

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Parametrizações de Superfícies Triangulares

Antônio Carlos Telau

Setembro/2012

Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Parametrizações de Superfícies Triangulares

Antônio Carlos Telau

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial à obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Fabiano Petronetto do Carmo

Setembro/2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

T265p Telau, Antônio Carlos, 1977-
 Parametrizações de superfícies triangulares / Antônio Carlos
 Telau. – 2012.
 108 f. : il.

Orientador: Fabiano Petronetto do Carmo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Matemática aplicada. 2. Superfícies (Matemática). 3.
Imersões (Matemática). 4. Representações dos grafos. I. Carmo,
Fabiano Petronetto do. II. Universidade Federal do Espírito
Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**“Parametrizações de Superfícies
Triangulares”**

Antonio Carlos Telau

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 06/09/2012 por:

A handwritten signature in blue ink, reading "Fabiano Petronetto do Carmo".

Fabiano Petronetto do Carmo - UFES

A handwritten signature in blue ink, reading "Edilson de Aguiar".

Edilson de Aguiar - CEUNES/UFES

A handwritten signature in blue ink, reading "Afonso Paiva Neto".

Afonso Paiva Neto - USP/São Carlos

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos professores da Graduação e do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFES pela formação e amizade. Ao meu orientador, Prof. Dr. Fabiano Petronetto do Carmo, por toda a dedicação e por tudo que aprendi com ele nesse processo. Agradeço também aos meus amigos pelo apoio. E por fim, mas não menos importante, ao órgão de fomento CAPES pelo auxílio financeiro.

“Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter paciência do que qualquer outro talento.”

Isaac Newton

“O primeiro dever da inteligência é desconfiar dela mesma.”

Albert Einstein

RESUMO

Duas classes de parametrizações de superfícies triangulares são propostas nesta dissertação: parametrizações planares e esféricas. Podemos destacar dentre as aplicações de parametrizações, mapeamento de textura e manipulação/deformação de superfícies.

No caso planar, uma superfície com bordo é parametrizada em um polígono convexo planar, a partir da imersão planar do grafo associado a superfície. A teoria apresentada caracteriza o conjunto das parametrizações de uma dada superfície, em um polígono convexo, a partir de matrizes que satisfazem um conjunto de condições.

No caso esférico, resultados avançados da teoria de grafos são utilizados para determinar parametrizações de superfícies fechadas. Neste caso, caracterizamos o conjunto de parametrizações esféricas de uma dada superfície como o conjunto de todas as imersões esféricas do grafo da superfície em que cada vértice é a projeção esférica de alguma combinação convexa de seus vizinhos.

Em ambos os casos, algoritmos baseados na metodologia proposta foram implementados e apresentamos alguns resultados obtidos pelos algoritmos propostos. Os resultados são analisados e as limitações dos algoritmos são discutidas.

Palavras-chave: parametrização, superfície, imersão, grafos.

ABSTRACT

Two types of triangular surface parameterizations are proposed in this work: spherical and planar parameterization. We highlight among the applications of this technique, texture mapping and manipulation/deformation of surfaces.

In the planar case, a surface with boundary is parameterized in a planar convex polygon, as from the planar immersion of its graph. The theory presented characterizes the set of parameterizations of a given surface, when convex polygon is fixed, from matrices which satisfy a set of conditions.

In the case spherical, advanced results of graph theory are used to determine parameterizations of closed surfaces. In this case, we characterize the set of spherical parameterizations of a given surface as the set of all spherical immersions of your graph where each vertex is a spherical projection of some convex combination of its neighbors.

In both cases, algorithms based on the methodology propose have been implemented and we present some results obtained by the proposed algorithms. The results are analyzed and limitations of the algorithms are discussed.

Keywords: parameterization, superface, immersion, graph.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Básicos	5
1.1 Superfície Regular	5
1.2 Superfície Discreta	8
1.3 Grafos	9
2 Parametrização Planar	16
2.1 Introdução	16
2.2 Imersão Planar de Grafos de Superfícies	17
2.3 Algoritmos	24
2.4 Resultados	33
3 Parametrização Esférica	61
3.1 Introdução	61
3.2 Usando Parametrização Planar	61
3.3 Parametrização Direta	68
3.4 Relaxamento Esférico	78
3.5 Resultados	81
4 Conclusão	91
4.1 Parametrização Planar	91
4.2 Parametrização Esférica	93
4.3 Aplicações	94
4.4 Trabalhos Futuros	97

Introdução

O conceito de superfície encontra aplicações em física, engenharia, computação gráfica, e muitas outras áreas, principalmente na representação de objetos. Por exemplo, na análise das propriedades aerodinâmicas de um avião, o fluxo de ar ao longo da sua superfície é extremamente importante. Em computação gráfica, manipulação, deformação e visualização de objetos podem ser obtidas através da representação discreta de sua superfície.

Em geral, uma superfície é discretizada por uma malha triangular. A representação discreta de superfície por triangulação é muito importante por suas propriedades. Outras representações discretas de superfícies podem ser encontradas na literatura, porém, sempre podemos obter uma representação por triangulação a partir de processamentos geométricos.

A teoria de mapeamento entre superfícies é bem fundamentada no caso contínuo pela geometria diferencial clássica. Contudo, sabe-se bem menos sobre o caso discreto de superfícies. No limite o comportamento da malha converge para o caso contínuo, mas na aplicação prática as malhas estão “longe o suficiente” desse limite de modo que o comportamento deve ser descrito de forma particular mesmo que inspirado pela geometria diferencial clássica.

Parametrizar uma superfície triangular $S \subset \mathbb{R}^3$ é o problema de mapear os vértices de uma superfície linear por partes em um domínio contínuo $D \subset \mathbb{R}^3$ de tal forma que o conjunto de triângulos induzido pela conectividade da malha triangular S seja também uma superfície triangular. Com este objetivo, alguns métodos de parametrização de superfície foram desenvolvidos. O principal desafio da parametrização é construir uma superfície triangular equivalente que melhor corresponda à geometria da superfície.

Dois classes de parametrizações serão discutidas nesta dissertação: parametrização planar e parametrização esférica. A parametrização planar é uma parametrização em que o domínio da parametrização D está contido em \mathbb{R}^2 . Neste trabalho, tomamos como domínio da parametrização, o disco unitário e apenas superfícies topologicamente equivalentes ao disco unitário serão parametrizadas. Por outro lado, a parametrização esférica utiliza o

conjunto $D = S^2$; ou seja, a esfera; como domínio da parametrização e, da mesma forma, apenas superfícies topologicamente equivalentes à esfera serão parametrizadas neste domínio.

A parametrização planar é a forma mais natural para mapeamento de textura. Porém, em outras aplicações, tais como manipulação e amostragem de superfícies fechadas, um domínio topologicamente equivalente obtém resultados melhores. De forma geral, a parametrização é uma tarefa difícil, pois busca-se uma bijeção que minimize a distorção da superfície original.

Em ambos os casos, a conectividade da malha da superfície discreta será o princípio básico da formulação das parametrizações.

Uma superfície triangular S pode ser definida como uma imersão em \mathbb{R}^3 de um grafo \mathcal{G} dado pela malha da superfície. Para obter uma parametrização de S , tem-se adotado a estratégia de imergir o grafo dado pela conectividade da malha no domínio da parametrização.

No caso planar, a parametrização é obtida fixando a fronteira da superfície numa poligonal planar convexa D e resolvendo um sistema linear definido a partir da teoria de coordenadas baricêntricas. Este resultado foi demonstrado por Tutte usando resultados avançados da teoria de grafos [8]. De fato, ainda mostramos que podemos caracterizar o conjunto das parametrizações de superfícies triangulares com fronteiras no polígono limitado por D como o conjunto de parametrizações definidas a partir da solução de um sistema fixando a fronteira da superfície na poligonal convexa D e variando a matriz do sistema. Diversas maneiras de se obter os pesos desta matriz são encontradas na literatura onde a variação destes pesos se deve a busca de propriedades que são importantes para determinadas aplicações.

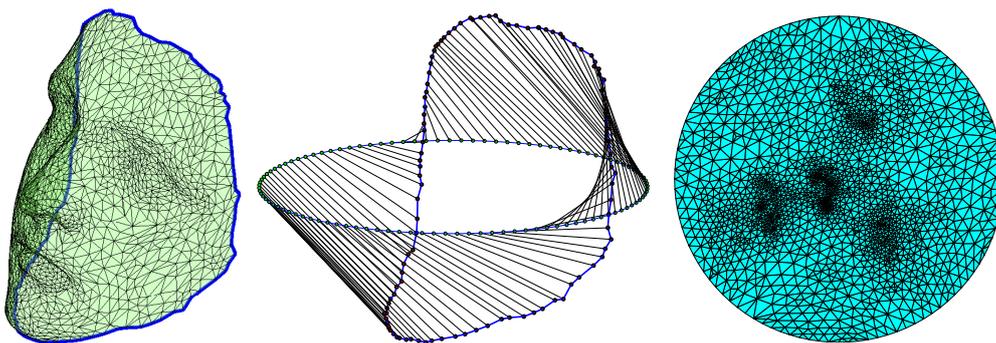


Figura 1: Parametrização de uma superfície triangular. Da esquerda para direita: a malha da superfície; a fronteira da superfície é fixada numa poligonal convexa sobre o círculo unitário; e a parametrização planar obtida pelo algoritmo a partir da solução de um sistema.

No caso esférico, a superfície é fechada e, portanto, sem fronteira. A generalização da teoria das coordenadas baricêntricas para a imersão esférica não é possível em geral. Assim as mesmas técnicas utilizadas para o caso planar não podem ser aplicadas diretamente em parametrizações esféricas.

A teoria estabelecida sobre parametrizações descreve que em um grafo definido a partir de uma superfície triangular fechada, a posição dos vértices formam uma triangulação esférica (i.e. não há triângulos sobrepostos) se, e somente se, cada vértice tem sua posição dada pela projeção esférica de alguma combinação convexa das posições de seus vizinhos [11].

A teoria que descrevemos, porém, determina uma parametrização esférica para uma superfície fechada a partir da solução de um sistema quadrático. Essa teoria faz uso do chamado número de Colin de Verdiere, o qual dá uma descrição precisa de quando um grafo pode ser imerso numa esfera formando uma triangulação esférica válida [4]. Portanto, enquanto no caso planar a parametrização é dada pela solução de um sistema linear que é obtida a partir da inversão de uma matriz, para resolver o sistema quadrático da parametrização esférica recorremos a um método de otimização não-linear.

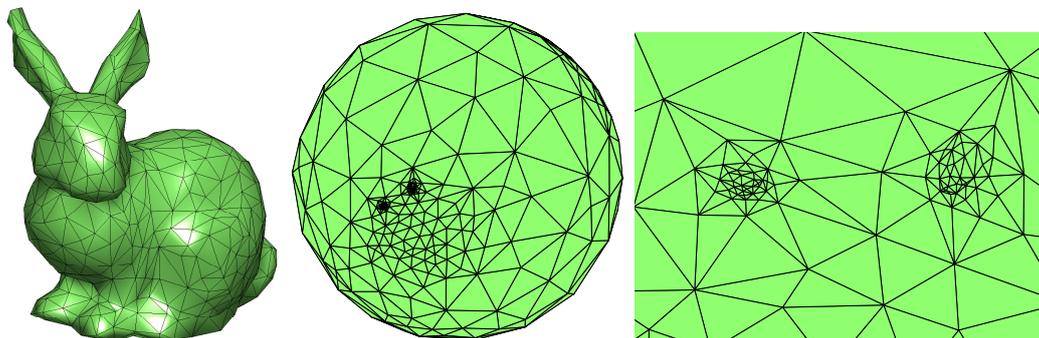


Figura 2: Parametrização de uma superfície triangular fechada. Da esquerda para direita: a malha da superfície; a parametrização esférica obtida pelo algoritmo a partir da solução de um sistema quadrático; e uma ampliação da região de parametrização da orelha do coelho.

Algoritmos para parametrizações planar e esférica foram desenvolvidos baseado na teoria apresentada. Os resultados obtidos pelos algoritmos para a parametrização de superfícies triangulares com fronteiras ou fechadas demonstram a eficiência numérica dos algoritmos apresentados.

A dissertação está dividida nos seguintes capítulos:

Capítulo 1: apresenta de maneira sucinta as definições básicas que usaremos nas formulações das parametrizações de superfícies triangulares.

Capítulo 2: resultados da teoria de grafos são utilizados para obter parametrizações planares de superfícies triangulares com fronteira. Algoritmos baseados na teoria apresentada foram desenvolvidos e os resultados obtidos a partir desta metodologia são ilustrados e demonstram a robustez e eficiência numérica do método.

Capítulo 3: também baseado em resultados da teoria de grafos, apresentamos uma metodologia para parametrizações de superfícies triangulares fechadas. A parametrização é obtida a partir da solução de um sistema não-linear, no qual recorreremos a um método de otimização não-linear. Outros algoritmos são apresentados, ou reduzindo a parametrização a casos planares, ou baseado em uma heurística também motivada pelo caso planar. As abordagens apresentadas são comparadas a partir dos resultados obtidos.

Capítulo 4: os resultados apresentados são discutidos do ponto de vista computacional e as principais limitações das metodologias propostas são apresentadas. Por último, a perspectiva de avanços neste trabalho é discutida.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos o objeto de trabalho dessa dissertação: uma superfície triangular. Veremos também as definições básicas de grafos com o objetivo de criar o ambiente adequado para o estudo de parametrizações destas superfícies.

1.1 Superfície Regular

Em matemática, especificamente na topologia, uma superfície é uma variedade bidimensional topológica [6]. Os exemplos mais conhecidos são os que surgem como os limites de objetos sólidos do espaço, por exemplo, a esfera (superfície de uma bola) e o disco. Por outro lado, há superfícies, tais como a garrafa de Klein, que não podem ser definidas no espaço tridimensional euclidiano sem a introdução de singularidades ou auto-interseções.

O conceito de superfície encontra aplicações em física, engenharia, computação gráfica, e muitas outras áreas, principalmente na representação de objetos. Por exemplo, na análise das propriedades aerodinâmicas de um avião, o fluxo de ar ao longo da sua superfície é extremamente importante. Em computação gráfica, manipulação, deformação e visualização de objetos podem ser obtidas através da representação discreta de sua superfície [18, 27].

Historicamente, as superfícies foram inicialmente definidas como subconjuntos de espaços euclidianos. Muitas vezes, essas superfícies são definidas como o conjunto de zeros de certas funções polinomiais. Tal definição considera a superfície como parte de um espaço (euclidiano) maior, e como tal foi denominada extrínseca.

Parece possível, a primeira vista que existem superfícies definidas que não são superfícies no sentido extrínseco. Topologicamente, uma superfície é definida como uma variedade bidimensional (espaço topológico de Hausdorff

localmente euclidiano). Este espaço topológico não é considerado como sendo um subespaço de outro espaço. Neste sentido, esta definição, que é a definição matemática usual no presente, é intrínseca.

No entanto, o teorema da imersão (Whitney) afirma que toda superfície pode de fato ser mergulhada homeomorficamente no espaço euclidiano \mathbb{R}^4 . Portanto, as definições, extrínseca e intrínseca, são equivalentes.

Uma superfície limitada com contorno vazio é chamada de *superfície fechada*. A esfera e o cubo são exemplos de superfícies fechadas. Uma superfície limitada com contorno é chamada de *superfície com bordo* ou *superfície com fronteira*. O disco é um exemplo de uma superfície com fronteira, onde a fronteira do disco é o círculo.

O teorema de classificação de superfícies fechadas diz que qualquer superfície fechada pode ser representada por alguma das seguintes superfícies: esfera, toro, bitoro, tritoro, ... , n-toro, ... , onde n-toro é a soma conectada de n toros (n maior que ou igual a 1). É conveniente, dizer que a esfera é a soma conectada de 0 toro. O número de toros envolvidos é chamado de gênero da superfície. Podemos pensar que o gênero de uma superfície fechada é o número de “buracos” que a superfície possui.

Superfícies com fronteiras, são simplesmente superfícies fechadas com um número de furos (discos abertos que foram removidos). Assim, uma superfície com fronteira é classificada pelo número de componentes de bordas e do gênero da superfície correspondente, definido como o gênero da superfície. Essa classificação obedece quase imediatamente a partir da classificação de superfícies fechadas: a remoção de um disco aberto a partir de uma superfície fechada produz uma superfície compacta com um círculo para o componente limite, e remoção de k discos abertos produz uma superfície compacta com k círculos disjuntos para k componentes de fronteira. É importante comentar que as posições dos furos são irrelevantes.

Faremos a seguir a definição de superfície regular, o objeto contínuo que iremos discretizar com o propósito de estabelecer no caso discreto teoria de mapeamento análoga ao caso contínuo. A grosso modo, uma superfície é um lugar geométrico no espaço euclidiano localmente planar e diferenciável além de não ter auto-interseção.

Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma *superfície regular* se, para cada $p \in S$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in V$, e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, definida num aberto U de \mathbb{R}^2 tal que:

1. $X : U \rightarrow V \cap S$, $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, é diferenciável, isto é, as funções $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U ;

2. $X : U \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo, isto é, X é uma bijeção contínua cuja inversa $X^{-1} : U \rightarrow V \cap S$ é contínua;
3. $dXq : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.

A aplicação X é chamada uma *parametrização* ou um sistema de coordenadas (locais) em (uma vizinhança de) p , e $V \cap S$ é chamada uma vizinhança coordenada de S em p .

A definição de superfície regular acima é feita com um sistema de coordenadas locais, ou seja, localmente a superfície está parametrizada em um conjunto aberto do plano.

Diremos que duas superfícies regulares S_1 e S_2 são *topologicamente equivalentes* se existe uma função

$$f : S_1 \longrightarrow S_2$$

tal que $\forall p \in S_1$ a composição $h = X_1 \circ f \circ X_2^{-1}$ de f com as parametrizações X_1 e X_2 (locais) de S_1 e S_2 , respectivamente, é diferenciável em $q = X_1^{-1}(p)$. Vale ressaltar que a função f é “global” e que a diferenciabilidade é uma propriedade local.

Dadas duas superfícies regulares topologicamente equivalentes S_1 e S_2 uma *parametrização global* de S_1 em S_2 é uma função $f : S_1 \longrightarrow S_2$ diferenciável.

Um exemplo de parametrização global entre superfícies é a função diferenciável

$$\begin{aligned} f : S^2 &\longrightarrow S \\ (x, y, z) &\mapsto (ax, by, cz) \end{aligned}$$

que parametriza o elipsóide dado por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c \neq 0$$

na esfera, cuja equação, é

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

O objetivo de nosso estudo nessa dissertação é descrever métodos para obter uma parametrização (global) de superfícies discretas em domínios topologicamente equivalente.

1.2 Superfície Discreta

Em computação gráfica, uma superfície é, em geral, representada como uma triangulação abstrata combinatória – um complexo simplicial¹ – mais comumente chamada de *superfície triangular* [2, 7]. De maneira mais simples, uma superfície triangular é uma coleção de vértices e triângulos interligados de modo que cada aresta é compartilhada no máximo por 2 triângulos. Esta triangulação abstrata combinatória é também chamada simplesmente de *malha* (Figura 1.1).

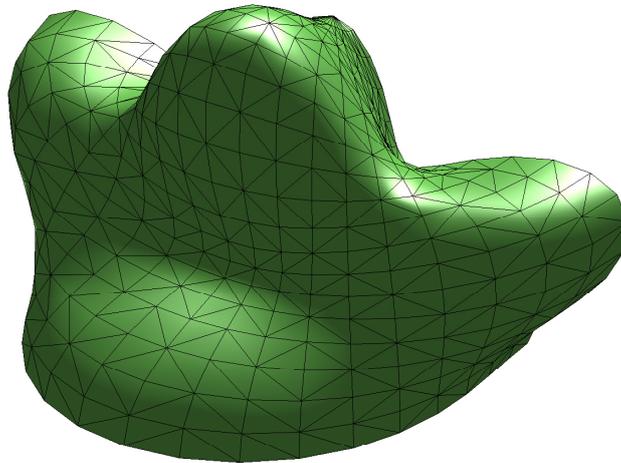


Figura 1.1: Superfície Triangular.

A representação discreta de superfície por triangulação é muito importante por suas propriedades. Outros polígonos podem ser usados para representar faces sobre uma superfície. Porém, neste caso, podemos obter uma representação por superfície triangular inserindo-se um vértice no baricentro do polígono e construindo a triangulação natural ligando-o a cada vértice do polígono e, conseqüentemente, criando faces triangulares.

Esse processo apresenta uma desvantagem: obtemos uma representação com mais vértices que a representação inicial. Uma outra forma de converter a representação por polígonos em uma representação por triângulos é ligando

¹ A definição formal de triangulação é o chamado Complexo Simplicial, que consiste basicamente de uma união de simplexos. Um simplexo é uma generalização do conceito de triângulo a outras dimensões. É o invólucro convexo de $(n+1)$ pontos independentes em \mathbb{R}^n . Ele é chamado assim por ser sempre o polígono mais simples de sua dimensão, isto é, um triângulo (em \mathbb{R}^2) é o polígono que possui menos vértices e arestas, o tetraedro (em \mathbb{R}^3) é o que possui menos vértices, faces e arestas. E assim por diante.

os vértices para formar triângulos da seguinte forma:

$$(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_4), \dots, (v_1, v_i, v_{i+1}), \dots, (v_1, v_{n-1}, v_n),$$

onde o polígono de n lados D tem vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

A teoria de mapeamento entre superfícies é bem fundamentado no caso contínuo pela geometria diferencial clássica. Contudo, sabe-se bem menos sobre o caso discreto de malha. No limite o comportamento da malha converge para o caso contínuo, mas na aplicação prática as malhas estão “longe o suficiente” desse limite de modo que o comportamento deve ser descrito de forma particular mesmo que inspirado pela Geometria Diferencial clássica.

Parametrizar uma superfície triangular $S \subset \mathbb{R}^3$ é o problema de mapear os vértices de uma superfície linear por partes em um domínio contínuo $D \subset \mathbb{R}^3$ de tal forma que o conjunto de triângulos induzido pela conectividade da malha triangular S seja também uma superfície triangular. O domínio D é chamado *domínio da parametrização* e é dado por um conjunto topologicamente equivalente à superfície S .

Alguns métodos de parametrização de superfície foram desenvolvidos, onde o principal desafio é construir uma parametrização que melhor corresponda a geometria da superfície. Nesse sentido, a maioria dos trabalhos recentes tem adotado a estratégia de definir e minimizar alguma medida de distorção.

Duas classes de parametrizações serão discutidas nesta dissertação: parametrização planar e parametrização esférica. A parametrização planar é uma parametrização com domínio D contido em \mathbb{R}^2 . Neste trabalho, tomamos como domínio da parametrização, o disco unitário e apenas superfícies topologicamente equivalentes ao disco unitário serão parametrizadas. Por outro lado, a parametrização esférica utiliza o conjunto $D = S^2$; ou seja, a esfera; como domínio da parametrização e, da mesma forma, apenas superfícies topologicamente equivalentes à esfera serão parametrizadas neste domínio.

Em ambos os casos acima, a conectividade da malha da superfície discreta será o princípio básico da formulação das parametrizações planares e esféricas que estudaremos mais adiante. Mais especificamente, a malha da superfície triangular define um grafo e a formulação básica deste conceito fundamental será apresentada na seção a seguir.

1.3 Grafos

Um *grafo* \mathcal{G} é dado por um par de conjuntos V e E onde V é um conjunto não vazio e finito dos números naturais, ditos nós, enquanto E é um conjunto

de pares de nós, ditos arestas². E escrevemos $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$.

Um nó será denotado por i referente a sua ordem no conjunto V

$$V = \{i; i = 1, \dots, N\}$$

e denotamos uma aresta que compartilha os nós i e j por

$$e_{ij} = (i, j) .$$

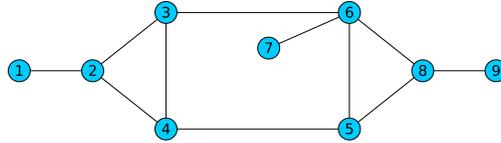


Figura 1.2: Ilustração de um grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ onde os nós são representados por pontos e as arestas são representadas por curvas unindo-os.

O conjunto de nós V define a *ordem do grafo* \mathcal{G} , dada pelo número de nós. Para um grafo de ordem N o número máximo de arestas possíveis é $N(N - 1)/2$ e quando todos os nós são conectados dizemos que o grafo é completo. A Figura 1.2 ilustra um grafo com 9 nós e com 11 arestas.

Um grafo $\mathcal{H} = \mathcal{H}(V', E')$ é um *subgrafo* do grafo \mathcal{G} se $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

Um *caminho* em um grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ é um subgrafo de \mathcal{G} definido por um subconjunto de vértices de \mathcal{G}

$$V' = \{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n\}$$

e por um conjunto de $n - 1$ arestas dado por

$$E' = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{n-1}, i_n)\} .$$

Quando $i_n = i_1$, dizemos que o caminho é fechado. O comprimento de um caminho é definido pelo número de arestas.

Em um grafo \mathcal{G} , dois vértices i e j são ditos *conectados*, se \mathcal{G} contém um caminho com extremos i e j . Caso contrário i e j são ditos *desconectados*. Se dois nós são conectados por um caminho de comprimento 1, isto é, por uma única aresta, os vértices são chamados *adjacentes*. Um grafo é dito *conexo* se todo par de nós do grafo é conectado, e caso contrário, é dito *desconexo*.

Um subgrafo de $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ induzido por um subconjunto V' de V é o grafo $\mathcal{G}(V', E')$ em que E' é o conjunto de todas as arestas de \mathcal{G} que conectam nós em V' . Esse subgrafo é denotado por $\mathcal{G}[V'] = \mathcal{G}(V', E')$.

² O conjunto E das arestas é um subconjunto do conjunto de todos os pares desordenados de nós (i, j) com $i \neq j$, isto é, $(i, j) = (j, i)$.

Grafos 3-conectado. Um *corte*, ou *conjunto separador* de um grafo \mathcal{G} conexo é um conjunto de nós cuja remoção torna \mathcal{G} desconexo. A conectividade $K(\mathcal{G})$ (onde \mathcal{G} é um grafo não completo) é o tamanho do menor corte. Um grafo é chamado k -conexo se sua conectividade é k . Isto significa que um grafo \mathcal{G} é dito k -conexo se não existe um conjunto de $k - 1$ nós cuja remoção resulta num grafo desconexo. Dizemos que \mathcal{G} é 3-conectado se não existe um conjunto com 2 (ou menos) vértices que quando removido de \mathcal{G} torna-o desconectado.

O *conjunto de vizinhos* do nó i é o subconjunto $N(i)$ de V dado por

$$N(i) = \{j; (i, j) \in E\} .$$

O número de vizinhos do i -ésimo nó é chamado *valência* do nó i .

A *vizinhança* do nó i do grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ (Figura 1.3) é um subgrafo de \mathcal{G} cujo conjunto de vértices V' é constituído por i e todos os nós adjacentes a i e o conjunto de arestas E' é constituído por todas as arestas de E que ligam dois quaisquer nós de V' . Ou seja, a vizinhança de um nó i em um grafo \mathcal{G} é o subgrafo de \mathcal{G} induzido pelo conjunto de nós $V' = \{i\} \cup N(i)$.

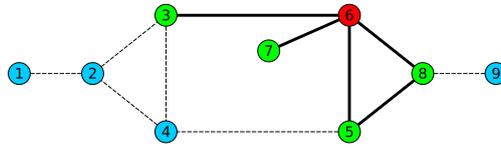


Figura 1.3: Vizinhança do nó 6 (vermelho) contém os nós 3, 5, 7, 8 (verde) e todas as arestas que compartilham estes vértices.

A vizinhança de um nó i também é chamada de *primeira estrela* de i . De uma forma geral a r -ésima *estrela* de i é definida como o subgrafo induzido por $V_i^{(r)}$ definido de forma recursiva como segue.

$$V_i^{(1)} = N(i) \cup \{i\}$$

$$V_i^{(2)} = V_i^{(1)} \cup \left(\bigcup_{j \in N(i)} N(j) \right)$$

$$V_i^{(r+1)} = \bigcup_{j \in V_i^{(r)}} N(j) = V_i^{(r)} \cup \left(\bigcup_{j \in V_i^{(r)} - V_i^{(r-1)}} N(j) \right)$$

Grafo Planar. Dizemos que um grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ é planar se este pode ser imerso no plano de tal forma que:

- cada nó $i \in V$ é mapeado para um ponto p_i em \mathbb{R}^2 ;
- cada aresta $e_{ij} = (i, j) \in E$ é mapeada para uma curva simples de \mathbb{R}^2 cujas extremidades são p_i e p_j ;
- os únicos cruzamentos entre curvas são em pontos extremos (p_i).

O conjunto de pontos $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ é chamado de uma *imersão planar* do grafo \mathcal{G} , e é denotado por

$$P = \mathcal{P}(\mathcal{G}) . \quad (1.1)$$

A Figura 1.4 ilustra dois grafos, sendo o da esquerda planar, enquanto o da direita não pode ser imerso no plano satisfazendo as condições de grafo planar.

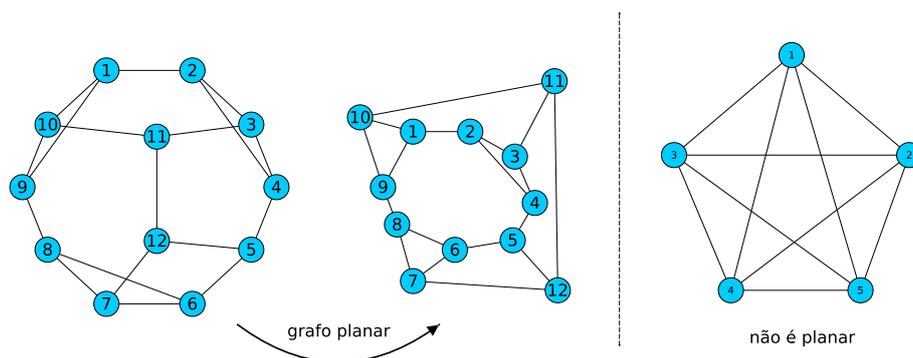


Figura 1.4: Um grafo planar pode ser imerso no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem. O grafo da esquerda pode ser imerso no plano satisfazendo as condições de grafo planar. O grafo da direita não é um grafo planar.

Um grafo planar particiona o plano em regiões conectadas chamadas *faces*. Em particular, a face ilimitada é chamada *face externa*. Quando todas as faces limitadas de um grafo planar têm três arestas, o grafo é chamado *grafo triangular*. O conjunto de faces limitadas de \mathcal{G} é denotado por F e podemos escrever

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E, F) . \quad (1.2)$$

Grafo Simplesmente Conectado. Seja \mathcal{G} um grafo planar e defina $\partial\mathcal{G}$ como um subgrafo que consiste de todos os nós e arestas que são incidentes na face externa. Se $\partial\mathcal{G}$ é uma curva plana simples então diremos que o grafo \mathcal{G} é simplesmente conectado e que a curva plana simples $\partial\mathcal{G}$ é a *fronteira* de \mathcal{G} . A Figura 1.5 destaca uma fronteira do grafo planar (Figura 1.5).

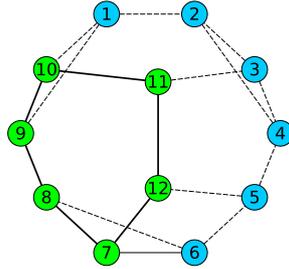


Figura 1.5: Destacamos os nós e arestas da superfície que definem uma fronteira.

Os nós de \mathcal{G} que não são de fronteira serão chamados de *nós interiores* e as arestas de \mathcal{G} que não são de fronteira serão chamadas de *arestas interiores*.

Podemos supor que o conjunto de nós é ordenado de tal forma que os nós pertencentes à fronteira do grafo simplesmente conectado estão agrupados no final deste conjunto.

$$\partial\mathcal{G} = \{i_{n+1}, \dots, i_N\} \quad (1.3)$$

Mais ainda, a ordenação dos nós deste grafo é tal que as arestas da fronteira deste grafo são dadas por

$$(i_{n+1}, i_{n+2}), (i_{n+2}, i_{n+3}), \dots, (i_{N-1}, i_N), (i_N, i_{n+1}) \in E. \quad (1.4)$$

Esta ordenação dos nós na fronteira de \mathcal{G} define um sentido, chamado *sentido anti-horário da fronteira*.

Grafos Isomorfos. Dois grafos

$$\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}(V_1, E_1, F_1) \text{ e } \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}(V_2, E_2, F_2),$$

diremos que \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 são isomorfos se existe uma bijeção entre seus nós, arestas e faces, de tal forma que:

- i) arestas correspondentes associam-se a nós correspondentes;
- ii) faces correspondentes associam-se a arestas correspondentes e nós correspondentes;

e, quando o grafo é simplesmente conectado deve satisfazer

- iii) os dois sentidos anti-horário dados pelas sequências de nós em $\partial\mathcal{G}_1$ e $\partial\mathcal{G}_2$ sejam correspondentes.

Se $f : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ é uma bijeção entre os grafos simplesmente conectados \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , então podemos ver esta bijeção f como três outras bijeções. A saber,

$$f_V : V_1 \rightarrow V_2; f_E : E_1 \rightarrow E_2 \text{ e } f_F : F_1 \rightarrow F_2$$

que cumprem as condições i), ii) e iii).

Por exemplo, a partir de um grafo \mathcal{G}_1 simplesmente conectado e uma bijeção³ f_V entre os conjuntos de nós V_1 e V_2 podemos construir um grafo \mathcal{G}_2 isomorfo a \mathcal{G}_1 a partir da bijeção entre os nós definindo $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_2(V_2, E_2, F_2)$, onde

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(f_V(i), f_V(j)); (i, j) \in E_1\} \\ F_2 &= \{(f_V(i), f_V(j), f_V(k)); (i, j, k) \in F_1\} \end{aligned}$$

Como parametrização de superfície é definida a partir de uma função injetora entre os vértices da superfície triangular e o domínio de parametrização, onde a malha triangular definida a partir das imagens induzida pela conectividade da superfície triangular é ainda uma superfície triangular então a superfície e uma parametrização são isomorfas. Por outro lado, a conectividade da malha da superfície triangular define um grafo, chamado *grafo da superfície*. Logo, a parametrização de uma superfície triangular pode ser obtida a partir de um grafo isomorfo ao grafo da superfície.

Encerramos este capítulo com a definição de grafo da superfície, uma outra abordagem para superfície discreta mais conveniente ao objetivo do próximo capítulo.

Grafo da Superfície. Uma superfície triangular S pode ser definida como uma imersão em \mathbb{R}^3 de um grafo

$$\mathcal{G}(V, E, F),$$

onde o grafo é dado pela malha da superfície, isto é, o conjunto de nós é dado pela indexação dos vértices da superfície

$$X = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq N\} \implies V = \{i; i = 1, \dots, N\}$$

³ Uma bijeção f_V entre os conjuntos de nós V_1 e V_2 pode ser vista como uma permutação do conjunto V_1 .

e as arestas e as faces são dadas pela conectividade da malha. Neste caso, denotamos a superfície S também por

$$S = S(\mathcal{G}, X)$$

e nos referimos a \mathcal{G} como a topologia da superfície e a X como a geometria da superfície.

Capítulo 2

Parametrização Planar

Neste capítulo apresentamos uma caracterização do conjunto das parametrizações planares com fronteira fixada numa poligonal convexa para superfícies topologicamente equivalentes ao disco unitário. Descrevemos a formulação deste problema como um sistema linear e demonstramos a existência e unicidade da solução do sistema. Os resultados obtidos demonstram a eficiência e robustez dos algoritmos propostos.

2.1 Introdução

Uma das principais aplicações para parametrizações planares é o mapeamento de texturas [14, 31]. Naturalmente, uma superfície topologicamente equivalente a um disco pode ser parametrizada neste domínio. Porém, esta parametrização é em geral uma tarefa difícil quando buscamos uma bijeção que minimize a distorção da superfície original, facilitando o mapeamento de textura desejado, ou seja, o principal desafio neste problema é construir uma parametrização que melhor corresponda à geometria da superfície.

O objetivo deste capítulo é o estudo de parametrização planar de superfície com fronteira. Mais precisamente, abordaremos superfícies triangulares com fronteira determinada por curva simples (sem auto-interseção) com o objetivo de parametrizá-las num domínio planar limitado por uma curva convexa.

Parametrizar uma superfície com fronteira no plano consiste em atribuir coordenadas planares a cada vértice da malha tal que a malha planar induzida pela conectividade da malha original não tenha sobreposição, ou seja, dois triângulos quaisquer na parametrização tenham interiores disjuntos. Por outro lado, dada uma superfície triangular S podemos definir um grafo \mathcal{G} a partir da conectividade da malha desta superfície.

Portanto, parametrizar uma superfície no plano reduz-se à imersão planar do grafo \mathcal{G} determinado a partir da malha da superfície.

2.2 Imersão Planar de Grafos de Superfícies

Seja S uma superfície triangular com fronteira. Suponha, se necessário, por reordenação dos vértices da superfície

$$X = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq N\},$$

que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ são os vértices interiores de S e que $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_N$ são os vértices da fronteira ∂S .

Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E, F)$ o grafo definido a partir da superfície $S = S(\mathcal{G}, X)$. O problema de parametrização planar de uma superfície triangular é, portanto, reduzido ao problema de imersão do grafo \mathcal{G} no plano.

Logo, uma superfície pode ser parametrizada no plano se é possível definir um conjunto de pontos $P = \{u_1, \dots, u_N\} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $P = \mathcal{P}(\mathcal{G})$ define uma imersão planar do grafo da superfície.

Dado uma superfície triangular o grafo da superfície \mathcal{G} é um grafo triangular. Suponha que \mathcal{G} é um grafo planar, isto é, podemos obter uma imersão planar do grafo \mathcal{G} . Se i é um nó interior de \mathcal{G} , então a imersão planar assegura que a vizinhança do nó i define $r + 1$ vértices planares na imersão, dados pela imersão do nó i junto com a imersão dos r vizinhos do nó i ; e uma face (i, j_1, j_2) do grafo \mathcal{G} define um triângulo no plano. Assim, temos que u_i pertence ao polígono limitado pelos vértices u_j .

A teoria de coordenadas baricêntricas determina que dado um polígono convexo limitado por r vértices x_j , todo ponto interior x deste polígono pode ser escrito como uma combinação dos vértices x_j

$$x = \sum_{j=1}^r \lambda_j x_j$$

onde

$$\begin{cases} \lambda_j > 0, \forall j = 1, \dots, r \\ \sum_{j=1}^r \lambda_j = 1 \end{cases}$$

Portanto, se podemos obter uma imersão planar do grafo da superfície, então toda imersão de um nó interior i do grafo \mathcal{G} é um vértice $u_i \in \mathbb{R}^2$ que pertence ao polígono definido pela imersão dos nós adjacentes ao nó i , desde que a fronteira do grafo \mathcal{G} também defina uma poligonal convexa do plano.

A metodologia que descrevemos a seguir é formulada a partir da teoria de coordenadas baricêntricas.

Sejam N e n a quantidade total de nós e a quantidade de nós interiores do grafo \mathcal{G} respectivamente e defina $k = N - n$. Defina a imersão dos nós de fronteira do grafo \mathcal{G} numa poligonal convexa de k -lados. Mais precisamente, seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma poligonal convexa de k -lados com vértices

$$u_{n+1}, \dots, u_N \quad (2.1)$$

no mesmo sentido anti-horário da fronteira de \mathcal{G} e defina a imersão do nó $n+j$, com $j = 1, \dots, k$, no vértice u_{n+j} . A partir daí, a teoria de coordenadas baricêntricas define que a imersão planar de cada nó interior i de um grafo planar é dada por uma combinação linear das imersões dos nós adjacentes $N(i)$.

$$u_i = \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} u_j \quad (2.2)$$

onde $\lambda_{ij} > 0$, $\forall j \in N(i)$ e $\sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} = 1$.

Podemos assumir então que a combinação convexa é definida sobre todos os vértices da imersão planar

$$u_i = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} u_j = \underbrace{\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} u_j}_{\text{interior}} + \underbrace{\sum_{j=n+1}^N \lambda_{ij} u_j}_{\text{fronteira}} \quad (2.3)$$

desde que $\lambda_{ij} = 0$ se a aresta (i, j) não pertence ao grafo \mathcal{G} , isto é, $(i, j) \notin E$.

Portanto, fixada a fronteira do grafo numa poligonal convexa D , para cada vértice interior, $i \in \{1, \dots, n\}$, escolha qualquer conjunto de números reais $\{\lambda_{ij}, j = 1, \dots, N\}$ tal que

(adjacência) se j não é vizinho de i , isto é, $(i, j) \notin E$, então

$$\lambda_{ij} = 0 \quad (2.4)$$

(positividade) se j compartilha aresta com i , isto é, $(i, j) \in E$, então

$$\lambda_{ij} > 0 \quad (2.5)$$

(soma unitária) fixado i , a soma de todos os pesos λ_{ij} é igual a um

$$\sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} = 1 \quad (2.6)$$

As condições de adjacência, positividade e soma unitária serão chamadas simplesmente de *condições de convexidade*.

A partir daí, defina o sistema linear de n equações e n incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} x_j + \sum_{j=n+1}^N \lambda_{1j} u_j \\ x_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_{2j} x_j + \sum_{j=n+1}^N \lambda_{2j} u_j \\ \vdots \\ x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_j + \sum_{j=n+1}^N \lambda_{ij} u_j \\ \vdots \\ x_n = \sum_{j=1}^n \lambda_{nj} x_j + \sum_{j=n+1}^N \lambda_{nj} u_j \end{array} \right. \quad (2.7)$$

onde temos os nós da fronteira do grafo da superfície imersos, ou seja, fixados nos vértices da poligonal convexa, isto é, $x_{n+j} = u_{n+j}$, $j = 1, \dots, k$.

O sistema acima pode ser reescrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_{1(n+1)} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n(n+1)} & \cdots & \lambda_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

Isolando as variáveis do sistema, temos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{1(n+1)} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n(n+1)} & \cdots & \lambda_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

o que equivale a

$$\left(I_n - \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{1(n+1)} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n(n+1)} & \cdots & \lambda_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix},$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n

Definindo

$$M = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{nn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \lambda_{1(n+1)} & \cdots & \lambda_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n(n+1)} & \cdots & \lambda_{nN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

reescrevemos o sistema (2.7) como

$$Ax = b, \quad (2.8)$$

onde $A = (I_n - M)$. A matriz M é chamada *matriz de combinação convexa do grafo* ou *matriz convexa da superfície*.

Os resultados a seguir demonstram que a matriz A é não-singular e, portanto, o sistema (2.8), equivalente ao sistema (2.7), tem solução única.

Função Combinação Convexa. Seja $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear por partes definida no grafo triangular \mathcal{G} . Diremos que f é uma *função combinação convexa* se, existem

$$\lambda_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad j \in \{1, \dots, N\},$$

tais que

$$\lambda_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} = 1. \quad (2.9)$$

e para todo nó interior i (isto é $i \in \{1, \dots, n\}$), f satisfaz

$$f(i) = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij} f(j). \quad (2.10)$$

Lema 2.1 *Princípio do Máximo Discreto*

Seja \mathcal{G} um grafo triangular e $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função combinação convexa sobre o grafo \mathcal{G} . Para qualquer nó interior v_0 de \mathcal{G} , seja V_0 o conjunto dos nós de fronteira que podem ser conectados a v_0 por um caminho interior. Se $f(v_0) \geq f(v)$ para todo $v \in V_0$, então $f(v) = f(v_0)$ para todo $v \in V_0$.

Demonstração. Seja v_0 um vértice interior de \mathcal{G} e W o conjunto de nós de \mathcal{G} , incluindo o próprio v_0 , que pode ser conectado a v_0 por um caminho interior. Seja v_1 um nó interior em que f atinge o máximo M em W . Um tal nó v_1 existe, pois se $v_1 \in V_0$, então $f(v_0) \geq f(v_1)$, donde v_0 é um máximo de f em W e é interior. Visto que v_1 pode ser conectado a v_0 por um caminho interior em W ele também pode ser conectado a qualquer nó v em V_0 por um caminho interior $v_1, v_2, \dots, v_k = v$, em W .

Suponha que para algum j_0 tal que $(1, j_0) \in E$ ($j_0 \in N(1)$), $f(v_{j_0}) < M$. Assim temos

$$M = f(v_1) = \sum_{j \in N(1)} \lambda_{1j} f(v_j) < \sum_{j \in N(1)} \lambda_{1j} M = M \sum_{j \in N(1)} \lambda_{1j} = M \cdot 1 = M.$$

Absurdo! Portanto $f(v_j) = M$ para todo j tal que $(1, j) \in E$. Daí, segue que $f(y) = M$ para todo vizinho y de v_1 , em particular $f(v_2) = M$. Continuando desta forma, vemos que $f(v_3) = M$ e assim por diante. Assim $f(v_k) = M$ o que implica que $f(v) = M = f(v_0)$. ■

Proposição 2.2 *A matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ definida em 2.8 é não-singular.*

Demonstração. Que A é não-singular é equivalente a propriedade que a única solução da equação $Aw = 0$ é $w = 0$. De fato, se $Aw = 0$ então, para todo $i = 1, \dots, n$, temos

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}w_j = 0$$

donde

$$\begin{aligned} a_{i1}w_1 + \dots + a_{i(i-1)}w_{(i-1)} + a_{ii}w_i + a_{i(i+1)}w_{(i+1)} + \dots + a_{in}w_n &= 0 \\ -\lambda_{i1}w_1 - \dots - \lambda_{i(i-1)}w_{(i-1)} + 1w_i - \lambda_{i(i+1)}w_{(i+1)} - \dots - \lambda_{in}w_n &= 0 \\ -\lambda_{i1}w_1 - \dots - \lambda_{i(i-1)}w_{(i-1)} + (1 - \lambda_{ii})w_i - \lambda_{i(i+1)}w_{(i+1)} - \dots - \lambda_{in}w_n &= 0 \end{aligned}$$

isto é,

$$w_i = \lambda_{i1}w_1 + \dots + \lambda_{ii}w_i + \dots + \lambda_{in}w_n.$$

Portanto temos

$$w_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}w_j.$$

Sejam $f : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear por partes, onde

$$f(i) = w_i, \text{ se } i \text{ é um nó interior de } \mathcal{G}$$

$$f(i) = 0, \text{ se } i \text{ é um nó de } \partial\mathcal{G}$$

e v_0 um nó interior de \mathcal{G} . O conjunto V_0 dado pelos nós de fronteira que podem ser conectados a v_0 por um caminho interior é não-vazio. Suponha que f assuma seu ponto de máximo num nó v_0 interior. Assim a função f satisfaz para todo vértice interior i

$$f(i) = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}f(j)$$

e como $f(v) = 0 \forall v \in V_0$ temos

$$f(v_0) \geq f(v) \forall v \in V_0.$$

Portanto, a função f é uma função combinação convexa que satisfaz as hipóteses do princípio do máximo. Logo, pelo princípio do máximo,

$$f(v_0) = f(v) = 0 \quad \forall v \in V_0 .$$

Isto é, o máximo de f em \mathcal{G} é zero. De maneira análoga, o mínimo da função f dado pelo máximo da função $g = -f$ é 0. Logo, $w = 0$. ■

Seja

$$U = \{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_N\} \quad (2.11)$$

o conjunto de pontos dados pela solução do sistema (equação (2.8)) e pelos vértices da poligonal convexa D (equação (2.1)). Temos que todo ponto de U está contido no polígono regular limitado por D , ou seja, $U \subset D \subset \mathbb{R}^2$.

Proposição 2.3 *Sejam \mathcal{G} um grafo triangular e D uma poligonal convexa planar. Seja U o conjunto de pontos dado pela solução do sistema (2.8) e pelos vértices da poligonal convexa D . Então cada vértice de U pertence ao polígono convexo limitado pela poligonal D .*

Demonstração. Pela proposição 2.2, o conjunto U está bem definido. Para obter uma contradição suponhamos que exista pelo menos um vértice u_i interior de U não pertencente ao polígono convexo limitado pela poligonal D . Podemos supor que u_i é o ponto mais distantes do polígono. Seja w o ponto de D mais próximo a u_i . Tal ponto existe e é único pois D é convexa. O ponto w pode ser um vértice de D ou um ponto de suas arestas, como na Figura 2.1.

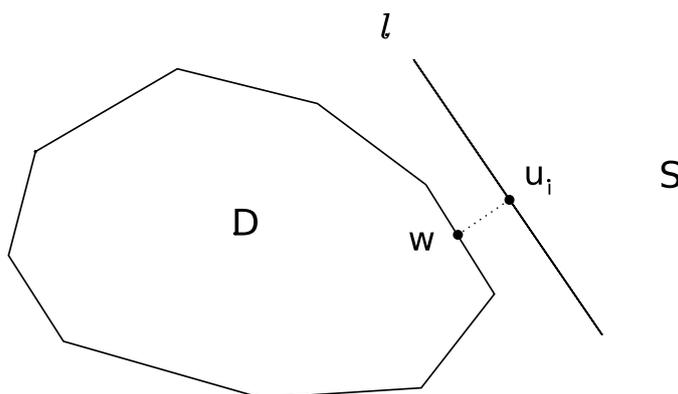


Figura 2.1: Todo vértice interior de U , dado pela solução do sistema (equação 2.7) e pelos vértices do poligonal convexa D , pertence ao polígono convexo limitado pela poligonal.

Seja l a reta passando por u_i e perpendicular ao vetor $u_i - w$. Ela divide \mathbb{R}^2 em dois semi-espacos abertos e nenhum ponto u_j encontra-se no semi-espaço S que não contém w .

Agora, u_i é uma combinação convexa estrita de seus vizinhos e nenhum deles pertencem a S . Logo, todos eles devem estar em l .

Pelo mesmo raciocínio, os vizinhos dos vizinhos de u_i devem estar nesta linha também, e assim por diante. Portanto, desde que \mathcal{G} seja conectado, isto implica que qualquer vértice de fronteira, que é um ponto em D , encontra-se em l o que é uma contradição. ■

A Figura 2.2 mostra uma situação em que as condições 2.4, 2.5 e 2.6 são mantidas e, mesmo assim, na solução do sistema 2.7, o único nó interior do grafo ilustrado, está fora de D (mas não fora do fecho convexo de D).

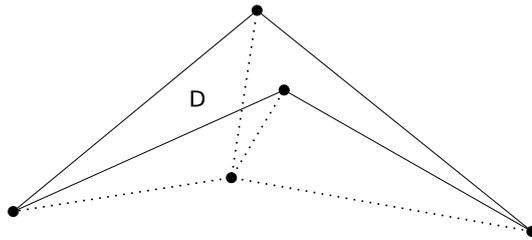


Figura 2.2: A convexidade da poligonal D assegura que os vértices de U estão no polígono convexo limitado por D .

Portanto, a proposição 2.3 determina que todo vértice definido pela solução do sistema (2.8) é interior a D . Além disso, esses vértices são definidos a partir de combinações convexas dos vértices vizinhos. A teoria de coordenadas baricêntricas garante que em uma imersão planar de um grafo temos estas conclusões. De fato, estas afirmações são equivalentes, isto é, também temos que o conjunto de pontos U (2.11) é de fato uma imersão planar do grafo \mathcal{G} definido a partir da superfície S . Este resultado foi demonstrado por Tutte usando resultados avançados da teoria de grafos [8].

Portanto, a imersão planar do grafo da superfície \mathcal{G} determina uma parametrização planar da superfície S para uma superfície triangular com fronteira $S(\mathcal{G}, X)$, a partir de uma poligonal planar convexa D (equação (2.1), das condições de convexidade (equações (2.4), (2.5) e (2.6)) e da solução do sistema (2.7).

$$\mathcal{S}_D = \mathcal{S}_D(\mathcal{G}, U) \quad (2.12)$$

Mais ainda, dada uma poligonal convexa D , podemos caracterizar o conjunto das parametrizações de superfícies triangulares com fronteiras no polígono limitado por D como o conjunto de parametrizações definidas a partir da solução do sistema (2.7) fixando a fronteira da superfície na poligonal convexa D .

Proposição 2.4 *Seja $P(S)$ a classe de todas as parametrizações de uma dada superfície triangular S . Defina $T(S) \subset P(S)$ como aquelas parametrizações da forma (2.12) e seja $C(S) \subset P(S)$ aquelas parametrizações cujos nós da fronteira são os vértices de um polígono convexo em uma sequência anti-horária. Então $T(S) = C(S)$.*

Demonstração. Pela construção, temos $T(S) \subset C(S)$. Agora suponha $p \in C(S)$. Então, como p é uma triangulação planar, cada nó interior encontra-se estritamente dentro do fecho convexo de seus vizinhos. De fato, caso contrário, uma das faces incidentes no nó não seria um polígono convexo e isso não poderia ser um triângulo. Consequentemente, cada nó pode ser expresso como combinação convexa estrita de seus vizinhos, isto é, na forma (2.7). Como D é um polígono convexo, $p \in T(S)$. ■

Podemos sintetizar os resultados obtidos nesta seção no contexto de parametrização de superfícies triangulares com bordo na seguinte afirmação:

Teorema 2.5 *Dado uma superfície triangular com bordo, fixados os vértices do bordo numa poligonal convexa do plano, as posições dos vértices interiores formam uma parametrização planar desta superfície (isto é, não há triângulos sobrepostos) se, e somente se, a posição de cada vértice interior é uma combinação convexa das posições dos vértices vizinhos.*

2.3 Algoritmos

Na teoria apresentada na seção anterior, uma parametrização planar de uma superfície triangular com fronteira S é obtida a partir da imersão planar do grafo dado pela conectividade da malha. Neste contexto, a fronteira da superfície é parametrizada numa poligonal planar convexa e é exigido que cada vértice interno seja parametrizado numa combinação convexa de seus vizinhos. Para isso, constrói-se uma matriz de pesos $M_{n \times N}$, a partir da qual obtém-se a matriz $A_{n \times n} = I - M_{n \times n}$, onde $M_{n \times n}$ é a submatriz de $M_{n \times N}$

correspondente aos vértices interiores da superfície. Prova-se que A é não-singular o que garante que o sistema $Ax = b$, para qualquer b , tem solução única dada por $x = A^{-1}b$. A solução do sistema junto com a poligonal planar convexa define uma parametrização planar da superfície. De fato, fixado a posição da fronteira numa poligonal convexa e uma matriz M , a proposição 2.2 garante que a solução do sistema é única e, além disso, a proposição 2.4 garante que essa solução é uma parametrização da superfície S no polígono convexo determinado pela poligonal fixada.

Adiante, dois algoritmos são discutidos para obter uma parametrização planar para determinada superfície triangular com fronteira. Mais precisamente, os algoritmos foram desenvolvidos para obter parametrizações planares de superfícies triangulares que representam superfícies topologicamente equivalentes à esfera.

Seja S uma superfície triangular com vértices

$$X = \{\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq N\},$$

ordenados de tal forma que $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ são os vértices interiores da superfície S e $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_N$ são os vértices da fronteira ∂S . Inicialmente, precisamos definir uma poligonal convexa planar para fixarmos a fronteira da superfície e, para tal, escolhemos uma poligonal regular sobre o círculo unitário, pois estamos admitindo que a superfície é equivalente ao disco. Para definir esta poligonal levamos em conta apenas a topologia do bordo da superfície, ou seja, seu número de vértices e sua conectividade.

A parametrização planar da superfície é determinada pela solução do sistema

$$Ax = b$$

onde A e b são determinados a partir dos vértices da poligonal convexa e de uma matriz de pesos M (seção 2.2, equação 2.8).

Fixada a poligonal convexa, a escolha da matriz M é quem define a parametrização planar. Mais ainda, pela proposição 2.4 a variação dessa matriz satisfazendo as condições 2.4, 2.5 e 2.6 geram todas as parametrizações planares no domínio limitado pela poligonal convexa.

Diversas maneiras de se obter os pesos desta matriz são encontradas na literatura (pesos geométrico e combinatório [8], harmônicos[14, 21, 29], e trigonométricos[10]) onde a variação dos pesos se deve à busca de propriedades que são importantes para uma determinada aplicação.

Inicialmente, usaremos uma matriz de pesos proposta por Tutte [28]. Dado um vértice x_i da malha, definimos para cada vértice x_j que compartilha uma aresta da malha com x_i o peso

$$w_{ij} = \frac{1}{val(i)} \tag{2.13}$$

onde $val(i)$ é a valência do vértice x_i . Vale ressaltar que esta definição da matriz de pesos W leva em conta apenas a conectividade da malha. Tal peso satisfaz as condições de convexidade e é chamado *peso combinatório*.

O algoritmo a seguir obtém a matriz de pesos combinatórios a partir do conjunto de arestas E de uma superfície triangular. Inicialmente atribuímos a W a matriz nula $n \times N$ e em seguida percorremos a matriz atribuindo $W(i, j) = \frac{1}{val(i)}$ se $(i, j) \in E$.

Algorithm 1 Matriz de Pesos Combinatório (Tutte 1963)

Require: E : arestas; (n, N) : número de vértices interiores e total.

```

 $W = \text{zeros}(n, N)$ ;
for  $i=1..n$  do
  for  $j=1..N$  do
    if  $(i, j) \in E$  then
       $W(i, j) = \frac{1}{val(i)}$ ;
    end if
  end for
end for
return  $W$ 

```

A parametrização planar de superfícies triangulares com fronteira é então obtida pelo algoritmo apresentado no pseudo-código a seguir a partir da solução do sistema encontrado utilizando uma matriz de pesos.

No algoritmo uma superfície S é dada por suas arestas E e seus vértices X , que determinam respectivamente a topologia e a geometria da superfície, de onde obtemos a matriz de pesos combinatórios a partir do conjunto de arestas E desta superfície.

Algorithm 2 Algoritmo Direto

```

Require:  $S$ : superfície;
 $[E, X, n, N] = \text{ler}(S)$ ;
 $D = \text{poligonal convexa}(N - n)$ ;
 $M = \text{matriz combinatoria}(E, n, N)$ ;
 $A = I_n - M(1 : n, 1 : n)$ ;
 $b = W(1 : n, n + 1 : N) \cdot D$ ;
 $u = A^{-1}b$ ;
 $U = u \cup D$ ;
return  $S_D(E, U)$ 

```

O algoritmo direto faz a leitura de uma superfície S , em seguida gera uma poligonal fixando os vértices da fronteira sobre o círculo unitário de maneira uniforme, define a matriz combinação convexa M , define $A = I - M$, define b e obtém a solução u do sistema $Ax = b$ invertendo a matriz A . Daí então define a geometria U como a união dos vértices de u com os vértices em D e finalmente define a superfície S_D

O algoritmo direto faz uso da matriz de pesos combinatórios para obter a posição (geometria) dos vértices interiores no polígono delimitado pela poligonal convexa D . A geometria planar é dada por $x = A^{-1}b$ a qual incluímos os pontos da poligonal convexa que são as imersões dos vértices da fronteira da superfície. A topologia da parametrização é induzida pela topologia da superfície.

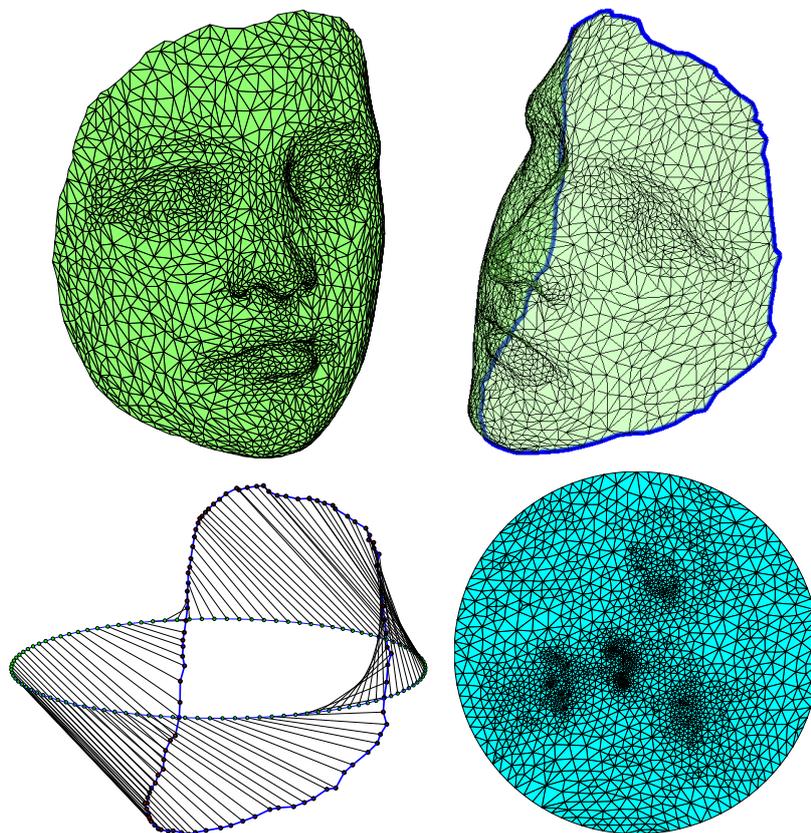


Figura 2.3: A superfície triangular modela uma face com 1858 vértices, sendo 104 vértices de fronteira. Na parte superior, a superfície é ilustrada e destacamos a fronteira desta superfície. Na parte inferior, a fronteira da superfície é fixada numa poligonal convexa sobre o círculo unitário e a parametrização planar é obtida pelo algoritmo direto usando a matriz de pesos combinatórios.

A Figura 2.3 ilustra a parametrização planar de uma superfície triangular com 1858 vértices, sendo 104 vértices na fronteira. A matriz do sistema de parametrização planar tem dimensão 1754×1754 . Na parte superior da imagem temos a superfície triangular e a fronteira em destaque. Na parte inferior temos, à esquerda, a fronteira da superfície fixada na poligonal convexa sobre o círculo unitário e, à direita, a parametrização planar da superfície no disco unitário.

O algoritmo direto requer o cálculo da inversa da matriz A . Obter a inversa da matriz A é computacionalmente caro. Quando a matriz tem dimensão muito grande é completamente inviável e, às vezes, impossível para determinadas máquinas. Entretanto, se a matriz A é esparsa então, algoritmos iterativos, podem obter uma aproximação da solução do sistema $Ax = b$ com muito menos custo computacional do que calcular a inversa de A .

Um processo numérico simples e eficiente para resolver $Ax = b$ é o procedimento iterativo onde os vértices da fronteira da superfície estão posicionados na poligonal convexa e os vértices interiores são inicialmente posicionados no centro dessa poligonal e são iterativamente atualizados para a combinação convexa dos seus vizinhos, segundo a matriz de pesos W .

A iteração que atualiza os vértices da parametrização é dada por

$$u^{k+1} = Mu^k + b,$$

onde M e b são dados pela equação (2.8) e $u^0 = b$. Podemos reescrever o termo dessa sequência como

$$u^k = \left(\sum_{i=0}^k M^i \right) b.$$

De fato, temos

$$u^0 = b,$$

$$\begin{aligned} u^1 &= Mu^0 + b \\ &= Mb + b \\ &= (M + I)b \end{aligned}$$

e se

$$u^k = \left(\sum_{i=0}^k M^i \right) b$$

então

$$\begin{aligned}
 u^{k+1} &= Mu^k + b \\
 &= M\left(\sum_{i=0}^k M^i b\right) + b \\
 &= \sum_{i=1}^{k+1} M^i b + b \\
 &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} M^i + M^0\right) b \\
 &= \left(\sum_{i=0}^{k+1} M^i\right) b
 \end{aligned}$$

Este processo iterativo converge para a solução do sistema desde que a matriz M seja uma contração.

Proposição 2.6 *Seja M uma matriz $n \times n$ invertível. Se M é uma contração, então*

$$(I - M)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} M^i. \quad (2.14)$$

Demonstração. Temos que

$$(I - M) \sum_{i=0}^n M^i = I - M^{n+1}$$

daí

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left((I - M) \sum_{i=0}^n M^i \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - M^{n+1}), \\
 (I - M) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n M^i &= I - \lim_{n \rightarrow \infty} M^{n+1}.
 \end{aligned}$$

Sendo M contração

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = 0$$

e, conseqüentemente,

$$(I - M) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n M^i = I.$$

Logo

$$(I - M)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n M^i = \sum_{i=0}^{\infty} M^i$$

o que implica em $(I - M)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} M^i$. ■

Pela definição de u^k e pela proposição 2.2 a sequência (u^k) converge para $(\sum_{i=0}^{\infty} M^i)b = (I - M)^{-1}b$, ou seja, para a solução do sistema $(I - M)x = b$, desde que M seja uma contração.

Proposição 2.7 *Seja M a matriz convexa do sistema de parametrização planar (2.7). Então M é uma contração.*

Demonstração. De fato seja v tal que $\|v\| = 1$. Assim

$$Mv = w = (w_1, \dots, w_n),$$

com

$$w_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} v_j = \langle a_i, v_i \rangle$$

onde $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \leq 1$ e $\lambda_{ij} \geq 0$. Assim se usarmos a norma do máximo em $\|Av\|_{\infty}$ temos que provar que $|w_i| < 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Admitimos que existem pelo menos dois valores diferentes de zero em cada linha de A , pois cada vértice tem um mínimo de três vizinhos. Portanto,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \leq 1 \Rightarrow \lambda_{ij} < 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

e, conseqüentemente, dado $a_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in})$, temos

$$\langle a_i, a_i \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \lambda_{ij} < \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \leq 1 \Rightarrow \langle a_i, a_i \rangle < 1$$

Como $\langle v, v \rangle = 1$, temos

$$|w_i| = |\langle a_i, v \rangle| = \|a_i\| \|v\| |\cos(\theta)| < 1$$

Logo, $\|Mv\| < 1$ para todo $v \in S^2$ o que implica em $\|M\| < 1$, isto é, M é uma contração. ■

O peso combinatório (2.13) satisfaz as condições de convexidade (equações (2.4), (2.5) e (2.6)). Portanto, a matriz de pesos combinatórios é uma contração e podemos obter a solução do sistema de parametrização (2.8) como

$$(I - M)^{-1}b = \left(\sum_{i=0}^{\infty} M^i \right) b .$$

Mais ainda, podemos aproximar essa solução por um truncamento na série

$$(I - M)^{-1}b \approx \left(\sum_{i=0}^k M^i \right) b$$

de acordo com algum critério de convergência.

O pseudo-código a seguir apresenta o algoritmo desenvolvido para determinar uma parametrização planar de uma superfície topologicamente equivalente ao disco. De fato, o algoritmo determina uma solução aproximada para o sistema de parametrização e esta aproximação, estando suficientemente próxima da solução que define uma parametrização, também será uma parametrização. A convergência do algoritmo é dado por um parâmetro *tol*.

O algoritmo iterativo faz a leitura de uma superfície S , em seguida gera uma poligonal fixando os vértices da fronteira sobre o círculo unitário de maneira uniforme, define a matriz combinação convexa M . A partir daí define b , inicia $u = b$ e faz iterações multiplicando por M e somando b até que a condição $\|v - u\| \leq tol$ seja satisfeita.

Algorithm 3 Algoritmo Iterativo

Require: S : superfície; tol : tolerância ou erro máximo.

$[E, X, n, N] = \text{ler}(S)$;

$D = \text{poligonal convexa}(N - n)$;

$M = \text{combinatorio}(E, n, N)$;

$b = W(1 : n, n + 1 : N) \cdot D$;

$u = b$;

repeat

$v = u$;

$u = M \cdot v + b$;

until $\|v - u\| \leq tol$

$U = u \cup D$;

return $S_D(E, U)$

A Figura 2.4 ilustra a parametrização planar da mesma superfície que foi aplicada ao algoritmo direto (Figura 2.3). A tolerância utilizada no algoritmo foi $tol = 1e - 5$.

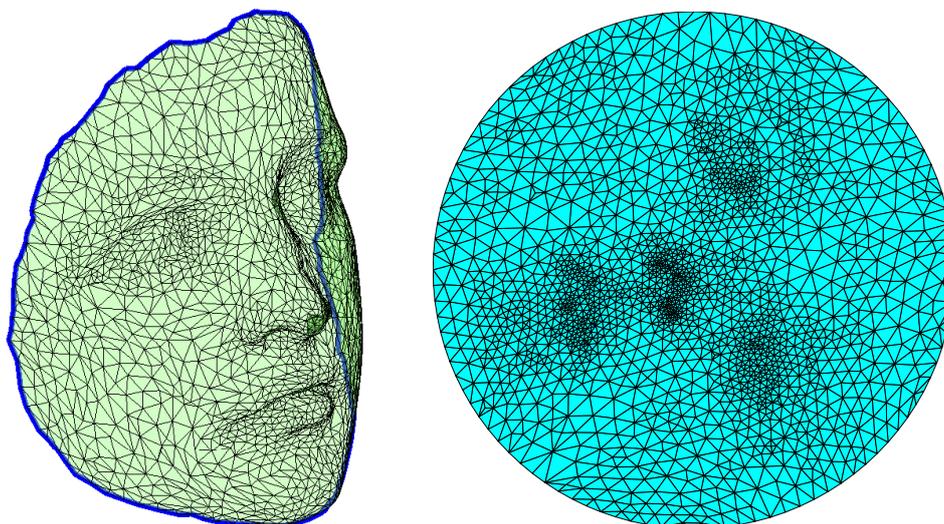


Figura 2.4: A parametrização planar da superfície que modela uma face é obtida utilizando o algoritmo iterativo. A superfície e a sua fronteira são ilustradas na esquerda e a parametrização planar obtida com o algoritmo iterativo ($tol = 1e - 5$) é ilustrada na direita.

O modelo ilustrado contém 1.754 vértices interiores e portanto uma matriz de pesos com 3.076.516 entradas, das quais apenas 10.931 são entradas não nulas, isto é, 99,65% das entradas são nulas, resultando em um elevado grau de esparsidade. Aproveitamos a particularidade das matrizes de pesos possuírem alto grau de esparsidade devido as superfícies em geral terem valência máxima muito baixa comparada com o número de vértices da mesma, para utilizarmos algoritmos especialmente desenvolvidos para permitir uma manipulação eficaz dessas matrizes explorando ao máximo suas características.

O resultado obtido com o algoritmo iterativo (Figura 2.4) é visivelmente “próximo” do resultado obtido com o algoritmo direto (Figura 2.3). Portanto, o algoritmo iterativo apresenta uma grande vantagem sobre o direto em relação à esparsidade da matriz de pesos, visto que as superfícies em geral tem valência máxima muito baixa comparada com o número de vértices. Assim tal matriz possui muitas entradas nulas e pode ser facilmente multiplicada na iteração $x^{n+1} = Mx^n + b$, enquanto que no algoritmo direto a esparsidade da matriz não é levada em conta no cálculo da inversa da matriz, o que pode levar a um processo computacionalmente caro.

Nos exemplos ilustrados nas Figuras, 2.3 e 2.4 o tempo de processamento no algoritmo iterativo para encontrar uma parametrização planar, neste caso uma aproximação da solução do sistema, é menor que o tempo gasto pelo algoritmo direto. O algoritmo direto levou 0.76 segundos, enquanto o algoritmo iterativo levou 0.41 segundos para aproximar o resultado usando $tol = 1e - 5$.

O algoritmo direto retorna $x = A^{-1}b$ com valores exatos exceto pelo arredondamento nos cálculos de pontos flutuantes. Em contrapartida, o algoritmo iterativo retorna x como uma aproximação da solução do sistema. Podemos controlar o quanto essa aproximação é precisa fazendo a tolerância (tol) suficientemente pequena. Nesse caso o critério de parada do algoritmo é o termo geral $u^{k+1} - u^k = (M^{k+1})b$ da série convergente (Equação 2.14). Como a série é convergente o termo geral tende a zero mas não é exatamente o erro.

Assim o Algoritmo iterativo pode retornar uma solução, tão precisa quanto se deseja. Além disso, o algoritmo iterativo permite observar a convergência das triangulações planares obtidas até encontrar uma parametrização planar válida. A convergência do algoritmo iterativo é ilustrada na Figura 2.5. Inicialmente os vértices interiores da superfície são imersos no centro do círculo (Figura 2.5(a)). A multiplicação dessa posição inicial pela matriz M vai alterando as posições dos vértices interiores de acordo com a posição de seus vizinhos (Figuras 2.5(b), 2.5(c), 2.5(d), 2.5(e) e 2.5(f)). Podemos observar que visualmente o resultado obtido com apenas 1000 iterações (Figura 2.5(e)) é uma parametrização da superfície que pode ser obtida alterando o critério de parada do algoritmo iterativo para $tol = 1e - 03$ e que esta parametrização é muito “próxima” do resultado obtido com $tol = 1e - 05$ (Figura 2.5(f)), obtido com 3600 iterações.

Em todo o trabalho utilizamos uma mesma máquina com 4GB de memória RAM e processador Core i7 S 860, 2.53 GHz.

2.4 Resultados

A teoria apresentada na seção 2.2 estabelece uma bijeção entre o conjunto de parametrizações planares de superfícies triangulares com fronteira e o conjunto de matrizes de pesos definidas a partir da adjacência da malha da superfície. Ou seja, existem tantas parametrizações de uma superfície triangular quanto matrizes de pesos dos vértices dessa superfície que obedecem as condições de convexidade. Nessa seção, utilizamos este fato para determinar diferentes parametrizações planares (no disco unitário) de uma superfície triangular variando a matriz de pesos. Os resultados ilustrados nesta seção foram obtidos com o algoritmo iterativo.

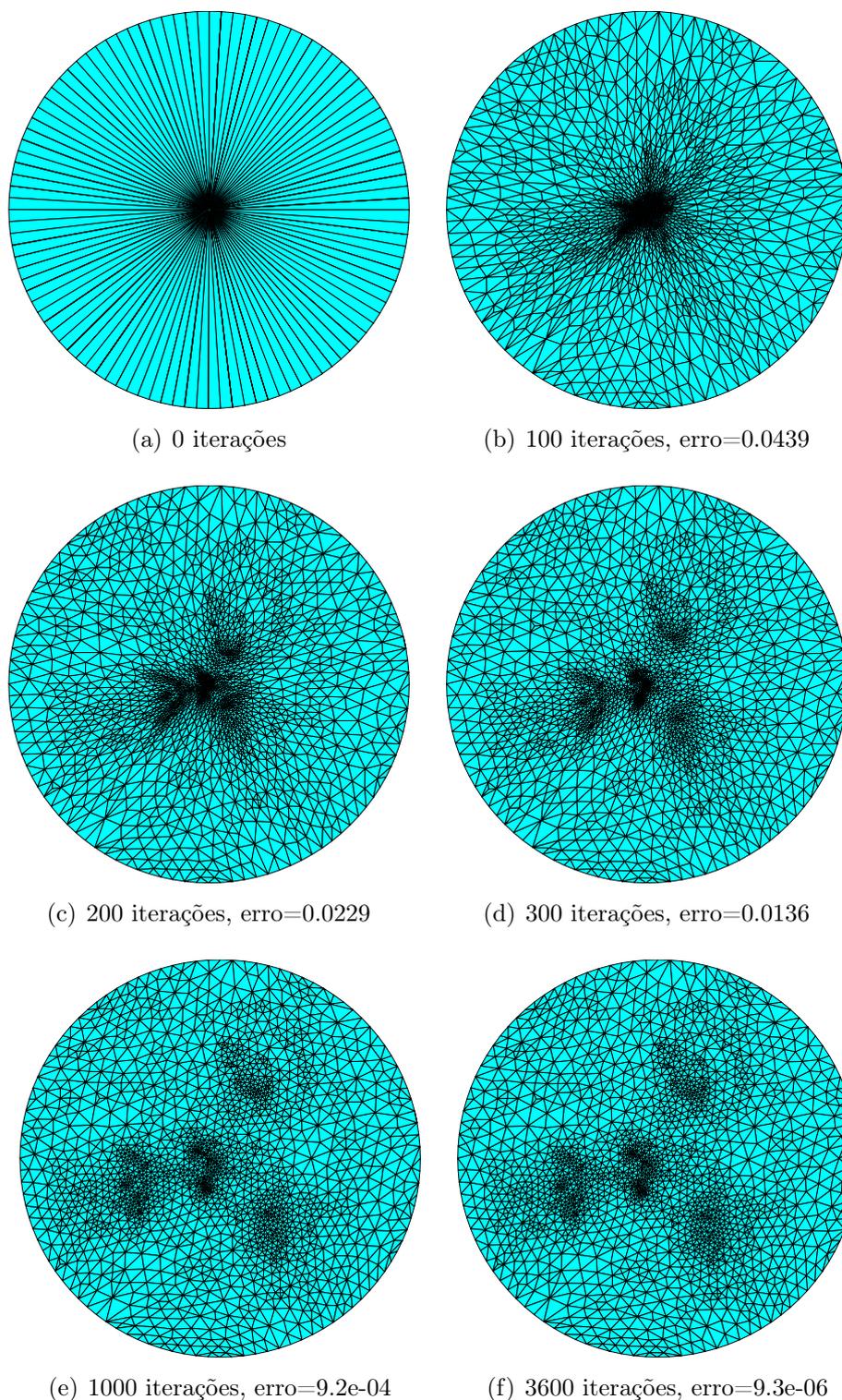


Figura 2.5: Alguns passos intermediários do algoritmo iterativo são ilustrados. A parametrização planar foi obtida com 3.600 iterações (2.5(f)). A Figura 2.5(e) ilustra um resultado obtido com $tol = 1e - 03$ que utilizou apenas 1000 iterações e é “próximo” do resultado obtido com $tol = 1e - 05$.

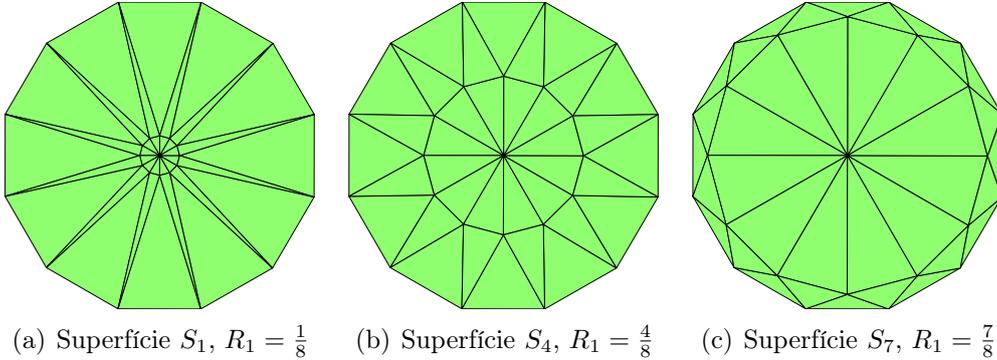


Figura 2.6: As três superfícies possuem a mesma topologia, valência 12 para os vértices centrais, valência 5 para os demais vértices interiores e valência 4 para os vértices de fronteira. As superfícies se diferem apenas na geometria de seus vértices interiores de valência 5 que pertencem a círculos de raios $R_1 = 1/8$ (2.6(a)), $R_1 = 4/8$ (2.6(b)) e $R_1 = 7/8$ (2.6(c)).

Exemplo 1: Superfície planar sintética e pesos.

As superfícies apresentadas neste exemplo foram obtidas a partir de um vértice central x_1 , ligado a m vértices $\{x_2, \dots, x_{m+1}\}$ distribuídos regularmente sobre um primeiro círculo centrado em x_1 e raio R_1 formando então m triângulos. Estes vértices, por sua vez, estão ligados a m vértices $\{x_{m+2}, \dots, x_{2m+1}\}$ distribuídos regularmente sobre um segundo círculo também centrado em x_1 , mas de raio R_2 maior que R_1 , formando mais $2m$ triângulos. A poligonal formada pelos vértices pertencentes ao círculo de raio R_2 define a fronteira desta superfície. A Figura 2.6 ilustra três destas superfícies onde fixamos $m = 12$ e $R_2 = 1$ e variamos o raio R_1 com os seguintes valores $R_1 = 1/8$ (Figura 2.6(a)), $R_1 = 4/8$ (Figura 2.6(b)) e $R_1 = 7/8$ (Figura 2.6(c)). Estas superfícies possuem a mesma valência $m = 12$ para os seus vértices centrais, valência 5 para os vértices interiores e valência 4 para os vértices de fronteira, mais ainda, todas as superfícies possuem a mesma topologia. Denotamos estas superfícies por S_1 , S_4 e S_7 , respectivamente.

Utilizando o peso combinatório [28], os resultados da parametrização planar das superfícies S_1 , S_4 e S_7 são ilustrados na Figura 2.7. Os resultados obtidos indicam uma das principais características da matriz de pesos combinatórios, a propriedade de obter a mesma parametrização planar quando duas superfícies possuem a mesma topologia e a mesma poligonal convexa é utilizada para a posição dos vértices da fronteira na parametrização, inclusive respeitando a mesma indexação destes vértices. Em outras palavras, o peso combinatório não leva em conta a geometria da superfície.

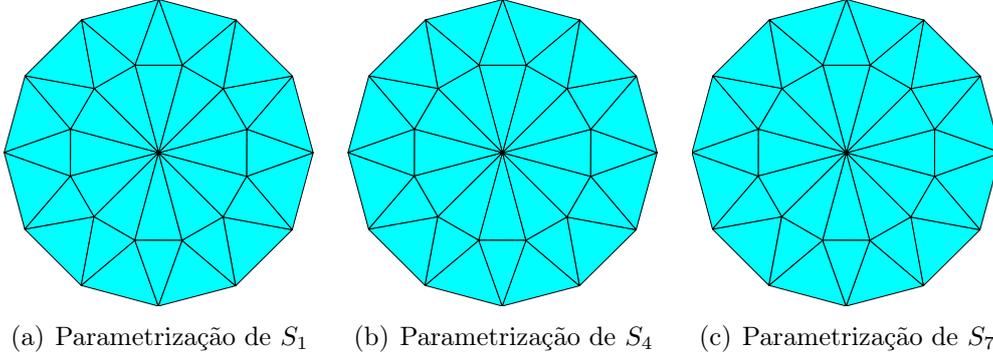


Figura 2.7: O peso combinatório tem a propriedade de obter a mesma parametrização planar quando duas superfícies possuem a mesma topologia e a mesma poligonal convexa é utilizada para a posição dos vértices da fronteira na parametrização. Da esquerda para a direita as parametrizações das superfícies topologicamente equivalentes S_1 , S_4 e S_7 (Figura 2.6) com raios, respectivamente, $R_1 = 1/8$, $R_1 = 4/8$ e $R_1 = 7/8$.

A parametrização planar usando a matriz de pesos combinatório traduz no resultado obtido apenas a topologia da superfície. Portanto, uma considerável deformação da geometria das superfícies quando comparada à geometria das parametrizações pode ser observada quando utilizamos esta matriz. Essa deformação pode ser facilmente observada nos resultados da parametrização das superfícies S_1 e S_7 (Figura 2.6) ilustradas nas Figuras 2.7(a) e 2.7(c) respectivamente.

Com o intuito de diminuir a distorção quando a parametrização planar utiliza a matriz de pesos combinatório, encontramos na literatura outros pesos que utilizam a geometria da superfície na sua definição [14, 21, 28, 29]. Alguns destes pesos serão usados no algoritmo de parametrização planar.

Inicialmente, observamos que se u_i é dado pela expressão

$$u_i = \sum_{k \in N(i)} \lambda_{ik} u_k, \quad i = 1, \dots, n,$$

quanto mais próximo de 1 for λ_{ij} mais próximo de u_j estará u_i . De fato, basta notar que

$$\|u_i - u_j\| = \lim_{\lambda_{ij} \rightarrow 1} \|u_i - \lambda_{ij} u_j\| = \left\| \sum_{k \in N(i) - \{j\}} \lambda_{ik} u_k \right\| = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Logo, uma tentativa de preservar o comprimento da aresta na parametrização é tomar pesos menores para arestas maiores da superfície original e pesos

maiores para arestas menores. Neste intuito, podemos definir um peso que satisfaça essa propriedade tomando valores inversamente proporcionais aos comprimentos das arestas da superfície original.

Para cada vértice x_i interno, definimos para todo $j \in \{1, \dots, N\}$

$$\tilde{w}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\|x_i - x_j\|} & , \quad (i, j) \in E \\ 0 & , \quad (i, j) \notin E \end{cases}$$

Assim definidos, os pesos obedecem às condições de adjacência (equação 2.4) e de positividade (equação 2.5) para todo $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, N$, mas a condição soma unitária

$$\sum_{j \in N(i)} \tilde{w}_{ij} = 1$$

pode não ser verificada para algum vértice x_i . Para satisfazer ambas as condições, dividimos cada linha i de \tilde{W} pela soma ao longo dessa linha. Portanto, definimos

$$w_{ij} = \frac{\tilde{w}_{ij}}{s_i},$$

onde $s_i = \sum_{j \in N(i)} \tilde{w}_{ij}$.

Tal peso é chamado na literatura de *inverso do comprimento da aresta* ou simplesmente *inverso da aresta*.

As superfícies S_1 , S_4 e S_7 (Figura 2.6) foram parametrizadas com o algoritmo iterativo usando a matriz de pesos inverso da aresta. Os resultados obtidos mostram que o peso inverso da aresta considera a geometria da superfície resultando em parametrizações planares com menores distorções. A Figura 2.8 ilustra os resultados obtidos para as superfícies S_1 (2.8(a)), S_4 (2.8(b)) e S_7 (2.8(c)).

Para cada aplicação procura-se preservar alguma propriedade matemática da superfície na sua parametrização planar como foi feito na definição do peso inverso da aresta. O próximo peso a ser definido segue a mesma ideia, mas faz uso das áreas dos triângulos que compartilham a aresta $e_{ij} = (i, j)$, ou seja, a área do único quadrilátero que tem a aresta e_{ij} como diagonal, enquanto o peso inverso da aresta faz uso apenas do comprimento da aresta e_{ij} .

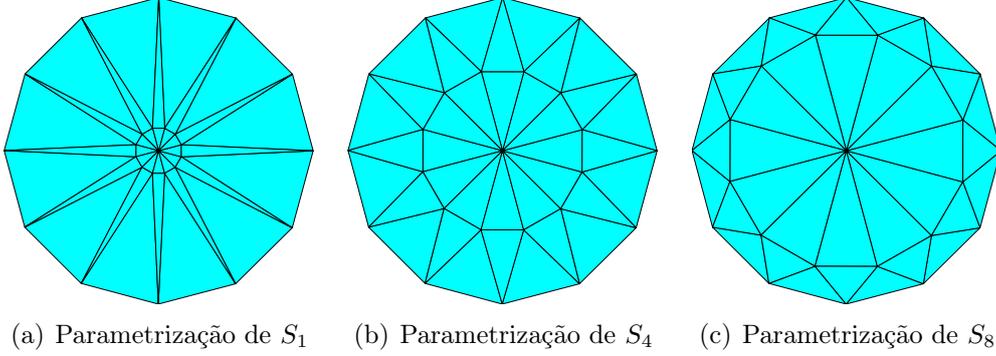


Figura 2.8: Peso inverso da aresta. Da esquerda para a direita as parametrizações das superfícies topologicamente equivalentes S_1 , S_4 e S_7 (Figura 2.6). O peso inverso da aresta considera a geometria da superfície original por isso a parametrização obtida com o uso desse peso resulta em menor distorção da malha.

Para cada vértice interior x_i definimos para todo $j = 1, \dots, N$,

$$\tilde{w}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{a_{ij} + b_{ij}} & , \quad j \in N(i) \\ 0 & , \quad j \notin N(i) \end{cases} ,$$

onde a_{ij} e b_{ij} são as áreas dos dois triângulos adjacente à aresta e_{ij} .

Da mesma forma, torna-se necessário dividir cada peso \tilde{w}_{ij} pela soma $s_i = \sum_{j \in N(i)} \tilde{w}_{ij}$ para assegurarmos as condições de convexidade (equações (2.4), (2.5) e (2.6)). Portanto, definimos o peso

$$w_{ij} = \frac{\tilde{w}_{ij}}{s_i}$$

chamado de *inverso da área*.

A Figura 2.9 ilustra as parametrizações planares obtidas pelo algoritmo iterativo utilizando a matriz de pesos inverso da área. As parametrizações das superfícies S_1 , S_4 e S_7 obtidas com esta matriz são ilustradas nas Figuras (2.9(a)), (2.9(b)) e (2.9(c)), respectivamente. Podemos observar que esta matriz resulta em parametrizações com menores distorções geométricas da malha original comparado com a as parametrizações obtidas com o uso do peso combinatório.

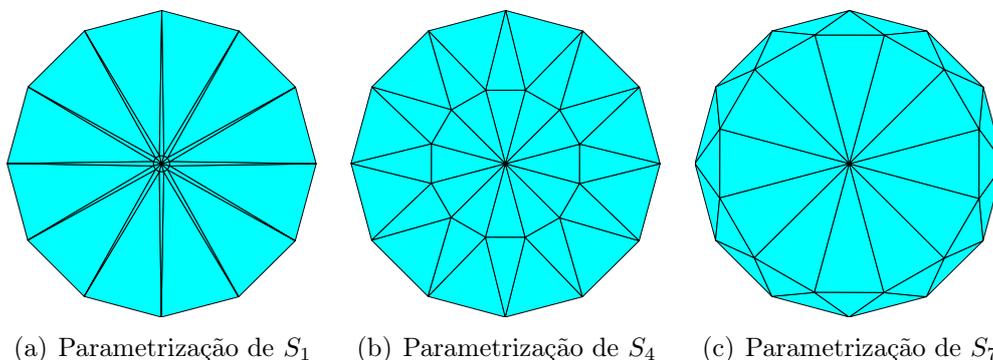


Figura 2.9: Peso inverso da área. Da esquerda para a direita, as parametrizações das superfícies topologicamente equivalentes S_1 , S_4 e S_7 (Figura 2.6). A parametrização planar usando o peso inverso da área apresenta resultados com menores distorções da malha, comparado com as parametrizações obtidas com o uso do peso combinatório, pois leva em consideração medidas geométricas da superfície original.

Neste exemplo, as superfícies utilizadas são originalmente planares e é interessante ressaltar que em nenhum dos pesos definidos aqui, combinatório, inverso da aresta e inverso da área, a parametrização planar resultou na mesma superfície. Porém, a distorção da geometria da malha da superfície é bem menor nos pesos geométricos em relação ao peso combinatório. Existem vários métodos que tem a propriedade de resultar numa parametrização semelhante a superfície quando a entrada é uma superfície planar [8].

Neste exemplo, a distorção geométrica para cada peso definido pode ser medida a partir da relação entre os raios R_1 da superfície original e dos raios das parametrizações obtidas.

A tabela 2.1 contém os valores dos raios das superfícies originais na primeira coluna e dos raios das parametrizações nas demais colunas. Podemos observar que o peso combinatório não traduz para o algoritmo de parametrização planar propriedades geométricas da superfície, pois o raio listado na tabela é igual a 0.5912 para qualquer uma das superfícies S_1 , S_4 e S_7 . Os pesos geométricos, inverso da aresta e inverso da área, resultam em parametrizações com menores distorções da malha e, portanto, as medidas geométricas destas superfícies são melhor preservadas. Calculando o valor absoluto da diferença entre os raios da superfície original e da parametrização planar podemos determinar qual peso resultou em uma melhor parametrização segundo esta medida de distorção. Portanto, para essas superfícies, os melhores resultados são obtidos com o uso dos pesos inverso da aresta e inverso da área.

Superfície (raio)	Parametrizações Planares		
	combinatório	inverso da aresta	inverso da área
$S_1, R_1 = \frac{1}{8} = 0.125$	0.5912	0.1524	0.0544
$S_4, R_1 = \frac{4}{8} = 0.500$	0.5912	0.5341	0.4971
$S_7, R_1 = \frac{7}{8} = 0.875$	0.5912	0.7805	0.8697

Tabela 2.1: A distorção geométrica para cada peso definido pode ser medida a partir da relação entre os raios R_1 da superfície original e dos raios das parametrizações obtidas.

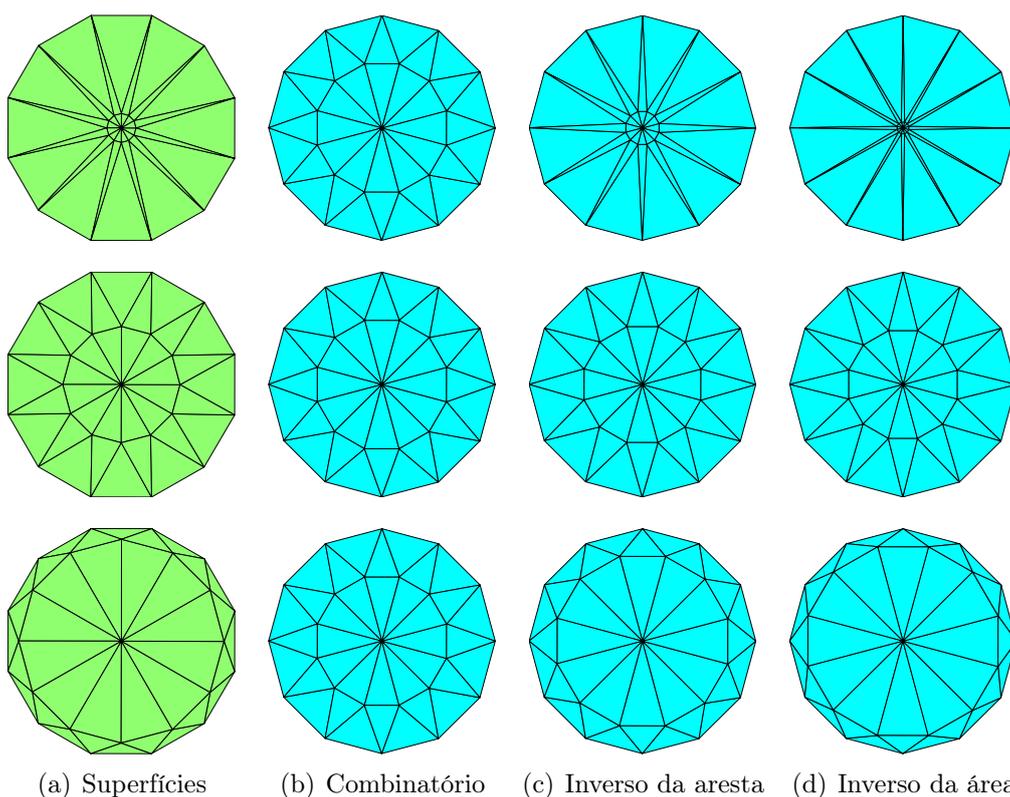


Figura 2.10: Parametrizações planares de superfícies topologicamente equivalentes, porém com geometrias distintas. Da esquerda para a direita: Superfícies (em verde) e parametrizações usando os pesos combinatório, inverso da aresta e inverso da área.

As parametrizações obtidas com os pesos combinatório (topológico), inverso da aresta e inverso da área (topológico e geométrico) podem ser comparadas na Figura 2.10. A primeira coluna da Figura ilustra de cima para baixo as superfícies S_1 , S_4 e S_7 . As parametrizações planares usando o peso combinatório são ilustradas na segunda coluna, enquanto as parametrizações obtidas com os pesos inverso da aresta e inverso da área são ilustradas na terceira e quarta colunas, respectivamente. Podemos comparar os resultados e observar que os pesos geométricos resultam em parametrizações com menores distorções da malha da superfície original.

Exemplo 2: Cogumelo e poligonal convexa geométrica.

No exemplo 1 utilizamos uma superfície bastante simples para apresentar os principais pesos encontrados na literatura. Os resultados apresentados ilustram as diferenças entre as parametrizações obtidas com o peso combinatório, que considera somente a topologia da superfície na sua definição, e com os pesos inverso da aresta e inverso da área, que são considerados pesos geométricos, pois são definidos a partir de quantidades geométricas da superfície.

Neste exemplo um modelo mais complexo será aplicado ao algoritmo. Uma sequência de 11 superfícies S_1, \dots, S_{11} , onde todas têm o mesmo número de vértices na fronteira, é obtida a partir de uma superfície com 3424 vértices de modo que

$$S_r \subset S_{r+1}, \quad r = 1, \dots, 10 .$$

Os triângulos da superfície com menor número de vértices, S_1 com 481 vértices, pertencem a todas superfícies e iremos comparar a razão da soma das áreas da parametrização destes triângulos pela área do disco unitário (domínio de parametrização) em todas as superfícies desta sequência com a mesma razão na superfície original. Algumas superfícies desta sequência são ilustradas na Figura 2.11.

No exemplo 1, os pesos inverso da aresta e inverso da área resultam em parametrizações que levam em conta a geometria da superfície. Porém, no modelo sintético criado no exemplo 1 não podemos concluir nada a respeito de propriedades geométricas globais de uma superfície com um número maior de vértices. A análise de uma propriedade global é ilustrada na Figura 2.12 onde podemos conjecturar que a topologia da superfície é o único fator global na metodologia de parametrização planar desenvolvida. As razões de áreas das parametrizações planares com os diversos pesos apresentados não tem o mesmo comportamento da razão das áreas entre as superfícies originais.

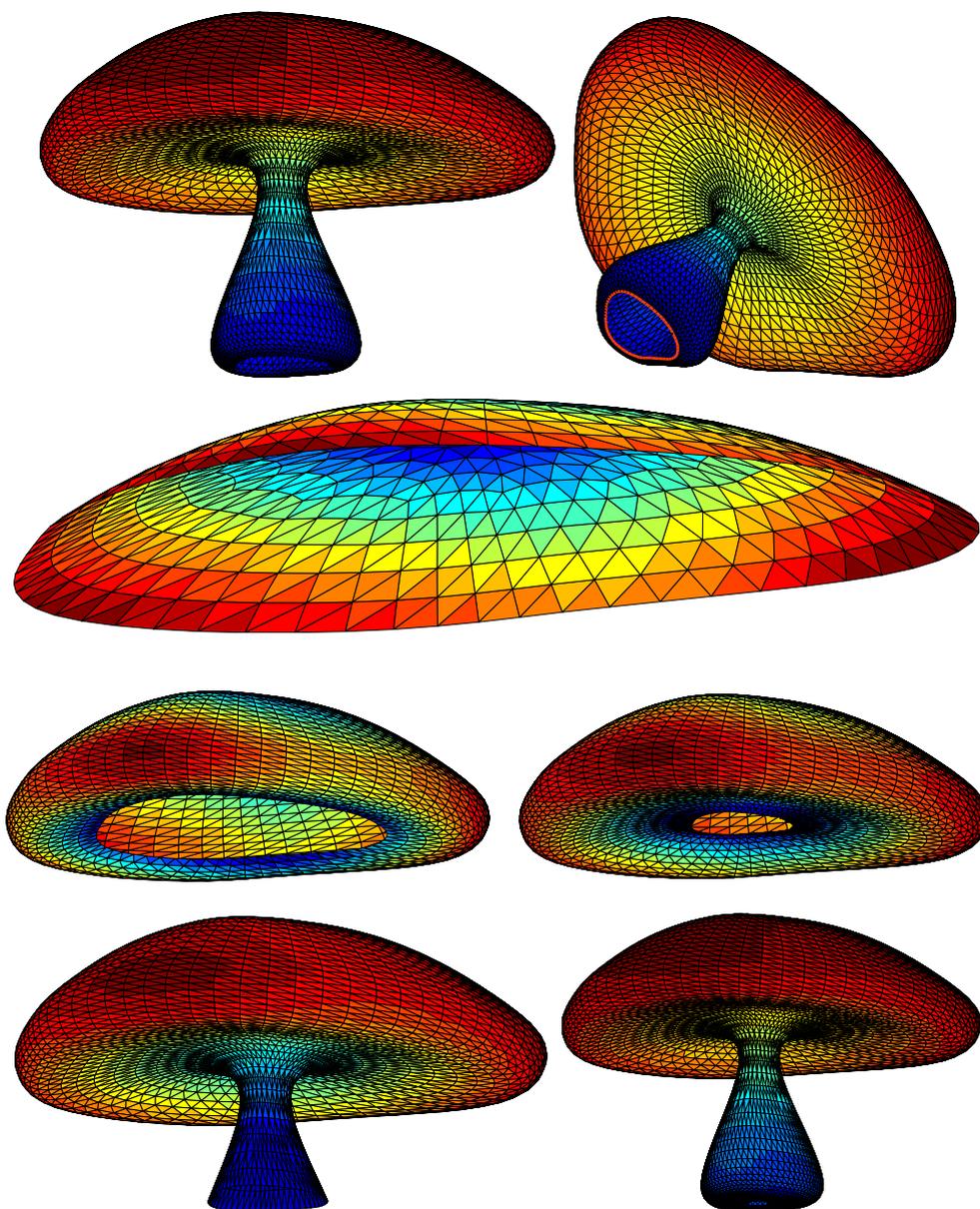


Figura 2.11: Uma superfície com 3424 vértices, ilustrada no topo da Figura, é o modelo base para construir uma sequência de superfícies S_1, \dots, S_{11} onde $S_r \subset S_{r+1}$, $r = 1, \dots, 10$. A superfície S_1 possui 481 vértices e, pela definição, os triângulos desta superfície são mantidos em todas as demais superfícies. Todas as superfícies tem fronteira com o mesmo número de vértices.

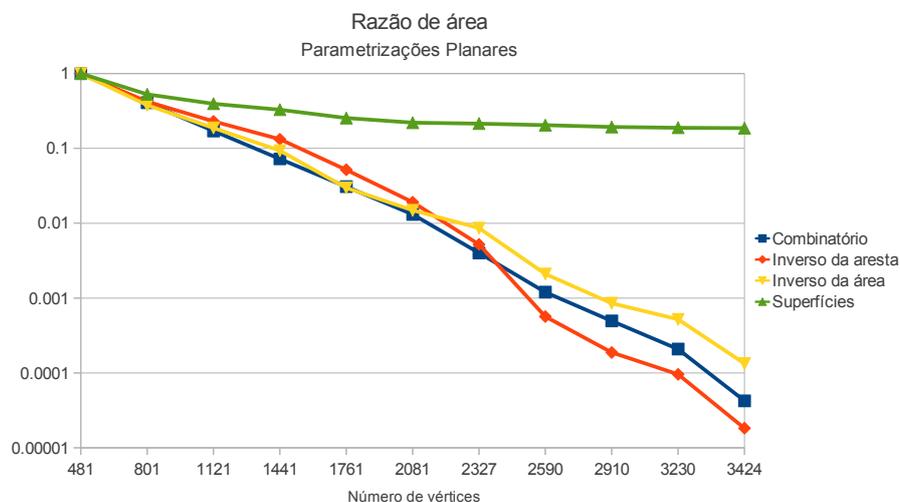


Figura 2.12: Uma sequência de superfícies S_1, \dots, S_{11} é obtida a partir de uma superfície com 3424 vértices de modo que $S_r \subset S_{r+1}$, $r = 1, \dots, 10$ (Figura 2.11). Os triângulos da superfície com menor número de vértices S_1 pertencem a todas superfícies e a razão da soma das áreas da parametrização destes triângulos pela área do disco unitário (domínio de parametrização) em todas as superfícies desta sequência com a mesma razão na superfície original mostram que os pesos geométricos influenciam localmente a parametrização, porém, propriedades globais numa superfície podem não ser preservadas.

Para analisar o comportamento global com relação à fixação da fronteira da superfície tomaremos a superfície S_2 ; 801 vértices, sendo um vértice central com valência 16, 16 vértices com valência 5, 720 vértices com valência 6 e 64 vértices de fronteira com valência 4; e criamos outra superfície por uma subdivisão de metade da superfície S_2 . O resultado obtido é uma superfície com 2112 vértices, sendo um vértice central de valência 16, 29 vértices de valência 7, 1942 vértices de valência 6, 44 vértices de valência 5, 95 vértices de valência 4 e um vértice de valência 3, totalizando 2016 vértice interiores e 96 vértices de fronteira. As superfícies são ilustradas na Figura 2.13.

As parametrizações 2.14(a), 2.14(c) e 2.14(e) obtidas para a superfície ilustrada na Figura 2.13(a) usando os diferentes pesos mostram resultados semelhantes. As áreas das regiões em vermelho nas parametrizações são respectivamente 0.0021, 0.0020 e 0.0013. Por outro lado, as parametrizações para a superfície ilustrada na Figura 2.13(b) apresentam resultados bastante distintos para os peso utilizados, combinatório (2.14(b)), inverso da aresta (2.14(d)) e inverso da área (2.14(f)), devido a definição de cada peso e, portanto, de suas propriedades.

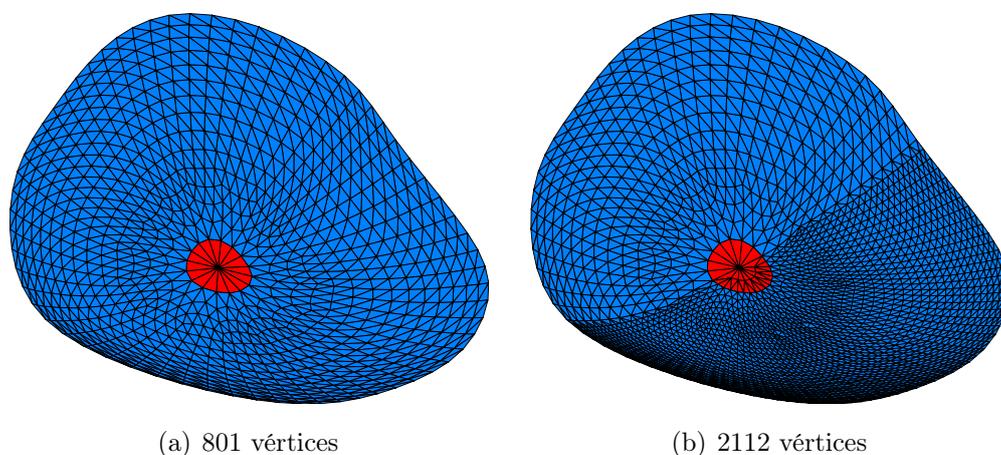
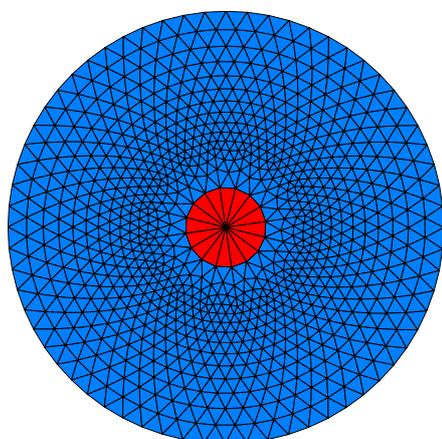


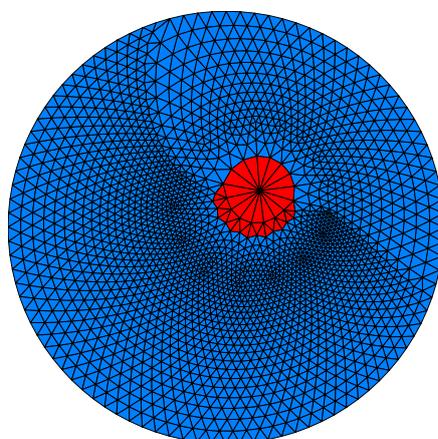
Figura 2.13: As superfícies ilustradas foram obtidas a partir do cogumelo ilustrado na Figura 2.11. A Figura da esquerda ilustra uma superfície que contém 801 vértices, sendo 64 vértices de fronteira. A Figura da direita ilustra uma superfície obtida por subdivisão da superfície à esquerda que contém 2112 vértices sendo 96 vértices de fronteira.

Um possível agravante para a distorção da malha da superfície subdividida (Figura 2.13(b)) é a poligonal convexa cuja fronteira da superfície será fixada. Observe que a fronteira possui aproximadamente o mesmo comprimento para as duas metades da superfície (parte mais densa e menos densa de vértices), porém o número de vértices da fronteira da metade mais densa é praticamente o dobro. Mas, a fixação dos vértices no círculo unitário não levou em consideração a geometria da fronteira, isto é, para a construção da poligonal convexa levamos em consideração apenas a topologia da fronteira (número de vértices e sua conectividade) e não levamos em consideração a geometria da fronteira (distância entre os vértices da fronteira, comprimento total da fronteira, etc...).

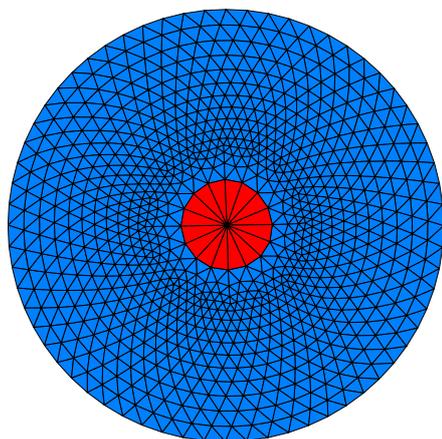
Nos resultados ilustrados na Figura 2.15 tomamos uma medida simples para observar a sensibilidade do algoritmo de parametrização à poligonal convexa definida para fixar a parametrização da fronteira. Neste caso, a poligonal convexa foi construída de tal forma que mantemos a razão 1 (um) entre os comprimentos da fronteira das partes mais e menos densas.



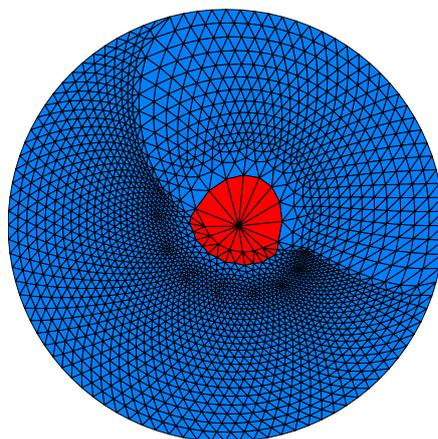
(a) Combinatório



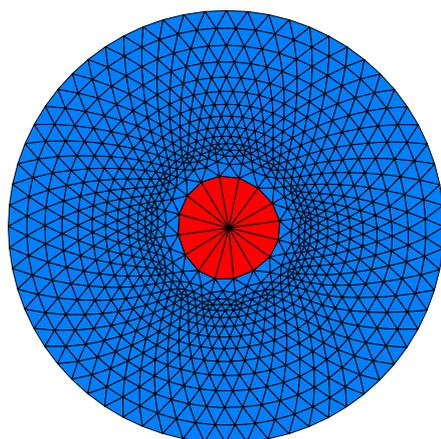
(b) Combinatório



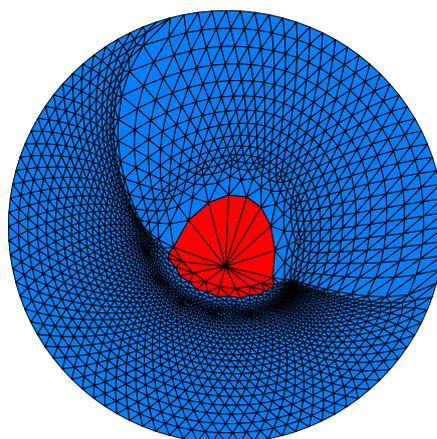
(c) Inverso da aresta



(d) Inverso da aresta



(e) Inverso da área



(f) Inverso da área

Figura 2.14: Parametrizações planares das superfícies ilustradas na Figura 2.13 obtidas com o algoritmo iterativo. Na primeira linha as parametrizações obtidas com o peso combinatório, na linha do meio as parametrizações com o peso inverso da aresta e na terceira linha as parametrizações obtidas com o peso inverso da área.

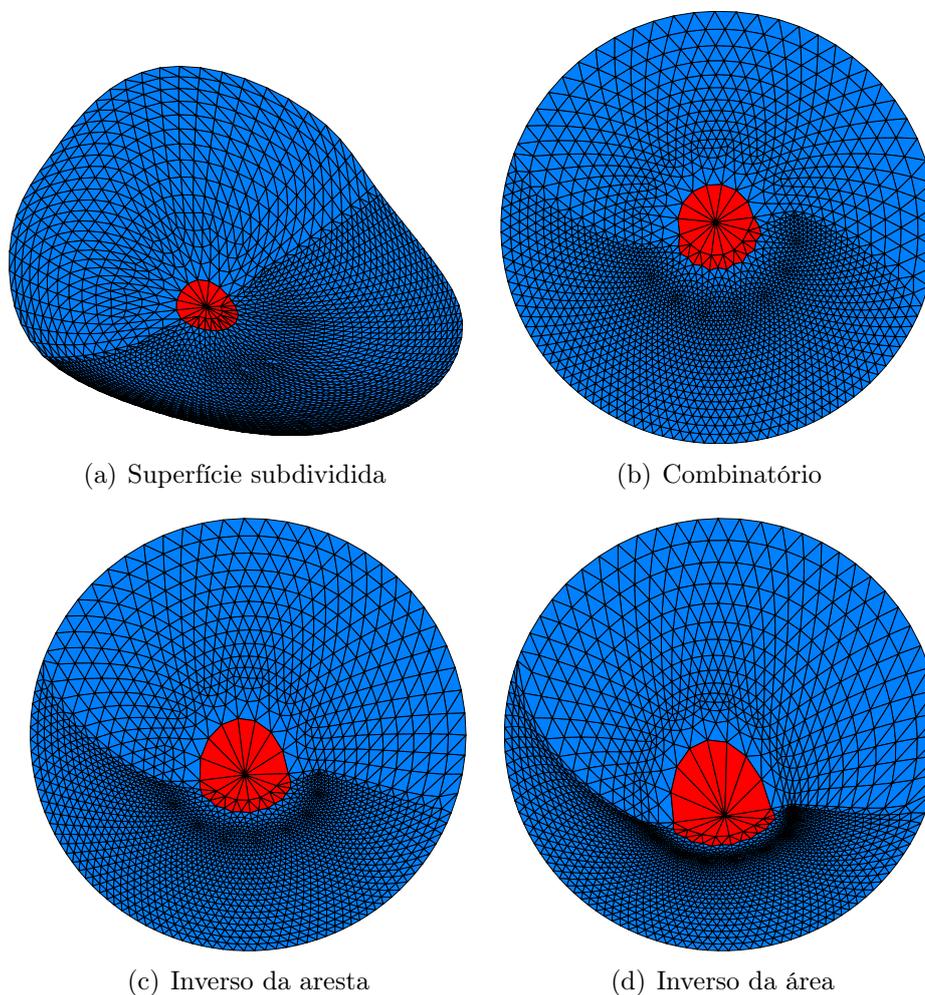


Figura 2.15: A poligonal convexa que define a parametrização dos vértices da fronteira é definida considerando propriedades geométricas da fronteira da superfície. As parametrizações usando os pesos combinatório 2.15(b), inverso da aresta 2.15(c) e inverso da área 2.15(d) obtém resultados com menores distorções quando comparados aos resultados obtidos com a poligonal convexa que considera apenas a topologia da fronteira (Figura 2.14).

Os resultados obtidos mostram a dependência do algoritmo à poligonal convexa fixada na imersão dos vértices da fronteira. Neste mesmo contexto, também podemos observar que a sensibilidade de vértices distantes da fronteira a poligonal fixada não foi tão grande assim, como ilustrado na Figura 2.16. Alguns triângulos da malha (2.16(a)) definidos a partir de vértices distantes da fronteira são destacados e podemos observar que, exceto por uma rotação da parametrização, pouco podemos diferenciar nas parametrizações

destes triângulos quando comparamos os resultados obtidos usando a poligonal convexa que considera apenas a topologia da fronteira da superfície e a poligonal convexa que também considerou a geometria da fronteira (Figuras 2.16(b), 2.16(c) e 2.16(d)).

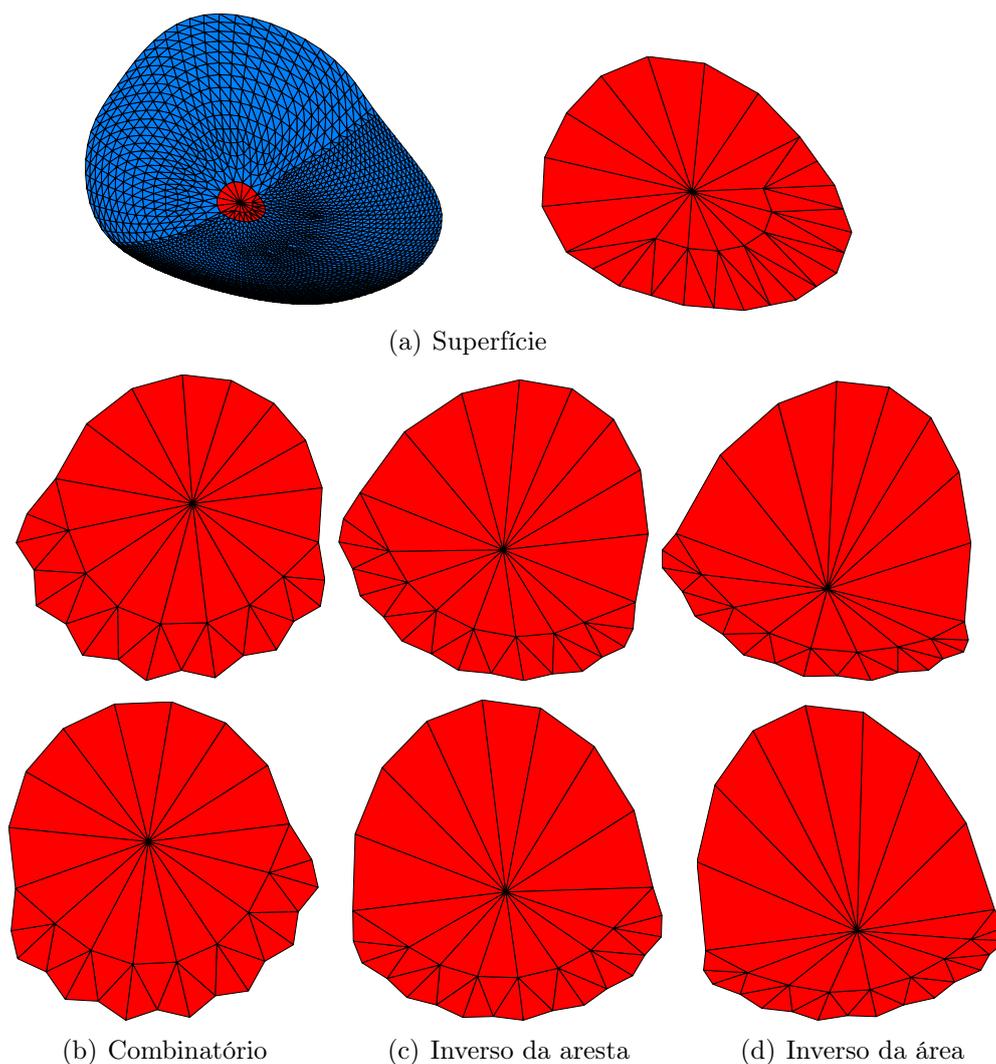


Figura 2.16: No topo, uma região central da superfície é destacada. Da esquerda para a direita, parametrizações obtidas com os pesos combinatório, inverso da aresta e inverso da área; usando na segunda linha a poligonal convexa que considera apenas a topologia da fronteira da superfície e na terceira linha a poligonal convexa que também considerou a geometria da fronteira da superfície.

Exemplo 3: Coelho e “convexidade” da fronteira.

A superfície que estudamos nesse exemplo possui 468 vértices, dos quais, 383 são interiores e 85 são de fronteira. A superfície é ilustrada na Figura 2.17. Neste exemplo destacamos que devido a poligonal convexa fixada no nosso algoritmo, definida a partir do círculo unitário e do número de vértices de fronteira, a parametrização planar pode obter resultados com grandes distorções de malha.

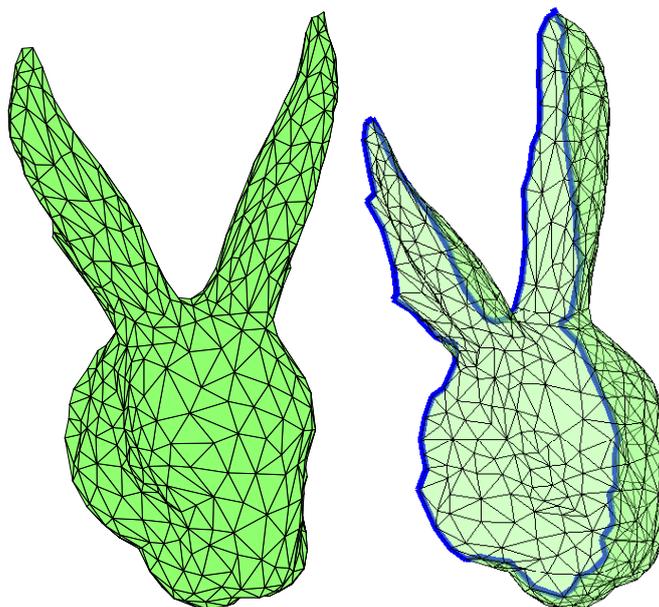


Figura 2.17: A superfície modela a cabeça do coelho e possui 468 vértices. A fronteira desta superfície possui 85 vértices e é fixada numa poligonal convexa sem considerar a geometria desta curva.

A geometria da superfície utilizada nesse exemplo apresenta uma característica bem particular não encontrada nos exemplos abordados anteriormente. Pode-se encontrar um par de vértices da fronteira x_i e x_j tais que $\|x_i - x_j\|$ é muito menor que as somas dos comprimentos das arestas que os conectam em ambos os sentidos. As parametrizações desta superfície no polígono limitado pela poligonal convexa são ilustradas na Figura 2.18. Quando parametrizada numa forma convexa no plano, uma grande deformação em algumas arestas pode ser observadas.

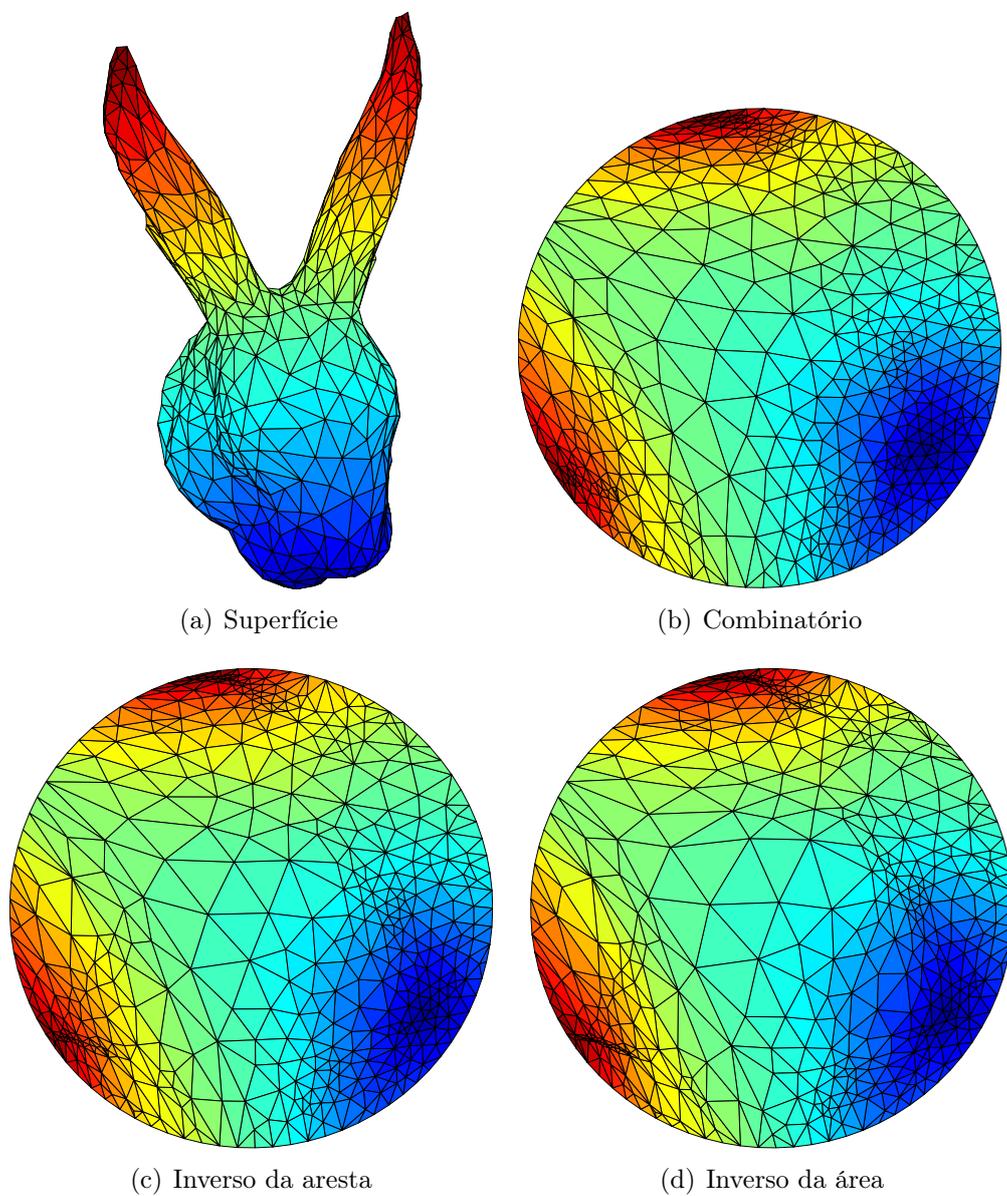


Figura 2.18: A fronteira desta superfície possui 85 vértices e é fixada numa poligonal convexa sem considerar a geometria desta fronteira. A distorção do modelo na parametrização pode ser observada nos resultados obtidos com todos os pesos combinatório 2.18(b), inverso da aresta 2.18(c) e inverso da área 2.18(d).

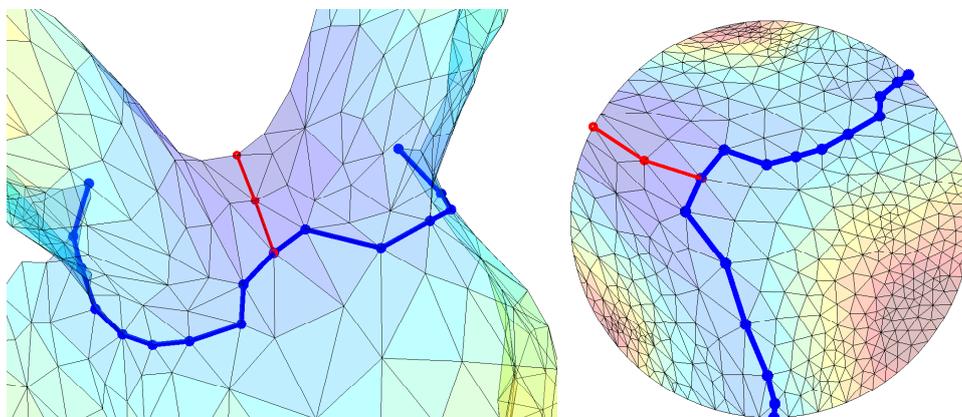


Figura 2.19: O mapa de cores ilustra pontos de fronteira “muito próximos” que são fixados em pontos relativamente distantes na poligonal convexa. A distorção dos triângulos é facilmente visualizada nas parametrizações. Pode-se encontrar um par de vértices da fronteira cuja distância entre eles é muito menor que as somas dos comprimentos das arestas da fronteira que os conectam em ambos os sentidos, horário e anti-horário. Quando a fronteira é imersa na poligonal convexa (círculo unitário), tais vértices que estavam próximos serão posicionados sobre a poligonal a uma distância relativamente muito maior.

Na Figura 2.19 são destacados três vértices da fronteira da superfície. A linha geodésica que liga os pés externos das orelhas do bunny (caminho com 16 vértices) atravessa a parametrização ao meio. Um vértice aproximadamente no meio desse caminho está ligado à fronteira por um caminho com apenas quatro vértices. Dessa forma podemos chegar a um vértice próximo da origem do círculo unitário passando por 10 vértices ou por 3 vértices. Esse caminho por 4 vértices é composto por arestas grandes como pode-se ver facilmente na parametrização.

Como os vértices da fronteira estão distribuídos uniformemente, ou seja, o comprimento das arestas de fronteira não varia muito uma distribuição sobre o círculo por comprimento de aresta provavelmente não diminuiria essa distorção. Talvez uma distribuição com base nos ângulos que os vértices da fronteira formam com o centro de massa da mesma em relação a um determinado vértice pudesse diminuir essa distorção.

Portanto concluímos que uma parametrização planar com fronteira sobre uma forma convexa provavelmente terá grande distorção nessa superfície, visto que identificamos propriedades da superfície que são “incompatíveis” com as propriedades de convexidade.

Poderíamos tentar parametrizar numa elipse com eixo a muito menor

que b o que compensaria vértices ligados por uma longa poligonal sobre a fronteira e geometricamente próximos. Porém ainda teríamos que ligar um vértice dessa poligonal à “geodésica” que os ligam, ou seja, na parametrização ligaríamos um vértice no centro da elipse a um vértice no extremo da elipse no sentido do eixo maior, o que causaria distorção.

A solução para tal problema seria mesmo uma parametrização cuja fronteira não é uma forma convexa com as propriedades identificadas na superfície original.

Exemplo 4: Mão e caminho fechado

Neste exemplo, uma superfície com 1483 vértices interiores e 36 vértices de fronteira será parametrizada. A superfície é ilustrada na Figura 2.20, onde também visualizamos a fronteira desta superfície. Dado qualquer caminho fechado nesta superfície, podemos definir dois subconjuntos de vértices, que serão chamados de vértices interiores e externos do caminho fechado. Ou seja, qualquer caminho fechado dividirá a superfície em duas. Os vértices externos do caminho são aqueles que podemos ligar à fronteira da superfície por caminhos que não contém arestas no caminho fechado. O complementar deste conjunto é o conjunto dos vértices interiores do caminho fechado.

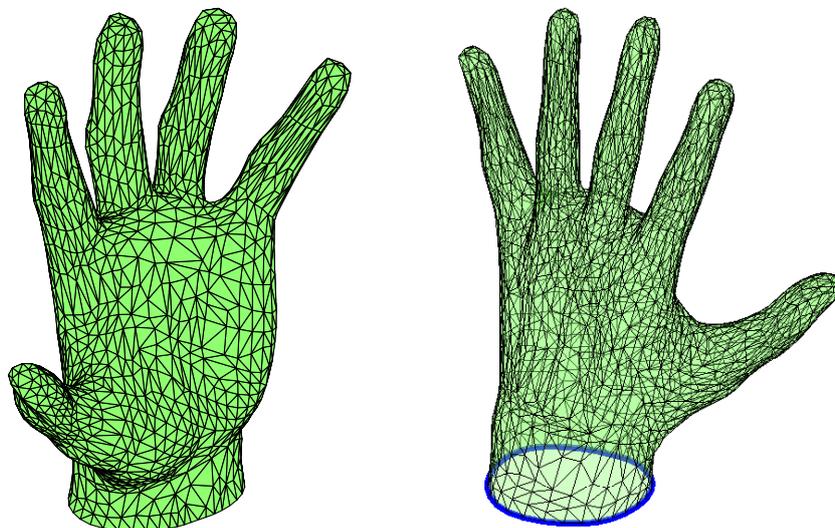


Figura 2.20: A superfície possui 1483 vértices interiores e 36 vértices de fronteira.

A parametrização planar é possível para superfícies com bordos, os quais são imersos numa poligonal convexa com vértices sobre o círculo unitário. A imersão dos vértices interiores é definida a partir desta poligonal e da matriz

de pesos satisfazendo as condições de convexidade (equações 2.4, 2.5 e 2.6). Os resultados obtidos com o algoritmo iterativo são ilustrados na Figura 2.21.

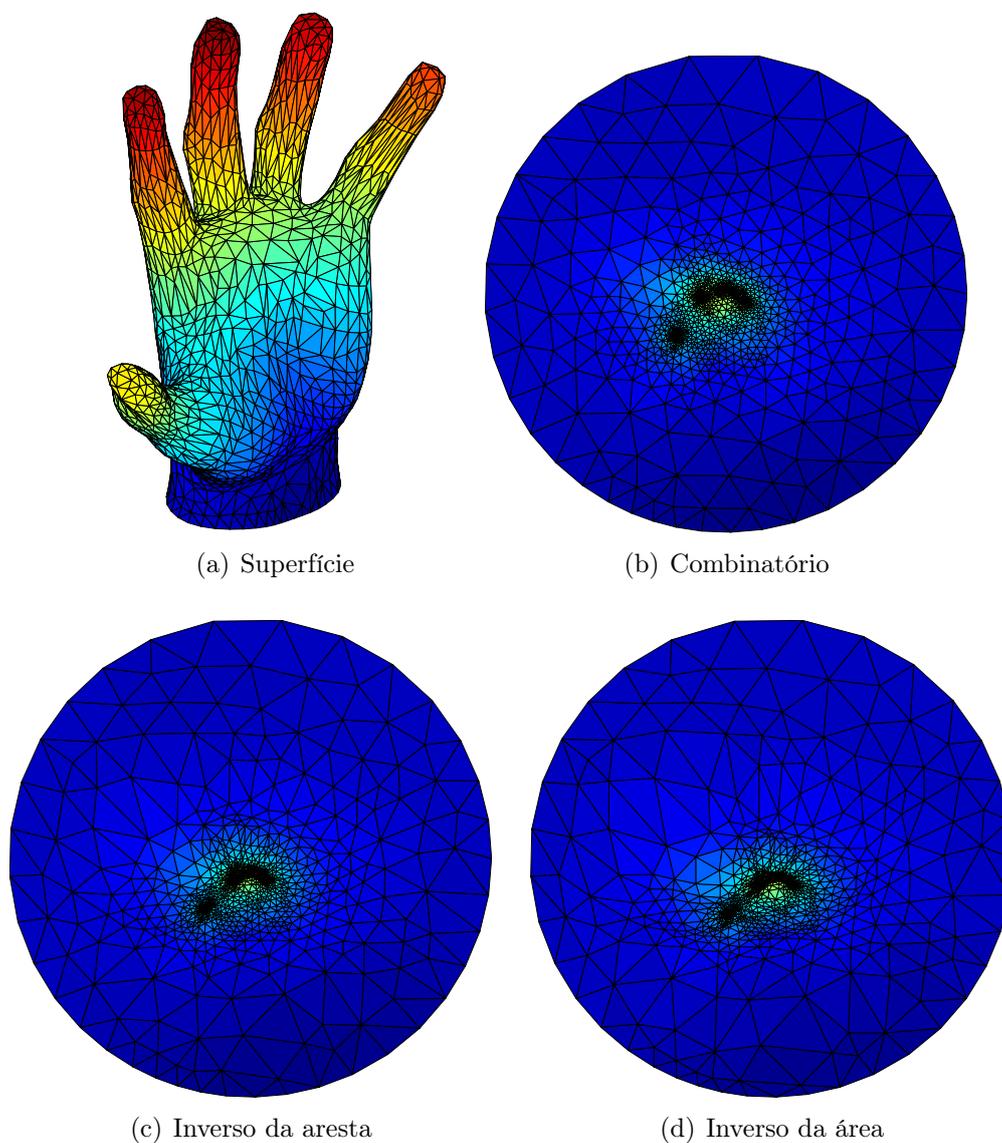


Figura 2.21: Parametrizações planares da superfície ilustrada na Figura 2.20. O algoritmo iterativo convergiu com 8532, 10154 e 10625 passos para os pesos combinatório 2.21(b), inverso da aresta 2.21(c) e inverso da área 2.21(d), respectivamente.

Todos os vértices interiores da superfície são parametrizados no polígono definido pela poligonal convexa (proposição 2.3). Da mesma forma, para

qualquer caminho fechado, os vértices interiores do caminho serão parametrizados no polígono definido pela parametrização dos vértices do caminho. Observe que, intrinsecamente estamos afirmando que cada caminho fechado, define uma poligonal, mas não necessariamente convexa. Podemos observar nos resultados obtidos pela parametrização planar (Figura 2.21), que as regiões onde foram parametrizados os dedos da mão definem 5 regiões de concentração de vértices (por área do círculo unitário). A partir do caminho fechado definido pelos vértices da fronteira, denotado por $C_0 = \partial S$, podemos construir um novo caminho fechado, chamado C_1 , formado por vértices que pertencem ao interior de C_0 . Agora, a partir de C_1 podemos de maneira análoga definir C_2 formado por vértices que pertencem ao interior de C_1 . Desta forma, construímos uma cadeia de caminhos fechados, onde $C_n \subset C_{n-1} \subset \dots \subset C_2 \subset C_1 \subset C_0 = \partial S$.

Podemos ainda definir estes caminhos de tal forma que C_n divide a superfície exatamente na base de um dos dedos. Consequentemente, os vértices deste dedo são vértices internos de C_n e, portanto, serão parametrizados no polígono formado pelos vértices da parametrização de C_n . A Figura 2.22 ilustra as parametrizações dos caminhos formados pelos caminhos fechados das bases dos dedos da superfície para cada peso e as imagens ampliadas dos dedos indicador e médio da mão.

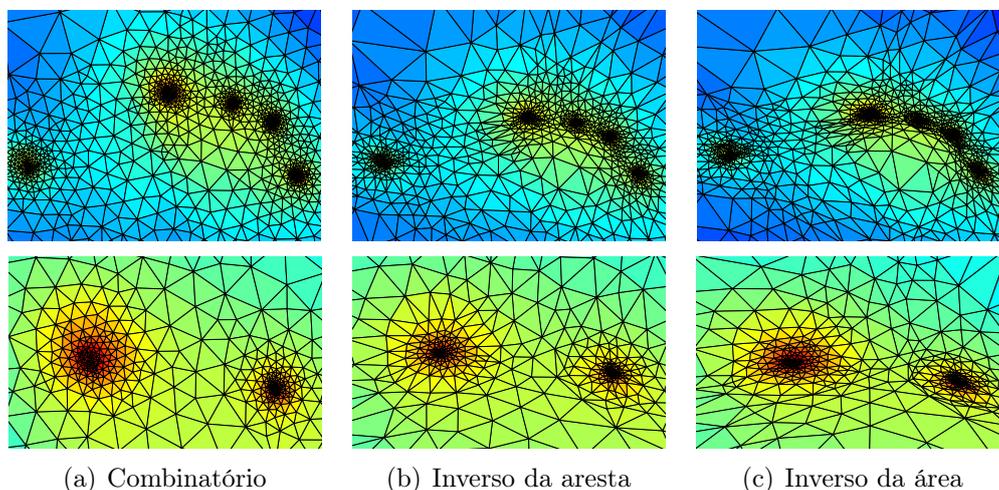


Figura 2.22: A superfície e o mapa de cores facilitam a interpretação das regiões de parametrização dos dedos da mão. As superfícies ilustradas nas Figuras 2.22(a), 2.22(b) e 2.22(c) são obtidas ampliando as parametrizações obtidas com os pesos combinatório, inverso da aresta e inverso da área, respectivamente, mostrando as regiões dos dedos indicador e médio da mão.

Exemplo 5: Face e condições de convexidade.

Voltamos à superfície utilizada na seção onde introduzimos os algoritmos de parametrização de superfície para estudar as condições de convexidade (equações (2.4), (2.5) e (2.6)). Inicialmente comparamos as parametrizações determinadas pelos pesos geométricos, inverso da aresta e inverso da área com a parametrização obtida com o peso combinatório.

A Figura 2.23 ilustra as parametrizações obtidas com o algoritmo iterativo usando $tol = 1e - 5$ como o parâmetro de convergência. A poligonal convexa usada na parametrização da fronteira da superfície possui 104 vértices e foi determinada a partir da topologia da fronteira da superfície.

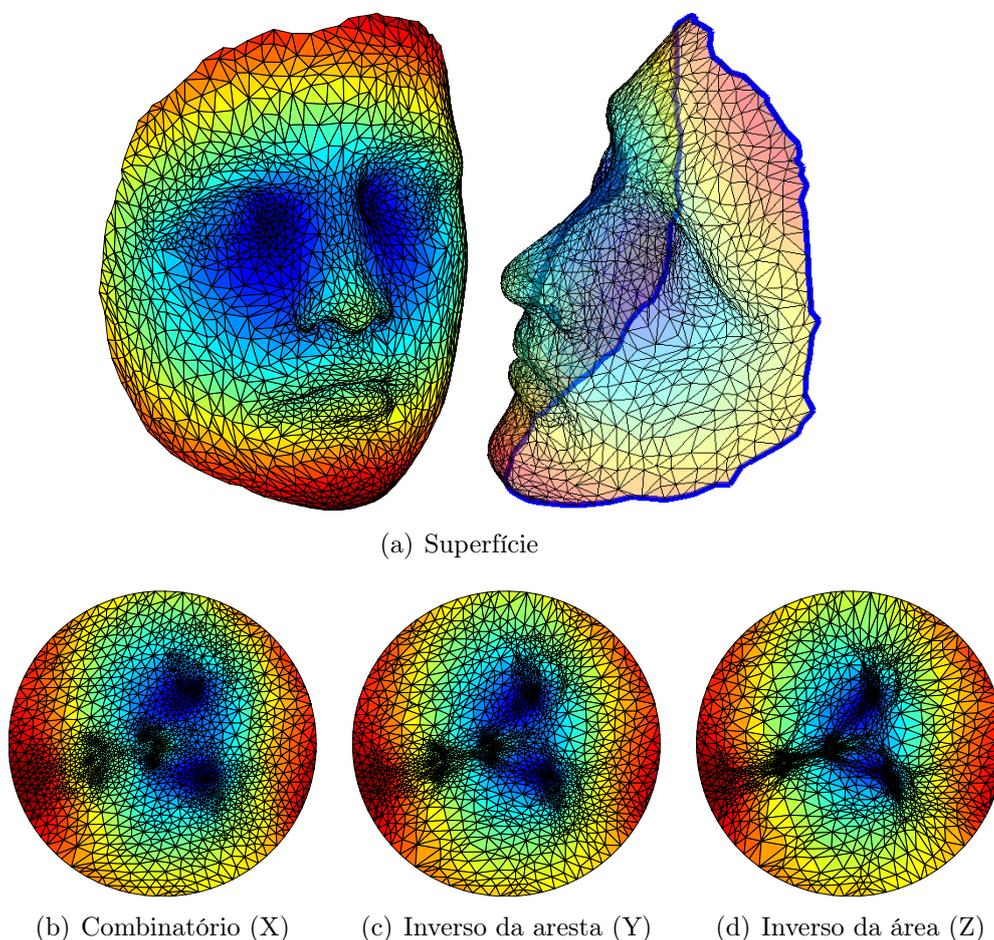


Figura 2.23: A superfície 2.23(a) possui 1858 vértices, sendo 104 vértices de fronteira 2.23(a). O algoritmo iterativo ($tol = 1e - 05$) convergiu com 3562, 5223 e 7520 iterações para os pesos combinatório (2.23(b)), inverso da aresta (2.23(c)) e inverso da área (2.23(d)), respectivamente.

Os resultados ilustrados na Figura 2.23 foram obtidos com 8532, 10154 e 10625 iterações para os pesos combinatório (Figura 2.23(b)), inverso da aresta (Figura 2.23(c)) e inverso da área (Figura 2.23(d)), respectivamente.

Pelo mesmo motivo exposto no exemplo anterior, note que as regiões com concentrações de vértices na face como, por exemplo, olhos, nariz e boca, se refletem nas parametrizações, inclusive na combinatória (Figura 2.23(b)). Essa concentração, é reflexo da metodologia adotada e pode ser compreendida a partir de caminhos fechados na superfície original. Os pesos inverso da aresta e inverso da área, por sua natureza geométrica, destacam ainda mais as regiões dos olhos, nariz e boca das demais regiões da superfície nas parametrizações planares obtidas.

Os pesos apresentados até aqui satisfazem as condições de convexidade.

(adjacência) $(i, j) \notin E \rightarrow \lambda_{i,j} = 0$

(positividade) $(i, j) \in E \rightarrow \lambda_{i,j} > 0$

(soma unitária) $\sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} = 1$

Estas condições garantem a existência e unicidade de uma parametrização planar para uma superfície triangular.

Outro peso encontrado na literatura satisfazendo às condições de convexidade utiliza ângulos dos triângulos da superfície triangular. Dado um par de vértices v_i e v_j , a partir dos triângulos adjacentes à aresta $e_{ij} = (i, j)$ defina os ângulos θ_{ij}^1 e θ_{ij}^2 como sendo os ângulos incidentes na aresta e_{ij} e no vértice i . Os ângulos θ_{ij}^1 e θ_{ij}^2 são ilustrados na Figura 2.24.

O peso dado por

$$w_{ij} = \frac{\tan(\theta_{ij}^1/2) + \tan(\theta_{ij}^2/2)}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|} \quad (2.15)$$

é chamado *valor médio* [9] e satisfaz a condição de positividade (equação (2.5)), pois o peso pode ser reescrito como

$$w_{ij} = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|} \frac{\text{sen}((\theta_{ij}^1 + \theta_{ij}^2)/2)}{\cos(\theta_{ij}^1/2)\cos(\theta_{ij}^2/2)}$$

e

$$\theta_{ij}^1 < \pi, \theta_{ij}^2 < \pi \Rightarrow \frac{\theta_{ij}^1 + \theta_{ij}^2}{2} < \pi,$$

a condição de adjacência (equação (2.4)) e, após a normalização, a condição soma unitária (equação (2.6)).

O resultado obtido com o algoritmo iterativo usando o peso valor médio é ilustrado na Figura 2.24. Podemos observar que geometricamente os vértices da parametrização definem regiões mais densas de maneira muito semelhante ao peso inverso da área.

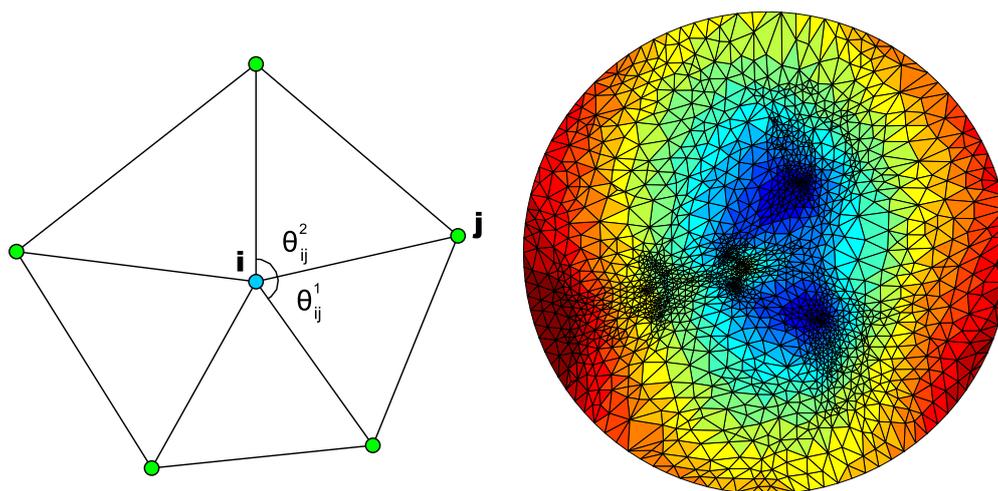


Figura 2.24: Dado um par de vértices i e j , a partir dos triângulos incidentes à aresta $e_{ij} = (i, j)$ e ao vértice i , os ângulos θ_{ij}^1 e θ_{ij}^2 definem o peso valor médio (equação (2.15)). A parametrização planar obtida com o peso valor médio é ilustrada na Figura da direita. Tal peso satisfaz às condições de convexidade.

Usamos a superfície ilustrada na Figura 2.23(a) para observar o comportamento do algoritmo quando alguma das condições de convexidade não é satisfeita.

Iniciamos este teste observando o resultado do algoritmo quando a condição de adjacência não é satisfeita. Portanto, temos que definir uma matriz de pesos M de tal forma que alguma entrada M_{ij} é não nula, mesmo que $e_{ij} = (i, j)$ não seja uma aresta do grafo da superfície. Usamos para isto a primeira e segunda estrela dos vértices e definimos um peso semelhante à definição do peso combinatório, porém utilizamos a quantidade de nós que estão na primeira e segunda estrela e não mais a valência dos nós. A Figura 2.25 compara os resultados obtidos. À esquerda, ilustramos novamente o resultado obtido com todas as condições de convexidade satisfeitas, enquanto à direita, ilustramos o resultado obtido com uma matriz de pesos definidos a partir da segunda estrela de cada vértice. Observamos que as condições de convexidade não foram satisfeitas, porém o resultado obtido pelo algoritmo é uma parametrização planar da superfície.

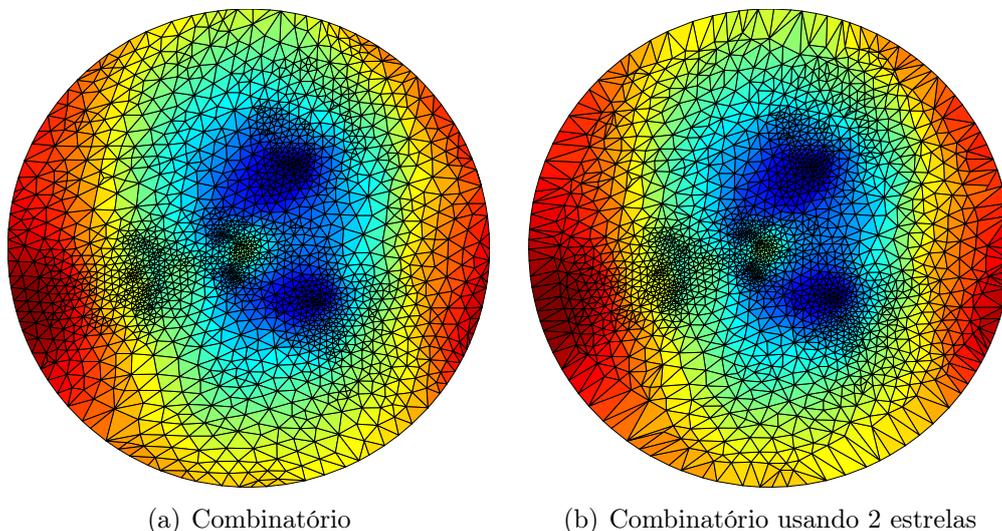


Figura 2.25: A parametrização planar da superfície ilustrada em 2.23(a) usando uma matriz de pesos obtida a partir do peso combinatório que satisfaz as condições de convexidade é ilustrada na Figura 2.25(a). Ao utilizar a primeira e segunda estrelas de cada vértice na definição de uma nova matriz de pesos, o algoritmo iterativo retorna uma nova parametrização, que ainda é válida, mas apresenta as arestas que ligam vértices interiores a vértices da fronteira com comprimentos desproporcionais aos demais comprimentos. O algoritmo usou $tol = 1e - 05$ e convergiu com 3562 e 1539 iterações para os resultados ilustrados respectivamente 2.25(a) e 2.25(b).

As condições de convexidade são necessárias para garantir que o resultado obtido pelo algoritmo de parametrização planar é, de fato, uma parametrização. Embora os resultados ilustrados neste exemplo ainda obtiveram parametrizações válidas, é possível encontrar uma determinada matriz de peso que não satisfaça a todas as condições de convexidade no qual o resultado obtido não é uma parametrização. A Figura 2.26 ilustra o resultado obtido com o algoritmo iterativo utilizando quatro estrelas para o conjunto de vizinhos e o peso combinatório. Observe na região destacada triângulos sobrepostos. Mais ainda, a teoria assegura a existência de tal parametrização apenas para um conjunto de pesos que obedecem às condições de convexidade. Isto é, nem podemos garantir a existência da solução para depois utilizarmos o algoritmo iterativo.

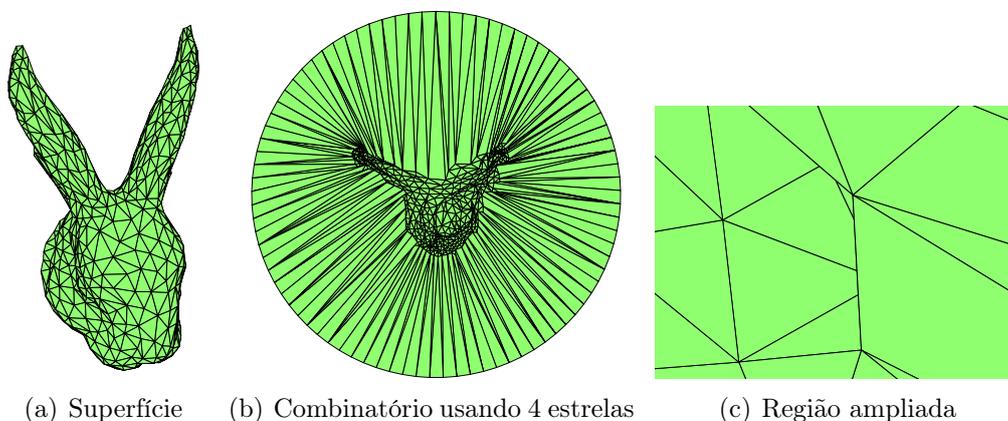


Figura 2.26: Ao utilizar a primeira, segunda, terceira e quarta estrelas de cada vértice na definição de vizinhança, o algoritmo iterativo retorna uma configuração de vértices que não é uma parametrização planar válida, e as arestas que ligam vértices interiores a vértices da fronteira com comprimentos desproporcionais aos demais comprimentos. O algoritmo usou $tol = 1e - 05$ e convergiu com 77 iterações.

No próximo resultado, definimos um peso cuja condição de positividade não é satisfeita e, assim como no teste anterior em a superfície da face e com duas estrelas para vizinhança, o resultado obtido é ainda uma parametrização planar. O peso utilizado é chamado na literatura de *peso cotangente* e também é definido a partir de ângulos dos triângulos adjacentes à aresta $e_{ij} = (i, j)$. A partir dos ângulos α_{ij} e β_{ij} opostos à aresta e_{ij} pertencentes a estes dois triângulos definimos o peso w_{ij} como

$$w_{ij} = \cotg(\alpha_{i,j}) + \cotg(\beta_{i,j}) \quad (2.16)$$

A Figura 2.27 ilustra os ângulos $\alpha_{i,j}$ e $\beta_{i,j}$ para uma determinada aresta e o resultado obtido pelo algoritmo iterativo usando este peso. A condição de positividade não é satisfeita para alguns vértices, fato relacionado a triângulos obtusos na superfície original, e podemos observar que o resultado é ainda válido, apesar de haver uma grande distorção na malha.

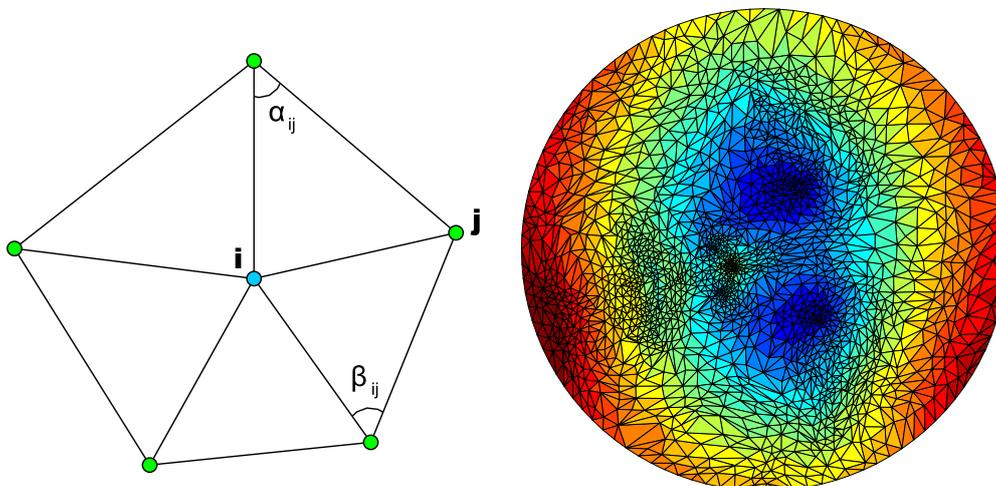


Figura 2.27: Dado um par de vértices i e j , a partir dos triângulos adjacentes à aresta $e_{ij} = (i, j)$, os ângulos α_{ij} e β_{ij} opostos a aresta e_{ij} definem o peso cotangente (equação (2.16)). Uma matriz de pesos é definida utilizando o peso cotangente e, portanto, a condição de positividade não é satisfeita para alguns vértices. Este fato está relacionado à existência de triângulos obtusos na malha. A parametrização planar da superfície usando esta matriz de pesos é ilustrada na figura 2.27 à direita e podemos observar a distorção que o algoritmo iterativo obteve. O resultado é ainda válido, mas podemos observar uma distorção na malha. O algoritmo usou $tol = 1e - 05$ e convergiu com 2391 iterações.

Para que o peso cotangente satisfaça a condição de positividade, os ângulos usados na definição deste peso devem satisfazer $\alpha_{ij} + \beta_{ij} < \pi$, pois

$$w_{ij} = \cotg(\alpha_{ij}) + \cotg(\beta_{ij}) = \frac{\text{sen}(\alpha_{ij} + \beta_{ij})}{\text{sen}(\alpha_{ij})\text{sen}(\beta_{ij})}.$$

Por último, iremos observar o comportamento do algoritmo em função da ausência da condição soma unitária. Para isto, utilizamos um peso definido de maneira análoga ao peso inverso da aresta, porém, sem dividir cada linha da matriz pela soma de suas respectivas entradas, isto é, não satisfazendo a condição soma unitária. O algoritmo iterativo tenta obter uma parametrização planar para a superfície, mas podemos observar a divergência do algoritmo ao não satisfazer a condição soma unitária (Figura 2.28).

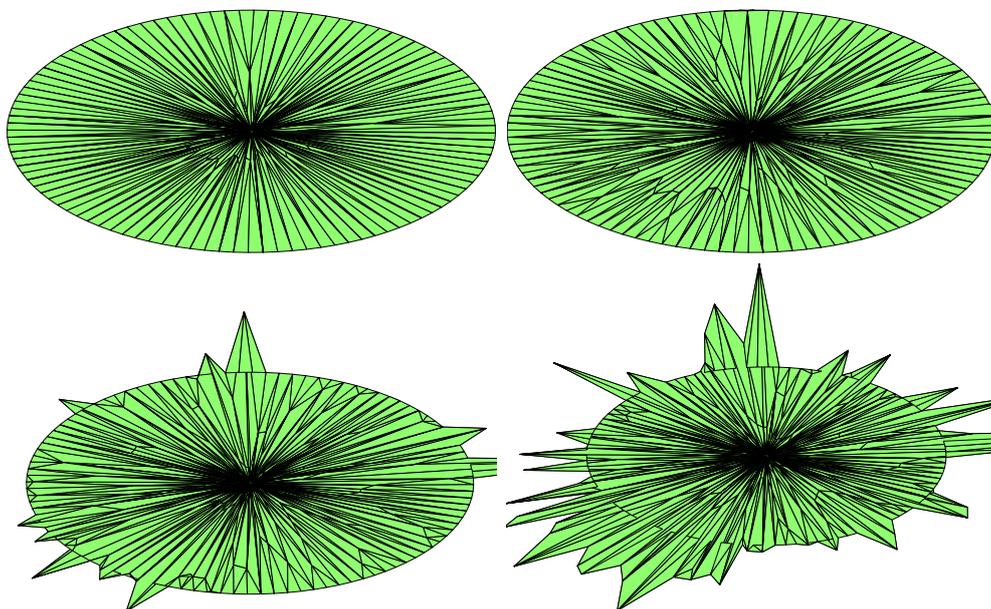


Figura 2.28: O algoritmo iterativo usando uma matriz de pesos obtida a partir do peso inverso da aresta, porém, sem dividir cada linha da matriz pela soma de suas respectivas entradas e, conseqüentemente, não satisfazendo a condição soma unitária; tenta obter uma parametrização planar para a superfície ilustrada em 2.23(a). Alguns passos do algoritmo iterativo são ilustrados, onde podemos observar a divergência.

Capítulo 3

Parametrização Esférica

3.1 Introdução

A parametrização planar é a forma mais natural para mapeamento de textura. Porém, em outras aplicações, tais como manipulação [1, 23] e amostragem [22, 17] torna-se necessário parametrização em domínios que permitem reduzir significativamente a distorção entre a superfície original e a parametrização. Neste sentido, alguns trabalhos usam a esfera [1, 11, 17], o toro [12] ou outro domínio [26] como representante da classe de superfícies topologicamente equivalentes.

Neste capítulo, falaremos de parametrização de superfícies que são topologicamente equivalente à esfera. Isto é, buscaremos mostrar que existe solução para o problema de obter uma função injetora entre os vértices de uma superfície triangular fechada (sem bordo) e a esfera, de tal forma que a triangulação com vértices na esfera induzida pela triangulação da superfície não tenha sobreposição. A triangulação assim definida na esfera é chamada de *parametrização esférica*.

3.2 Usando Parametrização Planar

Quando o domínio da parametrização é a esfera uma metodologia natural de parametrizar uma superfície fechada na esfera é reduzir o problema para o caso planar. Esta seção apresenta duas maneiras de reduzir parametrização esférica ao caso planar. A primeira usa um dos triângulos como fronteira. A segunda, um pouco menos imediata, subdivide a malha em duas partes conexas aproximadamente iguais, também com uma fronteira comum.

Triângulo como Fronteira.

Dada uma superfície fechada, a remoção de um triângulo dessa superfície define uma superfície com fronteira dada exatamente pelos três vértices do triângulo removido. Daí, podemos obter uma parametrização planar para a superfície com fronteira utilizando um dos algoritmos descritos no capítulo 2.

A parametrização planar obtida tem como domínio o polígono convexo limitado pela poligonal convexa definida a partir dos três vértices de fronteira. Ou seja, todos os vértices da parametrização estão dentro de um triângulo no plano. O principal problema com esta abordagem é que sendo o domínio desta parametrização planar um triângulo, todos os vértices interiores da superfície serão parametrizados numa região central do triângulo, levando a uma grande distorção da superfície.

Finalmente, para obter uma parametrização esférica, usamos o inverso da projeção estereográfica para mapear o domínio planar na esfera [14]. A projeção estereográfica é uma função bijetora entre a esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, a exceção de um ponto $p \in S^2$, e um plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$.

$$\mathbf{p} : S^2 - \{p\} \rightarrow \Pi$$

Daí, todo vértice u_i da parametrização planar da superfície com fronteira pode ser projetado na esfera usando a inversa da projeção estereográfica, $v_i = \mathbf{p}^{-1}(u_i)$. Logo, todos os vértices da superfície fechada são imersos na esfera. Além disso, podemos assumir que a projeção do ponto excluído da esfera para definir a projeção estereográfica pertence ao triângulo excluído da superfície fechada para obter a parametrização planar e, conseqüentemente, o conjunto de vértices $\{v_i\} \subset S^2$ com a topologia induzida pela conectividade da superfície fechada define então uma parametrização esférica desta superfície. De fato, se houvesse sobreposição de triângulos, então a projeção levaria dois pontos distintos no plano em um único ponto na esfera.

A Figura 3.1 ilustra o resultado da parametrização esférica utilizando a parametrização planar e a projeção estereográfica. A superfície possui 502 vértices e uma fronteira é criada na superfície fechada a partir da remoção de um triângulo da malha 3.1(a). A partir daí, podemos utilizar a parametrização planar com pesos combinatório 3.1(b) para obter a parametrização esférica 3.1(c) usando a projeção estereográfica.

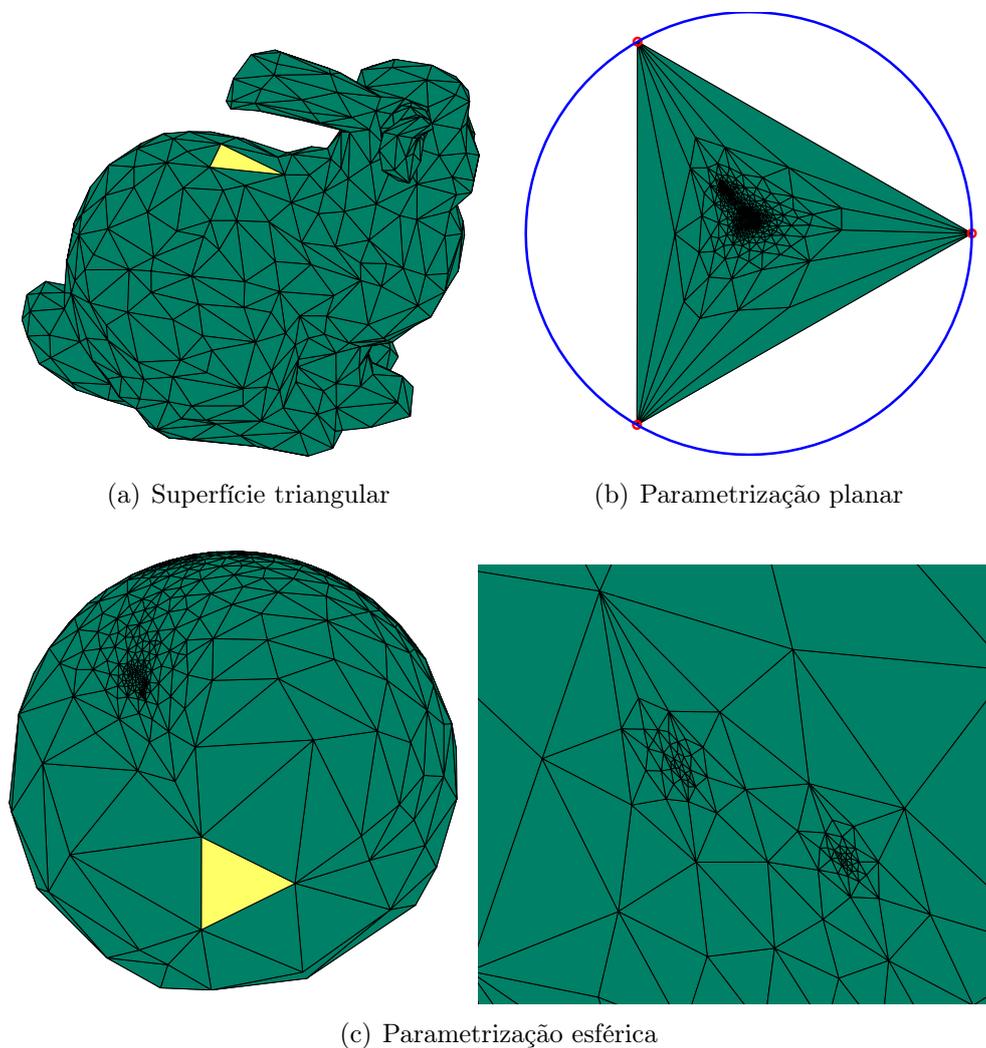


Figura 3.1: Uma metodologia para obter uma parametrização esférica de uma superfície fechada é dada pela remoção de um triângulo (face) da superfície fechada 3.1(a) e a aplicação da parametrização planar na superfície com fronteira resultante 3.1(b). Para obter uma parametrização esférica 3.1(c), usamos a projeção estereográfica nos vértices da parametrização planar e induzimos a topologia da superfície fechada.

Cabe ressaltar que esse método depende das propriedades da projeção estereográfica que é conforme no caso contínuo, mas não preserva ângulos no caso discreto [11]. Outro problema é que a parametrização planar fixa os pontos da fronteira, que nesse caso é formada por apenas três vértices do triângulo removido, sobre o círculo unitário e posiciona os demais vértices no

interior do círculo. Assim, pelas propriedades da projeção estereográfica, a parametrização esférica estará toda contida em um único hemisfério. Para contornar esse problema, escalonamos a parametrização planar de modo que aproximadamente metade dos vértices estejam no interior do círculo unitário e metade fora. Esse processo é feito definindo-se um vetor com as normas de todos os vértices, ordenando-o e multiplicando-se os vetores originais pelo valor inverso da coordenada $[\frac{n+1}{2}]$. Isso faz com que a projeção estereográfica inversa reparametrize aproximadamente metade dos vértices em cada hemisfério. A Figura 3.2 ilustra a diferença entre as parametrizações esféricas obtidas com a projeção estereográfica com e sem o escalonamento.

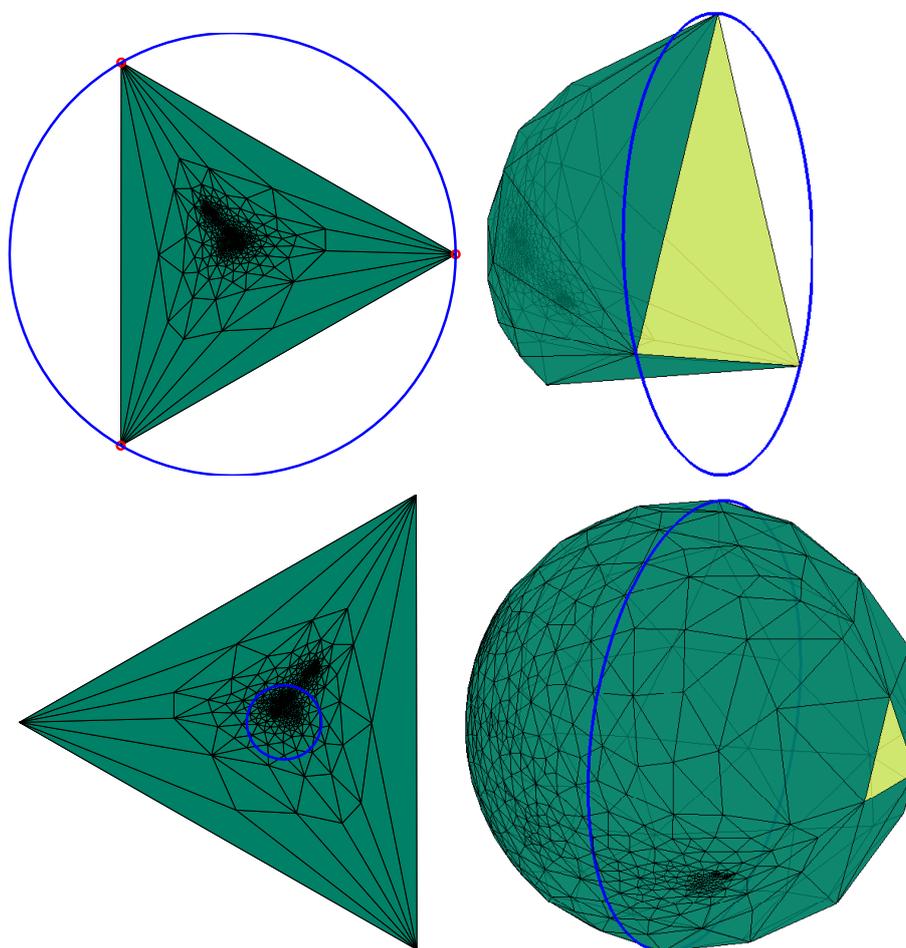


Figura 3.2: As propriedades da projeção estereográfica determinam o resultado final da parametrização esférica. Na parte superior, como todos os vértices da parametrização planar estão no disco unitário, a projeção estereográfica projeta todos os vértices num hemisfério.

Com esta abordagem de remover apenas um triângulo da superfície fechada obtemos uma parametrização planar válida e, com o uso da projeção estereográfica que é uma bijeção entre o plano e a esfera sem um ponto, obtemos uma parametrização esférica. No entanto, observamos uma grande distorção.

Poligonal como Fronteira.

Outra abordagem para parametrizar uma superfície topologicamente equivalente à esfera fazendo uso da parametrização planar consiste em observar que podemos dividir a esfera em dois hemisféricos H_1 e H_2 . Cada hemisférico é facilmente projetado por uma projeção estereográfica no disco unitário, onde em cada caso escolhemos adequadamente um polo da esfera com o ponto a ser excluído da mesma na projeção. Chamamos de p_1 e p_2 as projeções estereográfica que projetam respectivamente os hemisféricos H_1 e H_2 no disco unitário. Portanto, se dividimos uma superfície fechada em duas superfícies S_1 e S_2 com a mesma fronteira, então podemos parametrizar cada uma no disco unitário e obtermos uma parametrização esférica a partir da união das projeções estereográficas das duas parametrizações planares.

Esta abordagem pode então ser definida a partir da definição da fronteira em comum das duas superfícies e, é claro, que o resultado desta abordagem depende da escolha desta fronteira. Porém, uma boa escolha da superfície pode resultar em uma parametrização esférica com uma distorção significativamente menor do que a da abordagem anterior.

A dificuldade desta abordagem se resume então a dividir a superfície em duas partes aproximadamente iguais por um *caminho mínimo*

$$C_{min} = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_r = v_1\}$$

no sentido que não tenha auto-interseção e que dois quaisquer vértices deste caminho não podem ser ligados por outro caminho na triangulação, menor que ambos os caminhos naturais determinados por C_{min} . Ou seja, com a seguinte propriedade: dados dois vértices v_i e v_j de C_{min} , qualquer outro caminho que liga v_i e v_j na superfície tem mais vértices que os caminhos $\{v_i, \dots, v_j\}$, $\{v_i, v_{i-1}, \dots, v_1 = v_r, \dots, v_{j+1}, v_j\}$.

A Figura 3.3 ilustra a parametrização esférica obtida pela abordagem descrita acima. Na parte superior, ilustramos uma superfície fechada com 502 vértices e duas outras superfícies obtidas pela divisão da superfície fechada por uma poligonal com 37 vértices, à esquerda a superfície possui 266 vértices, enquanto à direita a superfície possui 273 vértices e, ambas, possuem a mesma fronteira. Os resultados da parametrização planar das superfícies

com fronteira são ilustrados abaixo de cada superfície com bordo. A projeção estereográfica de cada parametrização planar num hemisfério determina a parametrização esférica da seguinte maneira: definimos a imersão v_i de cada vértice da superfície fechada x_i a partir da imersão planar u_i e da projeção estereográfica como:

$$v_i = \begin{cases} p_1^{-1}(u_i) & , x_i \in S_1 \\ p_2^{-1}(u_i) & , x_i \in S_2 \\ p_1^{-1} = p_2^{-1}(u_i) & , x_i \in S_1 \cap S_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

e induzimos a topologia (conectividade) da superfície fechada (Figura 3.3(b)).

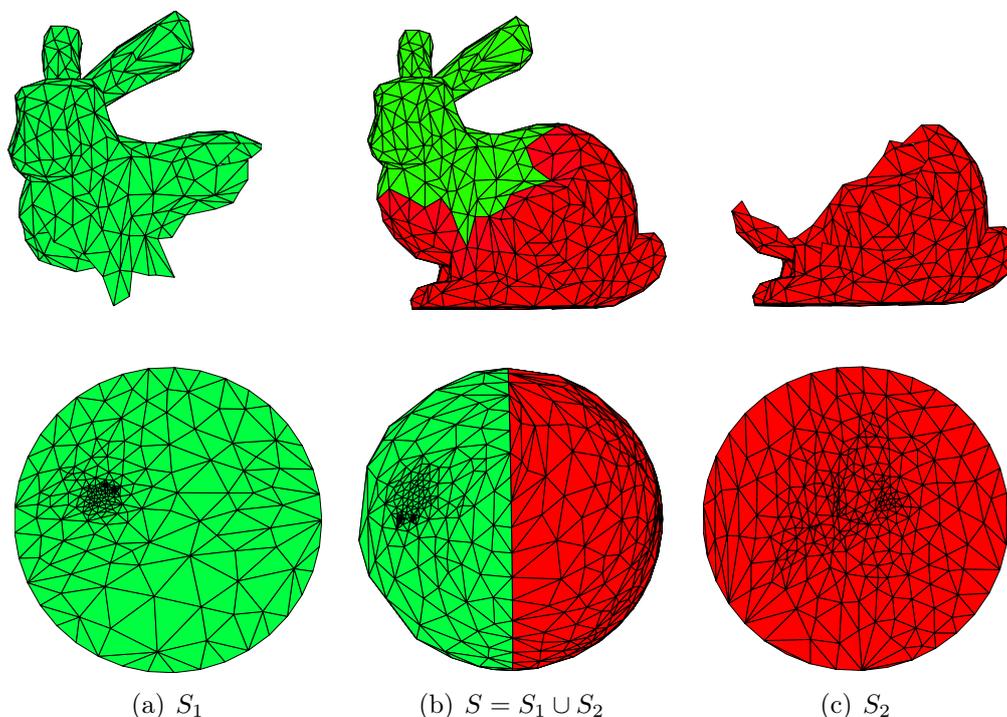


Figura 3.3: Na parte superior, uma superfície fechada é subdividida em duas superfícies com fronteira. Os resultados da parametrização planar das superfícies com fronteira são ilustrados abaixo de cada superfície. A parametrização esférica, ilustrada abaixo e no centro, é obtida a partir da união das projeções estereográficas das parametrizações planares.

Os resultados das duas abordagens de parametrização esférica reduzindo ao caso planar são comparados na Figura 3.4. Ambos resultam em parametrizações válidas. A abordagem que define a fronteira com a remoção de um

triângulo obtém um resultado com uma maior distorção do que a abordagem que define a fronteira como um caminho que divide a superfície em duas superfícies. Porém, a definição do caminho é uma difícil tarefa para a segunda abordagem.

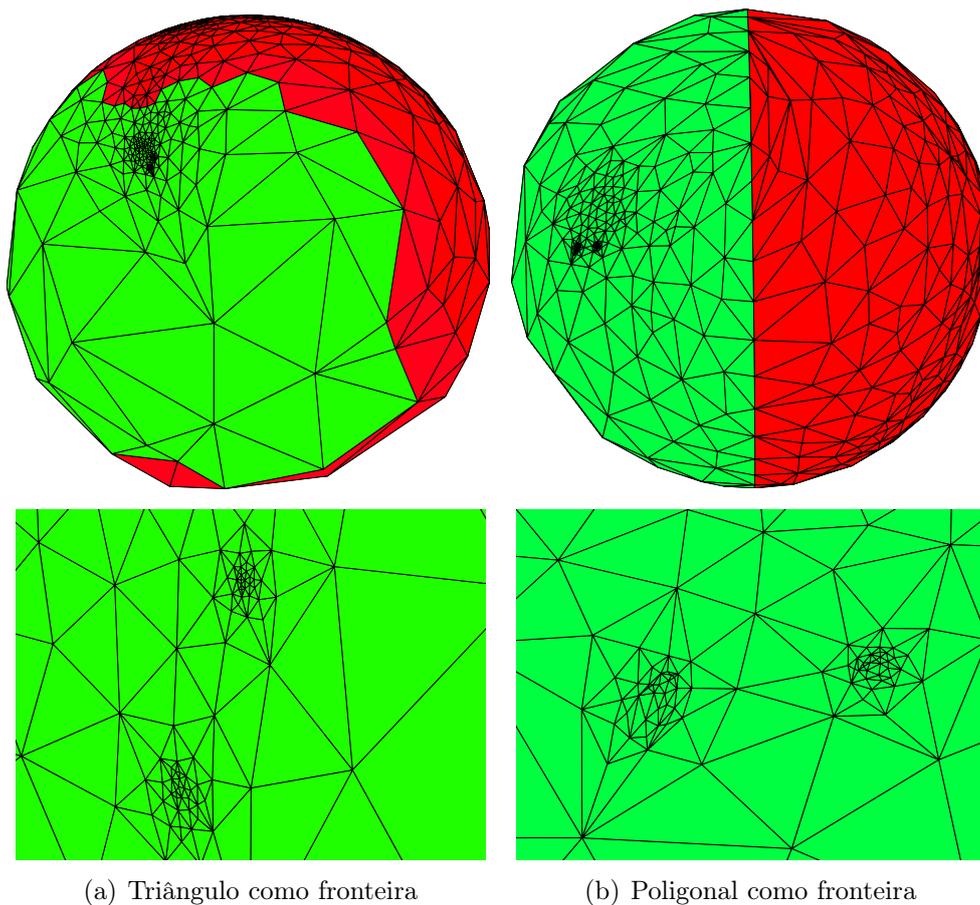


Figura 3.4: Redução da parametrização esférica ao caso planar. À esquerda, ilustramos o resultado obtido utilizando um triângulo como fronteira, enquanto à direita, a fronteira é obtida por um caminho que divide a superfície fechada em duas superfícies com aproximadamente o mesmo número de vértices.

É possível dividir a superfície em mais do que duas partes, parametrizar cada uma no círculo unitário e então reparametrizar na esfera [16]. Neste caso a divisão da superfície em partes aproximadas e a reparametrização na esfera oferecem ainda mais dificuldades.

3.3 Parametrização Direta

A parametrização esférica reduzindo ao caso planar tem a vantagem de obter uma parametrização válida, visto que a metodologia da parametrização planar (seção 2.2) é bem fundamentada. Todavia, há muito a melhorar para que se tenha uma parametrização satisfatória que corresponda à geometria da malha original.

Porém, é mais natural parametrizar uma malha diretamente sobre a esfera sem reduzir ao caso planar. Vários métodos de parametrização direta na esfera foram desenvolvidos. O único até agora que garante uma parametrização esférica válida (sem triângulos sobrepostos) é do Shapiro e Tal [23], similar ao de Das e Goodrich [5]. O método de Shapiro e Tal funciona por simplificação na malha eliminando vértices até restar apenas um tetraedro. O tetraedro é facilmente imerso na esfera, e então os vértices são inseridos um-a-um de volta, de modo que a validade da triangulação é preservada em todo o processo. A metodologia proposta é bastante eficiente, porém, a parametrização não retém propriedades matemáticas da superfície original.

Métodos heurísticos para parametrização esférica foram propostos por Kobbelt e outros [17] e Alexa [1]. Bons resultados são obtidos com este procedimento iterativo mas nenhum estudo de convergência é apresentado e, quando converge, não há garantia de que o resultado apresentado seja de fato uma parametrização esférica da superfície.

Gu e Yau [12] apresentam uma metodologia baseada no operador Laplace-Beltrami (operador laplaciano sobre superfícies) para obter a parametrização de superfície fechada sobre a esfera. Os autores mostraram que a solução da equação

$$L^{\parallel}x = 0 ,$$

onde L^{\parallel} é a componente tangencial do operador laplaciano sobre uma superfície de Riemann, sujeito à restrição

$$\| x \| = 1 ,$$

é uma bijeção entre uma superfície de Riemann e a esfera. Apesar dos resultados apresentados para o caso discreto de superfícies triangulares, Gu e Yau não demonstraram que a discretização da formulação proposta resulta numa parametrização esférica.

Outro método com garantias de parametrização válida foi proposto por Sheffer e outros [25]. Este é um processo não-linear otimizado, trabalhando com os ângulos dos triângulos esféricos, inspirado pelo método de Sheffer e de Sturlesr [28] para parametrização planar. Porém, a necessidade de um procedimento numérico ineficiente tornou o método pouco atrativo.

No que se segue, apresentamos um método direto baseado numa interpretação matemática dos resultados obtidos na teoria de grafos. Portanto, assim como parametrização planar, a parametrização esférica será definida a partir da imersão do grafo dado pela conectividade da malha no domínio da parametrização. Essa teoria faz uso do chamado número de Colin de Verdiere, o qual dá uma descrição precisa de quando um grafo pode ser imerso numa esfera formando uma triangulação esférica válida [4].

Combinação Convexa

Parametrizar uma malha triangular na esfera unitária significa atribuir uma posição na esfera para cada vértice da malha, tal que a malha triangular induzida pela conectividade da malha original não tenha sobreposição.

Para obter uma parametrização com essas características faremos uma extensão da teoria de parametrização planar para a parametrização esférica. Essa transição não é simples, pois passaremos de uma teoria linear para uma não-linear.

Assim como no caso planar, uma superfície triangular fechada S é descrita a partir dos vértices e da conectividade da malha

$$S = S(\mathcal{G}, X)$$

Cabe ressaltar, porém, que o grafo \mathcal{G} definido a partir da malha triangular tem as propriedades de um grafo 3-conectado planar, principal objeto de nossa formulação e fundamentação abaixo.

No caso planar, a matriz $A = I - M$, construída a partir da matriz de adjacência do grafo, possui diagonal unitária e entradas negativas para cada aresta da superfície. Além disso, a soma de cada linha é zero, e portanto, A é singular.

A Generalização da teoria das coordenadas baricêntricas para a imersão esférica não é possível em geral. A solução do sistema $Ax = (I - M)x = b$, pode não existir em geral na esfera (por exemplo, se um vértice tem todos seus vizinhos co-planares isto implica que o vértice está também no mesmo plano). Assim as mesmas técnicas utilizadas para o caso planar não podem ser aplicadas diretamente em parametrizações esféricas.

Por outro lado, a teoria estabelecida sobre triangulações esféricas¹ descreve quando um grafo pode ser imerso na esfera.

¹Uma triangulação esférica é definida como uma triangulação sobre a esfera S^2 , isto é, os vértices da triangulação pertencem a S^2 e as arestas da triangulação são curvas sobre a superfície. Consequentemente, as faces da triangulação são triângulos esféricos.

Teorema 3.1 *Dado um grafo 3-conectado planar, a posição dos vértices formam uma triangulação esférica (i.e. não há triângulos sobrepostos) se, e somente se, cada vértice tem sua posição dada pela projeção esférica de alguma combinação convexa das posições de seus vizinhos.*

A Figura 3.5 ilustra a interpretação geométrica para o teorema 3.1. O ponto M é uma combinação convexa dos vizinhos do ponto V , onde os vetores $\tilde{v} = \overrightarrow{OM}$ e \overrightarrow{OV} são paralelos.

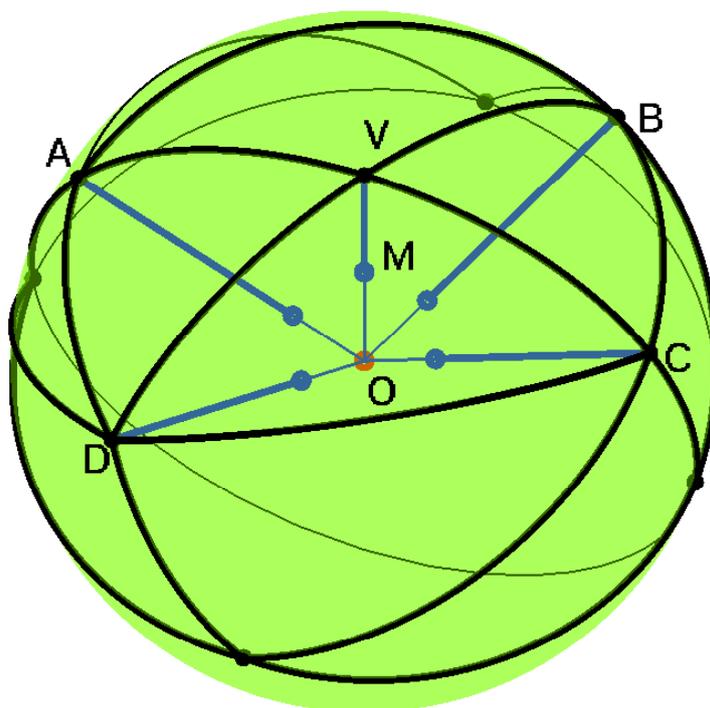


Figura 3.5: O ponto M é uma combinação convexa dos vizinhos A , B , C e D do ponto V . Sendo uma triangulação esférica, os pontos O , M e V são colineares.

Sendo

$$\tilde{v} = \alpha \overrightarrow{v_i}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

Gotsman e outros [11] apresentaram o seguinte sistema quadrático de equações

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \\ \alpha_i x_i - L[i]\mathbf{x} = 0 \\ \alpha_i y_i - L[i]\mathbf{y} = 0 \\ \alpha_i z_i - L[i]\mathbf{z} = 0 \end{cases}, \quad i=1, \dots, n \quad (3.2)$$

onde $L[i]$ é a i -ésima linha de uma matriz definida a partir da adjacência da malha da superfície S e \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} são matrizes colunas que contém todas as variáveis x_i , y_i e z_i , respectivamente.

As equações no sistema 3.2 garante a colinearidade entre a origem, o vértice (x_i, y_i, z_i) e uma combinação convexa de seus vizinhos dados pela conectividade da malha.

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_i &= M[i]\mathbf{x} \text{ (} M \text{ é uma matriz combinação convexa)} \\
&\Downarrow \\
\exists \beta_i \in \mathbb{R}; \beta_i x_i &= \tilde{x}_i \text{ (} \beta_i \in (-1, 1)) \\
&\Downarrow \\
\tilde{x}_i - \beta_i x_i &= 0 \\
&\Downarrow \\
M[i]\mathbf{x} - \beta_i x_i &= 0 \\
&\Downarrow \\
M[i]\mathbf{x} - x_i + x_i - \beta_i x_i &= 0 \\
&\Downarrow \\
-(I[i] - M[i])\mathbf{x} + (1 - \beta_i)x_i &= 0 \\
&\Downarrow \\
\alpha_i x_i - L[i]\mathbf{x} &= 0 \text{ (} \alpha_i \in (0, 2))
\end{aligned}$$

onde $\alpha_i = 1 - \beta_i$ e $L = I - M$. Além de determinar que a solução do sistema está sobre a esfera.

Mostramos a seguir, que a solução do sistema 3.2 (se existir) junto com a conectividade dada pela malha da superfície S determinam uma parametrização esférica de S . A teoria que descrevemos, porém, determina uma parametrização esférica para uma superfície fechada a partir da solução deste sistema, desde que a matriz L seja simétrica.

Em geral, a matriz de pesos M é obtida após normalização das linhas para garantir as condições de convexidade (equações 2.4, 2.5 e 2.6). Contudo, alguns dos pesos apresentados determinam matrizes M simétricas desde que não seja normalizada para obter a condição soma unitária (equação 2.6).

Por outro lado, observe que uma matriz M é simétrica se, e so se, a matriz $L = I - M$ é simétrica, e que normalizar a matriz M corresponde a dividir cada linha i da matriz $L = I - M$ por

$$\gamma_i = \sum_{j \in N(i)}^n L_{ij}$$

Por último, $X = \{x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ é uma solução de

$$\alpha_i x_i - (I[i] - \overline{M}[i])x = 0, \quad \|x\| = 1$$

se, e somente se, $Y = \{x_1, \dots, x_n, \gamma_1 \alpha_1, \dots, \gamma_n \alpha_n\}$ é uma solução de

$$\alpha_i x_i - (D[i] - M[i])x = 0, \quad \|x\| = 1$$

onde $\overline{M} = DM$ com $D = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, pois

$$\alpha_i x_i - (I[i] - \overline{M}[i])x = 0 \Leftrightarrow \alpha_i x_i - (I[i] - \frac{M[i]}{\gamma_i})x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\gamma_i \alpha_i) x_i - (\gamma_i I[i] - M[i])x \Leftrightarrow (\gamma_i \alpha_i) x_i - (D[i] - M[i])x = 0$$

Portanto, a parte de interesse da solução do sistema (3.2) é invariante por normalização. O sistema resultante troca a propriedade de soma unitária em M pela soma zero nas linhas de $D - M$. Em outras palavras, podemos reescrever o sistema (3.2) como

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \\ \alpha_i x_i - L[i]\mathbf{x} = 0 \\ \alpha_i y_i - L[i]\mathbf{y} = 0 \\ \alpha_i z_i - L[i]\mathbf{z} = 0 \end{cases}, \quad i=1, \dots, n \quad (3.3)$$

onde $L = D - M$ e M satisfaz apenas as condições (2.4) e (2.5), não devendo necessariamente satisfazer a condição (2.6).

Teoria de Colin de Verdiere

Em 1990 Colin de Verdiere estabeleceu um invariante algébrico sobre certas famílias de grafos [4]. Dado um grafo $\mathcal{G} = \mathcal{G}(V, E)$ com n vértices, considere a classe $M(\mathcal{G})$ das matrizes simétricas com entradas M_{ij} tais que

$$M_{ij} = \begin{cases} \text{número negativo} & , (i, j) \in E \\ 0 & , (i, j) \notin E \\ \text{qualquer valor} & , i = j \end{cases}$$

Note que $M(\mathcal{G})$ contém o conjunto das matrizes laplacianas simétricas para o grafo \mathcal{G}

$$L_{ij} = \begin{cases} \text{número negativo} & , (i, j) \in E \text{ e } i < j \\ 0 & , (i, j) \notin E \\ -L_{ij} & , (i, j) \in E \text{ e } j < i \\ -\sum_{j \in N(i)} L_{ij} \in \mathbb{R} & , i = j \end{cases},$$

deixando as entradas da diagonal assumir valores arbitrários.

Denote por $\lambda(M) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}\}$ o espectro de M com autovetores associados $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$. Sejam $r = r(\mathcal{G})$ o maior inteiro tal que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r$$

sobre o conjunto $M(\mathcal{G})$ e M uma matriz que alcança este máximo. A multiplicidade algébrica $r(\mathcal{G})$ é chamada o *número de Colin de Verdier* (CdV) de \mathcal{G} , a matriz M a matriz CdV para \mathcal{G} , e os autovalores

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r$$

e os autovetores associados $\{\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\}$ são chamados, respectivamente, de CdV autovalores e CdV autovetores.

O principal resultado da teoria de Colin de Verdier que iremos utilizar é o seguinte

Teorema 3.2 *Um grafo \mathcal{G} é um grafo 3-conectado planar se, e somente se,*

$$r(\mathcal{G}) = 3.$$

O teorema acima mostra que, dada uma matriz laplaciana simétrica L , se o sistema (3.2) tem solução, então resolvê-lo é equivalente a gerar uma matriz de CdV para o grafo \mathcal{G} .

De fato, seja L um laplaciano simétrico para \mathcal{G} e

$$(x, y, z, \alpha)$$

uma solução para o sistema (3.2). Isto significa que a i -ésima linha $L[i]$ de L satisfaz $L[i](x, y, z) = \alpha_i(x_i, y_i, z_i)$. Defina a matriz M como:

$$M_{ij} = \begin{cases} L_{ij} & i \neq j \\ L_{ij} - \alpha_i & i = j \end{cases}$$

obtendo $M(x, y, z) = 0$, isto é, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$ e $\xi_3 = z$ são autovetores de M associados aos autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Portanto, M é uma matriz CdV para \mathcal{G} com CdV autovalores nulos e CdV autovetores x , y e z .

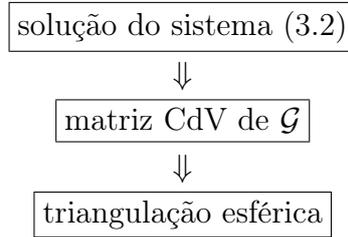
Uma importante extensão da teoria de Colin de Verdier [20] mostra que

Teorema 3.3 *Os autovetores CdV ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 de uma matriz CdV do grafo 3-conectado planar \mathcal{G} , se usados como coordenadas, determinam uma geometria no \mathbb{R}^3 que descreve um poliedro convexo.*

O poliedro convexo descrito no teorema acima contém a origem. Isto implica que a projeção do poliedro (vértices, aresta e faces) na esfera determina uma triangulação esférica.

Logo, a solução do sistema (3.2) define um conjunto de vértices sobre a esfera e a topologia induzida pela conectividade da malha da superfície define um poliedro convexo, o qual induz uma triangulação esférica.

Até aqui mostramos que, dado uma superfície fechada $S = S(\mathcal{G}, X)$, o grafo definido pela conectividade da malha é um grafo 3-conectado planar, e



Ou seja, a teoria de Colin de Verdier garante uma triangulação esférica da superfície S desde que o sistema (3.2) tenha solução.

Por outro lado, suponha que temos uma triangulação esférica dada pelas matrizes coordenadas x , y e z de um grafo 3-conectado planar \mathcal{G} . Consequentemente, pelo teorema (3.2), a multiplicidade do grafo é $r(\mathcal{G}) = 3$. Contudo, determinar uma matriz de Colin de Verdier para o grafo \mathcal{G} não é uma tarefa simples. Determinar uma matriz CdV para o grafo \mathcal{G} apropriada, isto é, com autovetores x , y e z é uma tarefa bastante laboriosa, ainda mais se exigirmos que tal matriz seja laplaciana (sistema (3.2)). Em um recente trabalho, Lovask [19] demonstrou que é possível definir uma matriz de Colin de Verdier.

Suponhamos agora que M seja uma matriz de Colin de Verdier de \mathcal{G} com autovetores x , y e z . Podemos supor que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ são os CdV autovalores de M . Portanto x , y e z satisfazem às seguintes equações

$$\begin{cases} \alpha_i x_i - L[i]x = 0 & i = 1, \dots, n \\ \alpha_i y_i - L[i]y = 0 & i = 1, \dots, n \\ \alpha_i z_i - L[i]z = 0 & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.4)$$

com

$$L_{ij} = \begin{cases} M_{ij}, & i \neq j \\ - \sum_{j \in N(i)} L(i, k), & i = j \end{cases}$$

e

$$\alpha_i = (L_{ii} - M_{ii})$$

De fato, temos

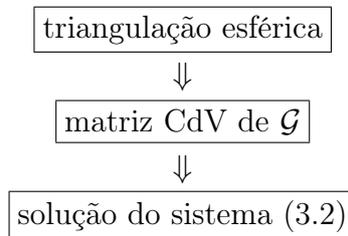
$$\begin{aligned}
 L[i]x &= L_{i1}x_1 + \dots + L_{ii}x_i + \dots + L_{in}x_n \\
 &= M_{i1}x_1 + \dots + L_{ii}x_i + \dots + M_{in}x_n \\
 &= M_{i1}x_1 + \dots + (L_{ii}x_i - M_{ii}x_i) + M_{ii}x_i + \dots + M_{in}x_n \\
 &= M[i]x + (L_{ii}x_i - M_{ii}x_i) \\
 &= (L_{ii}x_i - M_{ii}x_i), \quad M[i]x = 0 \\
 &= (L_{ii} - M_{ii})x_i \\
 &= \alpha_i x_i
 \end{aligned}$$

Portanto

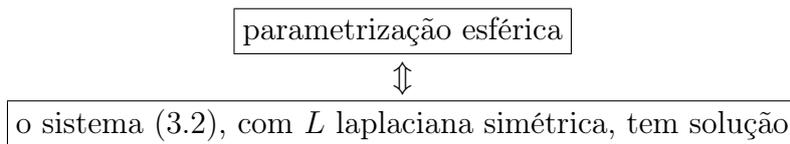
$$\alpha_i x_i - L[i]x = 0$$

Analogamente obtemos o mesmo resultado para y e z . Note que α_i está em função apenas de M , logo é o mesmo para y e z . Portanto os autovetores de M são juntamente com α uma solução do sistema 3.2 para a matriz laplaciana L definida em termos de M como descrito na equação 3.3.

É claro que o que mostramos acima não garante que o sistema (3.2) tem solução para uma matriz laplaciana arbitrária. Mas sim que dado uma triangulação esférica, existe uma matriz laplaciana tal que os vetores coordenadas são solução deste sistema.



Demonstramos que resolver o sistema (3.2) é equivalente a gerar uma matriz de Colin de Verdier. Por outro lado, os autovetores da matriz de Colin de Verdier definem um poliedro convexo que contém a origem. Portanto, a solução do sistema (3.2) define uma parametrização esférica para uma superfície fechada, desde que L seja uma matriz laplaciana simétrica.



Algoritmo

No caso planar, uma vez que a fronteira da triangulação tenha sido fixada e as coordenadas baricêntricas escolhidas, as posições dos vértices interiores são unicamente determinadas pela solução do sistema linear não homogêneo

$$Ax = b ,$$

com A não singular. Contudo, no caso esférico temos um sistema quadrático.

É fácil ver que qualquer solução do sistema (3.2) possui $\alpha \geq 0$ e que $\alpha = 0$ determina uma solução degenerada do sistema onde, por exemplo, todos os vértices da parametrização planar estão num mesmo ponto da esfera. Tentativas de evitar soluções degeneradas podem também acabar por excluir soluções não degeneradas como em Gu e Yau [12].

Mais ainda, qualquer rotação de uma solução do sistema é ainda uma solução do sistema. Neste sentido podemos fixar um ponto da parametrização da superfície na esfera eliminando dois graus de liberdade do grupo de rotação. Para eliminar um terceiro grau de liberdade da rotação, poderíamos fixar um segundo vértice, mas não é fácil definir um segundo vértice sobre a esfera e podemos limitar o sistema ou até mesmo obter soluções degeneradas. Então fixamos um ponto arbitrário no norte $N = (0, 0, 1)$ e fixamos a coordenada $x = 0$ para um segundo ponto arbitrariamente, o que faz com que o segundo ponto permaneça sobre o meridiano $x = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. De fato isso não afeta a solução pois, dada uma solução, podemos rotacioná-la de modo que a posição do primeiro vértice seja N e depois rotacionar em torno do eixo z até que a coordenada x do segundo ponto seja nula. Note que se esse ponto estiver sobre o ponto $(0, 0, -1)$ ele não será movido pela rotação em torno do eixo z porém sua coordenada x já é nula.

As matrizes de pesos que definem combinações convexas apresentadas até aqui não satisfazem a condição de simetria. Por exemplo, a matriz de pesos proposta por Tutte

$$(i, j) \in E \Rightarrow \lambda_{i,j} = \frac{1}{val(i)} ,$$

não é simétrica, pois as valências $val(i)$ e $val(j)$ de dois vértices adjacentes não são necessariamente iguais. Uma versão simétrica do peso combinatório é dada por

$$(i, j) \in E \Rightarrow \lambda_{i,j} = 1 .$$

Porém, tais pesos não definem uma matriz M que satisfaça as condições de convexidade. De maneira semelhante a matriz de pesos definida a partir do peso inverso da aresta

$$(i, j) \in E \Rightarrow w_{i,j} = \frac{1}{\|e_{i,j}\|}$$

é simétrica, desde que não seja normalizada. Mas, conseqüentemente, também não satisfaz a todas as condições de convexidade.

Otimização não-linear

A teoria de Colin de Verdiere mostra que a solução do sistema (3.2) é uma parametrização esférica da superfície. E como no caso planar essa solução está relacionada com uma matriz de pesos definida a partir da adjacência da malha. Portanto, a escolha da matriz pode diminuir a distorção da parametrização esférica, obtendo bons resultados. Porém, o sistema (3.2) é quadrático e resolvê-lo requer algoritmos estáveis e eficientes para determinar parametrizações esféricas a partir da solução do sistema.

Resolvemos o sistema (3.2) a partir de um método de otimização não-linear [3]. Neste caso, as equações

$$\alpha_i x_i - L[i]x = 0$$

definem uma função objetivo quadrática $F(x)$ e as equações

$$\|x_i\| = 1$$

definem funções restrições também quadráticas $h(x)$. A solução do sistema (3.2) será então obtida pelo método de minimização não-linear

$$\begin{aligned} \min_x F(x) \\ \text{sujeito a: } h(x) = 0 \end{aligned}$$

Utilizamos a rotina *fsolve* do MATLAB[®] para resolver o problema de minimização não-linear. A convergência do algoritmo é fortemente influenciada pelo chute inicial e, portanto, um bom palpite inicial para as variáveis x, y, z e α torna o método mais rápido. Gotsman [11] utiliza $u_0 = (x, y, z)$ como a projeção de S sobre a esfera e α com todas as entradas nulas. Cabe ressaltar, que estes valores de α determinariam que todo vértice na triangulação é combinação convexa dos vértices vizinhos. A tolerância utilizada na otimização foi $\epsilon = 1e - 4$.

A Figura 3.6 ilustra a parametrização esférica da superfície do coelho, com 502 vértices, obtida pelo algoritmo otimização não-linear. O tempo de processamento do algoritmo foi 70 segundos, utilizando 60 iterações. Novamente destacamos nas imagens inferiores a orelha do coelho pela sua complexidade.

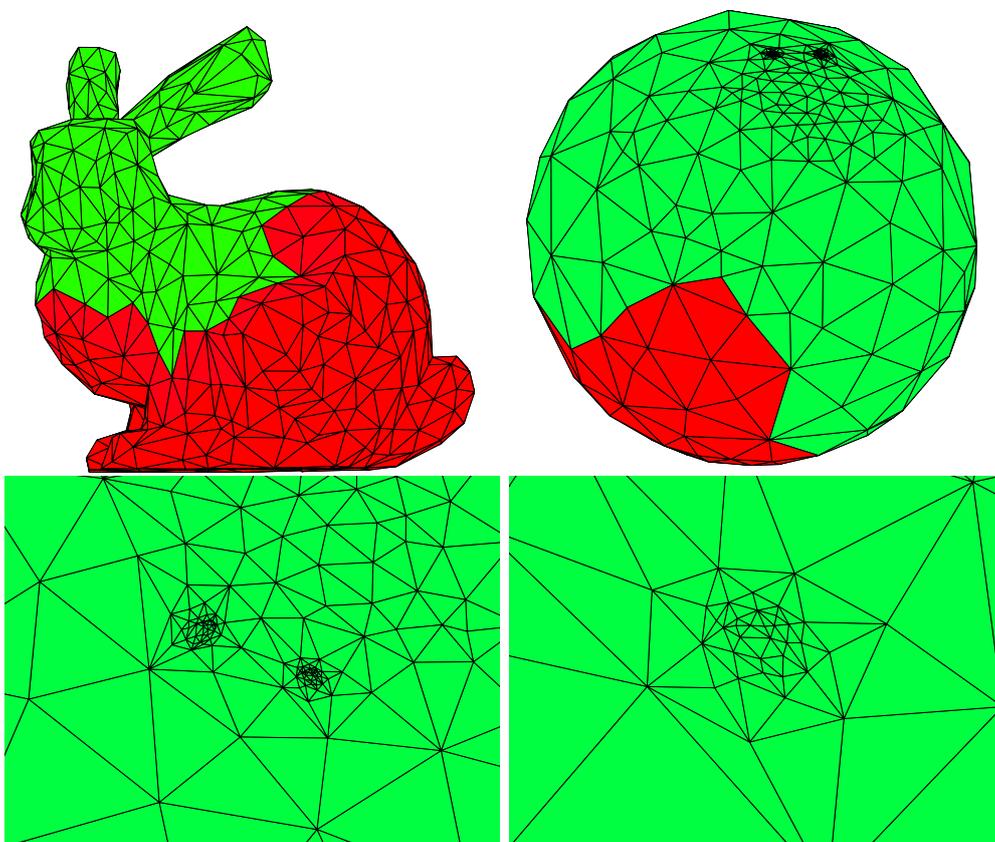


Figura 3.6: A superfície do coelho possui 502 vértices. Sua parametrização esférica foi obtida pelo algoritmo otimização não linear. O método convergiu com 60 iterações e o tempo de processamento foi de 70 segundos.

3.4 Relaxamento Esférico

O Teorema 3.1 garante que se os vértices esféricos são colineares com alguma combinação convexa de seus vizinhos e a origem, ou seja, vértices satisfazendo o sistema (3.2), então podemos definir uma parametrização esférica para a superfície a partir da conectividade da malha da superfície.

Afim de obter as coordenadas esféricas dos n vértices da parametrização da superfície S , procedemos de maneira semelhante ao algoritmo iterativo para parametrizações planares, onde os vértices são repetidamente atualizados para a combinação convexa dos seus vizinhos. Porém, a cada iteração deste processo, o processo resulta em vértices fora do domínio esférico e, portanto, precisamos projetar os vértices de volta para a esfera. Um último detalhe do algoritmo proposto é que os dois passos acima, combinação con-

vexa e projeção, quando iterados repetidamente podem convergir para uma solução degenerada, um único ponto da esfera. A alternativa encontrada para evitar esta solução degenerada é transladar o centro de massa dos vértices após a combinação convexa para a origem e então projetá-los na esfera.

No caso planar foi demonstrado que o procedimento iterativo converge para a solução do sistema linear $Ax = b$. Foi demonstrado também que essa solução é uma parametrização planar da superfície. No entanto, no relaxamento esférico não há convergência no sentido que a norma da diferença entre a posição atual e a anterior dos vértices não tende a zero, mas estabiliza numa constante que depende da superfície S e a matriz M . A constante é dada pela rotação dessa superfície em torno de um eixo. Para tentar resolver esse problema fixamos alguns pontos na superfície e aplicamos o relaxamento.

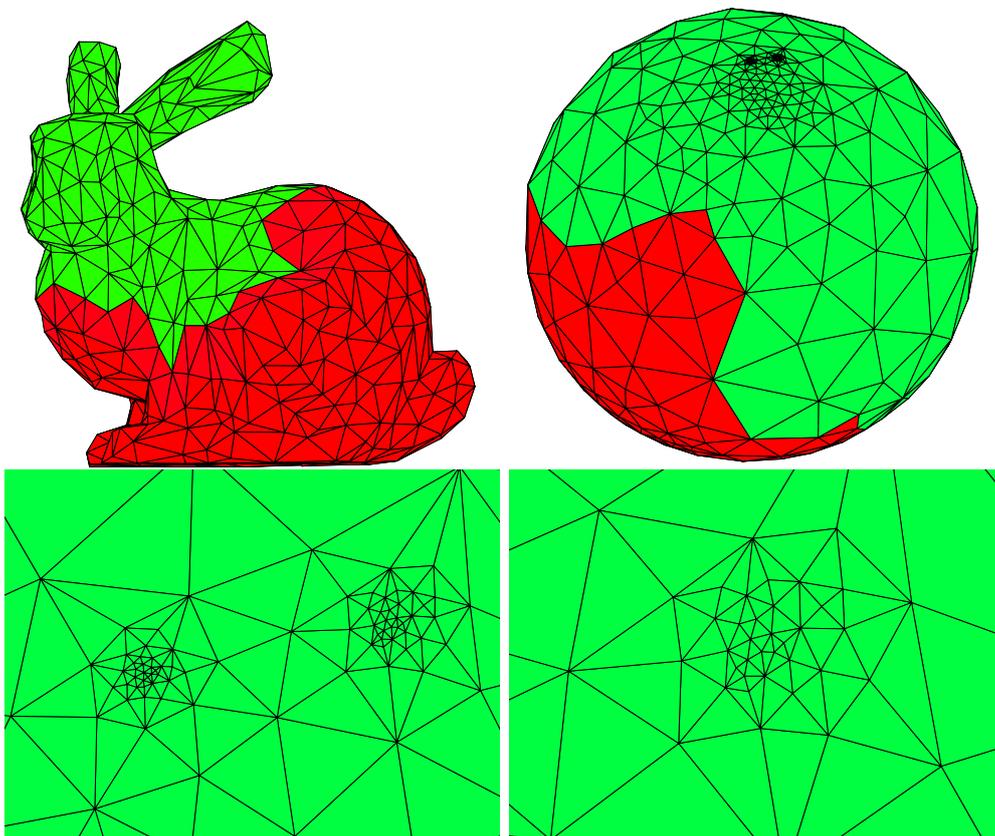


Figura 3.7: A parametrização esférica na superfície triangular fechada foi obtida com a heurística do relaxamento esférico. O resultado apresentado utilizou 4150 iterações. As imagens inferiores destacam a região da orelha do coelho, região mais complexa para a parametrização.

Mesmo depois dessas adaptações ainda existem superfícies que a heurística proposta não resulta em uma parametrização esférica, pois no algoritmo não temos que cada vértice é uma combinação convexa dos vizinhos.

O relaxamento esférico pode levar a parametrizações esféricas em algumas superfícies. A Figura 3.7 ilustra o resultado obtido com o algoritmo para uma superfície com 502 vértices. O mapa de cores auxilia a comparação do resultado com os métodos de redução ao caso planar apresentados anteriormente.

Os vértices fixados devem ser escolhidos adequadamente para que não haja sobreposição de triângulos na parametrização resultante. Embora essa escolha pareça ter uma relação com a área dos triângulos depois de um número de iterações e devam ser escolhidos numa região não concentrada, não há um algoritmo para a seleção desses vértices.

O resultado ilustrado na Figura 3.7 foi obtido pelo relaxamento esférico fixando dois vértices da parametrização. A Figura 3.8 destaca as vizinhanças dos vértices fixados em dois resultados obtidos pelo algoritmo usando duas configurações distintas. Na esquerda, os vértices fixados utilizados no resultado 3.7, enquanto no lado direito os vértices escolhidos não resultaram numa parametrização esférica.

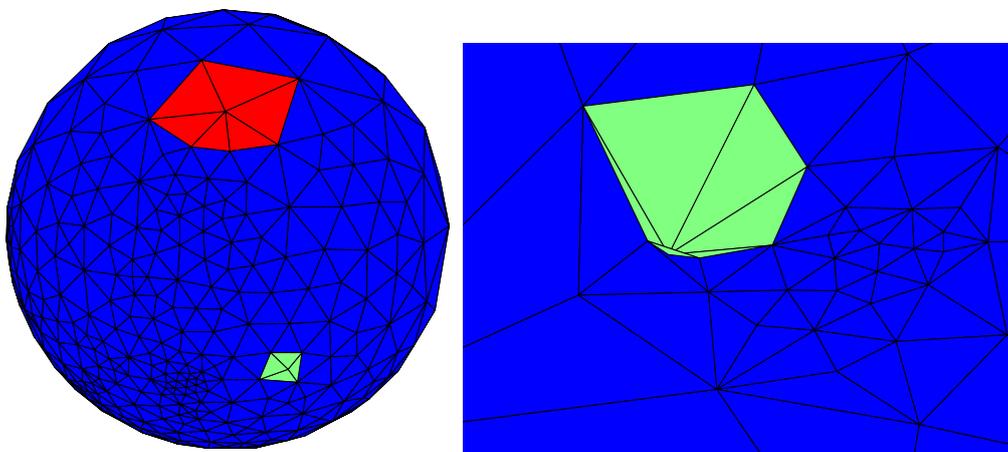


Figura 3.8: A Figura da esquerda destaca a vizinhança dos vértices fixados na parametrização planar obtida na Figura 3.7. Na direita, a imagem destaca o resultado obtido pelo algoritmo fixando outros vértices. Portanto, vértices fixados devem ser escolhidos adequadamente para que não haja sobreposição de triângulos na parametrização resultante.

3.5 Resultados

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de superfícies esféricas e suas parametrizações obtidas com os algoritmos apresentados neste capítulo.

Exemplo 1. As parametrizações esféricas do coelho obtidas pelos métodos apresentados neste capítulo são ilustradas na Figura 3.9.

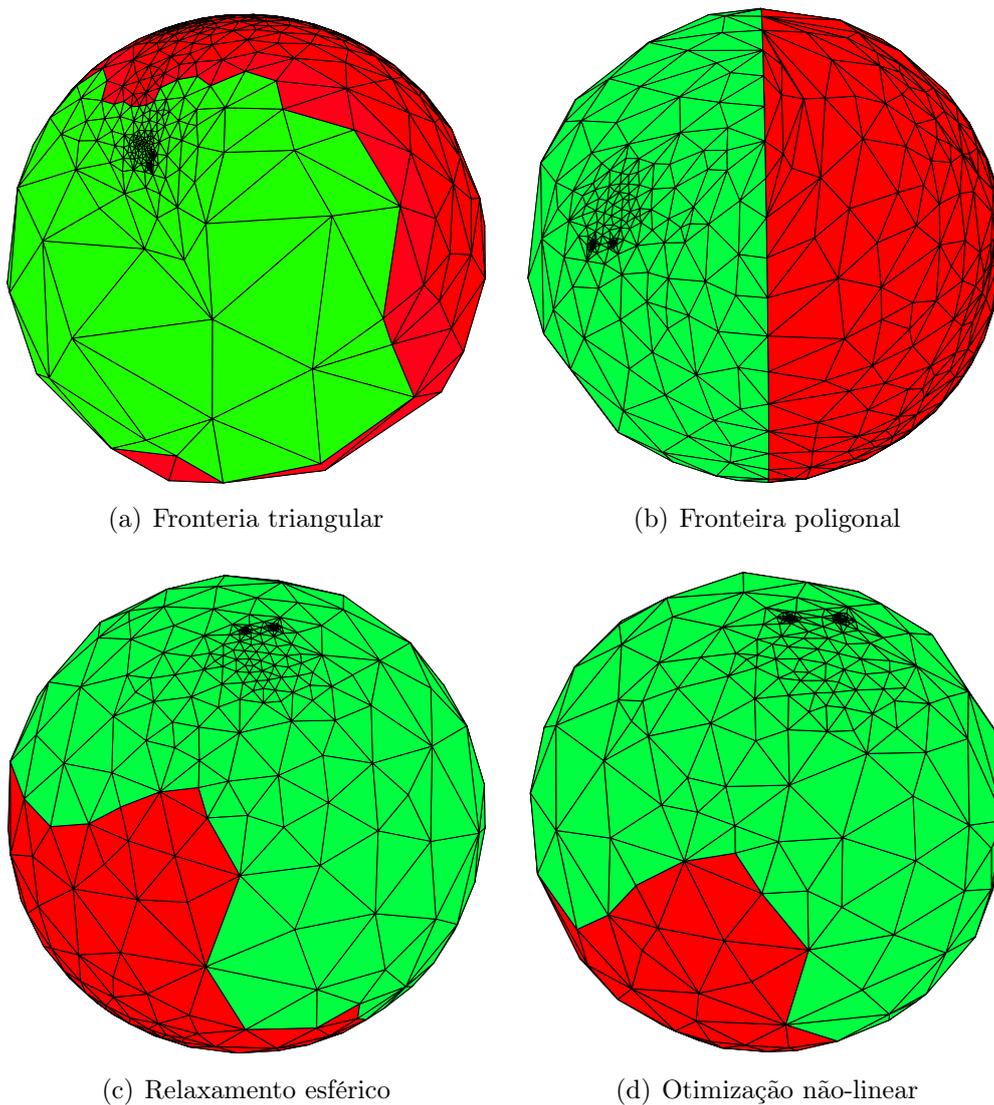


Figura 3.9: As Figuras 3.9(a), 3.9(b), 3.9(c) e 3.9(d) ilustram as parametrizações do coelho obtidas, respectivamente, pelos métodos fronteira triangular, fronteira poligonal, relaxamento esférico e otimização não-linear.

Podemos observar que nos dois primeiros algoritmos que utilizam a redução ao caso planar há muita distorção quando os resultados são comparados com os resultados dos algoritmos baseados no sistema (3.2). Também podemos notar que os vértices da superfície que pertencem à região da orelha estão mais concentrados no resultado do algoritmo relaxamento esférico (Figura 3.9(c)) do que na parametrização obtida pelo algoritmo otimização não-linear (Figura 3.9(c)).

As parametrizações esféricas obtidas via parametrização planar, embora sejam válidas, não estão associadas à matriz M utilizada para obter a parametrização planar. Ou seja,

$$u_i = \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} u_j \quad \not\Rightarrow \quad \alpha_i v_i = \sum_{j \in N(i)} \lambda_{ij} v_j.$$

O resultado obtido pelo algoritmo otimização não-linear requer considerável tempo de processamento, pois a otimização é baseada em método de Newton sendo necessário aproximar um sistema linear muito grande para cada iteração. O tempo de processamento para o algoritmo foi 70 segundos após 60 iterações.

É claro que o palpite inicial para as variáveis da otimização aceleram a rotina *fsolve* para obter a solução do sistema quadrático. Em nosso estudo, um novo palpite é implementado. Iniciamos o algoritmo otimização não-linear com a geometria dada por algumas iterações do algoritmo relaxamento esférico e as variáveis α do sistema são dadas por

$$\alpha_i = 1 - \|L[i]\mathbf{x}\| \quad (3.5)$$

onde \mathbf{x} é a geometria inicial.

Nesta mesma superfície, a parametrização é agora obtida com 7,5 segundos usando apenas 8 iterações do método. Não podemos comparar a geometria das parametrizações obtidas com cada valor inicial, mas podemos comparar o vetor da variável do sistema α . Neste caso, temos:

$$\|\alpha_{proj} - \alpha_{relax}\|_2 = 0.2569 ; \|\alpha_{proj} - \alpha_{relax}\|_\infty = 0.0535$$

onde α_{proj} é o resultado obtido após a projeção e $\alpha = 0$ como palpite inicial e α_{relax} é o resultado obtido após as iterações do algoritmo relaxamento planar dado pela equação (3.5) como palpite inicial.

Os demais algoritmos de parametrização planar obtêm resultados mais rápidos. Por exemplo, o algoritmo relaxamento esférico obteve a parametrização após 1,1 segundos com 4150 iterações.

Exemplo 2. A Figura 3.10 ilustra as parametrizações esféricas obtidas com os algoritmos relaxamento esférico (3.10(b)) e otimização não-linear (3.10(c)) para uma superfície fechada com 1002 vértices (3.10(a)).

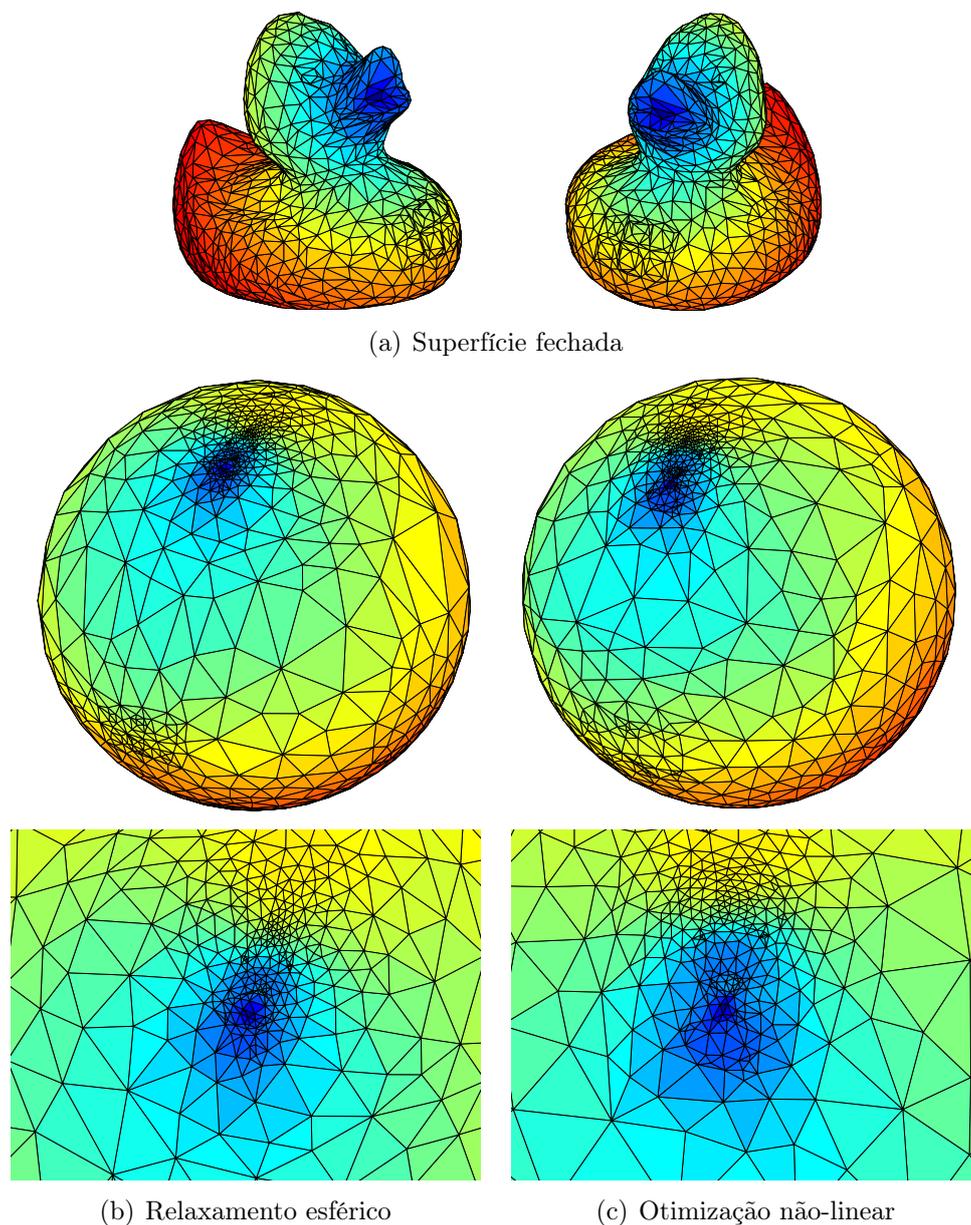


Figura 3.10: No topo, a superfície possui 1002 vértices. Na base, à esquerda, o algoritmo relaxamento esférico obteve uma parametrização após 1,2 segundos com 2321 iterações, enquanto à direita, o algoritmo otimização não-linear obteve a parametrização após 35 segundos com 4 iterações.

O algoritmo relaxamento esférico convergiu com 2321 iterações com o tempo de processamento de 1,2 segundos, enquanto o tempo necessário para obter o resultado pelo algoritmo otimização não-linear foi 34 segundos com 4 iterações.

A Figura 3.10 amplia a região da esfera que contém os pontos da parametrização esférica dos vértices do bico do pato obtidos com os algoritmos relaxamento esférico e otimização não-linear.

Exemplo 3. Neste exemplo comparamos os resultados obtidos pelos quatro métodos de parametrização esférica em uma superfície fechada. A superfície utilizada possui 1002 vértices (Figura 3.11) e modela um objeto que do ponto de vista dos algoritmos de parametrização esférica é mais complexa devido às “estruturas desconexas” que definem partes do objeto (pernas, chifres, e especialmente o rabo). As cores verde e vermelho para os triângulos são definidas a partir do método que divide a superfície com uma poligonal em duas partes topologicamente equivalente ao disco. Assim podemos comparar os resultados observando como cada um dos métodos deforma toda a superfície durante a parametrização.

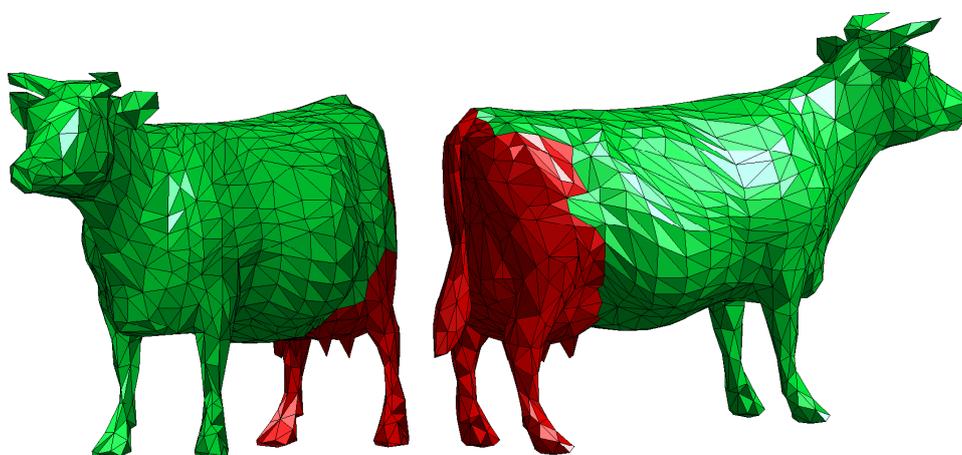


Figura 3.11: Superfície fechada com 1002 vértices modela uma vaca.

Uma linha poligonal de arestas da triangulação com 44 vértices divide a superfície ilustrada na Figura 3.11 em duas partes, sendo que uma contém 672 vértices (em verde) e a outra contém 286 vértices (em vermelho). A Figura 3.12 ilustra o procedimento de divisão da superfície em duas topologicamente equivalentes ao disco. A saber, partindo de um vértice i_0 , definimos

um conjunto de vértices $V = V_{i_0}^{(r)}$ dado pela r -ésima estrela de i_0 de tal forma que a fronteira desse conjunto seja uma poligonal simples e fechada. Dessa forma tivemos que escolher $r = 18$ (Figura 3.12(d)) o que gerou essa divisão desproporcional. Por outro lado mesmo uma divisão com quantidades iguais de vértices não seria necessariamente a melhor divisão pois a forma de organização da topologia é que determina quais vértices devem ficar em cada hemisfério.

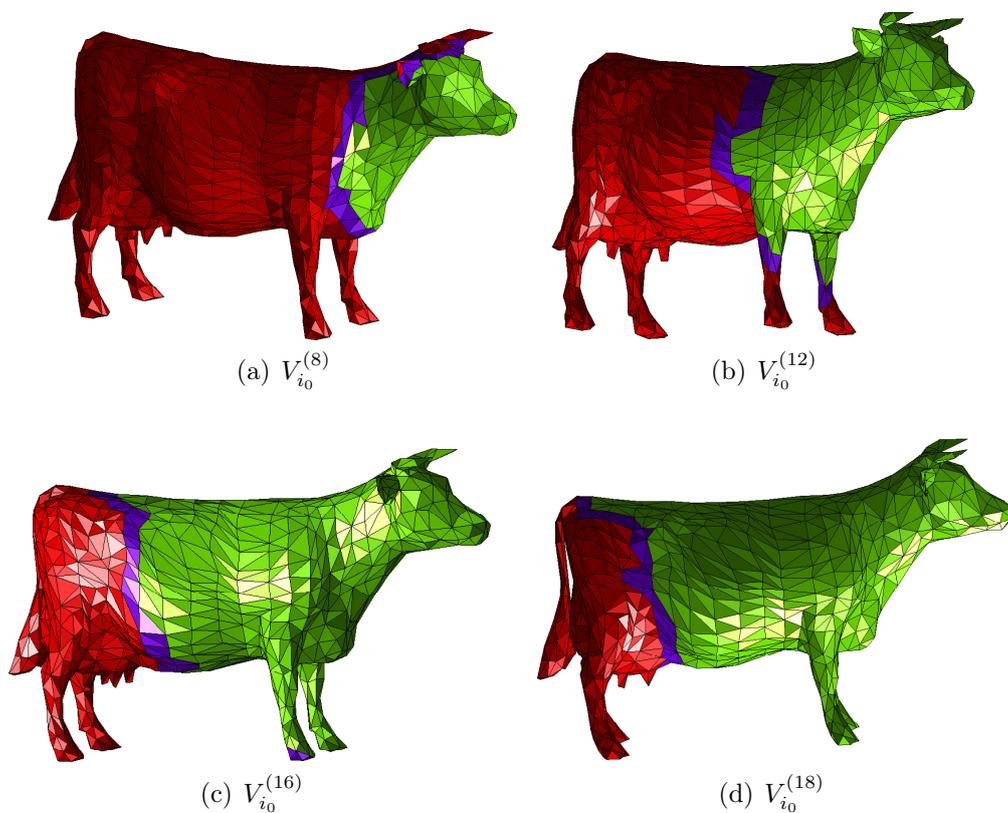


Figura 3.12: Sequência da seleção da superfície fechada com 1002 vértices ilustrada na Figura 3.11.

A Figura 3.13 ilustra as parametrizações do modelo apresentado na Figura 3.11 focando a parte em verde correspondente à cabeça da vaca. Podemos notar uma deformação na parametrização obtida com o uso de um triângulo como fronteira (Figura 3.13(a)). Nesse modelo deparamos-nos com a dificuldade de escolher um triângulo para a fronteira de tal forma que o

algoritmo obtenha uma parametrização com menor distorção. Observamos também que o método de dividir a superfície em duas partes topologicamente equivalente ao disco concentra os vértices das regiões das patas e da cabeça comparado com os demais métodos (Figura 3.13(b)). Também podemos notar grande semelhança entre as superfícies ilustradas nas Figuras 3.13(c) e 3.13(d), no entanto, na Figura 3.13(d) correspondente ao método de otimização não-linear pode-se observar triângulos mais regulares, com triângulos mais próximos de equilátero.

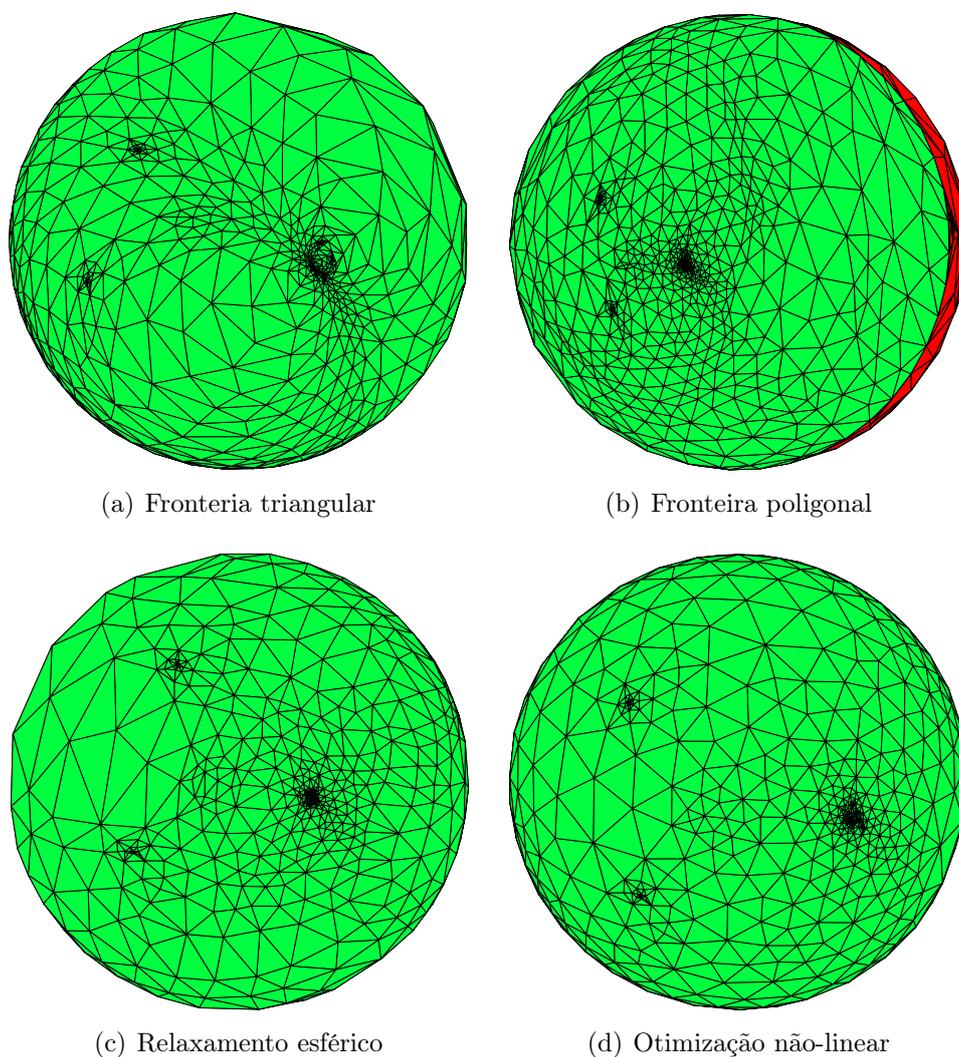


Figura 3.13: Visualização do lado em verde da parametrização esférica da superfície ilustrada na Figura 3.11.

A Figura 3.14 ilustra as parametrizações obtidas com o uso dos quatro métodos de parametrização esférica focando a parte da superfície destacada em vermelho na Figura 3.11. Observamos que o método de dividir em duas partes topologicamente equivalente ao disco parametriza a região em vermelho em um hemisfério e os demais métodos concentram essa mesma região em uma parte bem menor da esfera. Em consequência disso as regiões das patas traseiras e do rabo estão mais distantes comparado com os outros métodos (Figura 3.14(b)).

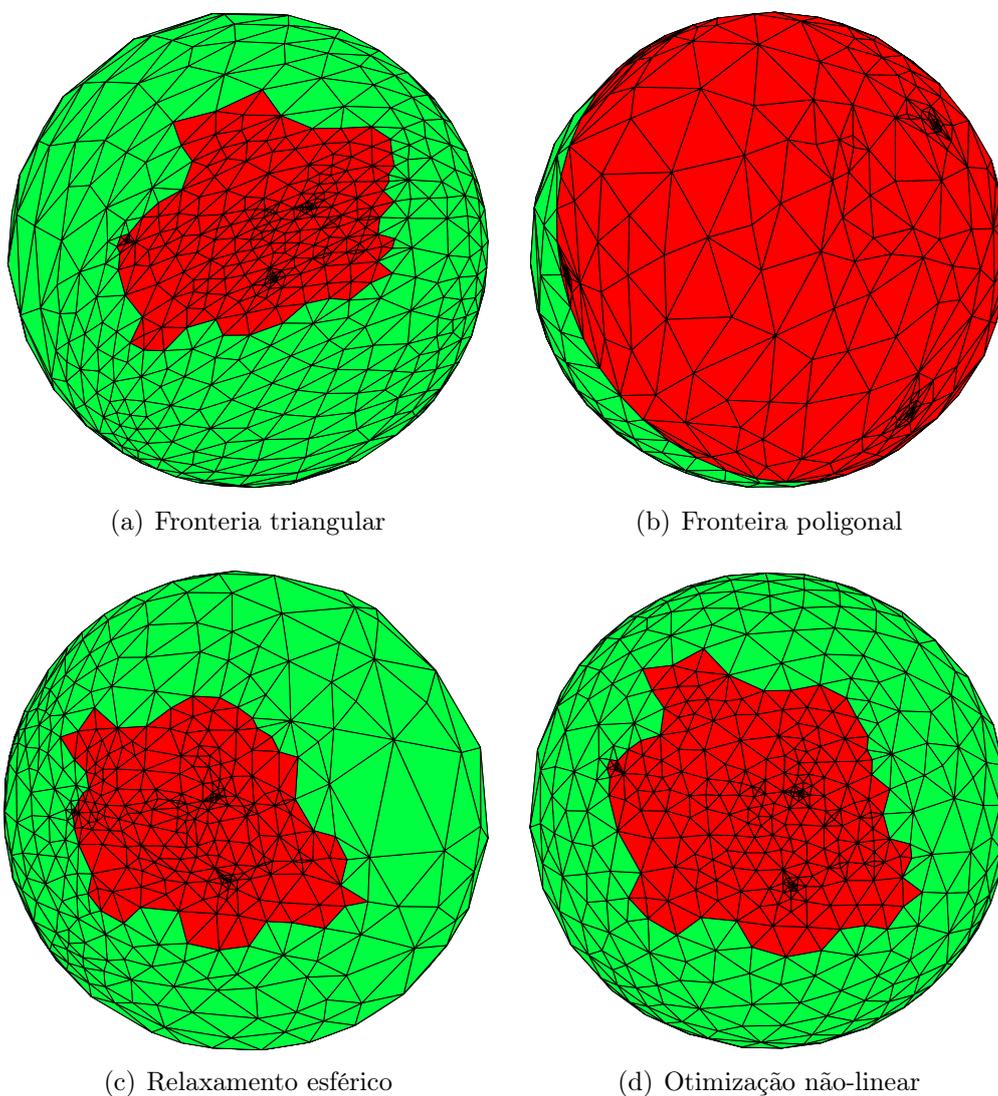


Figura 3.14: Visualização da parte em vermelho da parametrização da superfície ilustrada na Figura 3.11.

O método que utiliza um triângulo como fronteira geralmente concentra muito os vértices em alguma região. No entanto, devido às complicações que tivemos em obter uma parametrização tomando uma fronteira triangular movemos o centro de massa da parametrização planar para a origem antes do escalonamento. Por isso esse comportamento não pode ser notado na parametrização desse modelo (Figura 3.14(a)). Em consequência dessa correção há uma deformação nas regiões próximas da fronteira triangular que pode ser observado na Figura 3.13(a).

As parametrizações obtidas pelo relaxamento esférico (Figura 3.14(c)) e pelo método de otimização não-linear (Figura 3.14(d)) são muito parecidas e são as que apresentam menor distorção da geometria da superfície.

Observamos com mais detalhes cada parametrização ampliando as regiões da cabeça da vaca na Figura 3.15. Essas regiões tem aresta menores e sem a devida ampliação não é possível verificar visualmente a validade da parametrização esférica.

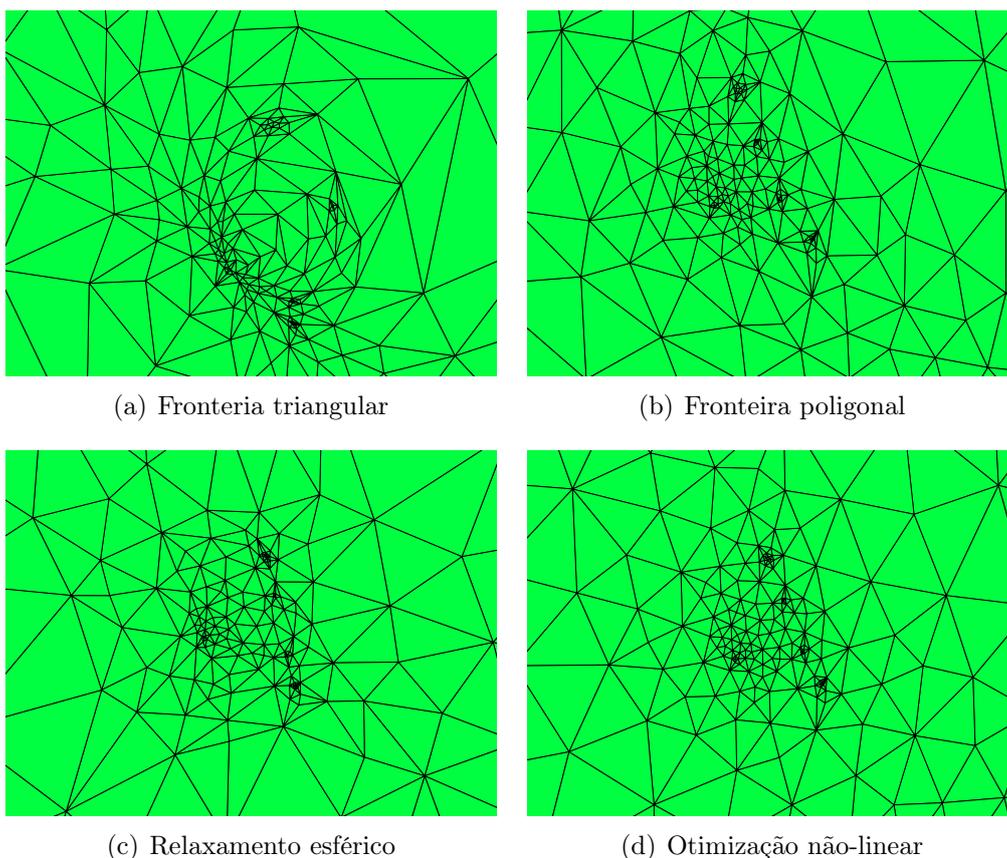


Figura 3.15: Destaque das parametrizações esféricas na cabeça da vaca.

Outra região em que as arestas são pequenas é a região do rabo da vaca. A Figura 3.16 ilustra a parametrização esférica dessas regiões. Novamente podemos observar triângulos mais regulares no método de otimização não-linear (Figura 3.16(d)) quando comparado com o método do relaxamento esférico (Figura 3.16(c)). Observamos que na parametrização obtida com o método que utiliza um triângulo como fronteira (Figura 3.15(a)) as orelhas e os chifres não estão alinhados e que nas parametrizações obtidas pelos demais métodos estas características estão alinhadas (Figuras 3.13(b), 3.13(c) e 3.13(d)). Isso ocorre devido à translação para mover o centro de massa da parametrização planar para a origem antes do escalonamento.

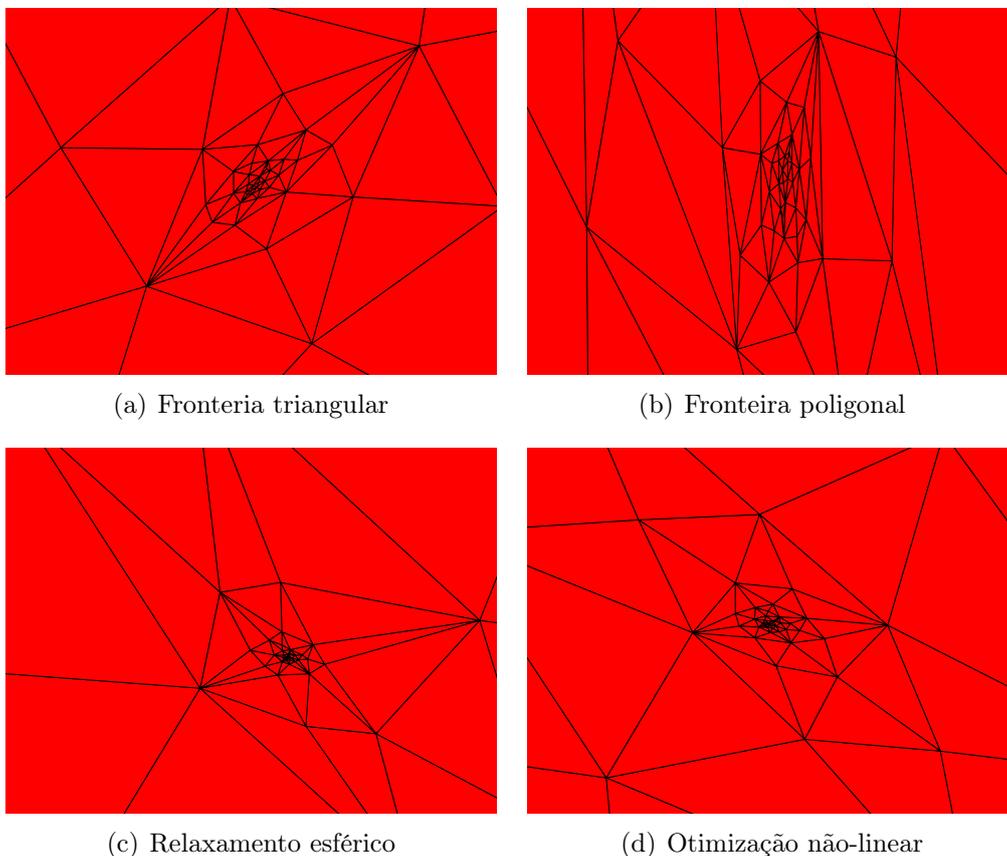
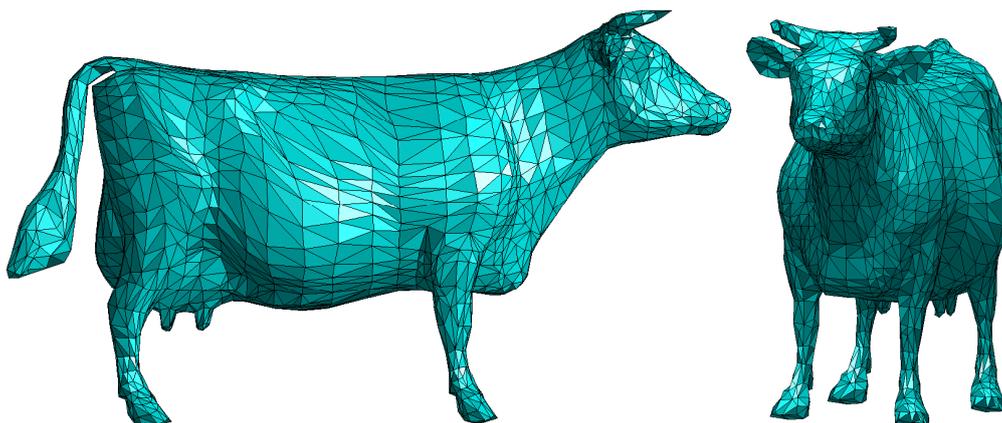


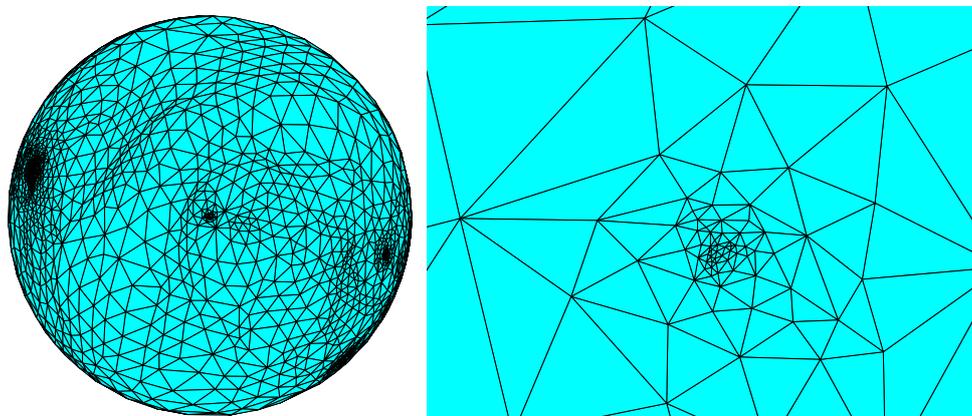
Figura 3.16: Zoom da parametrização da região do rabo da vaca.

Ainda neste exemplo, a mesma superfície é modelada por uma triangulação com 2002 vértices. A geometria desta superfície é ainda mais complexa, principalmente no rabo da vaca pois este possui várias poligonais do começo até o fim. Proporcionalmente o número de poligonais comparado com o

número de vértices por poligonal é muito grande. Esta é uma região que o relaxamento esférico não converge para uma parametrização esférica sem fixar pontos. A parametrização obtida com o algoritmo otimização não-linear é ilustrada na Figura 3.17. A região do rabo da superfície da vaca é destacada.



(a) Superfície fechada



(b) Parametrização esférica obtida com otimização

Figura 3.17: A parametrização obtida com o algoritmo otimização não-linear é ilustrada na Figura 3.17(b). Destacamos a região do rabo da vaca na parametrização da superfície.

Capítulo 4

Conclusão

4.1 Parametrização Planar

No capítulo 2, parametrizações planares de superfícies com bordos são obtidas a partir de poligonais convexas definidas sobre o círculo unitário e da solução de um sistema linear definido a partir da teoria de coordenadas baricêntricas.

Algoritmos baseados na metodologia proposta foram desenvolvidos. Podemos obter a solução do sistema a partir da inversão da matriz do sistema (algoritmo direto), ou através de um método iterativo obtido a partir das propriedades da matriz do sistema (algoritmo iterativo).

Os resultados apresentados na seção 2.4 comparam as parametrizações planares obtidas com o algoritmo iterativo usando os pesos combinatório, inverso da aresta e inverso da área. Outros pesos podem ser encontrados na literatura e, desde que as condições de convexidade (equações 2.4, 2.5 e 2.6) sejam satisfeitas, a teoria apresentada na seção 2.2 assegura a existência de uma parametrização planar determinada pela solução do sistema linear (2.8). A tabela 4.1 lista algumas das superfícies parametrizadas no capítulo 2 com dados topológicos destas superfícies.

Uma determinada propriedade da superfície original pode ser induzida na parametrização a partir da definição de um peso e, portanto, pesos distintos podem apresentar parametrizações distintas. Baseado nesta observação, pesos que levam em consideração a geometria da superfície original foram definidos e resultaram em parametrizações com menores distorções quando comparamos a malha da superfície com a malha da parametrização.

Superfície (exemplo)	Vértices	FACES	Arestas	Valência	
	Total (Fronteira)			Min	Max
cogumelo (2 - pág. 41)	2112 (96)	4126	6237	3	16
coelho (3 - pág. 48)	468 (85)	849	1316	3	10
mão (4 - pág. 51)	1519 (36)	3000	4518	3	10
face (5 - pág. 54)	1858 (104)	3609	5466	2	9

Tabela 4.1: A tabela mostra dados de algumas superfícies parametrizadas nos exemplos da seção de resultados obtidos pelo algoritmo iterativo de parametrizações planares.

Os algoritmos apresentados na seção 2.3 são facilmente implementados, sendo o algoritmo iterativo computacionalmente mais viável, pois aproxima a solução do sistema que define a parametrização com um baixo número de iterações, reduzindo o tempo de processamento em aproximadamente 50%, além de tornar a parametrização possível para superfícies com grande número de vértices devido ao uso de matrizes esparsas. Segue a tabela 4.2 com o tempo de processamento em cada superfície para os algoritmos direto e iterativo, além do número de iterações utilizadas no algoritmo iterativo para convergência.

Superfície (exemplo)	Esparsidade	Direto	Iterativo	
		Tempo	Tempo	Iterações
cogumelo (2 - pág. 41)	0,27 %	1,520	0,580	3831
coelho (3 - pág. 48)	1,08 %	0,023	0,018	483
mão (4 - pág. 51)	0,39 %	0,729	1,045	8532
face (5 - pág. 54)	0,31 %	1,054	0,513	3562

Tabela 4.2: A tabela mostra o tempo (em segundos) de processamento dos algoritmos direto e iterativo para algumas superfícies ilustradas nos exemplos da seção de resultados da parametrização planar. O número de iterações utilizadas no algoritmo iterativo para convergência também são listados.

O algoritmo iterativo pode ser menos eficiente em superfícies que têm algum vértice para o qual o menor caminho que o conecta com a fronteira seja muito grande. Como o exemplo da mão, onde o tempo do algoritmo

iterativo, 1,045 segundos, é maior do que o tempo do algoritmo direto, 0,729 segundos. Por exemplo, se esse menor caminho tem comprimento m , então nas m primeiras iterações esse vértice ainda permanece na origem.

4.2 Parametrização Esférica

No capítulo de parametrização esférica vimos alguns resultados que nos dão garantias teóricas de existência de solução para o problema de parametrizações de superfícies topologicamente equivalente à esfera. Naturalmente, o domínio da parametrização proposto foi a esfera.

Inicialmente, dois métodos que reduzem o problema ao caso planar foram apresentados. Após a solução planar, ambos os métodos utilizam a projeção estereográfica para obter a parametrização esférica. A diferença entre os métodos se resume em como definir superfícies com bordo a partir de uma superfície fechada.

Outros dois métodos também foram apresentados. Tais métodos foram desenvolvidos a partir de um sistema quadrático de equações (3.2) que descreve matematicamente uma triangulação esférica do ponto de vista da teoria de grafos, onde recentes resultados da teoria de Colin de Verdiere determinam parametrizações esféricas a partir da solução do sistema (3.2).

Na seção 3.5 comparamos as parametrizações obtidas com a aplicação dos métodos de parametrização esférica desenvolvidos. A tabela 4.3 mostra a topologia dos modelos utilizados.

Superfície (exemplo)	Topologia			Valência	
	Vértices	Faces	Arestas	Min	Max
Coelho (1 - pág. 80)	502	1000	1500	3	10
Pato (2 - pág. 82)	1002	2000	3000	3	10
Vaca (3 - pág. 83)	1002	2000	3000	3	11
Vaca (3 - pág. 83)	2002	4000	6000	3	12

Tabela 4.3: A tabela mostra dados das superfícies triangulares fechadas utilizadas nos exemplos anteriores.

Dos algoritmos desenvolvidos, o único que de fato busca a solução do sistema quadrático de equações (3.2) é um algoritmo de otimização não-linear. Traduzimos este sistema como uma função objetivo e uma função

restrição. A rotina *fsolve* do MATLAB[®] foi utilizada para resolver este problema como um problema de minimização não-linear. A tolerância usada na otimização foi $\epsilon = 1e - 4$.

Observamos que o único algoritmo que obtêm uma parametrização esférica de acordo com o teorema 3.1 é o algoritmo otimização não-linear. No entanto, o algoritmo é descrito por um problema de minimização e, portanto, é lento quando comparado com os demais algoritmos apresentados.

A tabela 4.4 mostra o tempo de processamento para obter os resultados ilustrados nos exemplos de parametrizações esféricas para os algoritmos relaxamento esférico e otimização não-linear. A tabela também contém o número de iterações para ambos algoritmos. A teoria de parametrização esférica apresentada exige que a matriz de adjacências seja simétrica. Por isso, comparamos os resultados utilizando o peso inverso da aresta.

Superfície (exemplo)	Vértices	Relaxamento esférico		Otimização não-linear	
		Tempo	Iterações	Tempo	Iterações
Coelho (1 - pág. 80)	502	1,1	4150	7,5	8
Pato (2- pág. 82)	1002	1,2	2321	35	4
Vaca (3- pág. 83)	1002	5.1462	1715	947.5596	99
Vaca (3- pág. 83)	2002	-	-	9062.7964	2103

Tabela 4.4: A tabela mostra o tempo (em segundos) de processamento dos algoritmos direto e iterativo para algumas superfícies ilustradas nos exemplos da seção de resultados. Em todos os casos, o algoritmo iterativo ($\epsilon = 5e - 4$) obteve soluções com tempo de processamento menor. O número de iterações utilizadas nos algoritmos relaxamento e minimização para convergência também são listados.

4.3 Aplicações

Uma das aplicações mais simples de parametrizações de superfícies é o mapeamento de textura. O mapeamento de textura consiste em sobrepor imagens sobre as faces de um objeto. Para aplicar uma textura é necessário determinar uma bijeção entre pontos da imagem e os vértices da superfície. Esta

tarefa poderá ser facilmente executada a partir da parametrização planar de superfícies no domínio da imagem. A Figura 4.1 ilustra dois exemplos de mapeamento de textura. Na esquerda, a imagem de um rosto é parametrizada sobre a superfície de uma face (Figura a)). Na direita, a combinação de duas imagens (Figuras c) e d)) dão a textura de pegadas sobre a lua usando a esfera como superfície (Figura d)).

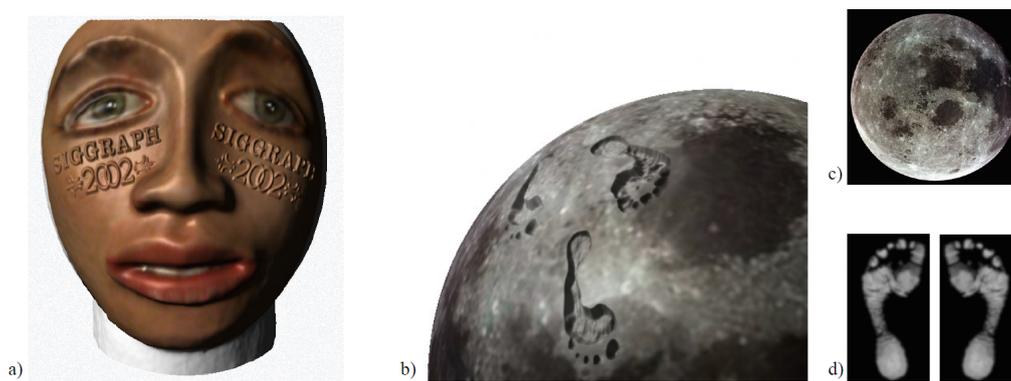


Figura 4.1: (a)Deslocamento normal na face texturizada. (b)Pegadas na Lua, esculpidas com os mapas de deslocamento de (d) em uma superfície texturizada com a imagem de (c). Resultado retirado do trabalho de Zwicker, M. e colaboradores [31].

Porém algumas aplicações requerem uma parametrização em outros domínios como a esfera, o toro, o bitoro, etc. Um exemplo de aplicação que exige o domínio topologicamente equivalente à superfície é a manipulação de superfícies. Isso reduz significativamente a distorção permitindo uma bem sucedida manipulação da superfície.

Por exemplo o Morphing que é a transformação de uma superfície em outra é uma manipulação de superfícies que exige domínio topologicamente equivalente. Primeiro, uma imersão esférica inicial é calculada para cada uma das superfícies. Depois, as imersões iniciais são deformadas de tal forma que as características comuns coincidam na esfera, o que é comumente chamado de alinhamento de característica. A Figura 4.2 ilustra a transformação da superfície de um porco na superfície de um cavalo, que são duas superfícies com as mesmas características.

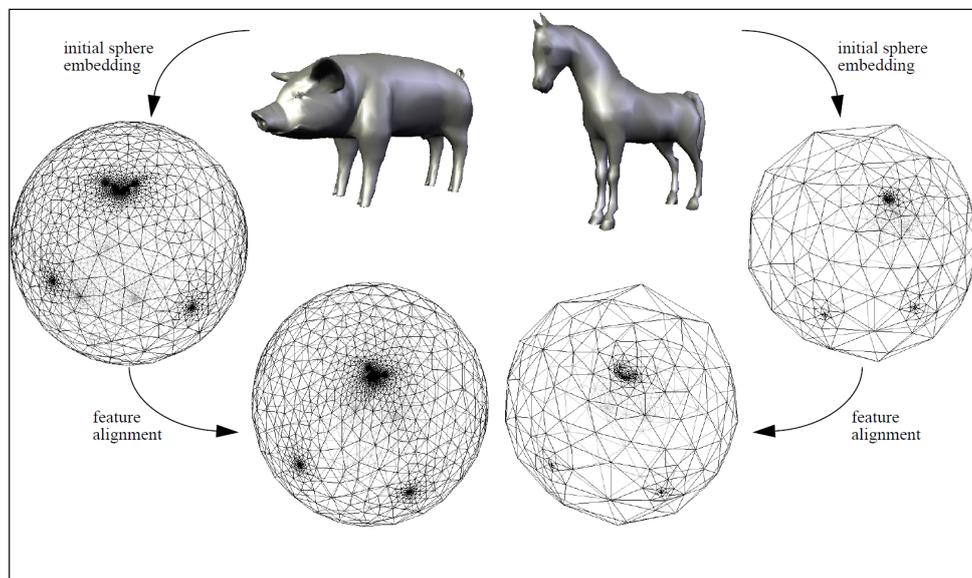


Figura 4.2: Primeiro uma imersão esférica inicial é calculada para cada superfície. Segundo é feito um alinhamento de características na esfera. Resultado retirado do trabalho de Alexa, M. [1].

A Figura 4.3 ilustra uma sequência de imagens durante a transformação da superfície do porco na superfície do cavalo. Nota-se um alongamento das patas durante o processo bem como uma alteração nas características das superfícies.

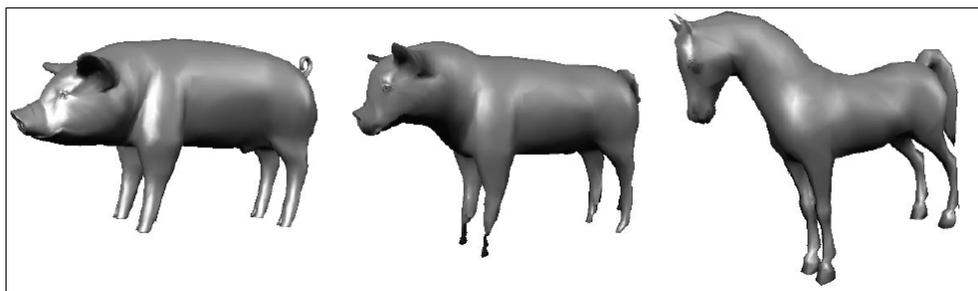


Figura 4.3: Sequencia de imagens em três etapas do processo transformação entre os modelos de um porco e um cavalo. Resultado retirado do trabalho de Alexa, M. [1].

4.4 Trabalhos Futuros

Em ambos os casos, parametrizações planares e esféricas, resta o desafio de definir pesos adequados que faça com que a parametrização melhor corresponda à geometria da superfície.

Vale ressaltar que a utilização da teoria de grafos nos forçou a admitir algumas hipóteses que restringem o conjunto de possíveis parametrizações planares. Por exemplo, exigimos que o grafo dado pela malha seja triangular com fronteira simples, ou seja, simplesmente conectado. Além disso, a imersão da fronteira é fixada numa forma convexa. Porém, outros trabalhos desenvolvem métodos de parametrizar uma malha planar com fronteira sem impor restrições a forma da fronteira do domínio da parametrização [13, 24, 26, 30].

A Figura 4.4 ilustra um método para parametrizar uma superfície no plano sem determinar a imersão da fronteira. Esse procedimento utiliza o conceito de *fronteira virtual*, uma linha poligonal com o mesmo número de vértice e sentido anti-horário que a fronteira, conforme a Figura 4.4(a). Esse método consiste em definir uma nova superfície dada pela superfície original unida a uma fronteira virtual (Figura 4.4(a)), parametrizar essa nova superfície em um polígono convexo (Figura 4.4(c)) e extrair desta uma parametrização da superfície original. Este resultado foi retirado do trabalho de Sheffer, A. e Praun, E. e Rose, K. [15].

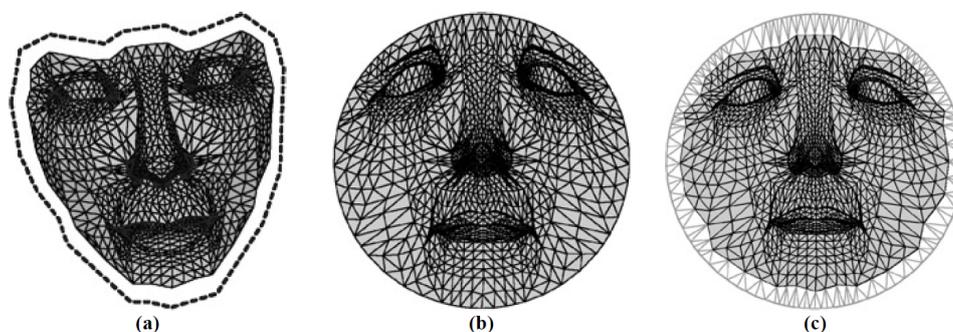


Figura 4.4: (a) Uma fronteira virtual é adicionada à malha original. (b) Parametrização da malha original. (c) Parametrização da malha original e da fronteira virtual. Os vértices da fronteira virtual são fixados deixando os vértices da fronteira real se moverem.

Já no caso esférico obtivemos resultados que descrevem uma parametrização para uma triangulação como a solução de um sistema quadrático. No entanto, obter um método para resolver tal sistema de forma eficiente tem se mostrado uma tarefa bastante difícil. Também no caso esférico, é válido o

desafio de obter pesos que melhor correspondam à geometria da malha. Além disso, a teoria apresentada no caso esférico, determina uma parametrização desde que a matriz de pesos seja simétrica, o que oferece mais dificuldades na construção de tal matriz.

Por último, pretendemos estender o trabalho para superfícies representadas por nuvens de pontos. Estas são representações dadas apenas pela geometria da superfície assim como definimos nesse trabalho (Figura 4.5). A partir desta representação poderíamos obter uma malha triangular com algoritmos clássicos de processamento geométrico e então obter uma parametrização usando os algoritmos descritos neste trabalho. No entanto, é extremamente simples definir tal triangulação para nuvem de pontos se estes estiverem contidos no disco (ou na esfera). Ou seja, é bastante atrativo fazermos a parametrização de nuvem de pontos (em domínios mais simples topologicamente equivalentes) para depois obter uma triangulação.

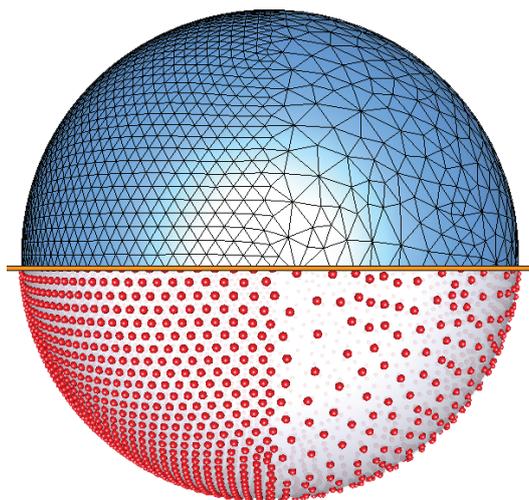


Figura 4.5: Duas representações da superfície esférica. Em cima uma superfície triangular (representação usada neste trabalho). Em baixo, uma representação por nuvem de pontos, onde apenas a geometria da superfície é determinada.

Referências Bibliográficas

- [1] M. Alexa. Merging polyhedral shapes with scattered features. In *Shape Modeling and Applications, 1999. Proceedings. Shape Modeling International'99. International Conference on*, pages 202–210. IEEE, 1999.
- [2] J. Bloomenthal. Polygonization of implicit surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 5(4):341–355, 1988.
- [3] T.F. Coleman and Y. Li. An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. 1993.
- [4] Y. Colin de Verdière. Sur un nouvel invariant des graphes et un critere de planarité. *Journal of combinatorial theory. Series B*, 50(1):11–21, 1990.
- [5] G. Das and M.T. Goodrich. On the complexity of optimization problems for 3-dimensional convex polyhedra and decision trees. *Computational Geometry*, 8(3):123–137, 1997.
- [6] M.P. Do Carmo and M.P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*, volume 2. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- [7] L.H. Figueiredo, J. de Gomes, D. Terzopoulos, and L. Velho. Physically-based methods for polygonization of implicit surfaces. In *Graphics Interface*, volume 92, pages 250–257, 1992.
- [8] M.S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3):231–250, 1997.
- [9] M.S. Floater. Mean value coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 20(1):19–27, 2003.
- [10] M.S. Floater, G. Kós, and M. Reimers. Mean value coordinates in 3d. *Computer Aided Geometric Design*, 22(7):623–631, 2005.

- [11] C. Gotsman, X. Gu, and A. Sheffer. Fundamentals of spherical parameterization for 3d meshes. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 22, pages 358–363. ACM, 2003.
- [12] X. Gu and S.T. Yau. Computing conformal structure of surfaces. *Arxiv preprint cs/0212043*, 2002.
- [13] X. Gu and S.T. Yau. Global conformal surface parameterization. In *Proceedings of the 2003 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, pages 127–137. Eurographics Association, 2003.
- [14] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis, G. Sapiro, and M. Halle. Conformal surface parameterization for texture mapping. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 6(2):181–189, 2000.
- [15] K. Hormann, B. Lévy, A. Sheffer, et al. Mesh parameterization: Theory and practice. *SIGGRAPH Course Notes*, 2007.
- [16] T. Kanai, H. Suzuki, and F. Kimura. Metamorphosis of arbitrary triangular meshes. *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 20(2):62–75, 2000.
- [17] L.P. Kobbelt, J. Vorsatz, and U. Labsik. A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces. In *Computer Graphics Forum*, volume 18, pages 119–130. Wiley Online Library, 1999.
- [18] B. Lévy and H.R. Zhang. Spectral mesh processing. In *ACM SIGGRAPH 2010 Courses*, page 8. ACM, 2010.
- [19] L. Lovász. Steinitz representations of polyhedra and the colin de verdier number. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 82(2):223–236, 2001.
- [20] L. Lovász and A. Schrijver. On the null space of a colin de verdier matrix. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 49, pages 1017–1026. Chartres: L’Institut, 1950-, 1999.
- [21] U. Pinkall and K. Polthier. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental mathematics*, 2(1):15–36, 1993.
- [22] P.V. Sander, X. Gu, S.J. Gortler, H. Hoppe, and J. Snyder. Silhouette clipping. In *Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 327–334. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., 2000.

- [23] A. Shapiro and A. Tal. Polyhedron realization for shape transformation. *The Visual Computer*, 14(8):429–444, 1998.
- [24] A. Sheffer and E. de Sturler. Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening. *Engineering with Computers*, 17(3):326–337, 2001.
- [25] A. Sheffer, C. Gotsman, and N. Dyn. Robust spherical parameterization of triangular meshes. *Computing*, 72(1):185–193, 2004.
- [26] A. Sheffer, E. Praun, and K. Rose. Mesh parameterization methods and their applications. *Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision*, 2(2):105–171, 2006.
- [27] O. Sorkine. Laplacian mesh processing. In *Eurographics State-of-the-Art Report*, pages 53–70, 2005.
- [28] W.T. Tutte. How to draw a graph. *Proc. London Math. Soc*, 13(3):743–768, 1963.
- [29] Y. Wang, X. Gu, T. Chan, P.M. Thompson, and S.T. Yau. Intrinsic brain surface conformal mapping using a variational method. In *SPIE international symposium on medical imaging*, 2004.
- [30] R. Zayer, C. Rössl, and H.P. Seidel. Setting the boundary free: A composite approach to surface parameterization. In *Proceedings of the third Eurographics symposium on Geometry processing*, page 91. Eurographics Association, 2005.
- [31] M. Zwicker, M. Pauly, O. Knoll, and M. Gross. Pointshop 3d: an interactive system for point-based surface editing. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, volume 21, pages 322–329. ACM, 2002.