema é feito em termos das suas coordenadas generalizadas q_i e de seus momentos conjugados p_i , os quais são chamados de variáveis dinâmicas do sistema, de forma que $i = 1, 2, \dots, n$ é a referência à i -ésima partícula e n é o grau de liberdade do sistema. Ao se especificar as variáveis dinâmicas como funções reais do tempo é possível determinar a posição e a velocidade de qualquer partícula do sistema em qualquer instante, desde que as mesmas sejam conhecidas em um instante anterior t_0 . A dinâmica do sistema é dada ou pelas Equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad (2.1)$$

ou pelas Equações de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (2.2)$$

Em síntese na descrição da Mecânica Clássica tem-se então [10,11]:

- O estado de um sistema em um instante t_0 é definido especificando as n coordenadas generalizadas $q_i(t_0)$ e seus respectivos momentos conjugados $p_i(t_0)$.
- O Valor em um dado instante de qualquer grandeza física mensurável é completa e exatamente determinado se o estado do sistema é conhecido naquele instante. Desse modo, conhecendo o estado do sistema, é possível predizer com certeza o resultado de qualquer medida realizada naquele instante.
- A evolução no tempo do estado do sistema é dada pelas equações de Hamilton. Como são equações diferenciais de primeira ordem, sua solução $q_i(t)$ e $p_i(t)$ é única e o estado do sistema é conhecido em qualquer instante se o seu estado inicial for conhecido.

Tendo em vista a descrição Clássica e sua abordagem determinista foi necessária uma reformulação para adequá-la ao indeterminismo quântico, tal reformulação leva ao surgimento da Mecânica Quântica. A Física Quântica estuda os fenômenos que ocorrem na escala atômica ou subatômica para os quais a Física Clássica não fornece resultados consistentes. Alguns fenômenos considerados de natureza quântica foram explicados satisfatoriamente em modelos elaborados por Planck e Einstein, mas foi somente posteriormente com Dirac, Schrödinger e Heisenberg que houve a elaboração de uma teoria matematicamente consistente e capaz de englobar qualquer fenômeno quântico. Esta teoria é descrita pelos seguintes postulados [10,12]:

- **Postulado 1** - Em um tempo fixo t_0 , o estado de um sistema físico é definido pela especificação de um ket $|\varphi(t_0)\rangle$ pertencente a um espaço abstrato \mathcal{H} , chamado de espaço de Hilbert¹.
- **Postulado 2** - As grandezas dinâmicas \mathcal{A} são representadas por operadores lineares hermitianos \hat{A} atuando em \mathcal{H} cujo autovetores formam uma base no espaço de Hilbert. Estes operadores são os observáveis.
- **Postulado 3** - O único resultado possível da medida de uma grandeza física \mathcal{A} é um dos autovalores a_n associado ao seu observável \hat{A} .
- **Postulado 4** - A probabilidade de se obter o autovalor a_n ao se realizar uma medida da grandeza física \mathcal{A} é $P(a_n) = |\langle u_n | \psi \rangle|^2$, sendo que, $|\psi\rangle$ é o estado normalizado do sistema antes da medida e $|u_n\rangle$ são os autovetores normalizados do operador \hat{A} ².
- **Postulado 5** - Se a medida da grandeza física \mathcal{A} do sistema no estado $|\psi\rangle$ dá o resultado a_n , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção normalizada $\hat{P}_n |\psi\rangle = |u_n\rangle \langle u_n | \psi \rangle$ sobre o auto-subespaço associado a a_n .
- **Postulado 6** - A evolução temporal de um estado $|\psi(t)\rangle$ é regida pela equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (2.3)$$

sendo $\hat{H}(t)$ o operador hamiltoniano do sistema.

Os postulados da Mecânica Quântica contrastam com o que foi enunciado acima para a Mecânica Clássica. O sistema agora não é mais descrito por um conjunto de coordenadas generalizadas e sim por um ket, $|\psi\rangle$ cuja função de onda $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ associada pertence ao espaço das funções quadrado-integráveis. Como \mathcal{H} é um espaço vetorial se o estado $|\psi\rangle$ pertence a este espaço uma combinação linear deste estado também irá pertencer a ele, logo, vale o princípio da superposição.

Na Mecânica Quântica as grandezas físicas (observáveis) não são mais descritas por funções reais do tempo e sim por operadores atuando em um espaço vetorial. Um observável é um operador autoadjunto cujos autovalores são reais (resultados medidos) e cujos autovetores formam uma base para \mathcal{H} . Os resultados que se medem são, portanto, autovalores de algum operador hermitiano, o que faz sentido se for considerado que a física é descrita no universo dos números reais, e os autovalores dos operadores hermitianos sempre fornecem números reais.

¹Será visto mais a frente que o espaço de Hilbert é formado por funções, em geral complexas, cuja integral do quadrado de seus módulos em todo o espaço é finita.

²Por simplicidade será considerado somente o caso discreto e não degenerado.

As previsões agora possuem um caráter probabilístico e não mais determinístico. Diferente da Mecânica Clássica que quando em posse de certas condições iniciais era possível se prever com precisão absoluta o valor futuro de alguma entidade física na Mecânica Quântica não é mais possível se prever exatamente o resultado de uma medida associada a uma grandeza física. A previsão que se tem agora é somente a probabilidade de obter determinado valor ao se realizar a medida de alguma grandeza física.

O processo de medida quântico interfere diretamente no seu resultado, ou seja, ao se medir alguma grandeza faz-se com que a função de onda colapse no autoestado associado àquela medida, sendo portanto, contraditório à possibilidade clássica de um observador ideal, em que este realiza medidas sem com isso interferir no sistema. Será visto mais a frente que a consequência desta interferência, o ato de medir, é o Princípio da Incerteza de Heisenberg.

A equação de Schrödinger desempenha um papel análogo às Equações de Hamilton ao determinar a evolução temporal do sistema. É possível utilizá-la para se obter a forma do vetor de estado em um instante $t + t_0$ se ele for conhecido para o instante t_0 . Desta forma é possível prever resultados de medidas de grandezas físicas no instante $t + t_0$ (dentro dos limites probabilísticos dos postulados anteriores).

Apesar de não triviais, os postulados acima descrevem com grande satisfação o comportamento de partículas na escala atômica e subatômica. Por sua aplicabilidade não ser algo da vivência cotidiana, diferente da Mecânica Clássica, seus conceitos em primeiro momento parecem um tanto quanto abstratos. A seguir será discutido com mais detalhes a não comutatividade de dois operadores e como isso influencia na impossibilidade de se obter autovetores, consequentemente autovalores, simultâneos destes operadores.

2.2 Comutadores e Princípio da Incerteza

O Princípio da Incerteza é uma relação da Mecânica Quântica que limita a precisão com que se pode conhecer simultaneamente os valores das incertezas de um par de observáveis. Neste trabalho em específico, será tratado do caso das incertezas Δx e Δp associadas aos operadores \hat{x} e \hat{p} . O Princípio da Incerteza está intrinsecamente ligado ao fato de dois operadores possuírem ou não uma base em comum, e consequentemente um conjunto de autoestados em comum, por sua vez esta base comum determina se os operadores são ou não compatíveis (comutam). A seguir será feita uma breve análise da comutatividade de dois operadores e a relação deste com a base comum.

2.2.1 Observáveis Compatíveis e Incompatíveis

Dois observáveis são ditos compatíveis ou que comutam quando obedecem a relação

$$[\hat{A}, \hat{B}] = 0, \quad (2.4)$$

sendo o comutador definido como

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (2.5)$$

No caso em que $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, os observáveis são ditos incompatíveis ou que não comutam.

O significado de dois operadores comutarem ou não está relacionado com a base em que eles são representados. Fazendo o comutador agir em estados de uma base comum aos dois observáveis \hat{A} e \hat{B} eles fornecerão autovalores, pois a base é representada por autovetores simultâneos, os autovalores são associativos e a diferença deles será nula. A mesma análise não é válida para dois observáveis incompatíveis, pois se a base é exclusiva de um operador a atuação do outro sobre os autoestados do primeiro não fornecerá um autovalor. Sendo assim dois observáveis compatíveis fornecem

$$\langle a, b | [\hat{A}, \hat{B}] | a, b \rangle = (ab - ba) \langle a, b | a, b \rangle = 0, \quad (2.6)$$

portanto eles possuem autovetores em comum, ou seja,

$$\hat{A}|a, b\rangle = a|a, b\rangle \text{ e } \hat{B}|a, b\rangle = b|a, b\rangle. \quad (2.7)$$

Isto é, $|a, b\rangle$ é autovetor simultâneo do observável \hat{A} e do observável \hat{B} . Se dois observáveis possuem autovetores em comum e esses autovetores formam uma base logo essa base é uma base comum aos dois observáveis.

Ao se aplicar a definição de comutador nos operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} de forma que eles atuem em um estado $|\psi\rangle$ qualquer se tem que

$$[\hat{x}, \hat{p}]|\psi\rangle = i\hbar|\psi\rangle, \quad (2.8)$$

logo,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\mathbb{I}. \quad (2.9)$$

Onde os operadores posição e momento obedecem a suas relações usuais $\langle x | \hat{x} | \psi \rangle = x\psi(x)$ e $\langle x | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar\partial_x\psi(x)$. Mais adiante será visto que essas relações podem mudar dependendo da representação, por exemplo, no espaço dos momentos.

2.2.2 Relação de Incerteza

Em termos conceituais o Princípio da Incerteza pode ser visto da seguinte forma. Considere o operador posição \hat{x} e o operador momento \hat{p} atuando em uma função de onda. Como tais operadores não comutam eles não possuem autoestados simultâneos. Suponha que seja medido o valor do operador \hat{x} , pelo 3º *postulado* o valor obtido será um dos autovalores de \hat{x} , tal que se saberá com absoluta certeza o valor x da medida, pelo 5º *postulado* o processo

de medida faz com que a função de onda colapse em um dos autoestados associados a \hat{x} . E se simultaneamente tentar-se medir o valor do operador \hat{p} ? Como ao medir x a função de onda colapsou em um dos autoestados associado a \hat{x} e esse autoestado não é uma autoestado simultâneo a \hat{p} isso implica que \hat{p} deixou de ter seu valor bem definido. Porém, se logo após a medida de \hat{x} medir-se \hat{p} essa nova medida fará com que a função de onda colapse novamente só que desta vez em um dos autoestados associados a \hat{p} tendo um valor bem definido para p e toda a informação a respeito de \hat{x} sendo perdida no exato momento da medida como anteriormente para \hat{p} . Conclui-se, portanto, que é impossível saber simultaneamente os valores das medidas associadas aos operadores \hat{x} e \hat{p} .³ O Princípio da Incerteza é uma consequência dos postulados da Mecânica Quântica e do fato de dois operadores não comutarem, não sendo portanto um postulado em si.

Em termos quantitativos tal discussão é representada por uma desigualdade conhecida como relação de incerteza. Ela pode ser obtida tendo em vista a positividade da norma, válida para qualquer vetor, em particular

$$\left\| \left[(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right] |\psi\rangle \right\| \geq 0. \quad (2.10)$$

A relação acima se torna uma igualdade exclusivamente para o caso do vetor com norma igual a 0, ou seja, o vetor nulo. Uma vez que $\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle$ é imaginário tem-se

$$\langle \psi | \left[(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 - \left(\frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|^2}{2(\Delta \hat{p})^2} \right) (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \right] | \psi \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle \geq \frac{|\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|^2}{4}, \quad (2.11)$$

onde $\Delta \hat{x} = \hat{x} - \langle \hat{x} \rangle$ e $\Delta \hat{p} = \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle$ são as incertezas associadas respectivamente ao operador posição \hat{x} e momento \hat{p} . O valor $\sqrt{\langle (\Delta \hat{x})^2 \rangle}$ é o desvio médio padrão das medidas do observável \hat{x} , isto é, a média de quanto essas medidas desviam do valor médio, o que pode ser interpretado como a incerteza Δx associada ao observável \hat{x} , analogamente para Δp . A equação acima é válida para quaisquer outros dois observáveis conjugados. Ela mostra que não é possível conhecer simultaneamente os valores das incertezas relacionados a dois observáveis não compatíveis.

Diante das análises das incertezas Δx e Δp e usando (2.9) na equação (2.11) tem-se a relação

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}. \quad (2.12)$$

A relação acima é o Princípio da Incerteza de Heisenberg para os operadores posição e momento, ele possui análogos para outros observáveis conjugados como para a energia e o tempo. É interessante o fato de que apesar da relação acima não permitir uma precisão absoluta no conhecimento da posição e do momento simultaneamente ela não limita a informação que se tem a respeito da posição. Para isso vale a análise do gráfico:

³Isto vale para quaisquer outros dois operadores que não comutam.

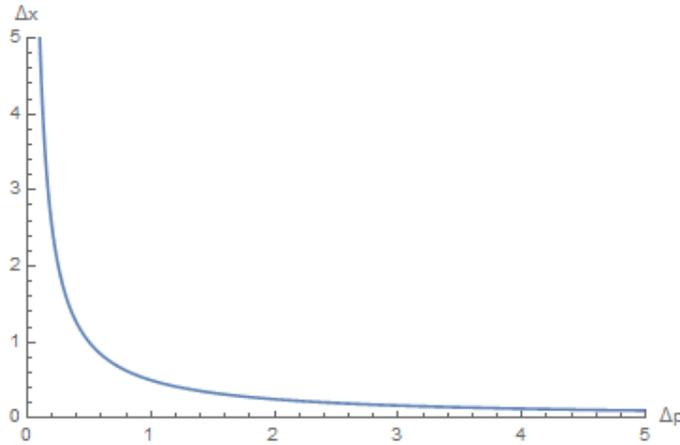


Figura 2.1. Esboço gráfico da relação de incerteza ordinária $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ em unidades de \hbar .

Observa-se no gráfico acima um comportamento assintótico tanto da incerteza associada ao operador posição \hat{x} quanto à incerteza associada ao operador momento \hat{p} . Desta forma o princípio da incerteza não limita a posição exata da partícula e nem o seu momento, ou seja, é possível se ter uma incerteza arbitrariamente próxima de zero na posição ($\Delta x \rightarrow 0$) desde que para isso a informação a respeito do momento seja perdida ($\Delta p \rightarrow \infty$). Assim como ter uma incerteza arbitrariamente próxima de zero no momento perdendo toda a informação a respeito da posição. Portanto, o conhecimento de uma dessas duas grandezas pode ser tão preciso quanto se queira, desde que se abduque de conhecer completamente a outra.

Mais a frente será visto que os autovetores do operador posição não pertencem ao espaço de Hilbert. Para resolver este problema é tomada uma sequência de estados aproximados para o operador posição.

2.3 Funções de Onda no Espaço de Posição e Momento

Como discutido nos postulados da Mecânica Quântica, as grandezas físicas são descritas por operadores atuando em um espaço vetorial complexo, o Espaço de Hilbert. O Espaço de Hilbert é o espaço cuja norma dos vetores é definida, ou seja, a norma dos vetores contidos nesse espaço é finita. Sendo assim, este espaço é composto por funções quadrado integráveis

$$\langle f|f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)f(x)dx < \infty. \quad (2.13)$$

As funções que compõem o espaço de Hilbert se comportam como vetores pois são fechados em relação a soma e em relação a multiplicação por um escalar sendo tais operações associativas e comutativas e há uma equivalência entre o vetor nulo $|0\rangle$ e a função nula $f(x) \equiv 0$. Os autovetores são ortogonais, $\langle f'|f \rangle = 0$ para $f' \neq f$, e formam um conjunto completo, ou seja, estes autovetores constituem uma base deste espaço. Isso significa que qualquer vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos demais.

Os operadores atuam nos vetores, pertencentes ao espaço de Hilbert, (estes vetores são referidos como funções de onda), transformando-os em outras funções, também pertencente ao espaço de Hilbert. Quanticamente esses operadores são restritos à classe observáveis que são hermitianos. Os operadores hermitianos são operadores que o seu adjunto resulta nele mesmo, $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$. Os autovalores de um operador hermitiano são números reais, como seria de se esperar, pois como representam observáveis devem fornecer resultados físicos.

No contexto da Mecânica Quântica as grandezas x e p são representados por operadores atuando em funções de onda de quadrado integráveis da posição $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ e do momento $\tilde{\psi}(p) = \langle p|\psi\rangle$ onde pelo 4^a postulado $|\langle x|\psi\rangle|^2 dx$ e $|\langle p|\psi\rangle|^2 dp$ representam a probabilidade de se encontrar uma partícula no estado $|\psi\rangle$ entre x e $x + dx$ e entre p e $p + dp$ respectivamente. Os kets $|x\rangle$ e $|p\rangle$ associados aos seus duais $\langle x|$, $\langle p|$ representam autoestados dos operadores posição e momento, tal que

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad (2.14)$$

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (2.15)$$

Ao fazer o operador posição \hat{x} agir no seu autoestado $|x\rangle$ ele fornece a exata posição x da partícula de forma que sua incerteza seja nula ($\Delta x = 0$), analogamente para o operador \hat{p} . No entanto ocorre que $|x\rangle$ e $|p\rangle$ não pertencem ao espaço de Hilbert, pois não são normalizáveis. Se $\langle x|x'\rangle$ é a amplitude de probabilidade da partícula localizada em x ser encontrada em x' então $\langle x|x'\rangle = 0$ se $x \neq x'$. Porém pela interpretação probabilística deveria-se ter $\int_{-\infty}^{+\infty} |\langle x|x'\rangle|^2 dx = 1$ o que é contraditório, já que o integrando é nulo. Logo a norma de $|x\rangle$ não está bem definida e $|x\rangle \notin \mathcal{H}$ e a expressão $\langle x|\psi\rangle$ não faz sentido.

Para se solucionar este problema, observa-se que os autovetores dos operadores \hat{x} e \hat{p} podem ser aproximados por sequências de estados físicos com incertezas da posição e do momento extremamente próximas de zero (isto só pode ser feito no contexto ordinário pois pode-se tomar Δx arbitrariamente próximo de zero, diferente do contexto com comprimento mínimo). Para o operador \hat{x} os autovetores $|x\rangle$ podem ser considerados uma sequência de estados $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ para os quais o valor esperado do operador \hat{x} é x de forma que sua incerteza $\Delta x \rightarrow 0$. Portanto, pode-se definir a função de onda no espaço da posição de uma partícula como

$$\psi(x) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle, \quad (2.16)$$

de forma que primeiro se projeta a função de onda $|\psi\rangle$ sobre os autoestados e depois toma-se o limite. O problema é contornado definindo-se uma sequência de estados aproximadamente localizados em x e fazendo o limite em que essa aproximação é cada vez mais precisa. Como $\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle$ representa a amplitude de probabilidade do sistema descrito pela função de onda $|\psi\rangle$ estar localizado em torno do ponto x com uma incerteza Δx ao se tomar o valor de $\Delta x \rightarrow 0$ $|\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle|^2$ passa então a representar a probabilidade de se achar a partícula exatamente no ponto x . Portanto $\langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle$ é equivalente a função de onda que descreve o comportamento da

partícula.

Para $\Delta x \rightarrow 0$ tem-se $\langle \xi_x^{\Delta x} | \xi_{x'}^{\Delta x} \rangle \approx 0$, com $x \neq x'$, o que implica que eles são ortogonais e

$$\int dx |\xi_x^{\Delta x}\rangle \langle \xi_{x'}^{\Delta x}| \approx 1 \quad (2.17)$$

que os tornam normalizáveis. Portanto os autoestados $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ são ortonormais e consequentemente formam uma base. A relação de completude acima para os estados aproximados pode ser usada para definir o produto interno de funções no espaço de Hilbert

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int \langle \phi | \xi_x^{\Delta x} \rangle \langle \xi_x^{\Delta x} | \phi \rangle dx = \int \phi^*(x) \psi(x) dx = \langle \phi | \psi \rangle. \quad (2.18)$$

Que é o mesmo resultado que seria obtido se não houvesse o problema da não normalização dos estados $|x\rangle$. Portanto para fins de simplicidade será adotada a seguinte notação

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle \xi_x^{\Delta x} | \psi \rangle = \langle x | \psi \rangle, \quad (2.19)$$

ou seja, embora saiba-se que os estados $|x\rangle$ não são normalizáveis, toma-se a aproximação discutida acima de forma que as propriedades que os estados aproximados $|\xi_x^{\Delta x}\rangle$ possuem são equivalente àquelas que os estados $|x\rangle$ teriam se fossem normalizáveis. Toda a discussão feita acima para a aproximação dos autoestados não normalizáveis do operador \hat{x} também são válidas para o operador \hat{p} .

Levando-se em conta a base formada pelos autoestados dos operadores posição e momento é possível escrever os operadores atuando em funções de onda em duas representações, a do espaço das posições e dos momentos. No caso da representação do espaço das posições se escreve

$$\langle x | \hat{x} | \psi \rangle := \hat{x} \psi(x) = x \psi(x) \quad (2.20)$$

para o operador posição e

$$\langle x | \hat{p} | \psi \rangle := \hat{p} \psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x) \quad (2.21)$$

para o operador momento. Quanto à representação no espaço dos momentos

$$\langle p | \hat{x} | \psi \rangle := \hat{x} \psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \quad (2.22)$$

para o operador posição e

$$\langle p | \hat{p} | \psi \rangle := \hat{p} \psi(p) = p \psi(p) \quad (2.23)$$

para o operador momento. Como discutido anteriormente as equações (2.20) e (2.21) são

consistentes com a relação de comutação de Heisenberg (2.9). Facilmente se verifica que (2.22) e (2.23) também o são. A representação no espaço dos momentos será futuramente interessante, pois em um cenário que envolva a existência de um comprimento mínimo a representação no espaço das posições se torna inviável, por não se poder tomar mais a sequência de aproximações feita acima.

2.4 Solução de Onda Plana

Como discutido no começo deste capítulo a origem de toda a diferença entre Mecânica Quântica e Mecânica Clássica se encontra no fato de não se poder conhecer com precisão arbitrária, e de forma simultânea, a posição e o momento de uma partícula. Esta é a ideia básica por de trás do Princípio da Incerteza e é expresso pela inequação (2.12).

Desta forma o produto $\Delta x \Delta p$ de um estado $|\psi\rangle$ qualquer fornece a informação do quão "não clássico" é o sistema em questão. A situação para o qual este produto tem o menor valor possível é quando a inequação (2.12) assume o valor da igualdade, ou seja, $\frac{\hbar}{2}$. Esta é a situação a qual o formalismo quântico fornece os resultados mais próximos da Mecânica Clássica, sendo assim uma espécie de fronteira entre o uma descrição e outra.

Para se encontrar a função de onda associada aos estados descritos na situação acima basta notar que a relação (2.10) se torna uma igualdade quando (2.12) também se torna uma igualdade. Desta forma

$$\left[(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right] |\psi\rangle = 0 \quad (2.24)$$

Projetando a equação acima sobre os autoestados do momento $\langle p|$ tem-se

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = \left[\langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle} \langle \hat{p} \rangle \right] \langle p|\psi\rangle - \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2\langle (\Delta \hat{p})^2 \rangle} \langle p|\hat{p}|\psi\rangle. \quad (2.25)$$

Usando as equações (2.22) e (2.23) para escrever os operadores posição e momento no espaço dos momentos e a (2.9) a equação acima se torna

$$\frac{\partial}{\partial p} \tilde{\psi}(p) = \left[-\frac{i\langle \hat{x} \rangle}{\hbar} + \frac{\langle \hat{p} \rangle}{2\langle (\Delta p)^2} \right] \tilde{\psi}(p) - \frac{p}{2\langle (\Delta p)^2} \tilde{\psi}(p), \quad (2.26)$$

que tem solução do tipo

$$\tilde{\psi}(p) \propto e^{-\frac{i\langle \hat{x} \rangle}{\hbar} p} \exp\left(-\frac{p^2}{4\langle (\Delta p)^2} + \frac{\langle \hat{p} \rangle p}{2\langle (\Delta p)^2}\right). \quad (2.27)$$

A solução acima é chamada de função de onda gaussiana. Esta função representa uma partícula cujo estado quântico satisfaz $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$, ou seja, o estado mais próximo possível de uma situação clássica. Tomando o limite que $\Delta p \rightarrow \infty$ ter-se-a a função de onda de uma

partícula cuja incerteza na posição é $\Delta x = 0$

$$\psi(p) \propto e^{\frac{-i\langle \hat{x} \rangle}{\hbar} p}. \quad (2.28)$$

De forma que a função de onda que representa uma partícula pontualmente localizada em uma posição $x = \langle \hat{x} \rangle$ é uma onda plana com vetor de onda $k = \frac{p}{\hbar}$. Como já foi discutido, esta função de onda não representa um estado físico possível, pois não pertence ao espaço de Hilbert, o que é facilmente observado ao se notar que ela não é de quadrado integrável. Logo a interpretação probabilística não vale para estes estados.

2.5 Dinâmica Quântica: A Equação de Schrödinger

Pelo 6º *postulado* a dinâmica quântica é regida pela Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle. \quad (2.29)$$

Ela foi proposta por Erwin Schrödinger em 1926 [13]. Ela descreve a evolução temporal de um vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ que representa um sistema quântico em um instante t . Pelo 1º *postulado* um sistema quântico qualquer em um tempo t_0 é completamente descrito pela especificação de um vetor de estado $|\psi(t_0)\rangle$, ou seja, se se conhece como o vetor de estado $|\psi(t_0)\rangle$ evolui no tempo também se saberá como o sistema quântico se desenvolve. A equação de Schrödinger permite assim uma "previsão" (dentro dos conceitos probabilísticos já discutidos) a respeito das grandezas físicas para instantes posteriores de tempo δt quaisquer.

Esta equação desempenha um papel análogo ao da 2ª Lei de Newton na dinâmica clássica com a diferença de que aqui ela descreve sistemas quânticos. O operador Hamiltoniano se escreve como $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$ tal que (2.29) fica

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(t) \right] |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle. \quad (2.30)$$

Projetando sobre os autovetores do operador posição tem-se

$$\langle x | \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(t) \right] |\psi(t)\rangle = \langle x | i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle. \quad (2.31)$$

Usando (2.21) na equação acima

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \right] \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t), \quad (2.32)$$

se obtém a equação de Schrödinger representada no espaço das posições. Analogamente pode-se projetar a equação (2.30) sobre os autovetores do operador momento e usar a relação

(2.23) para se obter

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(i\hbar\partial_p, t) \right] \psi(p, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(p, t), \quad (2.33)$$

que é a equação de Schrödinger representada no espaço dos momentos. Cada sistema é caracterizado por uma dada função da energia potencial $V(x, t)$ ou $V(i\hbar\partial_p, t)$ de forma que a função de onda $\psi(x, t)$ ou $\tilde{\psi}(p, t)$ descreve como o sistema em questão evolui com o tempo, e assim fornece os valores máximos, médios e a probabilidade de se encontrar a partícula em determinada região.

2.6 Mecânica Quântica Ordinária: Considerações Finais

Neste capítulo foram introduzidos os principais conceitos e resultados da Mecânica Quântica Ordinária. Viu-se que a dualidade onda partícula era inconsistente com os aspectos da Mecânica Clássica. A Mecânica Quântica, apoiada nos postulados, surge para resolver esta inconsistência. A impossibilidade de se medir de forma simultânea os valores associados a dois operadores não compatíveis é uma das consequências dos postulados. Esta impossibilidade foi quantificada na relação de incerteza a qual, apesar de limitar o conhecimento simultâneo de dois operadores, não limitava o quão preciso se poderia ter uma medida em detrimento da outra.

O objetivo principal deste trabalho é analisar um potencial do tipo delta sob a hipótese da existência de um comprimento mínimo não nulo, $\Delta x_0 \neq 0$. Para isto é necessário reformular a Mecânica Quântica Ordinária de forma que ela possa ser consistente com esta hipótese. Este capítulo teve o objetivo de revisar os principais conceitos levados em consideração na generalização, que será feito no próximo capítulo.

Capítulo 3

Mecânica Quântica em um Cenário de Comprimento Mínimo

3.1 Comprimento Mínimo

Como visto no capítulo anterior, a Mecânica Quântica tem seu formalismo construído com base na álgebra de Heisenberg, ou seja, na não comutatividade dos operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} , $[\hat{x}, \hat{p}] \neq 0$. Consequentemente, esta não comutatividade impossibilita a determinação simultânea dos valores associados a estes operadores, o que é traduzido na Relação de Incerteza de Heisenberg. Foi visto também que apesar desta relação limitar a precisão do conhecimento simultâneo do operador posição e do operador momento, ela não limitava o quão precisa poderia ser a medida de um destes dois, desde que para isso se perdesse a informação a respeito do outro.

Embora não trivial, associa-se que um comprimento mínimo deve estar relacionado, do ponto de vista quântico, a uma incerteza mínima não nula na posição $\Delta x_0 \neq 0$. Desta forma um comprimento mínimo, motivado por teorias de quantização da gravidade [14,15], deve alterar a Relação de Incerteza de Heisenberg de modo a não permitir mais uma incerteza na posição de forma arbitrariamente pequena, como discutido acima. A inserção de um comprimento mínimo não nulo deve modificar a Relação de Incerteza de Heisenberg e consequentemente a relação de comutação que se fundamenta todo o formalismo teórico da Mecânica Quântica.

Apesar de o comprimento mínimo surgir naturalmente em teorias de quantização da gravidade, a sua consideração remonta à Heisenberg em 1930 [16]. Heisenberg tentou, sem sucesso, introduzir o comprimento mínimo permitindo que as diferentes componentes do operador posição não comutassem.

O objetivo principal deste trabalho é analisar a barreira de potencial do tipo delta levando em consideração o comprimento mínimo, sendo assim a argumentação em favor do comprimento mínimo feita aqui é breve e qualitativa, pois não é a proposta deste trabalho defender ou demonstrar sua existência. Neste capítulo são apresentadas as principais

modificações que ocorrem na estrutura da Mecânica Quântica Ordinária, quando se assume a hipótese da existência de um comprimento mínimo. O ponto de partida, como discutido acima, é uma relação de incerteza generalizada a qual impossibilita a tomada da incerteza da posição arbitrariamente pequena, por consequência a modificação da relação de comutação.

Como não se pode mais ter uma incerteza na posição tão pequena quanto se queira, não é mais possível existir autoestados do operador posição, sendo que um autoestado deve possuir incerteza nula. Por este motivo será visto que é mais conveniente se trabalhar na representação dos momentos. Posteriormente, será construída outra representação, a da quaseposição, com o objetivo de recuperar as informações a cerca da posição da partícula.

3.2 Princípio de Incerteza Generalizado

A argumentação, do ponto de vista qualitativo, em favor do comprimento mínimo e em consequência da generalização do princípio da incerteza, pode ser pensado da seguinte forma: o princípio da incerteza diz que para se medir a incerteza associada ao operador posição de uma partícula deve-se ter uma incerteza associada ao operador posição, cada vez maior. Levando em consideração os efeitos relativísticos do momento linear (como deve ser uma teoria que forneça uma descrição quântica de gravitação) este irá curvar o espaço-tempo. Portanto, incertezas associadas ao momento linear da partícula produzem flutuações quânticas da geometria espaço-temporal, consequentemente no campo gravitacional, o que implica em uma imprecisão na posição da partícula.

Em síntese, ao se tentar determinar a posição de uma partícula com precisão cada vez maior é produzida uma perturbação cada vez maior no campo gravitacional gerando um desconhecimento, também, cada vez maior sobre a posição desta partícula, causando um efeito contrário ao desejado. Este comportamento é representado na figura 3.1 onde é possível observar o "corte"(vértice da figura) que aparece ao se tentar obter uma precisão cada vez maior na posição da partícula.

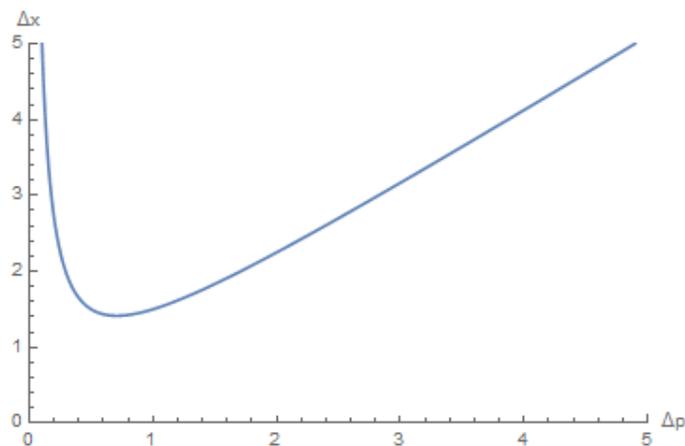


Figura 3.1. Esboço do gráfico da relação de incerteza generalizado $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma]$ em unidades de \hbar .

O comportamento da figura acima é descrito pela relação [17]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma \right], \quad (3.1)$$

onde a região permitida, acima do gráfico, é formada pelos pontos de Δx e Δp que satisfazem esta relação. Os parâmetros β e γ são positivos e independentes de Δx e Δp mas podem, em geral, depender dos valores médios de \hat{x} e \hat{p} . Nota-se que o primeiro termo do segundo membro corresponde ao princípio da incerteza usual, válido em escalas de energias baixas o suficientes para se desprezar a curvatura do espaço-tempo. Os termos restantes estão associados aos efeitos das distorções do campo gravitacional que surgem ao se tentar medir de forma cada vez mais precisa a posição da partícula, ou seja, quando se tem elevados níveis de energia.

Comparando a figura 2.1 com a figura 3.1 é possível observar que não há mais o comportamento assintótico da relação $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ da Mecânica Quântica Ordinária. O termo $\beta(\Delta p)^2$ da relação (3.10) é o responsável pela guinada que se observa na figura 3.1. Diferente do caso usual em que se podia ter a incerteza Δx tendendo a zero com a incerteza em Δp tendendo a infinito, neste caso o membro direito da desigualdade depende quadraticamente de Δp de forma que ao se ter uma incerteza em x diminuindo e a incerteza em p crescendo quadraticamente em certo momento o membro direito da equação (3.1) se torna maior do que o esquerdo, neste momento as incertezas do momento e da posição deixam de satisfazerem esta inequação. A relação de incerteza proposta restringe os valores de Δx e Δp às regiões acima da curva do gráfico, promovendo um "corte" na incerteza associada ao operador \hat{x} . Esta generalização promove um valor mínimo possível para a incerteza Δx do operador posição. Associa-se a este valor mínimo da incerteza, um comprimento Δx_0 ao qual não é possível se obter nenhuma medida menor do que ele. Este valor Δx_0 é o comprimento mínimo.

Outra forma de se generalizar o princípio da incerteza, para todas as ordens do parâmetro β , é proposta em [18] onde a generalização é feita modificando-se a relação entre o momento linear e a função de onda. O caso de (3.1) é um caso particular em que se considera somente os termos em primeira ordem em β .

A relação (2.12) possui uma simetria quanto as incertezas Δx e Δp . Esta simetria foi discutida no Capítulo 2, onde se argumentou que a arbitrariedade no quão pequeno poderia ser a incerteza de um desses operadores, desde que se tomasse uma incerteza relativamente grande no outro, era válida para ambas as incertezas. Desta forma a simetria deveria propiciar uma análise para uma incerteza mínima no operador momento assim como foi feito para o operador posição. A qual teria uma forma geral para a generalização da relação de incerteza

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \alpha(\Delta x)^2 + \beta(\Delta p)^2 + \gamma \right]. \quad (3.2)$$

onde α , assim como β , é positivo e independe de Δx e Δp . A relação acima conduziria tanto

a uma incerteza mínima na posição Δx_0 quanto a uma incerteza mínima no momento Δp_0 .

A incerteza mínima no momento impossibilitaria a construção de uma representação física formada pelos autoestados do operador momento \hat{p} , assim como Δx_0 impossibilita uma representação da posição. Sendo assim uma alternativa seria utilizar a representação de Bargmann-Fock [19]. Porém não há fortes indicativos para a existência de um momento mínimo como há para a existência de um comprimento mínimo, e nem tão pouco este se apresenta em teorias de quantização da gravidade como discutido brevemente para o comprimento mínimo. Desta forma a modificação da Álgebra de Heisenberg que será proposta neste trabalho levará em consideração a relação de incerteza generalizada (3.1) a qual aponta somente para a existência de um comprimento mínimo.

Foi discutido no Capítulo 2 que a não comutatividade dos operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} implicava na impossibilidade de se medir de forma arbitrariamente precisa e simultaneamente ambos operadores pois, ao se medir um desses observáveis a função de onda colapsava em um dos autoestados associado ao operador que se mediu perdendo, automaticamente, a informação a respeito do outro. Esta impossibilidade foi traduzida na relação de incerteza usual $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Portanto ao se modificar a relação de incerteza para que esta seja consistente com a existência do comprimento mínimo deve-se também modificar a relação de comutação de forma que ela forneça esta nova relação de incerteza generalizada.

Pela equação (2.11) pode se estabelecer uma dependência entre a relação de incerteza (no caso o produto $\Delta x \Delta p$ da relação de incerteza) com a relação de comutação

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{|[\hat{x}, \hat{p}]|}{2}. \quad (3.3)$$

Com base na desigualdade acima é fácil verificar que para que se tenha a relação de incerteza generalizada expressa na equação (3.1) a relação de comutação deve ser da forma

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta \hat{p}^2). \quad (3.4)$$

Na próxima seção será modificada a Álgebra de Heisenberg com base nesta relação de comutação generalizada. Antes disso deve ficar claro que se busca vetores que representem estados físicos, ou seja, que sejam normalizáveis e tenham valores médios bem definidos da posição e do momento, assim como as incertezas associadas a essas grandezas estejam bem definidas.

3.3 Espaço de Hilbert

A partir da generalização da relação de incerteza é possível se estabelecer uma relação entre o comprimento mínimo e o parâmetro β . Para isso será tomada a igualdade da relação (3.1) onde o fator γ é tomado como $\gamma = \beta \langle \hat{p} \rangle^2$ pois como dito, ele pode depender dos valores

médios de \hat{p} . A relação de incerteza generalizada fica então

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} [1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2]. \quad (3.5)$$

O valor mínimo da incerteza é obtido ao se tomar o caso limite da relação acima, ou seja, a igualdade. Isolando Δp da igualdade

$$\Delta p = \frac{\Delta x}{\hbar\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 - \beta(1 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2)}. \quad (3.6)$$

Ao se observar o comportamento da figura (3.1) pode-se ver que o valor de Δx_0 (vértice da figura) ocorre para quando o argumento da raiz é zero, conseqüentemente

$$\left(\frac{\Delta x}{\hbar\beta}\right)^2 = \beta(1 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2) \implies \Delta x_0(\langle\hat{p}\rangle) = \hbar\sqrt{\beta}\sqrt{1 + \beta\langle\hat{p}\rangle^2}. \quad (3.7)$$

De forma que o valor absolutamente mínimo para $\Delta x_0(\langle\hat{p}\rangle)$ ocorre para $\langle\hat{p}\rangle = 0$

$$\boxed{\Delta x_0 = \hbar\sqrt{\beta}}. \quad (3.8)$$

Neste caso, como não se está levando em consideração a existência de um momento mínimo, Δp pode assumir qualquer valor entre 0 e $+\infty$. Diferente do que se teria na relação (3.2).

Foi discutido no capítulo anterior de Mecânica Quântica Ordinária que \hat{x} e \hat{p} são operadores que atuam em funções de onda de quadrado integráveis na espaço das posições $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ e do momento $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$, onde $|x\rangle$ e $|p\rangle$ são autoestados do operador posição e momento, respectivamente. Foi visto que o estado $|x\rangle$ representa uma partícula exatamente localizada no ponto x e conseqüentemente com incerteza nula. Analogamente para os estados $|p\rangle$. Tais estados não são estados físicos, pois não são normalizáveis, não pertencendo assim ao Espaço de Hilbert. Para contornar este problema foi feito uma série de aproximações de autoestados que possuem incertezas arbitrariamente próximas de zero. Essa abordagem não é válida em um cenário de comprimento mínimo! Pelo menos para o operador posição. Em um cenário de comprimento mínimo para um vetor de estado $|\psi\rangle$, descrevendo um sistema físico, deve-se ter

$$\Delta x_{|\psi\rangle} = \sqrt{\langle\psi|(\hat{x} - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle)^2|\psi\rangle} \geq \Delta x_0, \quad (3.9)$$

o que impossibilita a tomada do limite com estados de posição arbitrariamente decrescente.

Logo não é mais possível uma representação da posição já que não pode haver autoestados físicos do operador posição, pois este implicaria em uma incerteza nula. Como não existem mais autoestados físicos $|x\rangle$ do operador posição \hat{x} não será mais possível se encontrar uma função de onda $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, a qual descreve a amplitude de probabilidade de uma partícula descrita pelo estado $|\psi\rangle$ estar exatamente localizada no ponto x , pois a

própria noção de uma partícula pontualmente localizada não é mais válida. Mais adiante, será visto como se recuperar a informação a respeito da posição de uma partícula, como se deve ter em uma teoria quântica satisfatória.

Como não está sendo considerada a incerteza mínima no momento este problema da representação não ocorre para o espaço dos momentos, ou seja, os autoestados do operador posição não apresentam qualquer problema ao fornecerem uma incerteza nula ao se trabalhar nesta representação. Portanto, diante da impossibilidade de se trabalhar na representação da posição, em um cenário de comprimento mínimo, a alternativa mais viável é a construção do espaço de Hilbert utilizando a representação dos momentos. Portanto, a função de onda assume a forma $\psi(p) = \langle p|\psi\rangle$.

3.3.1 Representação no Espaço dos Momentos

Foi discutido no Capítulo anterior que a atuação dos operadores posição e momento em funções de onda é consistente com a relação de comutação, independente da representação. Portanto, ao se modificar a maneira como estes operadores comutam deve-se também modificar a atuação deles nas funções de onda para torná-los consistentes com a nova relação de comutação. Desta forma a representação do operador momento \hat{p} no espaço dos momentos em um cenário de comprimento mínimo é escrito como

$$\langle p|\hat{p}|\psi\rangle = p\psi(p), \quad (3.10)$$

como era de se esperar. Porém o operador posição fica

$$\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar(1 + \beta p^2)\partial_p\psi(p). \quad (3.11)$$

As relações acima são consistentes com a relação de comutação (3.4). É fácil de se verificar! O produto escalar é redefinido com um fator $(1 + \beta p^2)$ no denominador

$$\langle\psi|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p)\varphi(p). \quad (3.12)$$

Os operadores \hat{x} e \hat{p} , assim como na Mecânica Quântica ordinária, são simétricos quando aplicados sucessivamente em dois autoestados $\langle\psi|$ e $|\varphi\rangle$ quaisquer, ou seja,

$$(\langle\psi|\hat{p})|\varphi\rangle = \langle\psi|(\hat{p}|\varphi\rangle), \quad (3.13)$$

$$(\langle\psi|\hat{x})|\varphi\rangle = \langle\psi|(\hat{x}|\varphi\rangle). \quad (3.14)$$

Para se verificar as simetrias acima basta aplicar as relações (3.10) e (3.11) na redefinição

de produto escalar. O caso para o operador \hat{p} é trivial, para o operador \hat{x} tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} \psi^*(p) i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \varphi(p) = \quad (3.15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \left[i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi(p) \right]^* \varphi(p), \quad (3.16)$$

no primeiro termo foi utilizado a integração por partes, também foi considerado que a função de onda se anula no infinito.

Uma vez que os autoestados $|p\rangle$ formam uma base do espaço, a relação de completeza toma a forma

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{1 + \beta p^2} |p\rangle \langle p|. \quad (3.17)$$

Conseqüentemente o produto interno de dois autoestados do operador momento fica

$$\langle p|p'\rangle = (1 + \beta p^2) \delta(p - p'). \quad (3.18)$$

3.3.2 Análise do Operador Posição

Matematicamente os autovetores do operador posição no espaço das posições ainda existem portanto, pode-se fazer análise semelhante para eles, por exemplo, a relação de completeza fica

$$\mathbb{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (1 + \beta p^2) |x\rangle \langle x|, \quad (3.19)$$

porém por não ser mais possível uma incerteza nula na posição tais autoestados não podem mais serem interpretados fisicamente, ou seja, não fornecem informação a respeito da posição da partícula.

Enquanto o operador momento permanece auto adjunto, a análise do operador posição mostra que este sofre uma mudança. Utilizando a relação (3.11) na equação dos autovalores para o operador posição tem-se

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p \psi_\lambda(p) = \lambda \psi(p), \quad (3.20)$$

ao resolve-la se acha os autovetores do operador posição no espaço dos momentos

$$\psi_\lambda(p) = c \exp \left[-i \frac{\lambda}{\hbar \sqrt{\beta}} \tan^{-1} (\sqrt{\beta} p) \right]. \quad (3.21)$$

Considerando que estas auto funções do operador posição devem ser normalizadas

$$1 = cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta p^2} dp = cc^* \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}, \quad (3.22)$$

a solução de onda se torna então

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta}}{\pi}} \exp\left[-i\frac{\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \tan^{-1}(\sqrt{\beta}p)\right]. \quad (3.23)$$

Que fornece os autoestados formais do operador posição \hat{x} . Da relação de incerteza sabe-se que estes autoestados não são físicos, pois fornecem incerteza nula. Uma análise mais detalhada do operador posição e das suas auto funções é feita em [20]. Nesta análise se mostra que o operador posição não é mais auto-adjunto, mas apenas simétrico.

3.4 Recuperando as Informações da Posição

Na seção 3.3 foi discutido que os autoestados do operador posição \hat{x} não são mais estados físicos, pois fornecem incerteza nula, sendo assim os autoestados $|x\rangle$ não formam mais uma base do espaço de Hilbert, logo, o operador \hat{x} deixa de ser um observável. Como obter então informações a respeito da posição espacial de um sistema físico em um cenário de comprimento mínimo? Até então a informação a respeito da posição, pelo 4º *postulado*, era obtida por $|\langle x|\psi\rangle|^2$ que fornecia a probabilidade de se encontrar uma partícula em x quando esta era descrita por um vetor de onda $|\psi\rangle$. Porém, como os autoestados $|x\rangle$ não são estados físicos eles não podem mais serem utilizados para se obter qualquer informação a respeito da posição da partícula.

Para se recuperar as informações com respeito à posição de uma partícula em um cenário de comprimento mínimo é necessário introduzir uma nova representação. Essa representação é baseada no conceito de estados de máxima localização. Um estado de máxima localização $|\psi_\xi^{ML}\rangle$, é tal que ele fornece uma posição

$$\langle \psi_\xi^{ML} | \hat{x} | \psi_\xi^{ML} \rangle = \xi \quad (3.24)$$

e incerteza,

$$(\Delta x)_{|\psi_\xi^{ML}\rangle} = \Delta x_0 \quad (3.25)$$

Portanto, um estado de máxima localização representa uma partícula localizada em torno de um ponto ξ com incerteza mínima possível, ou seja, o próprio comprimento mínimo, desta forma a localização dela é a máxima possível ao se levar em consideração o comprimento mínimo, justificando assim o nome destes estados.

3.4.1 Estados de Máxima Localização

Para se obter os autoestados maximamente localizados, assim como na seção 2.2, será utilizado a positividade da norma

$$\left\| \left[(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta \hat{p})^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right] |\psi\rangle \right\| \geq 0, \quad (3.26)$$

tomando o caso limite da igualdade e projetando sobre os autoestados do momento $|p\rangle$ tem-se

$$\langle p | \left[\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle + \frac{\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right] |\psi\rangle = 0. \quad (3.27)$$

Utilizando a relação do operador momento no espaço dos momentos, equação (3.10), e a relação do operador posição no espaço dos momentos, equação (3.11), assim como a relação de comutação generalizada (3.4) a equação acima fornece

$$\left(i\hbar(1 + \beta p^2) \partial_p - \langle \hat{x} \rangle + \frac{i\hbar(1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2)}{2(\Delta p)^2} (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle) \right) \psi(p) = 0. \quad (3.28)$$

De forma que a solução é do tipo

$$\psi_{\xi}^{ML}(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2}{4\beta(\Delta p)^2}} \exp \left[\left(\frac{\langle \hat{x} \rangle}{i\hbar \sqrt{\beta}} - \frac{[1 + \beta(\Delta p)^2 + \beta\langle \hat{p} \rangle^2]\langle \hat{p} \rangle}{2(\Delta p)^2 \sqrt{\beta}} \right) \tan^{-1}(\sqrt{\beta} p) \right]. \quad (3.29)$$

Na seção 3.3, a partir da relação de incerteza generalizada achou-se uma relação para a incerteza na posição, equação (3.7), que é uma função do valor esperado do operador momento $\Delta x_0(\langle \hat{p} \rangle)$. A incerteza na posição assume o valor mínimo, se tornando assim o a incerteza mínima associada ao comprimento mínimo, quando se toma o valor esperado do operador momento igual a zero $\langle \hat{p} \rangle = 0$. Analogamente, para se achar os estados que fornecem a máxima localização possível, isto é, uma partícula com posição ξ e incerteza associada Δx_0 , é necessário que se tome o mesmo valor de $\langle \hat{p} \rangle = 0$ na equação (3.29),

$$\psi(p) = N(1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-i \frac{\langle \hat{x} \rangle}{\hbar \sqrt{\beta}} \tan^{-1}(\sqrt{\beta} p) \right). \quad (3.30)$$

Note que, quando $\Delta x = \hbar \sqrt{\beta}$, $\Delta p = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$. Utilizando a condição de normalização

$$1 = NN^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} = N^2 \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}, \quad (3.31)$$

obtem-se a função de onda dos estados maximamente localizados $(\Delta x)_{|\psi_{\xi}^{ML}\rangle} = \Delta x_0$ em torno

da posição $\xi = \langle \psi_{\xi}^{ML} | \hat{x} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle$,

$$\langle p | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \psi_{\xi}^{ML}(p) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-i \frac{\xi}{\hbar \sqrt{\beta}} \tan^{-1}(\sqrt{\beta} p)\right). \quad (3.32)$$

A principal característica dos estados de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ é que eles são os que mais se aproximam, em um cenário de comprimento mínimo, dos autoestados $|x\rangle$ do operador posição \hat{x} na mecânica quântica ordinária. A consistência do resultado acima pode ser verificada facilmente, tomando $\beta \rightarrow 0$ o resultado acima se torna a solução da onda plana discutida no Capítulo 2.

Estes autoestados possuem energia finita, sendo portanto estados físicos propriamente dito

$$\langle \psi_{\xi}^{ML} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m\beta}. \quad (3.33)$$

Usando o produto interno é possível se verificar a não ortogonalidade dos estados de máxima localização

$$\langle \psi_{\xi'}^{ML} | \psi_{\xi}^{ML} \rangle = \frac{2\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^2} \exp\left(-i \frac{(\xi - \xi')}{\hbar \sqrt{\beta}} \tan^{-1}(\sqrt{\beta} p)\right) \quad (3.34)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\xi - \xi'}{2\hbar \sqrt{\beta}} - \left(\frac{\xi - \xi'}{2\hbar \sqrt{\beta}} \right)^3 \right]^{-1} \text{sen} \left(\frac{(\xi - \xi')}{2\hbar \sqrt{\beta}} \pi \right), \quad (3.35)$$

para dois estados $|\psi_{\xi'}^{ML}\rangle \neq |\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ distintos. A não ortogonalidade dos autoestados implica que estes, diferentemente da Mecânica Quântica Ordinária, não formam uma base. Contudo ainda é possível projetar estados arbitrários $|\phi\rangle$ em um estado maximamente localizado $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ para obter a amplitude de probabilidade da partícula estar maximamente localizada em torno da posição ξ ,

$$\psi(\xi) \equiv \langle \psi_{\xi}^{ML} | \phi \rangle = \langle \xi | \phi \rangle. \quad (3.36)$$

Por conveniência, os estados maximamente localizados $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$ serão referidos a partir de agora simplesmente como $|\xi\rangle$. A interpretação da função de onda na representação da quase posição $\psi(\xi)$ é a de que ela representa a amplitude de probabilidade de se encontrar a partícula maximamente localizada ao redor do ponto ξ , com incerteza Δx_0 .

O processo de medida na Mecânica Quântica, considerando o comprimento mínimo, é visto da seguinte forma: quando é realizada uma medida da posição da partícula, com a máxima resolução possível, perturba-se o sistema de forma que ele colapse para o estado de máxima localização $|\psi_{\xi}^{ML}\rangle$, que possui o projetor associado

$$P_{\xi}^{ML} = |\xi\rangle \langle \xi|. \quad (3.37)$$

Pode-se dizer que o valor medido foi ξ , ou seja, a partícula está localizada em uma região espacial centrada em ξ com largura Δx_0 . Rigorosamente não faz sentido dizer que este processo é uma medida da posição, pois ela não está associada a um observável. Porém, informalmente, não há problema de considerá-la como tal, sendo que ela fornece uma informação a respeito da localização espacial da partícula.

Em um cenário de comprimento mínimo o operador posição \hat{x} deixa de ser um observável, pois este não mais fornece autovalores com interpretação física. Porém os valores médios associados a ele não são afetados, pois os elementos da matriz que o representam não dependem da base. Logo

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle, \quad (3.38)$$

e

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle \psi | (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 | \psi \rangle. \quad (3.39)$$

A interpretação desses valores não depende de \hat{x} ser um observável ou não, nem tão pouco de seus autovetores formarem uma base no espaço de Hilbert. A interpretação que se tem agora de $\langle \hat{x} \rangle$ é que ele fornecerá um ponto de espaço em torno do qual se concentra a função de onda do sistema diferente de antes que era uma média de uma série de medidas do operador posição \hat{x} . Agora $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ fornece o quanto a função de onda está dispersa em torno do ponto $\langle \hat{x} \rangle$ e não mais o desvio médio padrão de uma série de medidas de \hat{x} .

3.4.2 Transformações das Funções de Onda

A transformação da função de onda na representação dos momentos em sua equivalente função de onda no espaço de quaseposição é dada por [1]

$$\langle \xi | \psi \rangle = \psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(i \frac{\xi \tan^{-1}(\sqrt{\beta}p)}{\hbar \sqrt{\beta}}\right) \tilde{\psi}(p). \quad (3.40)$$

A função de onda de quaseposição de um autoestado do momento $\psi_{\tilde{p}}(p) = \delta(p - \tilde{p})$, de energia $E = \frac{\tilde{p}^2}{2m}$, ainda é uma onda plana. Porém, o comprimento de onda agora fornece uma relação de dispersão modificada

$$\lambda(E) = \frac{2\pi\hbar \sqrt{\beta}}{\tan^{-1}(\sqrt{2m\beta E})}. \quad (3.41)$$

Pela relação acima do comprimento de onda da função no espaço de quaseposição é possível se verificar a limitação na precisão que as medidas de posição podem se manifestar, ou seja, como a função \tan^{-1} é uma função limitada o comprimento de onda dado na relação acima possui um valor mínimo. Para uma energia extremamente elevada ($E \rightarrow \infty$) a função \tan^{-1}

assume o valor de $\frac{\pi}{2}$, o que leva a um comprimento de onda mínimo não nulo

$$\lambda_0 = 4\hbar\sqrt{\beta}. \quad (3.42)$$

com um vetor de onda máximo associado $k_m = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$.

A transformação (3.40) mapeia uma função de onda no espaço dos momentos $\psi(p)$ em sua função de onda equivalente no espaço de quaseposição $\psi(\xi)$. Ela é uma generalização da transformada de Fourier da Mecânica Quântica Ordinária. Fazendo sua inversa se obtém

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sqrt{\beta\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi (1 + \beta p^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-i \frac{\xi \tan^{-1}(\sqrt{\beta}p)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right) \psi(\xi). \quad (3.43)$$

Projetando $\langle \xi |$ sobre o operador posição atuando em uma função de onda e comparando com a equação acima é possível mostrar que a atuação do operador momento no espaço da quaseposição é representado como

$$\langle \xi | \hat{p} | \varphi \rangle := \hat{p}\varphi(\xi) = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)\varphi(\xi)}{\sqrt{\beta}}. \quad (3.44)$$

Analogamente para o operador posição, mas utilizando a equação (3.40), tem-se a relação do operador posição atuando em uma função de onda na representação da quaseposição

$$\langle \xi | \hat{x} | \varphi \rangle = \left[\xi + \frac{\beta \tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \right] \varphi(\xi). \quad (3.45)$$

Estas representações no espaço da quaseposição são úteis, em um cenário de comprimento mínimo, pois permitem trabalhar com a função de onda neste espaço e obter informações quanto à localização da partícula em determinada região, o que não ocorre no espaço dos momentos.

3.5 Comprimento Mínimo: Considerações Finais

Neste capítulo discutiu-se a formulação da Mecânica Quântica em um cenário de comprimento mínimo. Começou-se indicando o surgimento do comprimento mínimo em teoria de quantização da gravidade, assumindo-o como hipótese, foi associada a ele a ideia de que um comprimento mínimo na Mecânica Quântica pode ser descrito por uma incerteza mínima não nula $\Delta x_0 \neq 0$ nas medidas da posição. Para que se tivesse uma incerteza mínima não nula na posição foi necessário que se modificasse o Princípio de Incerteza de Heisenberg para uma forma generalizada, o que por consequência, induziu uma modificação na relação de comutação. Como a estrutura da Mecânica Quântica foi baseada na relação de comutação teve-se que alterar alguns conceitos e relações matemáticas para que ela pudesse assim comportar esta generalização.

Uma das consequências da existência do comprimento mínimo foi a impossibilidade de se ter o operador \hat{x} como um observável, pois os autovetores $|x\rangle$ não mais pertencem ao espaço de Hilbert. Para resolver o problema da obtenção de informações da posição da partícula foi formulada a representação da quaseposição, onde esta fornece a posição de uma partícula maximamente localizada.

A representação da quaseposição será utilizada no Capítulo 5 para se solucionar o problema da barreira de potencial delta em um cenário de comprimento mínimo. Antes disso no próximo capítulo será discutido este problema no contexto da Mecânica Quântica Ordinária para que seus resultados sirvam para demonstrar a consistência dos resultados que serão obtidos posteriormente.

Capítulo 4

Potencial Delta de Dirac na Mecânica Quântica Ordinária

4.1 A Delta de Dirac e o Problema do Potencial

Paul Adrien Maurice Dirac (1902 — 1984) foi um físico teórico britânico. Desenvolveu conceitos fundamentais na Mecânica Quântica, tais como, a Equação de Dirac que descreve o comportamento do férmio, a Representação de Dirac que incorpora a Mecânica Matricial de Heisenberg com a Mecânica Ondulatória de Schrödinger em um único formalismo matemático, a notação Bra-Ket que é a notação utilizada para descrever os estados quânticos e a Delta de Dirac.

Em 1930 [21] Dirac introduz a notação da δ para representar a ortogonalidade de estados contínuos sendo uma generalização da Delta de Kronecker, usada nos casos discretos. Apesar de ser comum a referência à δ como uma função, formalmente, ela é uma distribuição, pois, matematicamente falando, uma função deve ter um valor definido para cada ponto do domínio. Ela é definida como uma quantidade $\delta(x)$ que depende de um parâmetro (x) e que satisfaz as seguintes condições

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (4.1)$$

e

$$\delta(x) = 0 \text{ se } x \neq 0. \quad (4.2)$$

Para se ter uma ideia do comportamento da $\delta(x)$ é possível se imaginar uma função de uma variável real x que se anula em todos os pontos exceto em uma pequena região do seu domínio, por exemplo de comprimento ϵ , em torno da origem $x = 0$, e de valor tão alto dentro deste domínio que a integral da função sobre ele dá 1. O formato exato da função dentro deste domínio não interessa (por exemplo, se o domínio tem largura ϵ muito pequena, então a altura da função pode ser ϵ^{-1} e no limite $\epsilon \rightarrow 0$ esta função se torna uma δ) desde

que as propriedades acima sejam satisfeitas.

Outra importante propriedade da função delta é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \quad (4.3)$$

onde a é um ponto da reta real e $f(x)$ é uma função contínua de x . A propriedade acima é fácil de ser verificada, pois ao se multiplicar uma função $f(x)$ por uma delta esta multiplicação é zero em todos os pontos exceto no ponto central da delta

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (4.4)$$

em particular na integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = f(a) \quad (4.5)$$

Desta forma o processo de multiplicação de uma função de x por $\delta(x-a)$ e a seguinte integração sobre todos os valores de x é equivalente ao processo de substituir x por a na função. O intervalo de integração da equação acima não precisa necessariamente ir de $-\infty$ até $+\infty$, basta que o intervalo contenha o ponto a na qual a função delta está centrada e os pontos extremos do domínio no qual ela não se anula. Mais a frente este argumento será usado na integração da função delta e de funções que não estão definidas no ponto central da delta, como as derivadas da função de onda. Outros fatos a respeito da delta podem ser vistos em [22–27].

A Delta de Dirac foi introduzida no contexto da Mecânica Quântica, porém, é aplicada em outras áreas como por exemplo na eletrostática para descrever distribuições de cargas pontuais. A delta δ também pode ser usada para descrever um poço de potencial pontualmente localizado e extremamente profundo [28, 29]. O caso da barreira de potencial é análogo ao que será discutido aqui com a diferença do sinal positivo do potencial, o caso do poço se torna mais interessante, pois ele permite os chamados estados ligados, que é caracterizado pelo nível de energia em relação a altura do potencial. Desta forma a partícula estará sujeita a um potencial do tipo

$$\boxed{V(x) = -V_0\delta(x)}, \quad (4.6)$$

onde V_0 é uma constante positiva. A partícula não está sujeita a nenhum potencial exceto em $x = 0$, onde ela estará sujeita a um potencial de valor $-V_0$. A função de onda que irá descrever o comportamento da partícula será então definida em duas regiões, uma antes de se atingir a barreira e outra depois de atingi-la. A seguir será discutido os estados que descrevem uma partícula sujeita a este potencial.

4.2 Solução do Potencial Delta de Dirac na Mecânica Quântica Ordinária

Como dito acima o caso da barreira se assemelha ao do poço a menos de um sinal negativo. Desta forma os resultados obtidos para o poço serão uteis no próximo capítulo quando se trabalhar com o potencial delta em um cenário de comprimento mínimo¹. Os resultados aqui obtidos serão comparados quando se tomar um limite em que o comprimento mínimo tende a zero. Neste limite, se os resultados obtidos em um cenário de comprimento mínimo resgatarem os aqui obtidos, isto demonstrará que a teoria é consistente com a Mecânica Quântica Ordinária.

A equação de Schrödinger para uma partícula sujeita a um potencial do tipo delta, equação(4.6), é

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(\hat{x}) \right] |\psi\rangle = E|\psi\rangle. \quad (4.7)$$

Projetando a equação acima sobre os autoestados $|x\rangle$, já que a função delta foi definida no espaço das posições, com $\langle x|V(\hat{x})|\psi\rangle = -V_0\delta(x)\psi(x)$, resulta que

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - V_0\delta(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (4.8)$$

A energia que uma partícula possui determina se ela está confinada ou não em uma região, ou seja, se ela tiver energia menor do que o potencial nos extremos de uma região ela estará confinada (neste caso os estados que descrevem esta partícula será chamado de estado ligado) caso contrário, se ela tiver energia maior do que o valor do potencial (neste caso o estado recebe o nome de estado de espalhamento) nos extremos ela poderá escapar. Para se classificar a partícula como "livre" ou "confinada", de forma geral, é interessante que a região considerada seja todo o espaço, desta forma o potencial nos extremos da região considerada é o potencial que a partícula está sujeita no infinito. As classificações das duas situações descritas acima são:

- Quando $E > V(\pm\infty) \Rightarrow$ Estado de espalhamento;
- Quando $E < V(\pm\infty) \Rightarrow$ Estado ligado.

Como para a maioria dos casos reais o potencial tende a zero para regiões muito distantes do ponto considerado $V(\pm\infty) \rightarrow 0$ as duas classificações ficam

- Quando $E > 0 \Rightarrow$ Estado de espalhamento;
- Quando $E < 0 \Rightarrow$ Estado ligado.

Desta forma a solução de onda que descreve a partícula sujeita ao potencial delta é distinta para cada caso. Estes dois casos serão discutidos a seguir.

¹O caso da barreira de potencial será restrito a situação dos chamados estados de espalhamento.

4.2.1 Estado Ligado

A equação (4.8) é válida tanto para os estados ligados quanto para os estados de espalhamento. Tratar-se-á primeiramente os estados ligados, ou seja, $E < 0$. Pela relação (4.2) da função, nas regiões $x > 0$ e $x < 0$, o potencial é nulo $V(x) = 0$. A equação (4.8) fornece

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = k^2\psi(x). \quad (4.9)$$

Sendo $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$, pois $E < 0$, logo, k é real. A solução geral da equação é do tipo

$$\psi_1(x) = A_1e^{-kx} + B_1e^{kx}, \text{ para } x < 0 \quad (4.10)$$

e

$$\psi_2(x) = A_2e^{-kx} + B_2e^{kx}, \text{ para } x > 0. \quad (4.11)$$

Deseja-se que a solução seja normalizável, ou seja, possa fornecer interpretações probabilísticas a respeito das grandezas físicas associadas à partícula que tem o comportamento descrito pela função como, por exemplo, a probabilidade de se achar a partícula em determinada região. Para isso devem-se estabelecer algumas condições de contorno na solução de onda.

- Para a região $x > 0$ a função de onda $\psi(x)$ deve ser limitada para pontos muito distantes da origem $x \rightarrow +\infty$ para isso deve-se ter $B_2 = 0$. Analogamente para a região $x < 0$, ou seja, para $x \rightarrow -\infty$ deve-se ter a função de onda limitada de forma que $A_1 = 0$ (como a região tratada agora é negativa o coeficiente do expoente negativo é que é zerado);
- Como visto no *postulado 4* o módulo quadrático da função de onda fornece a probabilidade de se encontrar a partícula em determinado ponto do espaço. Sendo assim a função de onda deve ser unívoca, isto é, a probabilidade (módulo ao quadrado da função de onda) em cada ponto não pode ter valores diferentes e também deve ser contínua, pois a probabilidade não pode ter valores indefinidos em nenhum ponto. Caso não houvesse esta condição de continuidade da função de onda, poderia haver probabilidades distintas de se encontrar a partícula em um ponto de descontinuidade. Como $\psi(x)$ é contínua para todos os pontos do espaço ela também será para $x = 0$. Aplicando esta condição de continuidade nas funções de onda (4.10) e (4.11) estabelece-se a relação entre os coeficientes $B_1 = A_2$.

Assim a solução da função de onda até o momento fica

$$\psi_1(x) = A_2e^{kx}, \text{ para } x < 0 \quad (4.12)$$

e

$$\psi_2(x) = A_2 e^{-kx}, \text{ para } x > 0. \quad (4.13)$$

- A continuidade da função de onda também é válida para a derivada primeira da função exceto no ponto $x = 0$. Isto se verifica na equação (4.8), nela se observa que a derivada segunda da função de onda está associada com uma função "salto" (a própria δ) em um ponto específico, sendo assim, pode-se inferir que a derivada primeira tem todos os seus valores bem definidos antes e após o ponto em que ocorre o "salto". Logo $\frac{d\psi(x)}{dx}$ é contínua exceto em $x = 0$.

Essa última condição apresentada acima é útil para estabelecer o valor da energia e da constante k . Integrando a equação (4.8) em um intervalo 2ϵ (que depois será tomado como tendendo a zero), ou seja, tomando o limite inferior $-\epsilon$ e o superior $+\epsilon$

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} dx - V_0 \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)\psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx. \quad (4.14)$$

A primeira integral é a derivada primeira $\frac{d\psi}{dx}$ da função de onda tomada nos pontos $+\epsilon$ e $-\epsilon$. A segunda integral pela propriedade da função delta vale $\psi(0)$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d\psi}{dx} \right]_{-\epsilon}^{+\epsilon} - V_0 \psi(0) = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x) dx. \quad (4.15)$$

No limite $\epsilon \rightarrow 0$ as derivadas primeiras são tomadas no ponto $x = 0$. E a integral do lado direito vale zero, pois nada mais é do que a área de uma região de altura limitada e largura tendendo a zero. Tem-se então

$$\frac{d\psi_2(0)}{dx} - \frac{d\psi_1(0)}{dx} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} \psi(0) \quad (4.16)$$

Calculando as derivadas das equações (4.12) e (4.13) no ponto $x = 0$, como mostrado em (4.16) e considerando também que $\psi(0) = A_2$, acha-se as relações para k e para E em função de V_0

$$k = \frac{mV_0}{\hbar^2}, \quad (4.17)$$

$$E = -\frac{mV_0^2}{2\hbar^2}. \quad (4.18)$$

Fornecendo uma energia negativa, o que era de se esperar para estados ligados $E < 0$. Utilizando a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^0 |\psi_1(x)|^2 dx + \int_0^{+\infty} |\psi_2(x)|^2 dx = 1, \quad (4.19)$$

para achar o valor da constante $A_2 = \sqrt{k} = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$. A função de onda fica então

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar} e^{-\frac{mV_0|x|}{\hbar^2}}, \text{ com energia } E = \frac{-mV_0^2}{2\hbar^2} \quad (4.20)$$

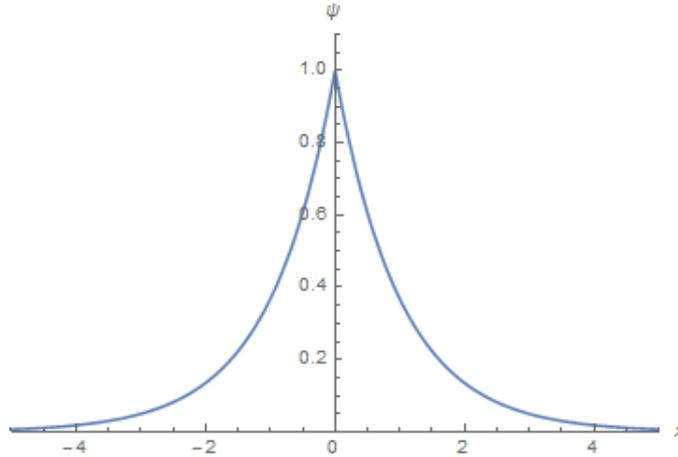


Figura 4.1. Função de onda $\psi(x) = \sqrt{k}e^{-\frac{mV_0|x|}{\hbar^2}}$ da solução da barreira de potencial Delta de Dirac na Mecânica Quântica Ordinária para estados ligados em unidades de \sqrt{k} .

4.2.2 Estados de Espalhamento

Tratar-a-se agora dos casos de espalhamentos, ou seja, os casos para os quais a energia da partícula é $E > 0$. Assim como no caso dos estados ligados o potencial para as regiões $x > 0$ e $x < 0$ se anula devido à propriedade (4.2) da função delta, porém, como a energia é positiva a equação (4.8) se escreve como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi = -k^2\psi. \quad (4.21)$$

De forma que $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ é real e positivo, portanto, as soluções são do tipo

$$\psi_1(x) = A_1e^{ikx} + B_1e^{-ikx}, \text{ para } x < 0 \quad (4.22)$$

e

$$\psi_2(x) = A_2e^{ikx} + B_2e^{-ikx}, \text{ para } x > 0. \quad (4.23)$$

Novamente para que se possa interpretar fisicamente a função de onda e ela possa fornecer informações a respeito do comportamento da partícula deve-se estabelecer algumas condições de contorno:

- Diferente do caso dos estados ligados, nenhum desses termos divergem para $x \rightarrow \pm\infty$, pois são oscilatórios;

- Continuidade: Assim como para o caso dos estados ligados deve-se ter a continuidade da função de onda $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ de forma que ao se aplicar esta condição nas equações (4.22) e (4.23) ela fornece que $A_1 + B_1 = A_2 + B_2$;
- É interessante analisar o significado físico de cada um dos termos que aparecem nas funções de onda (4.22) e (4.23). Claramente os termos representam ondas se propagando da esquerda para a direita, quando são do tipo $\exp(ikx)$, e da direita para a esquerda, quando são do tipo $\exp(-ikx)$. Na equação (4.22) A_1 representa a amplitude da onda que se propaga da esquerda para a direita na região $x < 0$, nesta mesma região B_1 representa a amplitude da onda que se propaga da direita para a esquerda. Analogamente para a região $x > 0$, na equação (4.23) A_2 representa a amplitude da onda que se propaga da esquerda para a direita e B_2 representa a amplitude da onda que se propaga da direita para a esquerda. Geralmente, nas experiências de espalhamento as ondas vêm de um único sentido, por exemplo, da esquerda para a direita, desta forma após atingir a barreira não há motivo para se ter uma onda refletida na região $x > 0$ portanto $B_2 = 0$.

O significado que se tem então para cada termo das equações (4.22) e (4.23) é:

- A_1 representa a amplitude da onda incidente sobre a barreira (para o caso em que a onda vem da esquerda para a direita);
- B_1 representa a amplitude da onda refletida após atingir a barreira;
- A_2 representa a amplitude da onda transmitida após atingir a barreira.

As soluções assumem, então, a seguinte forma

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}, \text{ para } x < 0 \quad (4.24)$$

e

$$\psi_2(x) = A_2 e^{ikx} \text{ para } x > 0. \quad (4.25)$$

É possível determinar a relação entre as constantes B_1 e A_2 com A_1 pela integração da equação (4.8)

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d^2\psi}{dx^2} dx - V_0 \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \delta(x)\psi(x)dx = E \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \psi(x)dx. \quad (4.26)$$

Como discutido no caso de estados ligados, a primeira integral é a derivada primeira tomada após e anteriormente à barreira. Já a segunda integral é a função de onda tomada no ponto zero $\psi(0)$. E a integral da parte direita da equação se anula quando se toma o limite $\epsilon \rightarrow 0$,

devido à continuidade de $\psi(x)$. A equação acima se torna

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d\psi_2(0)}{dx} - \frac{d\psi_1(0)}{dx} \right] - V_0\psi(0) = 0 \quad (4.27)$$

Fazendo a derivada primeira das funções de onda (4.24) e (4.25), tomando-as no ponto zero e juntamente com o fato de que $A_1 + B_1 = A_2$, a equação acima fornece

$$B_1 = \frac{i\omega}{(1-i\omega)}A_1 \quad \text{e} \quad A_2 = \frac{1}{(1-i\omega)}A_1, \quad (4.28)$$

onde foi introduzido o fator $\omega = \frac{2mV_0}{\hbar^2k}$. Para estudar os estados de espalhamento em que o sentido de incidência da onda seja da direita para a esquerda basta se tomar o coeficiente $A_1 = 0$, amplitude da onda se propagando da esquerda para a direita do lado $x < 0$, e considerar o coeficiente B_2 .

A probabilidade de se encontrar a partícula em determinado ponto é dado pelo módulo da função de onda ao quadrado $|\psi|^2$. Com base nisto é definido o coeficiente de reflexão da partícula

$$R \equiv \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2}, \quad (4.29)$$

que fornece a probabilidade da partícula ser refletida após atingir a barreira. Analogamente, o coeficiente de transmissão é definido como

$$T \equiv \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2}, \quad (4.30)$$

que fornece a probabilidade da partícula atravessar a barreira após atingi-la. Utilizando a relação (4.28) dos coeficiente B_1 e A_2 com A_1 pode-se se calcular os coeficientes de reflexão e transmissão

$$R = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\hbar^2 E}{mV_0^2}\right)}, \quad (4.31)$$

$$T = \frac{1}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{mV_0^2}{2\hbar^2 E}\right)}. \quad (4.32)$$

percebe-se que quanto maior a energia maior a probabilidade de transmissão e menor a probabilidade de reflexão, o que é razoável. A soma dos coeficientes de transmissão e reflexão, como deveria ser, é igual a 1

$$R + T = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\hbar^2 E}{mV_0^2}\right)} + \frac{1}{1 + \left(\frac{mV_0^2}{2\hbar^2 E}\right)} = 1, \quad (4.33)$$

ou seja, a partícula será transmitida ou refletida. O que torna os resultados acima consistentes com a interpretação probabilística da Mecânica Quântica. Diferente dos Estados

Ligados os Estados de Espalhamento não são normalizáveis (por isso não se pode usar a condição de normalização para se obter o valor das constantes). Portanto a solução de onda não representa estados possíveis da partícula. Para resolver este problema deve-se formar combinações lineares normalizáveis de forma que as partículas sejam descritas por pacotes de onda.

Para se obter os resultados da barreira de potencial delta basta fazer a conversão $V_0 \rightarrow -V_0$ nos resultados acima. Esta conversão elimina os estados ligados, pois quando se tem estados com energia sempre menor do que o potencial estes estados são não normalizáveis. Por outro lado os coeficientes de transmissão T e reflexão R , característicos dos estados de espalhamento e que dependem somente de V_0^2 , não sofrem variação. As duas situações que se tem agora são se $E > V_0$ ou se $E < V_0$. O primeiro caso é para quando a partícula possui energia maior do que o potencial de forma que, classicamente, ela simplesmente atravessaria a barreira, ou seja, apesar de existir uma obstáculo à passagem da partícula, tal obstáculo não oferece um impedimento significativo frente a energia que a partícula possui, porém, no contexto quântico verifica-se que o resultado não é bem esse. O outro caso é quando a energia da partícula é menor do que a barreira de potencial. Classicamente o que aconteceria seria que a partícula seria refletida, porém, quanticamente há uma probabilidade da partícula atravessar a barreira, tunelando através dela.

Classicamente uma partícula não consegue passar por uma barreira infinitamente alta, independentemente de sua energia. Os problemas de espalhamento clássico fornecem que se $E > V_0$ então $T = 1$ e $R = 0$ logo, a partícula com certeza atravessa a barreira, se $E < V_0$ então $T = 0$ e $R = 1$ de forma que a partícula tenta "escalar" a barreira até se esgotar a energia cinética e então retorna. Os problemas de espalhamento quânticos são mais peculiares. A partícula tem probabilidade não zero de passar pelo potencial mesmo se $E < V_0$, este é o fenômeno de tunelamento. Assim como de ser refletida se $E > V_0$.

4.3 Potencial Delta: Considerações Finais

Neste capítulo, discutiu-se a função delta, que na verdade é uma distribuição, e algumas de suas propriedades. Foi visto que ela pode ser usada para descrever um poço de potencial "fortemente" localizado, e os seus resultados podem ser expandidos para o caso da barreira. Quanto ao poço existem duas situações: uma quando a energia era negativa, estados ligados, o que forneceu estados com energia definida; e outra situação para quando a energia era positiva, estados de espalhamento, que forneceu a probabilidade da partícula ser refletida ou transmitida através da barreira. Os resultados dos estados de espalhamento se estenderam para a barreira de potencial, pois estes dependem do valor do potencial quadrado V_0^2 , sendo que nesta situação a partícula é classificada pela energia ser maior ou menor do que a barreira. Estes resultados, fornecidos pela Mecânica Quântica Ordinária, serão utilizados para se verificar a consistência dos valores que serão obtidos no próximo capítulo.

Capítulo 5

Potencial Delta de Dirac em um Cenário de Comprimento Mínimo

Neste capítulo, o principal deste trabalho, será discutido o comportamento de uma partícula sujeita a um Potencial Delta de Dirac unidimensional em um cenário de comprimento mínimo, para um tratamento D-dimensional para o estado ligado ver [30]. Os capítulos anteriores serviram como base e introdução dos principais conceitos que devem ser levados em consideração nesta discussão. No capítulo 2 foi feita uma revisão da Mecânica Quântica Ordinária, com atenção especial ao princípio de incerteza. No capítulo 3 foi inserida a ideia do comprimento mínimo e visto que a associação deste com uma incerteza mínima sugere uma modificação da relação de incerteza. Feita a generalização da relação de incerteza, de forma a comportar o comprimento mínimo, analisou-se como a álgebra da Mecânica Quântica é alterada. No capítulo 4 foi solucionado o problema da barreira de potencial delta com base nos resultados do poço de potencial sob o contexto da Mecânica Quântica Ordinária. A solução da delta foi discutida em duas situações: a do estado ligado ($E < 0$), que foi caracterizada pela energia em questão; e a do estado de espalhamento ($E > 0$), que foi caracterizada pelos coeficiente de reflexão R e transmissão T .

Sabendo como o comprimento mínimo altera a estrutura da Mecânica Quântica e consequentemente os operadores, estas estruturas modificadas serão utilizadas para obter uma relação que descreve uma partícula na representação de quaseposição, tendo como base a Equação de Schrödinger. Os resultados aqui obtidos serão comparados com os do potencial delta na Mecânica Quântica Ordinária verificando assim a consistência destes. Como o objetivo aqui é estudar a partícula sob o efeito de um potencial delta, primeiro deve-se definir este potencial na representação de quaseposição.

5.1 Definindo a Delta em um Cenário de Comprimento Mínimo

Foi visto que a inserção de um comprimento mínimo impossibilita a construção de uma representação da posição, pelo menos uma que forneça resultados físicos, pois quando se

leva em consideração a existência de um comprimento mínimo os autoestados $|x\rangle$ associados ao operador posição \hat{x} implicam em uma incerteza nula. Isto é inconsistente com a existência do comprimento mínimo, já que foi associada a este uma incerteza mínima. Sendo assim os autoestados associados ao operador posição não representam estados físicos capazes de fornecer informação a respeito do comportamento da partícula.

Devido à impossibilidade de se obter informações a respeito da partícula na representação da posição, o espaço dos momentos foi modificado de forma que a atuação dos operadores posição e momento satisfizessem a relação de incerteza generalizada (3.1). Porém, esta representação não fornece informações a respeito da posição da partícula. Para se recuperar as informações a respeito da posição foi construída a representação da quaseposição, onde uma partícula poderia estar maximamente localizada em torno da posição ξ , sendo que a menor incerteza possível associada a esta partícula em torno da posição ξ é o comprimento mínimo Δx_0 . Esta representação será utilizada na redefinição da barreira de potencial Delta de Dirac considerando a existência de um comprimento mínimo.

Para se achar as soluções e conseqüentemente os estados que descrevem uma partícula sujeita a um potencial delta em um cenário de comprimento mínimo primeiro deve-se discutir como é este potencial na representação de quaseposição. Em primeiro momento, a forma de se fazer isto seria se deduzir uma transformação a partir da equação (3.45)

$$\langle \xi | \hat{x} | \varphi \rangle = \left[\xi + \frac{\beta \tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \right] \varphi(\xi). \quad (5.1)$$

Esta equação diz como se dá atuação do operador posição na representação da quaseposição. Como a delta é escrita em termos da posição $\delta(x)$ a ideia é deduzir uma transformação para uma função qualquer dependente do operador posição, baseada na equação acima, e então aplicá-la para o potencial delta. A inferência que será feita aqui é a seguinte: da mesma forma que se tem a substituição do operador \hat{x} pelo fator $\left(\xi + \frac{\beta \tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \right)$ ao fazer o operador posição atuar em uma função de onda no espaço da quaseposição, espera-se que essa transformação também seja válida para o argumento de uma função, quando este for o operador posição, ou seja,

$$\langle \xi | f(\hat{x}) | \varphi \rangle = f \left(\xi + \frac{\beta \tan(-i\hbar \sqrt{\beta} \partial_\xi)}{\sqrt{\beta}} \right) \varphi(\xi). \quad (5.2)$$

Portanto assim como se tem a atuação do operador posição na representação da posição, equação (2.20), e a representação do operador posição na representação do momento, equação (2.22), a equação acima relaciona a atuação de alguma função dependente do operador posição em uma função de onda no espaço da quaseposição. Lembrando que no limite $\beta \rightarrow 0$, ou seja, quando o comprimento mínimo vai a zero a transformação acima se torna a mesma que se teria para o caso da transformação (2.20), pois o espaço da quaseposição se torna o espaço da posição. Como $\beta \ll 1$ pode-se fazer a expansão da função tangente

$\tan(x) \simeq x + \frac{x^3}{3}$, de forma que a transformação acima se torna

$$\langle \xi | f(\hat{x}) | \varphi \rangle \simeq f(\xi - i\hbar\beta\partial_\xi)\varphi(\xi). \quad (5.3)$$

Novamente, devido ao fato de $\beta \ll 1$ pode-se fazer uma aproximação da forma $f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + \Delta x \frac{df}{dx}(x_0)$, de $f(\xi - i\hbar\beta\partial_\xi)$ em torno de ξ . Portanto uma função qualquer que depende do operador posição pode ser escrito no espaço de quaseposição como

$$\langle \xi | f(\hat{x}) | \varphi \rangle \simeq \left[f(\xi) - i\hbar\beta \frac{df(\xi)}{d\xi} \partial_\xi \right] \varphi(\xi). \quad (5.4)$$

Sendo que para o próprio operador posição tem-se

$$\langle \xi | \hat{x} | \varphi \rangle \simeq [\xi - i\hbar\beta\partial_\xi] \varphi(\xi). \quad (5.5)$$

Já para a delta a relação é da seguinte forma

$$\langle \xi | \delta(\hat{x}) | \varphi \rangle \simeq \left[\delta(\xi) - i\hbar\beta \frac{d\delta(\xi)}{d\xi} \partial_\xi \right] \varphi(\xi). \quad (5.6)$$

A expansão da função tangente $\tan(x) \simeq x + \frac{x^3}{3}$ pode ser usada de forma análoga para o operador momento. A partir da equação (3.44)

$$\langle \xi | \hat{p} | \varphi \rangle = \frac{\tan(-i\hbar\sqrt{\beta}\partial_\xi)\varphi(\xi)}{\sqrt{\beta}}, \quad (5.7)$$

fazendo a expansão da tangente, o operador momento pode ser representado no espaço de quaseposição, de forma aproximada, como

$$\langle \xi | \hat{p} | \varphi \rangle \simeq \left[-i\hbar\partial_\xi + \frac{i\hbar^3}{3}\beta\partial_\xi^3 \right] \varphi(\xi). \quad (5.8)$$

Estes resultados, equações (5.5), (5.6) e (5.8), são os resultados que se buscava para a reformulação do problema de potencial delta no cenário de comprimento mínimo.

É interessante notar que estes resultados são os mesmos que se teriam na representação da posição, ao se desconsiderar o fator β , pois da mesma forma que se resgata a relação de incerteza da Mecânica Quântica Ordinária quando se toma o limite de $\beta \rightarrow 0$, os resultados acima também recaem no caso ordinário, neste limite, com a ressalva de que nesta situação o espaço da quaseposição se tornar o espaço da posição, pois a partícula volta a poder estar pontualmente localizada.

Uma vez redefinida as relações dos operadores posição e momento, assim como o potencial delta em um cenário de comprimento mínimo, pode-se agora substituí-los na equação Schrödinger de forma a se obter a equação a qual a função de onda deve satisfazer.

Usando as relações (5.5), (5.6) e (5.8) na equação de Schrödinger tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\beta\hbar^4}{3m} \frac{d^4\varphi(\xi)}{d\xi^4} - V_0\delta(\xi)\varphi(\xi) + i\hbar\beta V_0 \frac{d\delta(\xi)}{d\xi} \frac{d\varphi(\xi)}{d\xi} = E\varphi(\xi). \quad (5.9)$$

onde foi desprezado os termos de ordem β^2 e superior. Esta equação é o equivalente à equação (4.8) para o caso ordinário, diferindo desta somente quanto aos termos de derivada a quarta e derivada da delta que surgem ao considerar a existência de um comprimento mínimo não nulo. O objetivo agora seria obter a função de onda que satisfaça a equação acima. Porém, há uma sutileza a ser considerada!

Na solução da barreira de potencial para o caso ordinário foi usada a integração da equação (4.8) para se estabelecer uma relação da função de onda antes e depois da barreira de potencial. Aqui isto também deve ser feito, com a diferença de que a equação a ser integrada é a (5.9). Lembrando que apesar da função de onda ser contínua em $\xi = 0$ a sua derivada primeira é descontínua e conseqüentemente todas as derivadas de ordem superior, portanto todas as derivadas devem ser tomadas antes e depois do ponto $\xi = 0$. A integração fornece

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d\varphi_2}{d\xi}(0) - \frac{d\varphi_1}{d\xi}(0) \right] + \frac{\beta\hbar^4}{3m} \left[\frac{d^3\varphi_2}{d\xi^3}(0) - \frac{d^3\varphi_1}{d\xi^3}(0) \right] - V_0\varphi(0) + i\hbar\beta \frac{d^2\varphi(0)}{d\xi^2} = 0, \quad (5.10)$$

onde foi usada a propriedade da função delta

$$\int_a^b f(x) \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} dx = (-1)^n f^n(0). \quad (5.11)$$

É interessante discutir cada um dos termos da equação acima. Como já dito, a função de onda é contínua em $\xi = 0$, porém, a sua derivada primeira e conseqüentemente todas as de ordem superior não são. O primeiro termo que apresenta a derivada primeira não possuiu qualquer problema, pois a derivada não é tomada no ponto e sim, um pouco antes e um pouco depois, do ponto $\xi = 0$. Analogamente para o segundo termo que possui uma derivada terceira. Porém o terceiro termo que envolve a derivada segunda é tomado no ponto $\xi = 0$, pela propriedade da função delta, causando uma divergência deste termo.

Esse fato causa uma divergência na equação acima impossibilitando a solução do problema. A divergência é devido a transformação (5.6) pois o termo divergente surgiu com o aparecimento da derivada da função delta, $-i\hbar\beta \frac{d\delta(\xi)}{d\xi}$, ao se passar a barreira do espaço de posição para o espaço de quaseposição.

O problema enfrentado até aqui é o de se redefinir o potencial delta no espaço de quaseposição para que se possa resolver este problema em um cenário de comprimento mínimo. A relação (5.6) apesar de consistente analiticamente leva a uma equação com termo divergente não sendo possível solucionar o problema. Desta forma a proposta deste trabalho é definir um formato do potencial delta no espaço de quaseposição que leve a uma equação sem divergências e que seja baseado em uma interpretação física consistente. Se esta definição levar a resultados que quando tomado o limite $\beta \rightarrow 0$ se obtenha os resultados do

capítulo anterior então a definição será consistente com a Mecânica Quântica Ordinária.

Neste contexto, a proposta deste trabalho para a definição do potencial delta no espaço da quaseposição é a seguinte:

$$\langle \xi | V(x) | \psi \rangle \equiv -V_0 \delta(\xi) \psi(\xi) \quad (5.12)$$

De forma que um potencial pontualmente concentrado no espaço da posição da Mecânica Quântica Ordinária é equivalente a um potencial também pontualmente concentrado no espaço da quaseposição. O espaço da posição permite a existência de um potencial maximamente concentrado sem maiores problemas, pois este é construído com base na Mecânica Quântica Ordinária e permite assim a existência de comprimentos tendendo a zero. Quanto ao caso do espaço da quaseposição, apesar dele não possibilitar a existência de comprimentos observados abaixo do comprimento mínimo, isto não é um problema aqui. O espaço da quaseposição foi construído considerando a existência de um comprimento mínimo não nulo de forma que não se pode tomar algo com dimensões desprezíveis, ou seja, abaixo deste comprimento. Porém a função delta definida como (5.12) não necessariamente possui comprimento desprezível, pois pelas propriedades discutidas no capítulo anterior ela deve satisfazer as equações (4.2) e (4.2). Por exemplo, uma situação em que se tem uma função satisfazendo as propriedades da delta e que é consistente com o comprimento mínimo é o caso limite em que a barreira de potencial tem a largura mínima possível, ou seja, o próprio comprimento mínimo Δx_0 e altura $\frac{1}{\Delta x_0}$ o que possibilita a definição (5.12).

Esta definição busca solucionar o problema da divergência da equação (5.10) e ela é consistente com a natureza do comprimento mínimo, pois este impossibilita a existência de potenciais pontualmente concentrados. O potencial deve agora estar disperso em uma região de pelo menos da mesma ordem de grandeza do comprimento mínimo. A seguir será discutida a solução de onda deste potencial, definição (5.12).

5.2 Solução do Potencial Delta de Dirac em um Cenário de Comprimento Mínimo

Com a delta devidamente definida na representação de quaseposição a solução do potencial que se buscará agora será feita com base da solução da equação de Schrödinger, utilizando as relações (5.5) e (5.8), agora ao invés da equação (5.6) será usada a definição (5.12). De forma que esta nova definição da função delta, ao invés da equação (5.9), fornece

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(\xi)}{d^2 \xi} + \frac{\beta \hbar^4}{3m} \frac{d^4 \varphi(\xi)}{d^4 \xi} - V_0 \delta(\xi) \varphi(\xi) = E \varphi(\xi). \quad (5.13)$$

Não apresentando mais o termo divergente. Portanto o objetivo da definição da delta foi eliminar este termo, que surge com a integração da equação, relacionado a derivada segunda da delta no ponto $\xi = 0$. Devido à propriedade da delta, nas regiões $\xi < 0$ e $\xi > 0$ a

equação assume o formato

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(\xi)}{d^2\xi} + \frac{\beta\hbar^4}{3m} \frac{d^4\varphi(\xi)}{d^4\xi} = E\varphi(\xi). \quad (5.14)$$

A equação acima é uma equação diferencial linear de quarta ordem e possui solução geral do tipo

$$\varphi_1(\xi) = A_1e^{\lambda_+\xi} + B_1e^{-\lambda_+\xi} + C_1e^{i\lambda_-\xi} + D_1e^{-i\lambda_-\xi}, \text{ para } \xi < 0, \quad (5.15)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = A_2e^{\lambda_+\xi} + B_2e^{-\lambda_+\xi} + C_2e^{i\lambda_-\xi} + D_2e^{-i\lambda_-\xi}, \text{ para } \xi > 0, \quad (5.16)$$

onde os coeficientes λ_+ e λ_- são

$$\lambda_+ = \frac{1}{2\hbar} \left[\frac{3}{\beta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\beta mE} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta} + 8mE - \frac{32}{3}\beta m^2E^2} \quad (5.17)$$

$$\simeq \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta} \left(1 + \frac{2}{3}\beta mE \right)}, \quad (5.18)$$

e

$$\lambda_- = \frac{1}{2\hbar} \left[\frac{3}{\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16}{3}\beta mE} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2\hbar} \sqrt{8mE - \frac{32}{3}\beta m^2E^2} \quad (5.19)$$

$$\simeq \frac{1}{2\hbar} \sqrt{8mE} \left(1 - \frac{2}{3}\beta mE \right). \quad (5.20)$$

Nos coeficientes acima foram feitas duas expansões devido ao fato de $\beta \ll 1$. Na primeira expansão considerou-se os termos até a terceira ordem de β , $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ pois, há um fator β no denominador. Os resultados acima são consistentes com [2] onde o autor discuti o caso da partícula livre no cenário de comprimento mínimo. Na equação (5.14), para as regiões $\xi < 0$ e $\xi > 0$, a partícula não está sujeita a nenhum potencial de forma que se comporta como uma partícula livre e portanto fornece os mesmos coeficientes.

Porém, o caso da delta difere da partícula livre quanto as condições de contorno que devem ser estabelecidas na região da barreira. As condições são as seguintes:

- Assim como no caso ordinário, deseja-se que a função de onda seja limitada para as regiões muito distantes da origem, $\xi \rightarrow \pm\infty$, portanto, para $\varphi_1(\xi)$ deve-se ter $B_1 = 0$ e para $\varphi_2(\xi)$ deve-se ter $A_2 = 0$ pois as exponenciais destes termos crescem indefinidamente nestes limites.

Cabe aqui também a análise do comportamento dos exponenciais associados às constantes A_1 e B_2 . Para $\xi < 0$

$$e^{\lambda_+\xi} = e^{-\lambda_+|\xi|} = e^{-\frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta mE\right) |\xi|}, \quad (5.21)$$

e para $\xi > 0$

$$e^{-\lambda_+\xi} = e^{-\lambda_+|\xi|} = e^{-\frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta mE\right) |\xi|}. \quad (5.22)$$

Em ambos os casos no limite em que $\beta \rightarrow 0$ esses expoentes tendem a infinito, devido ao fator β no denominador da raiz quadrada o que seria inconsistente com o limite ordinário, porém, como o exponencial é negativo em suas respectivas regiões não há divergência. Estes expoentes têm um comportamento peculiar, mas devido a um outro motivo, que é discutido a seguir.

- As constantes associadas aos expoentes λ_+ têm um comportamento característico. Analisando o expoente $\lambda_+ = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta mE\right)$ é possível notar que ele depende fracamente da energia e da massa da partícula, isto é, o fator com a energia e com a massa dentro do parênteses possui um termo multiplicativo β e como se sabe $\beta \ll 1$, independente do limite da Mecânica Quântica Ordinária. Sendo assim, os coeficientes com estes expoentes se comportam como se fossem termos de "fundo" independentemente da existência de uma partícula para existirem. Desta forma estes coeficientes apesar de serem uma solução formal para a equação (5.13) serão desconsiderados por falta de representação física para eles. Portanto, $A_1 = B_2 = 0$.
- A análise feita para a amplitude de probabilidade das ondas incidentes e refletida no caso ordinário também é válido aqui. Logo considerando uma onda incidente da esquerda para a direita e considerando que não há onda refletida para a região $\xi > 0$ isto implica em $D_2 = 0$.
- Aqui também se deve ter a continuidade da função de onda na barreira, ou seja, em $\xi = 0$ deve-se ter $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, o que fornece

$$C_1 + D_1 = C_2.$$

A integração da equação (5.13) agora fornece

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d\varphi_2}{d\xi}(0) - \frac{d\varphi_1}{d\xi}(0) \right] + \frac{\beta\hbar^4}{3m} \left[\frac{d^3\varphi_2}{d\xi^3}(0) - \frac{d^3\varphi_1}{d\xi^3}(0) \right] - V_0\varphi(0) = 0. \quad (5.23)$$

Diferente da equação (5.10), que possui uma derivada segunda da função de onda no ponto $\xi = 0$, nesta equação não há termos divergentes. O termo $\varphi(0)$ não apresenta qualquer divergência pois como discutido anteriormente a descontinuidade só ocorre para as derivadas da função de onda porém, a condição de continuidade é válida para a função de onda em si. A definição (5.12) da delta faz com que a divergência deixe de existir e a integração da equação de Schrödinger passa a fornecer uma relação entre as funções de onda antes e depois do potencial.

A relação entre as funções de onda, antes e depois da barreira, discutida acima juntamente com as condições de contorno já mencionadas fornecem todas as condições necessárias para se estabelecer a energia dos estados ligados e os coeficientes de transmissão e reflexão para os estados de espalhamento. Assim como feito no caso ordinário serão discutidas agora estas duas situações para a energia da partícula, os estados ligados ($E < 0$) e os estados de espalhamento ($E > 0$).

5.2.1 Estado Ligado

Nesta situação a energia da partícula é menor do que zero $E < 0$. Como discutido no capítulo anterior, esta situação é caracterizada pela energia que a partícula tem em relação a altura da barreira de potencial ser $E = \frac{-mV_0^2}{2\hbar^2}$, no contexto ordinário. O objetivo agora é investigar esta mesma situação, porém, considerando a existência de um comprimento mínimo não nulo.

Como $E < 0 \implies E = -|E|$ de forma que os coeficientes (5.18) e (5.20) se tornam

$$\lambda'_+ = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta}} \left(1 - \frac{2}{3}\beta m|E|\right), \quad (5.24)$$

e

$$\lambda'_- = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{8m|E|} \left(1 + \frac{2}{3}\beta m|E|\right), \quad (5.25)$$

onde deve-se multiplicar o coeficiente λ'_- por i pois ao se tomar o valor negativo do módulo da energia dentro da raiz surge o imaginário. A modificação dos coeficiente λ'_+ e λ'_- faz com que as funções de onda (4.10) e (4.11) se modifiquem da seguinte forma

$$\varphi_1(\xi) = A_1 e^{\lambda'_+ \xi} + B_1 e^{-\lambda'_+ \xi} + C_1 e^{-\lambda'_- \xi} + D_1 e^{\lambda'_- \xi}, \quad \text{para } \xi < 0, \quad (5.26)$$

$$\varphi_2(\xi) = A_2 e^{\lambda'_+ \xi} + B_2 e^{-\lambda'_+ \xi} + C_2 e^{-\lambda'_- \xi} + D_2 e^{\lambda'_- \xi}, \quad \text{para } \xi > 0. \quad (5.27)$$

Para se determinar o valor da energia para o estado ligado serão utilizadas algumas condições de contorno. Com base no que foi discutido anteriormente:

- As soluções que possuem o coeficiente λ'_+ serão desconsideradas por representarem termos de "fundo" independentes da partícula. Logo, $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$.

- As funções de onda $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$ devem ser limitadas para as regiões muito distantes da origem $\xi \rightarrow \pm\infty$. Portanto, para $\xi < 0 \implies C_1 = 0$ e para $\xi > 0 \implies D_2 = 0$.

De forma que a função de onda, até o momento, assume o seguinte formato

$$\varphi_1(\xi) = D_1 e^{\lambda'_- \xi}, \text{ para } \xi < 0, \quad (5.28)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = C_2 e^{-\lambda'_- \xi}, \text{ para } \xi > 0. \quad (5.29)$$

- A função de onda deve ser contínua na barreira: $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Portanto, $D_1 = C_2$.

A Função de onda se torna, então,

$$\varphi_1(\xi) = D_1 e^{\lambda'_- \xi}, \text{ para } \xi < 0, \quad (5.30)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = D_1 e^{-\lambda'_- \xi}, \text{ para } \xi > 0. \quad (5.31)$$

Utilizando as funções de onda acima na equação (5.23) é possível se estabelecer uma relação entre a altura da barreira de potencial V_0 e o coeficiente λ'_- que por sua vez, pela equação (5.25), é função da energia da partícula.

$$V_0 = \frac{\hbar^2}{m} \lambda'_- \left(1 - \frac{2\beta\hbar^2}{3} \lambda'^2_- \right) \quad (5.32)$$

Substituindo o valor do coeficiente λ'_- na equação acima tem-se

$$V_0 = \sqrt{\frac{2\hbar^2|E|}{m}} \left(1 - \frac{2}{3} \beta m |E| \right). \quad (5.33)$$

Explicitando o valor do módulo da energia tem-se

$$|E| = \frac{mV_0^2}{2\hbar^2} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\beta m^2 V_0^2}{\hbar^2} \right). \quad (5.34)$$

Como discutido no capítulo 3 espera-se reobter o resultado da Mecânica Quântica Ordinária no limite $\beta \rightarrow 0$. O resultado disto ficou claro na relação de incerteza generalizada pois quando tomado este limite na relação generalizada recuperou-se a relação de incerteza ordinária. Este mesmo procedimento é adotado aqui para se verificar a consistência do resultado obtido acima para a energia do estado ligado do potencial delta. Fica claro na relação (5.34) que ao se tomar o limite $\beta \rightarrow 0$ esta relação fornece exatamente o mesmo resultado que a equação (4.18).

5.2.2 Estado de Espalhamento

A situação agora é caracterizada pela energia da partícula ser maior do que zero $E > 0$. Foi visto no contexto da Mecânica Quântica Ordinária que há uma probabilidade da partícula atravessar a barreira dada pelo coeficiente T , assim como há uma certa probabilidade da partícula ser refletida dada pelo coeficiente de reflexão R . Esta mesma situação será agora analisada levando em consideração a existência do comprimento mínimo.

Como a energia $E > 0$ isto implica que $E = |E|$ e as equações (5.18) e (5.20), que fornecem os expoentes das funções de onda, permanecem inalterados.

$$\lambda_+ = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{6}{\beta}} \left(1 + \frac{2}{3}\beta mE\right), \quad (5.35)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{8mE} \left(1 - \frac{2}{3}\beta mE\right). \quad (5.36)$$

Assim, a função de onda é a mesma das equações (5.15) e (5.16),

$$\varphi_1(\xi) = A_1 e^{\lambda_+ \xi} + B_1 e^{-\lambda_+ \xi} + C_1 e^{i\lambda_- \xi} + D_1 e^{-i\lambda_- \xi}, \text{ para } \xi < 0, \quad (5.37)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = A_2 e^{\lambda_+ \xi} + B_2 e^{-\lambda_+ \xi} + C_2 e^{i\lambda_- \xi} + D_2 e^{-i\lambda_- \xi}, \text{ para } \xi > 0. \quad (5.38)$$

Os coeficientes de transmissão e reflexão podem ser obtidos utilizando condições de contorno análogas às já discutidas:

- Assim como no caso dos estados ligados as soluções que possuem o coeficiente λ'_+ serão desconsideradas por representarem termos de "fundo" independentes da partícula. Portanto, $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 0$.
- Diferente do caso de estados ligados, aqui não há termos que divergem nos limites $\xi \rightarrow \pm\infty$, pois as funções de onda $\varphi_1(\xi)$ e $\varphi_2(\xi)$ são representadas por exponenciais imaginárias, sendo assim são oscilatórias.
- Considerando a situação em que a partícula incidente vai da esquerda para a direita e que não há partícula refletida na região $\xi > 0$. Nesta situação tem-se que $D_2 = 0$.

De forma que a função de onda, até o momento, assume o seguinte formato

$$\varphi_1(\xi) = C_1 e^{i\lambda_- \xi} + D_1 e^{-i\lambda_- \xi}, \text{ para } \xi < 0, \quad (5.39)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = C_2 e^{i\lambda-\xi}, \text{ para } \xi > 0. \quad (5.40)$$

- A função de onda deve ser contínua na barreira: $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Portanto, $C_1 + D_1 = C_2$.

A função de onda pode ser escrita como

$$\varphi_1(\xi) = C_1 e^{i\lambda-\xi} + D_1 e^{-i\lambda-\xi}, \text{ para } \xi < 0, \quad (5.41)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = (C_1 + D_1) e^{i\lambda-\xi}, \text{ para } \xi > 0. \quad (5.42)$$

Substituindo as funções de onda acima na equação (5.23), é possível estabelecer a seguinte relação entre as constantes C_1 e D_1

$$C_1 = -D_1 \left[1 + \frac{i\hbar^2 \lambda_-}{mV_0} \left(1 + \frac{2}{3} \beta \hbar^2 \lambda_-^2 \right) \right]. \quad (5.43)$$

De modo que a constante $C_2 = (C_1 + D_1)$, que representa a amplitude da onda transmitida, é

$$C_2 = -D_1 \left[\frac{i\hbar^2 \lambda_-}{mV_0} \left(1 + \frac{2}{3} \beta \hbar^2 \lambda_-^2 \right) \right]. \quad (5.44)$$

Desta forma a constante C_1 representa a amplitude da onda incidente, a constante D_1 representa a amplitude da onda refletida e, como já mencionado, $C_2 = (C_1 + D_1)$ representa a amplitude da onda transmitida. Os coeficiente de transmissão e reflexão serão construídos de forma análoga às equações (4.29) e (4.30). Portanto, aqui se tem que o coeficiente de reflexão é

$$R \equiv \frac{|D_1|^2}{|C_1|^2}, \quad (5.45)$$

e o coeficiente de transmissão é

$$T \equiv \frac{|C_2|^2}{|C_1|^2}. \quad (5.46)$$

Introduzindo o fator

$$\alpha \equiv \left[\frac{i\hbar^2 \lambda_-}{mV_0} \left(1 + \frac{2}{3} \beta \hbar^2 \lambda_-^2 \right) \right], \quad (5.47)$$

os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser escritos em termos de α como

$$R = \frac{1}{1 + \alpha^2}, \quad (5.48)$$

$$T = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}. \quad (5.49)$$

Claramente

$$R + T = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} + \frac{1}{1 + \alpha^2} = 1, \quad (5.50)$$

como era de se esperar, pois com certeza a partícula vai atravessar ou ser refletida.

A consistência dos coeficientes de reflexão e transmissão acima com os resultados da Mecânica Quântica Ordinária podem ser verificados considerando a conversão $\alpha^2 \longleftrightarrow \frac{1}{\omega^2}$ de uma caso para o outro, onde aqui o fator $\omega = \frac{mV_0}{2\hbar^2 E}$ se refere ao coeficiente do caso ordinário. Explicitando o coeficiente λ_- no fator α^2

$$\alpha = \frac{2\hbar^2 E}{mV_0^2} \left[1 + \frac{4}{3}\beta mE + O(\beta^2) \right]. \quad (5.51)$$

De forma que a conversão acima é consistente no limite em que o parâmetro do comprimento mínimo vai a zero $\beta \rightarrow 0$ o que resgata os resultados ordinários do coeficiente de reflexão e transmissão.

5.3 Potencial Delta em um Cenário de Comprimento Mínimo: Considerações Finais

Neste Capítulo, resolveu-se o potencial delta em um cenário de comprimento mínimo. Começou-se analisando qual seria o formato da delta na representação de quaseposição, diante da impossibilidade que se tinha de se trabalhar no espaço da posição. Nesta análise foi deduzida uma transformação para a delta, já que ela é definida na representação da posição. Porém, esta dedução se mostrou inconsistente devido à uma divergência que surge na integração da equação de Schrödinger. Esta inconsistência fez com que fosse definido um potencial delta na representação de quaseposição, assim como o é para o espaço da posição, ou seja, que satisfaz as propriedades da delta discutidas no capítulo 4.

Em posse da definição da delta, na representação da quaseposição, achou-se os expoentes da solução geral da equação de Schrödinger de uma partícula sujeita a um potencial delta em um cenário de comprimento mínimo. Estabeleceu-se as condições de contorno necessárias para se obter as constantes da solução de onda e achar a relação da energia com o valor V_0 do potencial, para os estados ligados, e os coeficiente de reflexão e transmissão, para os estados de espalhamento, comparando-os assim com os resultados ordinários.

Capítulo 6

Conclusão

O objetivo principal deste trabalho foi analisar o potencial do tipo delta sob a hipótese da existência de um comprimento mínimo não nulo, $\Delta x_0 \neq 0$. Para isto foi necessário reformular alguns conceitos da Mecânica Quântica Ordinária para que ela fosse consistente com esta hipótese. Desta forma, no capítulo 2, foi introduzido os principais conceitos e resultados da já consagrada Mecânica Quântica Ordinária, como por exemplo, a impossibilidade de se medir de forma simultânea os valores associados a dois operadores não compatíveis. Esta impossibilidade foi quantificada na relação de incerteza, a qual apesar de limitar o conhecimento simultâneo de dois operadores não limitava o quão preciso se poderia ter uma medida em detrimento da outra.

Para tornar a Mecânica Quântica consistente com o comprimento mínimo foi necessário generalizar a relação de incerteza. Esta generalização foi feita no capítulo 3 onde discutiu-se que o comprimento mínimo surge naturalmente em teorias de quantização da gravitação. Diante do indicativo do comprimento mínimo, considerou-se sua existência como hipótese e associou-se a ele uma incerteza mínima na posição. Esta incerteza mínima não nula modificou a relação de incerteza que por sua vez alterou a comutação do operador posição \hat{x} e momento \hat{p} , a qual era baseada a álgebra da Mecânica Quântica Ordinária. Uma das consequências da existência do comprimento mínimo foi a impossibilidade de se ter o operador \hat{x} como um observável, pois os autovetores $|x\rangle$ não mais pertencem ao espaço de Hilbert. Para resolver o problema da obtenção de informações da posição da partícula foi formulada a representação da quaseposição, onde esta fornece a posição de uma partícula maximamente localizada.

No capítulo 4, viu-se que um potencial pode ser descrito por uma função, ou melhor uma distribuição, do tipo delta. Este potencial foi discutido em duas situações: uma para quando a energia da partícula era negativa a qual chamou-se de estados ligados e que foi caracterizada pela energia da partícula em relação ao potencial; e outra situação para quando a energia da partícula era positiva a qual chamou-se de estados de espalhamento e que forneceu os coeficientes de probabilidade da partícula ser refletida ou transmitida através do potencial. Estes resultados ordinários foram utilizados para se verificar a consistência

dos dados obtidos neste trabalho.

E por ultimo, no capítulo 5, resolveu-se novamente o potencial delta porém, em um cenário de comprimento mínimo. Antes de se buscar a solução foi necessário definir a delta na representação de quaseposição. Primeiro tentou-se deduzir uma transformação analítica para a delta, já que ela é definida na representação da posição, a qual demonstrou ser inconsistente pois fez surgir uma divergência na integração da equação de Schrödinger. Desta forma definiu-se um potencial do tipo delta na representação de quaseposição de forma que satisfizesse as mesmas propriedades da delta para a representação da posição. Finalmente, com a definição da delta na representação da quaseposição determinou-se os estados que descrevem uma partícula em um cenário de comprimento mínimo sujeita a um potencial delta, tanto para os estados ligados quanto para os estados de espalhamento e verificou-se que no limite em que o parâmetro do comprimento mínimo vai a zero ($\beta \rightarrow 0$) estes estados recaem nos obtidos na Mecânica Quântica Ordinária. Portanto, ao se inserir o comprimento mínimo no potencial delta, surgem termos que dependem da ordem de grandeza de β e conseqüentemente do comprimento mínimo.

Como sugestão de um trabalho posterior fica a solução do potencial quadrado com base na equação de Schrödinger modificada, pois neste caso não há a descontinuidade das derivadas da função de onda. Os resultados aqui adquiridos seriam resgatados ao se tomar a largura do potencial tendendo a Δx_0 .

Referências Bibliográficas

- [1] Kempf, A., Mangano, G. & Mann, R. B. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev.* **D52**, 1108–1118 (1995).
- [2] Nozari, K. & Azizi, T. Some aspects of minimal length quantum mechanics. *arXiv preprint quant-ph/0507018* (2005).
- [3] Nozari, K. & Azizi, T. Some aspects of gravitational quantum mechanics. *General Relativity and Gravitation* **38**, 735–742 (2006).
- [4] Md. Arifuzzaman, S. B. F., Md. Moniruzzaman. An exact solution of the Dirac oscillator problem in the context of generalized uncertainty principle. *International Journal of Research in Engineering and Technology* **02**, 432–435 (2013).
- [5] Blado, G., Owens, C. & Meyers, V. Quantum wells and the generalized uncertainty principle. *European Journal of Physics* **35**, 065011 (2014).
- [6] Damasio, F. & Ricci, T. Relatividade de Einstein em uma abordagem histórico-fenomenológica. *Textos de Apoio ao professor de Física* **20**, 1–49 (2009).
- [7] Planck, M. On the law of the energy distribution in the normal spectrum. *Ann. Phys* **4**, 90 (1901).
- [8] Arons, A. & Peppard, M. Einstein's proposal of the photon concept—a translation of the annalen der physik paper of 1905. *American Journal of Physics* **33**, 367–374 (1965).
- [9] Heisenberg, W. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. *Zeitschrift für Physik* **43**, 172–198 (1927).
- [10] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloe, F. Quantum mechanics, volume 1. pp. 898. ISBN 0-471-16433-X. Wiley-VCH, June 1986. **1** (1986).
- [11] Lemos, N. A. *Mecânica Analítica* (Editora Livraria da Física, 2007).
- [12] Sakurai, J. J. & Napolitano, J. *Modern quantum mechanics* (Addison-Wesley, 2011).
- [13] Schrödinger, E. An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules. *Physical Review* **28**, 1049 (1926).

- [14] Mead, C. A. Possible connection between gravitation and fundamental length. *Physical Review* **135**, B849 (1964).
- [15] Hossenfelder, S. Minimal length scale scenarios for quantum gravity. *Living Rev. Relativity* **16**, 90 (2013).
- [16] Heisenberg, W. Über die in der theorie der elementarteilchen auftretende universelle länge. *Annalen der Physik* **424**, 20–33 (1938).
- [17] Matsuo, T. & Shibusa, Y. Quantization of fields based on generalized uncertainty principle. *Modern Physics Letters A* **21**, 1285–1296 (2006).
- [18] Dorsch, G. C. & Nogueira, J. A. Maximally localized states in quantum mechanics with a modified commutation relation to all orders. *International Journal of Modern Physics A* **27**, 1250113 (2012).
- [19] Kempf, A. Quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in positions and momenta (1994).
- [20] Kempf, A. Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry. *Journal of Mathematical Physics* **35**, 4483–4496 (1994).
- [21] Dirac, P. A. M. *The principles of quantum mechanics*. 27 (Oxford university press, 1981).
- [22] Nyeo, S.-L. Regularization methods for delta-function potential in two-dimensional quantum mechanics. *American Journal of Physics* **68**, 571–575 (2000).
- [23] Geltman, S. Bound states in delta function potentials. *Journal of Atomic, Molecular, and Optical Physics* **2011** (2011).
- [24] Lemos, N. A. Three myths on dirac's delta "function". *Revista Brasileira de Ensino de Física* **32**, 4701–1 (2010).
- [25] Hassani, S. *Mathematical methods: for students of physics and related fields*, vol. 720 (Springer Science & Business Media, 2008).
- [26] Tonidandel, D. & Araújo, A. The delta function revisited: from heaviside to Dirac). *Revista Brasileira de Ensino de Física* **37**, 3306–1 (2015).
- [27] Kempf, A., Jackson, D. M. & Morales, A. H. New Dirac delta function based methods with applications to perturbative expansions in quantum field theory. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **47**, 415204 (2014).
- [28] Griffiths, D. J. & Harris, E. G. Introduction to quantum mechanics. *American Journal of Physics* **63**, 767–768 (1995).
- [29] Gasiorowicz, S. *Quantum physics* (John Wiley & Sons, 2007).

- [30] Ferkous, N. Regularization of the dirac δ potential with minimal length. *Physical Review A* **88**, 064101 (2013).