UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ANDERSON OLIVEIRA GADIOLI

FUNÇÃO EXPONENCIAL: DEFINIÇÃO, CARACTERIZAÇÃO E APLICAÇÕES.

VITÓRIA

2015

ANDERSON OLIVEIRA GADIOLI

FUNÇÃO EXPONENCIAL: DEFINIÇÃO, CARACTERIZAÇÃO E APLICAÇÕES.

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação da Universidade Federal do Espírito Santo – Mestrado Profissional em Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer

VITÓRIA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

“FUNÇÃO EXPONENCIAL: DEFINIÇÃO, CARACTERIZAÇÃO E APLICAÇÕES ”.

Anderson Oliveira Gadioli

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em ___/___/____ por:

____

____

____

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que iluminou meu caminho nessa caminhada, e por ter me dado uma família muito mais que especial que amo muito.

Em segundo lugar, gostaria de agradecer aos meus pais Mirabeau (*in memoriam)* e Haylém, meus irmãos Hegner e Isabela, minha esposa Viviana, que realizou mudanças significativas na minha vida, minhas filhas Maria Luiza e Alicia e a toda a minha família. Em especial agradecer a todos os meus professores e colegas de trabalho.

Enfim, gostaria de agradecer ao meu orientador Professor Valmecir, aos professores e colegas do PROTMAT e a todos os amigos que colaboraram de forma direta (Professoras: Viviana Carla e Rosália Sá) e/ou indireta para a realização desse trabalho de conclusão de curso.

"Tu te tornas eternamente responsável por aquilo que cativas".

(Saint'Antoine Exupéry)

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

NOTAÇÕES

IN (Conjunto dos números naturais)

Z (Conjunto dos números inteiros)

Z^* (Conjunto dos números inteiros diferentes de zero)

Q (Conjunto dos números racionais)

IR (Conjunto dos números reais)

IR^+ (Conjunto dos números reais positivos)

RESUMO

A presente dissertação trata de uma abordagem a respeito do ensino da função exponencial para os professores de matemática.

Esse trabalho se embasou nos estudos de LIMA (2010), DANTE (2014), EVES (2004), IEZZI (2011) entre outros para justificar a importância deste ensino nas séries finais da educação básica.

Sabe-se que o ensino da matemática vem passando por momentos delicados nestas últimas décadas, por isso é importante ampliar conhecimentos para que se tenha uma nova abordagem neste ensino e se aplique de forma clara. Desta maneira, acredita-se que haja um maior empenho por parte do professor e do aluno no sentido de que se acabe com este ranço que é o estudo da matemática.

Portanto, num mundo onde novas tecnologias e informações são mais acessíveis, os modelos matemáticos se tornam um facilitador quando se necessita resolver problemas e analisar gráficos.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática, função exponencial, problemas, gráficos.

ABSTRACT

The present dissertation deals with an approach regarding the teaching of exponential function for teachers of mathematics.

This work has served in the studies of LIMA (2010), DANTE (2014), EVES (2004), IEZZI (2011) among others to justify the importance of this teaching in the final series of basic education.

It is known that the teaching of mathematics is going through delicate moments in the last few decades, so it is important to expand knowledge for a new approach in this teaching and clearly applies. In this way, it is believed that there is a greater commitment on the part of the teacher and the student in the sense that if you finish with this rancid which is the study of mathematics.

Therefore, in a world where new technologies and information is more accessible, the mathematical models become a facilitator when you need to troubleshoot and analyze graphs.

KEYWORDS: mathematics, exponential function, problems, graphics.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O ensino da matemática passa por um momento muito delicado. Infelizmente, os resultados de muitos alunos estão abaixo do mínimo desejado. Um dos fatores que influenciam este fato deve ser o tamanho do Brasil, um país continental, que abriga diferentes realidades sociais e econômicas. Há, portanto uma enorme diferença de formação entre os educadores que ensinam matemática nas melhores escolas das regiões metropolitanas e da maioria dos professores que trabalham nas redes municipais e estaduais de ensino por todo o território nacional.

Ressalta-se que o jovem de hoje espera que a matemática do ensino médio, além de tratar temas importantes, aborde de forma clara e interessante as várias aplicações e interpretações relevantes daquele assunto nas outras disciplinas e no dia-a-dia de sua comunidade.

O fato é que existe uma série de problemas que podem facilitar a compreensão de determinado conteúdo, além de propiciar ao educando várias possibilidades de como entender, resolver e analisar os resultados desses problemas, não adianta enfatizar os aspectos manipulativos e fórmulas, pois isso torna as aulas cansativas e pouco atraentes.

Outro fator que deve ser tratado com cuidado é a escolha de um bom livro didático. É claro, que a apresentação do livro deve ser atraente, sendo que o mais importante é, sem dúvida, a observação da qualidade de seu conteúdo.

A matemática é uma ciência que caminha lado a lado com a evolução humana. As novas tecnologias computacionais, por exemplo, estão diretamente associadas à matemática. O fato é que esta ciência faz parte do cotidiano de todas as pessoas e por isso deve ser tratada com muito entusiasmo.

A formação dos profissionais de ensino tem sido outro ponto que se deve avaliar. Muitos não têm formação em matemática e outros, possuem apenas uma complementação pedagógica.

Idealmente o professor deveria participar rotineiramente de cursos de formação. No entanto, infelizmente nem sempre é possível. Seja pelo alto custo das formações ou pela falta de tempo, pois muitos professores superam as quarenta horas de trabalho semanais.

A presente dissertação tem como objetivo propor uma metodologia para que os educadores possam de forma coerente dar significado ao estudo da função exponencial de forma que a utilize como ferramenta central na resolução de vários problemas.

Portanto além das várias aplicações práticas é necessário preparar o educando para que ele possa ser protagonista de sua vida, seja no trabalho ou na vida acadêmica.

.

2. HISTÓRICO

De acordo com Eves (2004) o desenvolvimento da matemática está ligado diretamente ao desenvolvimento humano. Muitas foram as mentes brilhantes que de alguma maneira direta ou indiretamente contribuíram para o desenvolvimento dessa ciência. Um dos mais destacados matemáticos de todos os tempos foi sem dúvida Leonhard Euler, um suíço, que nasceu na Basiléia em 1707. Depois de ensaiar uma carreira no campo da teologia, Euler encontrou sua verdadeira vocação na matemática.

Em 1727 ele foi indicado membro da recém-criada Academia de São Petersburgo, pouco tempo depois se tornou o maior expoente da seção de matemática dessa academia.

Após quatorze anos na Academia de São Petersburgo, Euler aceitou chefiar a seção de matemática da Academia de Berlim. Euler se manteve durante vinte e cinco anos nesse trabalho. Durante todo esse tempo continuou a receber uma pensão da Rússia, o que comprova todo o respeito e prestígio que alcançou em Petersburgo.

Em 1766 retorna à Academia de São Petersburgo e lá permanece até sua morte em 1783. Em toda sua carreira nunca ocupou o cargo de professor.

Euler foi um matemático muito produtivo, e sem dúvida insuperável quanto a isso na história da matemática. Não há ramo da matemática em que seu nome não figure. Sua produtividade surpreendente não foi prejudicada mesmo ficando completamente cego próximo ao seu retorno a Academia de São Petersburgo. Ajudado por uma memória fenomenal e por um poder de concentração incomum e imperturbável, Euler continuou seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias, expressas verbalmente ou escrito com giz em um quadro grande. Entre livros e artigos, Euler publicou 530 trabalhos durante a vida, deixando ao morrer, uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petersburgo por mais de quarenta e sete anos.

Deve-se a Euler a criação das seguintes notações:

$f(x)$ para funções,

e para a base dos logaritmos naturais,

$\sum$ para somatórios,

i para a unidade imaginária, $\sqrt{-1}$.

Também se deve a ele a notabilíssima fórmula

$$e^{ix} = \cos x + isenx \text{ ,}$$

que, para $x = \pi$, se transforma em

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da matemática.

Leonhard Euler recebeu muitas homenagens, como duas que seguem, do físico e astrônomo François Arago (1786-1853):

“Euler poderia muito bem ser chamado, quase sem metáfora, e certamente sem hipérbole, a encarnação da análise.”

“Euler calculava sem nenhum esforço aparente, assim como os homens respiram e as águias se mantêm suspensas no ar.”

2.1 . O NÚMERO DE EULER

Apesar de muitos acreditarem que o número e (número de Euler) foi inventado por Leonhard Euler, na verdade foi o matemático John Napier (1550-1617) que de forma implícita em um texto intitulado *Mirifici logatithmorum cononis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos) quem primeiro sugeriu o número e.

A abordagem feita por Napier, nesse artigo, tinha como objetivo transformar multiplicações em adições, e para isso associou os termos de uma progressão geométrica

$$a, a^2, a^3, \cdots, a^m, \cdots, a^n, \cdots$$

aos termos de uma progressão aritmética

$$1, 2, 3, \cdots, m, \cdots, n, \cdots$$

então o produto

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

de dois termos da primeira progressão está associado à soma

$$m + n$$

dos termos correspondentes da segunda progressão.

Para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos de modo que se possa usar interpolação para preencher as lacunas entre os termos na correspondência precedente, deve-se escolher o número a bem próximo de 1. Napier tomou $1-1/10^7=0{,}9999999$ para a. Para evitar decimais, ele multiplicava cada potência por 10^7.

Então,

$$N=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^L$$

ele chamava L de "logarítmo" do número N.

Dividindo N por 10^7 e substituindo L por 10^7, note que teremos aproximadamente um sistema de logarítmos de base $\frac{1}{e}$.

$$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}\cong\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$$

Napier não trabalhava com o conceito de base de um sistema de logaritmos.

3. INDAGAÇÕES SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial tem grande importância em diversas situações do cotidiano, nas diversas ciências e nas tecnologias. Seja no cálculo de juros compostos ou no crescimento de determinada bactéria, ou na determinação do tempo de meia-vida do isótopo de materiais radioativos, ou no crescimento da população de um país, etc.

Segundo Lima [10] a função exponencial ocupa uma posição de destaque no ensino da matemática, pois constitui a única maneira de se descrever matematicamente a evolução de uma grandeza cuja taxa de (crescimento ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente num dado momento.

O ensino de Matemática no ensino médio tem papel primordial na formação do educando, sendo na preparação para o mercado de trabalho ou na formação inicial para que o estudante avance em seus estudos e formação. Está nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNs) que:

As finalidades do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:
• compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
• aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
• analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
• desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
• utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
• expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
• estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
• reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
• promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Por tudo isso o estudo da função exponencial é primordial na formação dos alunos do ensino médio.

4. POTÊNCIAS

4.1. POTÊNCIAS COM EXPOENTE NATURAL

Seja a um número real positivo. Para todo $n \in IN$, a potência a^n, de base a e expoente n, é definida como o produto de n fatores iguais a a.

Para $n = 1$, como não há produto de um só fator, então $a^1 = a$, por definição.

A definição por recorrência de a^n é:

$$a^1 = a \text{ e } a^{n+1} = a \cdot a^n.$$

Para quaisquer $m; n \in IN$ tem-se

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

pois em ambos os membros desta igualdade temos o produto de *m* + *n* fatores iguais a a. Segue então que, para $m_1, m_2, \ldots, m_i$ quaisquer em IN, vale:

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_i} = a^{m_1 + m_2 + \ldots + m_i}.$$

Em particular, se $m_1 = \cdots = m = m_i$, temos

$$\left(a^m\right)^i = a^{m.i}.$$

Se $a > 1$ então, multiplicando ambos os membros desta desigualdade por a^n, obtemos

$$a^{n+1} > a^n.$$

Portanto, se

$$a > 1$$

então

$$1 < a < a^2 < \cdots < a^n < a^{n+1} < \cdots.$$

Além disso, se

$$0 < a < 1$$

então

$$1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots,$$

como se vê multiplicando ambos os membros da desigualdade $a < 1$ pelo número positivo a^n.

Portanto, a sequência cujo n-ésimo termo a^n é crescente quando $a > 1$ e é decrescente quando $0 < a < 1$.

Para $a = 1$, esta sequência é constante, com todos os seus termos iguais a 1.

4.2. POTÊNCIAS COM EXPOENTE INTEIRO

Para n inteiro e $a \neq 0$ deve ser mantida a regra fundamental

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Como

$$a^0 \cdot a = a^{0+1} = a \text{, então } a^0 = 1.$$

Dado qualquer $n \in IN$ temos

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

logo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

para todo $n \in IN$.

A função $f : Z \to IR$, dada por $f(n) = a^n$, $n \in Z$, além de cumprir

$$f(m+n) = f(n) \cdot f(m),$$

é crescente para $a > 1$e decrescente $0 < a < 1$.

A partir de

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

temos que

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

para todo $n \in Z$.

4.3. POTÊNCIAS COM EXPOENTE RACIONAL

Seja a^r, onde $r = \dfrac{m}{n}$ é um número racional (com $m \in Z$ e $n \in Z^*$), uma potência de expoente racional. A regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ continua válida para r e s números racionais.

Então, para $r = \dfrac{m}{n}$, temos que

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{n \cdot r} = a^{n \cdot \frac{m}{n}} = a^m .$$

Portanto,

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} .$$

A função $f : Q \to IR$, dada por $f(r) = a^r$, $r = \dfrac{m}{n}$ onde $m \in Z$ e $n \in Z^*$, além de cumprir

$$f(m+n) = f(r) \cdot f(s),$$

é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

4.4. POTÊNCIAS COM EXPOENTE IRRACIONAL

Uma das formas de calcular uma potência com expoente irracional é considerar, inicialmente, as aproximações racionais por falta e por excesso desse número.

Exemplo:

1) Vamos calcular com aproximação de sete casas decimais o valor de $2^{\sqrt{3}}$.

   1º passo: Vamos calcular o valor de $3^{\sqrt{2}}$ utilizando aproximações por falta da $\sqrt{2}$.

Aproximações racionais da $\sqrt{2}$ por falta	$3^{\sqrt{2}}$
1	3
1,4	4,65553672174608
1,41	**4,7**0696500171657
1,414	**4,7**2769503526854
1,4142	**4,72**873393017119
1,41421	**4,728**78588090861
1,414213	**4,7288**0146624114
1,4142135	**4,72880**406380155
1,41421356	**4,728804**37550890
1,414213562	**4,7288043**8589914
1,4142135623	**4,7288043**8745768
1,41421356237	**4,7288043**8782134

2º passo: Vamos calcular o valor de $3^{\sqrt{2}}$ utilizando aproximações por excesso da $\sqrt{2}$.

Aproximações racionais da $\sqrt{2}$ por execesso	$3^{\sqrt{2}}$
2	9
1,5	5,19615242270663
1,42	**4,7**5896139405279
1,415	**4,7**3289179321975
1,4143	**4,72**925346322949
1,41422	**4,728**83783221678
1,414214	**4,7288**0666136339
1,4142136	**4,72880**458331380
1,41421357	**4,72880**442746012
1,414213563	**4,728804**39109426
1,4142135624	**4,7288043**8797719
1,41421356238	**4,7288043**8787329

Podemos observar que quando $\sqrt{2}$ assume valores racionais por falta e por excesso o valor de $3^{\sqrt{2}}$ aproxima-se de um mesmo número: 4,72880438.

5. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Seja a um número real positivo diferente de 1. A função exponencial $f: IR \rightarrow IR$ de base a indicada pela equação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in IR$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2. $a^1 = a$

3. Se $x < y$ então $\begin{cases} a^x < a^y, \text{quando } a > 1 \\ a^x > a^y, \text{quando } 0 < a < 1 \end{cases}$

Como

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

então a função f não pode se anular em ponto algum, a menos que seja identicamente nula.

Pois se existir algum $x_0 \in IR$ tal que $f(x_0) = 0$ então, para todo $x \in IR$ teremos:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

Se $f: IR \rightarrow IR$ tem a propriedade 1 e não é identicamente nula, então $f(x) > 0$ para todo $x \in IR$, pois

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Se $f: IR \rightarrow IR$ tem as propriedades 1 e 2, então para cada $n \in IN$ temos que

$$f(n) = f(1+1+\ldots+1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n,$$

onde $a = f(1)$.

Para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, com $m \in Z$ e $n \in Z^*$, devemos ter $f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Pois, como $nr = m$, temos que

$$f(r)^n = f(nr) = f(m) = f(1)^m.$$

Logo,

$$f(r) = f(1)^{\frac{m}{n}} = f(1)^r.$$

Se colocarmos $f(1) = a$, teremos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$$

para todo $r \in Q$.

Portanto,

$$f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

é a única função $f : Q \to IR^+$ tal que

$$f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$$

para quais quer $r, s \in Q$.

A propriedade 3, nos mostra que a função exponencial $f(r) = a^r$ para $r \in Q$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Daí resulta que existe única maneira de definir $f(x) = a^x$ quando x é irracional. Suponha que $a > 1$, então $y = a^x$ tem a seguinte propriedade: $\forall r, s \in Q$,

$$r < x < s \Rightarrow a^r < y < a^s.$$

Isso se verifica pelo Teorema do Valor Intermediário (veja [14]):

Suponha que f seja contínua em um intervalo fechado $[a,b]$ e seja N um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, onde $f(a) \neq f(b)$. Então existe um número c em (a,b) tal que $f(c) = N$.

Portanto, a^x é um número real cujas aproximações por falta são a^r, onde $r < x$ e $r \in Q$, e cujas aproximações por excesso é a^s, onde $x < s$ e $s \in Q$. Como não podem existir dois números reais distintos com a mesma propriedade acima, temos que:

Quando x é irracional, a^x é o único número real cujas aproximações por falta são as potências a^r, onde $r < x$ e $r \in Q$ e cujas aproximações por excesso são as potências a^s, onde $x < s$ e $s \in Q$.

5.1. CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

As funções exponenciais, funções afins e as funções quadráticas, são os modelos matemáticos mais utilizados na resolução de problemas elementares. A maior parte das dúvidas surge na escolha correta de qual modelo apropriado deve ser escolhido para a resolução do problema proposto. Para que a escolha seja feita de maneira correta é necessário saber quais são as propriedades características de cada função.

A caracterização da função exponencial segue abaixo:

Seja $f : IR \to IR^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente), as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $f(rx) = f(x)^r$, para todo $r \in Q$.

2. $f(x) = a^x$, para todo $x \in IR$, onde $a = f(1)$.

3. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in IR$.

Demonstração:

Provaremos as implicações: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

Para mostrar que $(1) \Rightarrow (2)$ observamos que a hipótese (1) acarreta que, para todo número racional

$$r = \frac{m}{n} \text{ (com } m \in Z \text{ e } n \in IN\text{) tem-se } f(rx) = f(x)^r.$$

Como $nr = m$, temos que

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m$$

logo,

$$f(rx) = f(x)^{\frac{m}{n}} = f(x)^r.$$

Se colocarmos $f(1) = a$, teremos

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r$$

para todo $r \in Q$.

Suponhamos agora que a função f seja crescente, logo

$$1 = f(0) < f(1) = a.$$

Admitamos, por absurdo, que exista um $x \in IR$ tal que

$$f(x) \neq a^x$$

Digamos, por exemplo, que $f(x) < a^x$. (O caso $f(x) > a^x$ é análogo).

Então, pelo Lema (Lima [11] pag. 177): "*Fixado um número real positivo* $a \neq 1$, *em todo intervalo de* IR^+ *existe alguma potência* a^r, *com* $r \in Q$, existe um número racional r tal que

$$f(x) < a^r < a^x,$$

ou seja,

$$f(x) < f(r) < a^x.$$

Como a função f é crescente, tendo

$$f(x) < f(r)$$

concluímos que

$$x < r.$$

Por outro lado, temos também que

$$a^r < a^x,$$

logo

$$r < x.$$

Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$. As implicações $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$ são óbvias.

Exemplo:

1) O número de bactérias de uma cultura, dobra a cada hora após o início de certo experimento. Sabendo que o experimento começou com exatamente uma bactéria, nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 32 728 bactérias?

   Uma solução:

   É fácil perceber que a função que relaciona o número total de bactérias em função do tempo é dada por

$$f(x) = 2^x.$$

   Logo

$$f(x) = 2^x$$

$$32728 = 2^x$$

$$2^{15} = 2^x$$

$$x = 15$$

   Portanto o tempo necessário, após o início do experimento, para que a cultura atinja 32 728 bactérias é de 15 horas.

5.2. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

A construção do gráfico da função $f(x)=a^x$ é muito importante para que se perceba de forma geométrica a monoticidade dessa função e que f é ilimitada superiormente.

É importante observar que:

1) Para $a>1$ a função é crescente, e que para valores negativos de x (com $|x|$ muito grande) a^x pode ser tonar tão próximo de zero quanto se queira, (isto significa que o eixo x é uma assíntota desse gráfico).

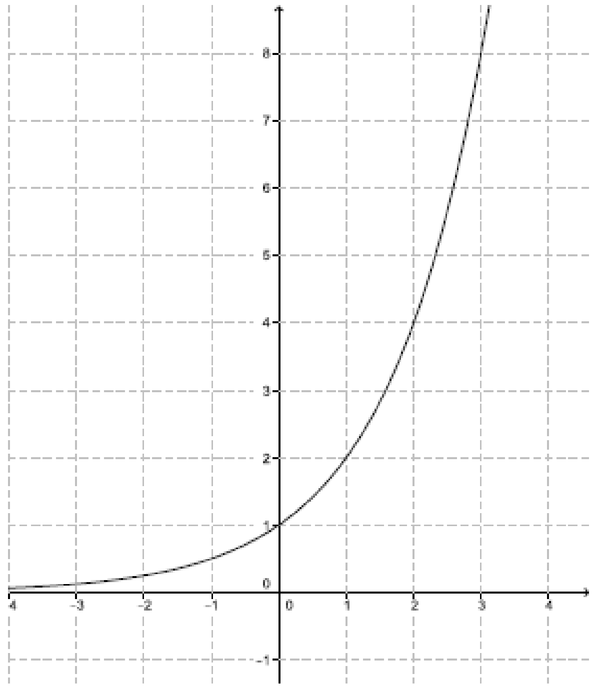
2) Para $0<a<1$ a função é decrescente e que para valores positivos de x (com $|x|$ muito grande) a^x pode ser tonar tão próximo de zero quanto se queira (isto significa que o eixo x é uma assíntota desse gráfico).

Em muitos dos livros didáticos a construção do gráfico é feita utilizando apenas para valores de x números inteiros. Não são inseridos os números racionais e irracionais.

Exemplo:

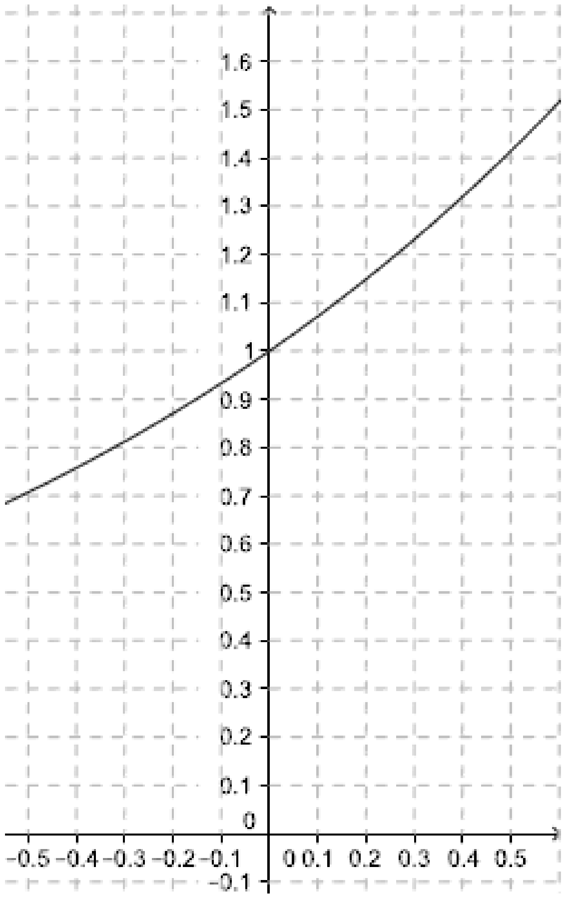
1) Construa o gráfico das seguintes funções:
   a) $f(x)=2^x$

x	$f(x)$
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	0,5
-2	0,25
-3	0,125



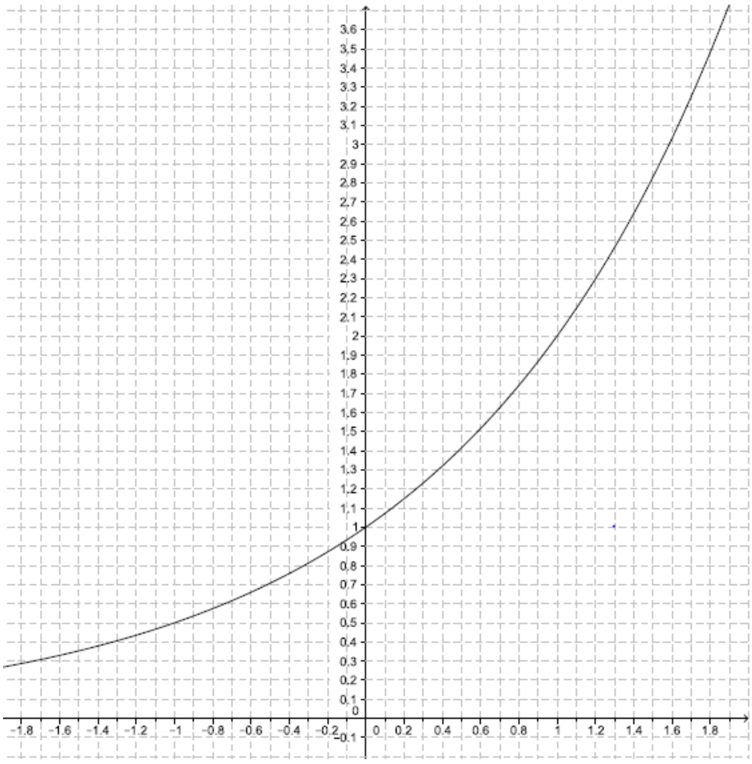
Vamos analisar o que acontece com a função quando x é racional e pertence ao intervalo de $-0{,}5 < x < 0{,}5$.

x	$f(x)$
-0,5	0,707107
-0,4	0,757858
-0,3	0,812252
-0,2	0,870551
-0,1	0,933033
0	1
0,1	1,071773
0,2	1,148698
0,3	1,231144
0,4	1,319508
0,5	1,414214



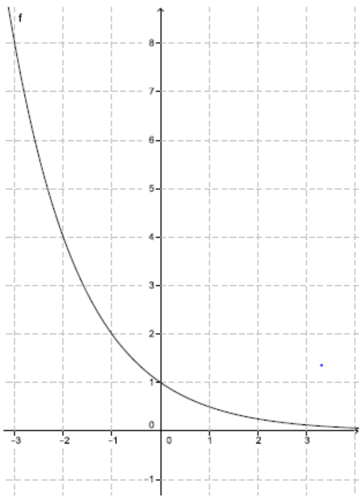
Vamos observar o que acontece com a função quando x é irracional.

x	$f(x)$
$-\sqrt{3} \cong$ -1,73205	0,301024
$-\sqrt{2} \cong$ -1,41421	0,375214
1	2
0	1
$\sqrt{2} \cong$ 1,414214	2,665144
$\sqrt{3} \cong$ 1,732051	3,321997



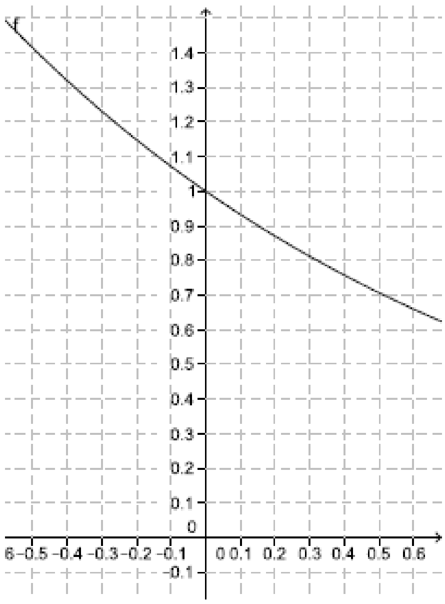
b) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

x	$f(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	0,5
2	0,25
3	0,125



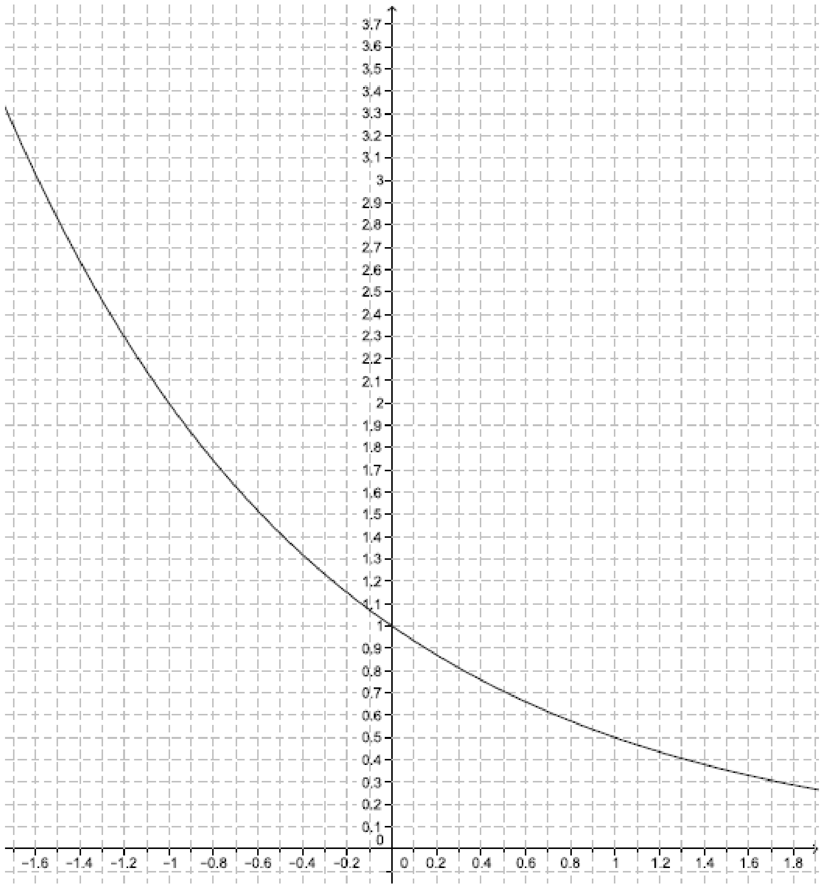
Vamos analisar o que acontece com a função quando x é racional e pertence ao intervalo de $-0{,}5 < x < 0{,}5$.

x	$f(x)$
-0,5	1,41421
-0,4	1,31951
-0,3	1,23114
-0,2	1,1487
-0,1	1,07177
0	1
0,1	0,93303
0,2	0,87055
0,3	0,81225
0,4	0,75786
0,5	0,70711



Vamos observar o que acontece com a função quando x é irracional.

x	$f(x)$
$-\sqrt{3} \cong$ -1,7321	3,322
$-\sqrt{2} \cong$ -1,4142	2,66514
-1	2
0	1
1	0,5
$\sqrt{2} \cong$ 1,41421	0,37521
$\sqrt{3} \cong$ 1,73205	0,30102



5.3. FUNÇÃO DO TIPO EXPOENECIAL

Dizemos que uma função $g(x): IR \rightarrow IR$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in IR$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, g é crescente e se $0 < a < 1$, g é decrescente.

5.4. CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE TIPO EXPONENCIAL

A maioria dos problemas envolvendo crescimento exponencial está ligada as funções de tipo exponencial e para empregá-lo de forma correta é necessário que se caracterize esse tipo de função.

A caracterização das funções de tipo exponencial segue abaixo:

Seja $g : IR \rightarrow IR^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente). Suponha que, para quaisquer $x, h \in IR$, o acréscimo relativo

$\dfrac{[g(x+h)-g(x)]}{g(x)}$ dependa apenas de h, mas não de x. Então, se $b=g(0)$ e $a=\dfrac{g(1)}{g(0)}$, temos que $g(x)=b\cdot a^x$.

Demonstração:

Como vimos acima, a hipótese feita equivale a supor que $\varphi(x)=g(x+h)/g(x)$ independe de x. Substituindo, se necessário, $g(x)$ por $f(x)=g(x)/b$, onde $b=g(0)$, f continua sendo monótona injetiva, com $f(x+h)/f(x)$ independente de x e, agora, com $f(0)=1$. Então, pondo $x=0$ na relação $\varphi(h)=f(x+h)/f(x)$, obtemos $\varphi(h)=f(h)$ para todo $h\in IR$. Vemos assim que a função monótona injetiva f cumpre $f(x+h)=f(x)\cdot f(h)$, ou seja, $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ para quaisquer $x,y\in IR$. Segue-se então do teorema anterior que $f(x)=a^x$, logo $g(x)=bf(x)=ba^x$, como queríamos demonstrar.

Exemplo:

1) Um pesquisador encontrou em suas investigações a seguinte relação entre os valores de x e y:

x	1	3	5	7
y	6	12	24	48

Qual a função de tipo exponencial relaciona y em função de x?

Uma solução:

x	1	3	5	7
$(x+1)/2$	1	2	3	4
$y/3$	2	4	8	16

É fácil perceber que a função que relaciona x e y é uma função do tipo exponencial.

Essa função é definida por $y = 3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$.

Justificando:

$$y = 3 \cdot 2^{\frac{1+1}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{2}{2}} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$y = 3 \cdot 2^{\frac{3+1}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{4}{2}} = 3 \cdot 2^{2} = 12$$

$$y = 3 \cdot 2^{\frac{5+1}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{6}{2}} = 3 \cdot 2^{3} = 24$$

$$y = 3 \cdot 2^{\frac{7+1}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{8}{2}} = 3 \cdot 2^{4} = 48$$

2) Imagine que certa droga injetada em uma pessoa tem a propriedade de que, em cada período de 4 horas no tempo, a metade da quantidade presente no organismo, seja naturalmente eliminada. Injetando-se $12mg$ dessa droga em uma pessoa, pergunta-se que quantidade dela resta no organismo 6 horas após a aplicação?

Uma solução:

A cada acréscimo de 4 horas no tempo, a quantidade de droga no organismo fica multiplicada por $\frac{1}{2}$. Portanto a função do tipo exponencial é a adequada para resolver o problema.

Podemos concluir que após t horas da aplicação da droga, a quantidade presente no organismo é

$$f(t) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}.$$

Para $t = 6h$ temos que

$$f(6) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6}{4}}$$

$$f(6) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(6) \cong 4{,}24$$

A quantidade dessa droga no organismo 6 horas após a aplicação é de aproximadamente $4{,}24mg$.

5.5. FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÕES

Toda progressão geométrica é a restrição de uma função $f(x) = b \cdot a^x$, de tipo exponencial, à algum subconjunto do conjunto dos números naturais. Permitindo que estas simples observações sejam transformadas em analogias e em casos particulares e explicar por que tantos problemas podem ser tratados por progressão geométrica ou pela função exponencial**.**

Seja $f : IR \to IR^+$, $f(x) = b \cdot a^x$ uma função de tipo exponencial.

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ é uma progressão aritmética de razão r, isto é,

$$x_2 = x_1 + r, x_3 = x_2 + r, \ldots, x_{n+1} = x_n + r$$

então os valores

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, \ldots, f(x_n) = ba^{x_n}, \ldots,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^r, pois

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_{n+1}} = ba^{x_n + r} = (ba^{x_n})a^r .$$

Como o $(n+1)$–ésimo termo da progressão aritmética dada é

$$x_{n+1} = x_1 + nr ,$$

segue que

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_1 + nr} = (ba^{x_1})a^{nr} = f(x_1)A^n ,$$

onde

$$A = a^r .$$

Em particular, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$, logo

$$f(x_{n+1}) = bA^n.$$

Exemplos:

1) Suponha que um capital inicial c_0 é aplicado a juros fixos então, depois de decorrido um tempo t, o capital presente é dado por $c(t) = c_0 \cdot a^t$. Se tivermos extratos da conta nos tempos $0, h, 2h, 3h, \ldots$ teremos $c(0) = c_0, c(h) = c_0 \cdot A, c(2h) = c_0 \cdot A^2, c(3h) = c_0 \cdot A^3, \ldots$ onde $A = a^h$. Portanto, a evolução do saldo, quando calculado em intervalos de h unidades de tempo, é dada pela progressão geométrica:

$$c_0, c_0 \cdot A, c_0 \cdot A^2, c_0 \cdot A^3, \ldots$$

Esta é a propriedade característica das funções de tipo exponencial.

2) Dadas à progressão aritmética $(-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ e a função exponencial $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Verifique se a sequência $(f(-2), f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), f(10), \ldots)$ é uma progressão geométrica.

Uma solução:

$$f(-2) = 2 \cdot 3^{-2}$$

$$f(0) = 2.3^0$$

$$f(2) = 2.3^2$$

$$f(4) = 2 \cdot 3^4$$

$$f(6) = 2 \cdot 3^6$$

$$f(8) = 2.3^8$$

$$f(10) = 2 \cdot 3^{10}$$

Portanto a sequência $(2 \cdot 3^{-2}, 2 \cdot 3^0, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^4, 2 \cdot 3^6, 2 \cdot 3^8, 2 \cdot 3^{10}, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão 3^2.

6. UMA UTILIZAÇÃO DO NÚMERO DE EULER

O número de Euler e está presente em diversos processos de crescimento ou decrescimento exponencial, dentre os quais possui destaque o problema de aplicação de um capital a uma taxa anual de $i\%$ com juros compostos capitalizados de forma contínua durante t anos.

Suponha que um determinado capital C_0, seja aplicado a juros de 100% ao ano.

O capital final acumulado após um ano é dado por:

$$C_1 = C_0 + \frac{100}{100}C_0 = C_0 + C_0 = 2C_0$$

Agora, a forma de incorporação dos juros será alterada, porém mantendo a taxa anual de 100%.

Suponha que a referida taxa seja decomposta em duas taxas semestrais de 50%, sendo os juros incorporados ao capital no final de cada semestre. Daí segue que, a partir do capital inicial, haverá duas acumulações a serem consideradas. A primeira ocorrerá ao final do 1º semestre e a segunda ao final do 2º semestre, com a ressalva de que o capital inicial a ser utilizado no cálculo do montante do 2º semestre coincide com o montante acumulado ao final do 1º semestre. Temos que

O capital após o final do 1º semestre será:

$$C_{\frac{1}{2}} = C_0 + \frac{50}{100}C_0 = C_0 + \frac{1}{2}C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

O capital após o final do 2º semestre será:

$$C_1 = C_{\frac{1}{2}} + \frac{50}{100}C_{\frac{1}{2}} = C_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$$

Suponha que a referida taxa seja decomposta em quatro taxas trimestrais de 25%, sendo os juros incorporados ao capital no final de cada trimestre.

O capital após o final do 1º trimestre será:

$$C_{\frac{1}{4}} = C_0 + \frac{25}{100}C_0 = C_0 + \frac{1}{4}C_0 = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)$$

O capital após o final do 2º trimestre será:

$$C_{\frac{2}{4}} = C_{\frac{1}{4}} + \frac{25}{100}C_{\frac{1}{4}} = C_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}C_{\frac{1}{4}} = C_{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{4}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$$

O capital após o final do 3º trimestre será:

$$C_{\frac{3}{4}} = C_{\frac{2}{4}} + \frac{25}{100}C_{\frac{2}{4}} = C_{\frac{2}{4}} + \frac{1}{4}C_{\frac{2}{4}} = C_{\frac{2}{4}}\left(1+\frac{1}{4}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^3$$

O capital após o final do 4º trimestre será:

$$C_{\frac{4}{4}} = C_{\frac{3}{4}} + \frac{25}{100}C_{\frac{3}{4}} = C_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}C_{\frac{3}{4}} = C_{\frac{3}{4}}\left(1+\frac{1}{4}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) = C_0\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$$

Caso a capitalização fosse mensal seria necessário subdividir ano e a taxa anual de 100% em 12 partes iguais, daí o resultado seria:

$$C_{\frac{12}{12}} = C_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$$

Caso a incorporação seja realizada de forma diária seria preciso subdividir o ano e a taxa anual de 100% em 365 partes iguais, portanto o resultado seria:

$$C_{\frac{365}{365}} = C_0\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$$

Generalizando o fenômeno, isto é, subdividindo o ano e a taxa anual de 100% em n partes iguais e considerando-se que os juros são incorporados ao capital no final de cada período, tem-se:

$$C_{\frac{n}{n}} = C_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Divisão	Fator de atualização
n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037037
4	2,44140625
5	2,48832
10	2,59374246
50	2,691588029
100	2,704813829
365	2,714567482
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
1000000	2,718280469

Cálculo aproximado do valor do número de Euler.

Pode se mostrar que a expressão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

aproxima-se indefinidamente para um número decimal não periódico (número irracional ou transcendental) denominado de número de Euler. Tal número é representado por e. Uma aproximação suficiente com três casas decimais para tal número é dada por

$$e \approx 2{,}718.$$

Assim, conclui-se que um capital C_0, aplicado a uma taxa de 100% ao ano, com capitalização contínua (a cada instante), resultará ao final do 1º ano um valor C_1 tal que:

$$C_1 = C_0 \cdot e$$

Isto é, quando n torna-se suficientemente grande (incorporação de juros de forma continuada/instantânea), tem-se que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

se aproxima arbitrariamente para o número irracional e.

É importante observar que, caso a aplicação seja a uma taxa anual de $i\%$ ao ano, com aplicação n vezes ao ano, ao final de um ano haverá um capital expresso por

$$C_1 = C_0 \cdot \left(1+\frac{i}{n}\right)^{n} = C_0 \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n/i}\right)^{n/i}\right]^{i}.$$

Sendo a capitalização contínua, ao final de um ano o montante será

$$C_1 = C_0 \cdot e^{i}.$$

Já no final de t anos,

$$C_1 = C_0 \cdot e^{it}.$$

Uma excelente demonstração de modelagem matemática que faz uso do número de Euler de maneira construtiva.

Exemplo:

1) Empregando-se um capital C_0 a juros contínuos de 20% ao ano, em quanto tempo este capital será dobrado?

   Uma solução:

   Temos que $i = \frac{20}{100} = 0{,}2$. Devemos determinar o número t de anos tal que:

$$C(t) = C_0 \cdot e^{0,2t}$$

$$C_0 \cdot e^{0,2t} = 2C_0$$

$$e^{0,2t} = 2$$

$$t = 3{,}46$$

7. DA TEORIA À PRÁTICA: O MINICURSO

No segundo semestre de 2014 foi ministrado o minicurso “Função exponencial: Definição, Caracterização e Aplicações”, para 18 alunos do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio de Administração do IFES Campus Cariacica, com uma carga horária de 16 horas presenciais e 6 horas não presenciais. Cujos objetivos principais foram:

- Traçar um diagnóstico do conhecimento prévio do aluno a respeito da função exponencial.
- Realizar atividades de caráter educacional, voltados ao estudo de caso e à pesquisa.
- Perceber que os conceitos da função exponencial podem resolver problemas do cotidiano.
- Aprofundar o conhecimento sobre a aplicabilidade da função exponencial no exame nacional do ensino médio (ENEM).
- Reconhecer a função exponencial através de sua caracterização como modelo adequado para solução de determinados problemas.

O minicurso começou com a aplicação de um teste diagnóstico, conforme Anexo 1, visando identificar qual o nível de conhecimento estes participantes tinham sobre a função exponencial.

Após a aplicação do diagnóstico foi apresentado o seguinte problema para que os alunos discutissem e encontrassem o melhor modelo matemático para solucioná-lo:

Uma piscina tem capacidade para $100m^3$ de água. Quando a piscina está completamente cheia, é colocado $1kg$ de cloro na água. A água pura (sem cloro) continua a ser colocada na piscina a uma vazão constante, sendo o excesso de água eliminado por meio de um ladrão. Depois de 1 hora, um teste revela que ainda restam $900g$ de cloro na piscina.

a) Que quantidade de cloro restará na piscina 3 horas após sua colocação?

b) E após meia hora da aplicação?

c) E após t horas?

A fim de contribuir com a reflexão do tema proposto, foi apresentado partes de um vídeo do Professor Elon Lages Lima sobre a função exponencial. Depois da apresentação desse vídeo foi aberto um debate a respeito das definições ali apresentadas. A partir de uma aula expositiva foram feitas a caracterização da função exponencial e da função de tipo exponencial. E por fim foi sugerido aos participantes vários exercícios de aplicações da função exponencial e da função do tipo exponencial conforme anexo 3.

A avaliação se deu através da observação da resolução dos problemas apresentados durante o minicurso e por uma prova discursiva no final, conforme Anexo 2.

Ao concluir o minicurso os participantes tiveram a tranquilidade de fazer um relato sobre o desenrolar do minicurso aplicado. E, assim foi descrito pela aluna A "(...) aprendi que muitos problemas básicos de nosso dia a dia podem ser resolvidos apenas aplicando os conceitos de exponencial"; Enquanto a aluna B destaca "(...) me ajudou muito e vai me ajudar no ENEM"; Já para o aluno C "(...) os exercícios foram bons e com níveis variados de complexidade"; Enfim para aluna D "As aulas foram bem aproveitadas e produtivas com apresentação de vídeos e resolução de exercícios sobre o tema".

8. CONCLUSÃO

A impressão que tive foi que esse conteúdo não era de interesse de vários dos alunos, pois os conceitos e aplicações sobre função exponencial não estavam bem definidos para todos. Além disso, alguns deles inicialmente não distinguiam a função linear da função exponencial e isso foi percebido no problema proposto no início do minicurso, pois pelo menos metade dos participantes acreditavam em se tratar de um problema de proporcionalidade, alguns não tiveram ideia de como resolver esse problema e apenas três alunos perceberam que se tratava de uma situação relacionada à função exponencial.

Ficou evidenciado, durante a aplicação da metodologia, que esse recurso didático favoreceu as interações entre os alunos, o diálogo e o espaço para discussões, mostrando-se como facilitador da aprendizagem conceitual. A aceitação e o interesse sobre o tema proposto foi aumentando a partir do entendimento desse conteúdo. As várias aplicações da função exponencial também contribuíram significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem.

O entendimento da definição da função exponencial é extremamente importante para os estudantes do ensino médio e superior.

Por fim após analisar as soluções das várias atividades propostas em sala, das discussões sobre o tema e das duas provas que eles fizeram chego à conclusão que houve uma melhora significativa de aprendizagem por parte dos alunos.

O anexo 4 contém as avaliações diagnósticas realizadas por alguns desses alunos que participaram do minicurso. Já no anexo 5 estão as avaliações finais feitas pelos mesmos educandos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo da função exponencial, não é bem visto pelos estudantes do ensino médio, acham esse conteúdo muito difícil e cansativo. Além disso, não conseguem perceber nenhum tipo de aplicação prática, mesmo aqueles que já concluíram o ensino médio, na maioria das vezes não sabem o porquê estudaram esse tema.

Infelizmente a abordagem feita por alguns livros didáticos não traz muito estímulo para que o aluno possa perceber o quanto é importante o estudo dessa função. São poucos os exemplos práticos e problemas que envolvem esse conteúdo. Há uma preocupação grande em se trabalhar com as equações e inequações exponenciais, deixando de lado as várias aplicações e situações problemas.

Outro fator relevante é a má formação do profissional que leciona a disciplina de Matemática. Este muitas vezes não participa de cursos de formação, de atualização.

Outra observação que dever ser feita é a falta de cuidado na apresentação dos assuntos. Muitas justificativas e provas não são feitas, os teoremas são colocados como verdadeiros sem nenhuma justificativa.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais nos dizem que: **“**a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico”. Portanto a função exponencial se bem estudada e aprendida certamente contribuirá para que este cidadão tenha competências e habilidades em seu desempenho profissional.

Para reunir teoria à prática foi aplicado, no segundo semestre de 2014, o minicurso “Função exponencial: Definição, Caracterização e Aplicações”, para alunos do Curso Técnico Integrado ao Ensino Médio de Administração do IFES Campus Cariacica, com a finalidade de traçar um diagnóstico do conhecimento prévio do aluno a respeito da função exponencial e das várias aplicações dessa função no cotidiano.

Além disso, vivemos em um mundo onde as informações são muito mais acessíveis. Todos os dias novos avanços tecnológicos são descobertos e postos a sociedade. É necessário que a educação caminhe lado a lado com esses novos tempos.

Sugere-se que haja uma dedicação de todos os profissionais da área de matemática no sentido de estimular o estudo não só da função exponencial, mas também de todo o conteúdo que amplie o raciocínio lógico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Brasil. [Lei Darcy Ribeiro (1996)]. LDB : Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional : Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional [recurso eletrônico]. – 8. ed. – Brasília : Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2013.

[2] BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000.

[3] BRASIL/MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

[4] Dante, Luiz Roberto. Matemática Contexto & Aplicações, 1 Ensino Médio, 4ª ed., São Paulo, SP: Editora Ática, 2014.

[5] Eves, Howard. Introdução à História da Matemática/ Howard Eves; Tradução: Hygino H. Domingues. – Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[6] Iezzi, G.; Dolce, O.; Degenszajn, D.; Périgo, R.; Almeida, N. Matemática: Ciências e Aplicações – Volume 01. São Paulo, SP: Saraiva, 2011.

[7] Iezzi, G.; Dolce, O.; Murakami, C. Fundamentos de Matemática Elementar, 9ª ed. São Paulo, SP: Atual, 2004.

[8] Lima, Elon Lages. Matemática e Ensino, 3 ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

[9] Lima, Elon Lages. Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro, 2001.

[10] Lima, Elon Lages. Logarítmos, Coleção do Professor de Matemática, 4ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2010.

[11] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Coleção do Professor de Matemática, Vol. 01, 7ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2004.

[12] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Coleção do Professor de Matemática, Vol. 02, 4ª ed., Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2002.

[13] Souza, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática, Versão com Trigonometria, Vol. 01, ed.01, São Paulo, SP: Editora Ática, 2011.

[14] Stewart, James. Cálculo: Volume 1/ James Stewart; tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. Tradução da 6ª edição norte-americana, São Paulo. CENGAGEM Learning. 2009

[15] https://www.youtube.com/watch?v=2u0qBglqpSc – Vídeo do Professor Elon Lages Lima.

ANEXOS

ANEXO 1

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Nome: ____ **Turma:** ___________

Data: ____________________________ **Acertos:** ______________________

1) Calcule o valor de:
   a) $2^3 =$
   b) $10^{-2} =$
   c) $\left(3^2\right)^3 =$
   d) $2^{3^4} =$
   e) $64^{\frac{1}{3}} =$
   f) $\left(-5\right)^{-3} =$
   g) $12^0 =$

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:
   a) $3^4.3^2.3^{-3}.3^{-2} =$
   b) $\dfrac{2^2.2^4}{2^6} =$
   c) $\left(7^3\right)^4 : 7^{2^3} =$
   d) $\dfrac{81^3.9^4 : 27^{-2}}{3^{-7} : 243^2} =$

e) $4^2.2^{\frac{5}{2}}:\sqrt[3]{16}.\sqrt{8^{-1}}.=$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:
   a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

   b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

ANEXO 2

INSTITUTO FEDERAL
ESPÍRITO SANTO
Campus Cariacica

Nome: ___________________________________ **Turma:** ___________

Data: ____________________________ **Acertos:**______________________

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:
   a) $5^4 : 5^6 . 5^{-2} : 5^{-5} =$

   b) $(6^4)^4 : 6^{2^4} =$

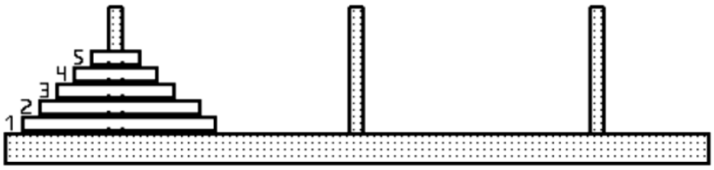
   c) $\dfrac{64^3 . 8^4 : 32^{-2}}{256^{-7} : 1024^2} =$

   d) $9^3 . 3^{\frac{7}{6}} : \sqrt[3]{243} . \sqrt{81^{-3}} . =$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

3) **(UNIFOR CE)** Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t) = P_o \cdot 2^{0,05t}$, na qual P_o é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

4) **(UNIRG TO)** A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte:
http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter 2.047 movimentos mínimos na torre de Hanói.

5) Uma pessoa comprou um apartamento por R$ 400.000,00. Caso esse apartamento se valorize 2% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu apartamento após dois anos de sua compra?

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

ANEXO 3

SUGESTÃO DE PROBLEMAS

Para resolução de alguns dos problemas abaixo é necessário o uso de calculadora.

1) (Vunesp) O acidente do reator nuclear de Chernobyl, em 1986, lançou na atmosfera grande quantidade de ${}^{90}_{38}Sr$ radioativo, cuja meia-vida é de 28 anos. Supondo ser este isótopo a única contaminação radioativa e sabendo que o local poderá ser considerado seguro quando a quantidade de ${}^{90}_{38}Sr$ se reduzir, por desintegração, a $\frac{1}{16}$ da quantidade inicialmente presente, a partir de que ano o local poderá ser habitado novamente?

2) (UEG-GO) Certa substância desintegra-se de modo que, decorrido o tempo *t*, em anos, a quantidade ainda não desintegrada na substância é $S = S_0 \cdot 2^{-0,25t}$, em que S_0 representa a quantidade de substância que havia no início. Qual é o valor de *t* para que a metade da quantidade inicial desintegre-se?

3) O carbono-14 é um isótopo raro do carbono presente em todos os seres vivos. Com a morte, o nível de C-14 no corpo começa a decair. Como é um isótopo radioativo de meia-vida de 5730 anos, e como é relativamente fácil saber o nível original de C-14 no corpo dos seres vivos, a medição da atividade de C-14 num fóssil é uma técnica muito utilizada para datações arqueológicas. A atividade radioativa do C-14 decai com o tempo pós-morte segundo a função $A(t) = A_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5730}}$, em que A_0 é a atividade natural do C-14 no organismo vivo e *t* é o tempo decorrido em anos após a morte. Suponha que um fóssil encontrado em uma caverna foi levado ao laboratório para ter sua idade estimada. Verificou-se que emitia 7 radiações de C-14 por grama/hora. Sabendo que o animal vivo emite 896 radiações por grama/hora, qual é a idade aproximada do fóssil?

4) (FMJ-SP) O número de bactérias de uma cultura, *t* horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38 400 bactérias?

5) Chama-se montante (**M**) a quantia que uma pessoa deve receber após aplicar um capital **C**, a juros compostos, a uma taxa **i** durante um tempo **t**. O montante pode ser calculado pela fórmula $M = C(1+i)^t$. Supondo que o capital aplicado é de RS 4 000,00 a uma taxa de 9,8% ao ano durante 5 anos, qual o montante no final da aplicação?

6) Para analisar o efeito de um remédio no extermínio de determinada bactéria, cientistas fizeram experimentos expondo uma população desse microrganismo ao remédio e verificando o tempo necessário para que fosse exterminada. Ao final, verificou-se que a população de bactérias ***d*** dias após a exposição ao remédio poderia ser estimada por meio da função $f(d) = 6000.(0{,}25)^d$. Dois dias após a exposição ao remédio, a população da bactéria reduziu-se a quantos por cento da população inicial?

7) O tabagismo favorece o desencadeamento de uma série de doenças que podem levar ao óbito. Estima-se que no mundo morrem anualmente cerca de 4,9 milhões de pessoas em decorrência do tabagismo, sendo 200 mil somente no Brasil. Ao fumar, a nicotina, presente nos cigarros, é rapidamente absorvida pelos pulmões, chegando a poucos segundos à circulação sanguínea e ao cérebro. A quantidade de nicotina presente no corpo de uma pessoa reduz pela metade a cada duas horas. Quando os neurônios sentem falta dessa substância, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração, o que leva a pessoa a fumar novamente, repetindo assim o ciclo. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproximadamente 1 mg de nicotina. Considerando o consumo de um cigarro:
   a) Qual função representa a quantidade **y** de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa **t** horas após o consumo de um cigarro, desconsiderando uma quantidade inicial que porventura se tenha no organismo?

   b) Qual a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente daquele cigarro, após 4h?

8) Certo banco oferece um investimento que rende uma taxa de 6% ao ano de juros compostos. Observe a simulação de um investimento de R$ 1 500,00 em um período de três anos.

Ano (n)	**Juro (J)**	**MONTANTE(M)**
1	1 500,00.0,06 = 90,00	1 500,00 + 90,00 = 1 590,00
2	1 590,00.0,06 = 95,40	1 590,00 + 95,40 = 1 685,40

3	1685,40.0,06 = 101,12	1 685, 40 + 101,12 = 1 786,52

a) Qual das funções a seguir determina o montante *M* obtido ao final do ano *n*, ao se investir R$ 1 500,00?

- $M = 1500 \cdot (6)^n$
- $M = 1500 + (6)^n$
- $M = 1500 \cdot (1{,}06)^n$
- $M = 1500 + (1{,}06)^n$

b) Qual será o montante ao final de 4 anos? E de 6 anos?

9) Certa empresa utiliza a função $n(t) = 600 - 200 \cdot (0{,}6)^t$ para estimar o número *n* de peças produzidas mensalmente por um funcionário com *t* meses de experiência.

a) Quantas peças são produzidas em um mês por um funcionário com 4 meses de experiência?

b) Estima-se que a produtividade de um funcionário com 2 meses de experiência aumente quantos por cento se comparada com o mês em que foi contratado?

10) O torneio de futebol “mais democrático” realizado no Brasil, assim conhecido popularmente por visitar a abrangência nacional do futebol, é a Copa do Brasil. Na edição de 2009, esse torneio foi disputado por 64 clubes. Nesse campeonato, em cada fase, eram formados grupo de dois clubes. Aquele que somava o maior número de pontos em seu grupo era classificado para a fase seguinte. Assim, após cada fase, metade dos clubes era eliminado.

Considerando a edição de 2009 da Copa do Brasil, responda:

a) Qual a função que relaciona a quantidade **y** de clubes que permaneceram na disputa ao final da fase **x** do torneio?

b) Após quantas fases do torneio restaram 8 clubes na disputa?

c) Em quantas fases a Copa do Brasil foi disputada?

11) A divisão celular denominada mitose consiste em uma célula duplicar o seu conteúdo e então se dividir em duas, chamadas de células-filhas. Cada célula-filha, por sua vez, repete esse processo, totalizando após a 2ª divisão, quatro células-filhas.

a) Determine o número total de células-filhas obtidas a partir de uma única célula após: 3 divisões, 4 divisões, 7 divisões.

b) Escreva a função que associe a quantidade total de células-filhas **y**, obtida a partir de uma única célula, após uma quantidade **x** de divisões.

12) **(UNICAMP SP)** Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 10% ao ano sobre o preço do ano anterior. Se F representa o preço inicial (preço de fábrica) e p(t), o preço após t anos, pede-se:

a) A expressão para p(t);

b) O tempo necessário, em números inteiros de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 65,61% do valor inicial.

13) **(UNICAMP SP)** O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde *t* é um instante de tempo, medido em anos, *b* é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante t = 0.

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor da constante *b*.

b) Dada uma concentração inicial P_0, de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a $\frac{1}{16}$ de P_0.

14) **(UNICAMP SP)** A concentração de CO_2 na atmosfera vem sendo medida, desde 1958, pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual de crescimento da concentração de CO_2 irá se manter constante nos próximos anos.

a) Escreva uma função C(t) que represente a concentração de CO_2 na atmosfera em relação ao tempo t, dado em anos. Considere como instante inicial — ou seja, aquele em que t = 0 — o ano de 2004, no qual foi observada uma concentração de 377,4 ppm de CO_2 na atmosfera.

b) Determine aproximadamente em que ano a concentração de CO_2 na atmosfera será 50% superior àquela observada em 2004.

15) **(UNIFESP SP)** Uma droga na corrente sanguínea é eliminada lentamente pela ação dos rins. Admita que, partindo de uma quantidade inicial de Q_0 miligramas, após t horas a quantidade da droga no sangue fique reduzida a $Q(t) = Q_0 \cdot (0{,}64)^t$ miligramas.

Determine:

a) A porcentagem da droga que é eliminada pelos rins em 1 hora.

b) O tempo necessário para que a quantidade inicial da droga fique reduzida à metade.

16) (UNICAMP-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de –18ºC. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 ºC após 90 minutos e chegou a –16ºC após 270 minutos. Determine os valores de α e β.

17) A bula do antibiótico que meu médico prescreveu indicava que, 24 horas após a primeira dose, a concentração plasmática da substância ativa reduz-se a 10% da concentração máxima. (Por simplicidade, admitamos que se tratasse de uma injeção, logo o nível máximo da droga no sangue foi atingido imediatamente.) A receita médica estipulava doses iguais a cada 12 horas. Que fração da dose inicial ainda permanecia em meu organismo na ocasião da segunda dose?

18) **(UNIFOR CE)** Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t) = P_o \cdot 2^{0{,}05t}$, na qual P_o é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

19) **(UERJ)** Pelos programas de controle de tuberculose, sabe-se que o risco de infecção R depende do tempo t, em anos, do seguinte modo: $R = R_0 \cdot e^{-kt}$, em que R_0 é o risco de infecção no início da contagem do tempo t e k é o coeficiente de declínio.

O risco de infecção atual em Salvador foi estimado em 2%. Suponha que, com a implantação de um programa nesta cidade, fosse obtida uma redução no risco de 10% ao ano, isto é, k = 10%.

Use a tabela abaixo para os cálculos necessários:

e^x	8,2	9,0	10,0	11,0	12,2
x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

Determine o tempo, em anos, para que o risco de infecção se torne igual a 0,2%.

20) **(UNICAMP SP)** Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $f(t) = a \cdot 2^{-bt}$ t, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

a) Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial (t = 0) seja igual a 1024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.

b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial?

21)**(UNIFOR CE)**

Japão vai ampliar área de segurança contra radioatividade de Fukushima

“O ministro porta-voz Yukio Edan disse que os novos planos de ampliação da área de segurança se aplicam, por exemplo, a Litate, a 40 km da usina, e no povoado de Minami Soma. Nos dois locais foram registrados altos níveis de radioatividade acumulada.”

Disponível em: http://g1.globo.com/. Acesso em: 15 de mai. 2011

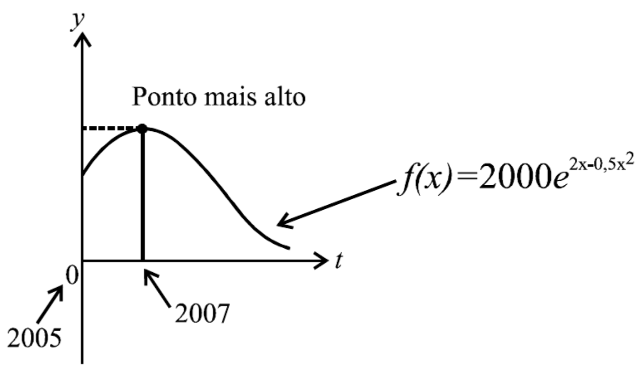
Suponha que as medidas iniciais do nível de radiação do iodo-131 no ambiente local da usina de Fukushima era cerca de 2,4 milisievert/hora (quatro vezes o limite máximo aceitável de 0,6 milisievert/hora). Assim, a Agência de Segurança nuclear ordenou a evacuação do local no perímetro de 20 km. O Nível de radiação do iodo - 131 começa a decair a uma taxa horária contínua de k = - 0,004 (milisievert/hora). A função que representa o nível de radiação no tempo t em horas é dada por $f(t) = 2{,}4 \cdot e^{-0{,}004t}$. Qual é o nível de radiação iodo-131 após 250 horas?

(Considere ***e* = 2,7**).

22) **(UEL PR)** A espessura da camada de creme formada sobre um café expresso na xícara, servido na cafeteria A, no decorrer do tempo, é descrita pela função $E(t) = a \cdot 2^{bt}$, onde $t \geq 0$ é o tempo (em segundos) e *a* e *b* são números reais. Sabendo que inicialmente a espessura do creme é de 6 milímetros e que, depois de 5 segundos, se reduziu em 50%, qual a espessura depois de 10 segundos?

23) **(FUVEST SP)** Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = c \cdot a^{-kt}$, em que *a* é um número real positivo, *t* é dado em anos, *m(t)* é a massa da substância em gramas e *c*, *k* são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância, em 20 anos?

24) **(FGV)** A descoberta de um campo de petróleo provocou um aumento nos preços dos terrenos de certa região. No entanto, depois de algum tempo, a comprovação de que o campo não podia ser explorado comercialmente, provocou a queda nos preços dos terrenos. Uma pessoa possui um terreno nessa região, cujo valor de mercado, em reais, pode ser expresso pela função $f(x) = 2000 \cdot e^{2x-0,5x^2}$, em que *x* representa o número de anos transcorridos desde 2005. Assim: *f* (0) é o preço do terreno em 2005, *f* (1) o preço em 2006, e assim por diante.



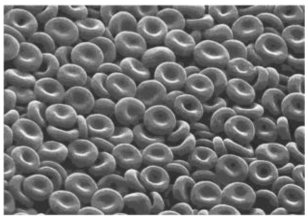
a) Qual foi o maior valor de mercado do terreno, em reais?

b) Em que ano o preço do terreno foi igual ao preço de 2005?

25) O número *N* de habitantes de uma cidade cresce exponencialmente com o tempo, de modo que, daqui a *t* anos, esse número será $N(t) = 20000(1+k)^t$,

onde *k* é um número real. Se daqui a 10 anos a população for de 24 000 habitantes, qual será a população daqui a 20 anos?

26)**(UEFS BA)** Sabe-se que uma gota de sangue de $1mm^3$ contém, aproximadamente, 5 milhões de glóbulos vermelhos e que uma pessoa de 70kg tem, aproximadamente, 4,5 litros de sangue. O número de glóbulos vermelhos que essa pessoa tem em seu sangue é expresso por $\alpha \cdot 10^k$, sendo α um número pertencente ao intervalo [1, 10[e k um número inteiro.



Disponível em:
<http://cadernodeciencias.files.wordpress.com/2010/02/hemacias.jpg>.
Acesso em: 18 dez. 2010.

Nessas condições, determine o valor de α + k.

27)**(ACAFE SC)** A Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q(t) = 1512 - 2^{-0,5t+16}$ em que:

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário.

T = meses de experiência.

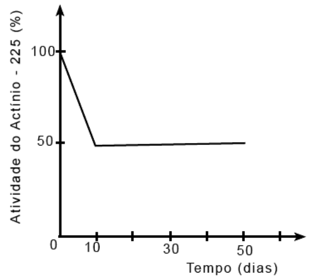
Em quantos meses um funcionário produzirá 1000 peças mensalmente?

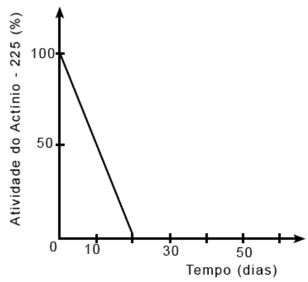
28)**(FATEC SP)** Entre as ideias mais excitantes em nanotecnologia está o desenvolvimento de sistemas moleculares inteligentes, capazes de reconhecer proteínas específicas em vírus, como o da AIDS, e interferir na sua capacidade de reprodução. Investimentos nesse sentido já estão sendo feitos pela empresa C-Sixty (C60 = fulereno), em Houston, com previsões bastante otimistas que, se concretizadas, conferirão um papel importante à nanotecnologia molecular no combate à AIDS. Por meio do encapsulamento de materiais radioativos contendo actínio-225 e proteínas de reconhecimento, têm sido construídas verdadeiras nano bombas capazes de se ligar a células cancerosas e realizar sua destruição. Pesquisas realizadas no Texas mostraram que as cobaias tratadas com as nanocápsulas sobreviveram cerca de 300 dias em comparação com os 43 dias do grupo não tratado.

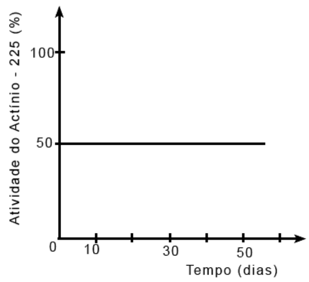
(TOMA, H.E. O mundo nanométrico: a dimensão do novo século. São Paulo:
Oficina de Textos, 2004. p.39. Adaptado.)

O actínio-225 é obtido artificialmente e tem tempo de meia-vida igual a 10 dias. Isso significa que, a cada 10 dias, a quantidade dessa espécie radioativa em uma amostra cai à metade. Sendo assim, nanobombas contendo uma quantidade x de actínio-225, após 10 dias, passam a conter uma quantidade x/2, após mais 10 dias, passa a conter x/4 e assim por diante.

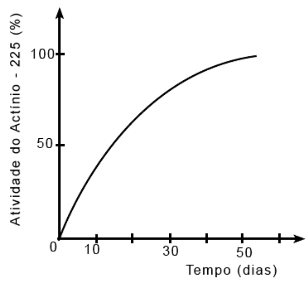
Entre os gráficos representados abaixo, o que mostra a variação da atividade radioativa do actínio-225 em função do tempo, está na alternativa:

a) 

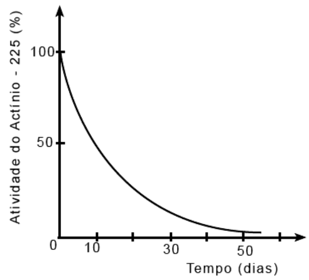
b) 

c) 

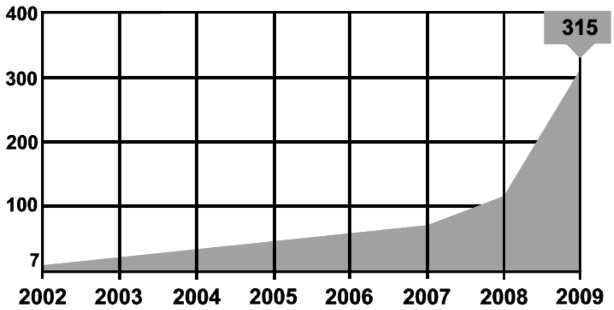
d)



e)



29) **(FGV)** O serviço de compras via internet tem aumentado cada vez mais. O gráfico ilustra a venda anual de ebooks, livros digitais, em milhões de dólares nos Estados Unidos.



Suponha que as vendas anuais em US$ milhões, possa ser estimada por uma função como $y = a \cdot e^{kx}$, em que x = 0 representa o ano 2002, x = 1, o ano 2003, e assim por diante; e é o número de Euler.

Assim, por exemplo, em 2002 a venda foi de 7 milhões de dólares.

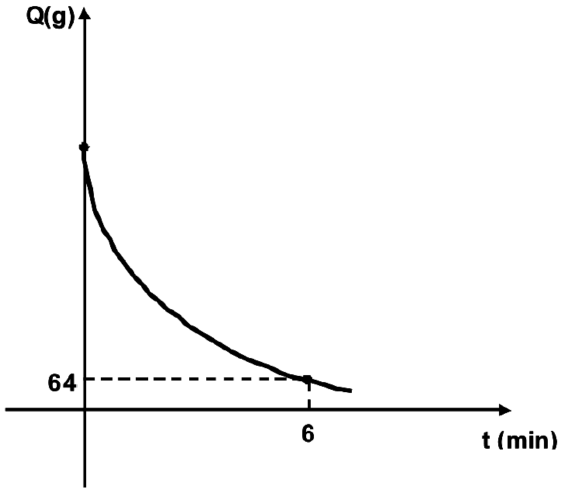
Em 2016 qual será o montante das vendas de livros digitais nos Estados Unidos?

30) A teoria da cronologia do carbono, utilizada para determinar a idade de fósseis, baseia-se no fato de que o isótopo do carbono 14 (C-14) é produzido na atmosfera pela ação de radiações cósmicas no nitrogênio e que a quantidade de C-14 na atmosfera é a mesma que está presente nos organismos vivos. Quando um organismo morre, a absorção de C-14, através da respiração ou alimentação, cessa, e a quantidade de C-14 presente no fóssil é dada pela função $C(t) = C_0 \cdot 10^{kt}$, onde t é dado em anos

a partir da morte do organismo, C_0 é a quantidade de C-14 para t = 0 e k é uma constante. Sabe-se que 5.600 anos após a morte, a quantidade de C-14 presente no organismo é a metade da quantidade inicial (quando t = 0).

No momento em que um fóssil foi descoberto, a quantidade de C-14 medida foi de $\frac{C_0}{32}$. Tendo em vista estas informações, calcule a idade do fóssil no momento em que ele foi descoberto.

31)**(ESCS DF)** Considere os dados do gráfico abaixo:



A partir desses dados percebe-se o processo de decomposição de uma substância, pela lei $Q(t) = C \cdot 2^{-\frac{1}{3}t}$, na qual C é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e Q(t) é a quantidade de substância (em gramas) no instante (t). Determine a quantidade inicial (t = 0), em gramas, dessa substância.

32)**(FGV)** Hermann Ebbinghaus (1850 – 1909) foi o pioneiro nas pesquisas experimentais sobre memória, no século XIX. Foi o próprio sujeito em uma dessas pesquisas, na qual criou palavras que, embora sem sentido, foram, por meio da repetição, aprendidas com sucesso. Depois, testou sua memória em vários intervalos de tempo. Usou sílabas ininteligíveis em seus testes, para assegurar-se de que o ato puro da recordação não fosse maculado pelo significado. A perda acelerada de informação pelo subconsciente é conhecida como "curva do esquecimento", e pode ser utilizada para estimar a porcentagem de matéria de que, um tempo após tê-la aprendido, um estudante pode se lembrar; um modelo matemático para esse percentual de retenção é dado pela função:

$$y = y(x) = (100 - a)10^{-kx} + a$$

em que *x* é o tempo, dado em semanas, *k* e *a* são constantes positivas e *0 < a < 100*.

a) Dê a expressão de $y = y(x)$ no caso em que $a = 15$, $k = 0{,}2$ e $x \geq 0$. Esboce o gráfico da função obtida.

b) (Explique, a partir da função obtida no subitem a), o que ocorre à medida que o tempo passa.

c) (Utilizando-se das constantes do subitem a), calcule o percentual de retenção depois de decorrido o tempo de uma semana.

33) A massa de uma substância volátil está decrescendo em função do tempo, em horas, de acordo com a função $m(t) = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$. Qual o tempo necessário para que, teoricamente, a massa da substância se anule?

34) **(FGV)** A onça-pintada, também conhecida por **jaguar** ou **jaguaretê**, costuma ser encontrada em reservas florestais e matas cerradas, mas, atualmente, é um dos carnívoros brasileiros que corre perigo de extinção. Suponha que, em determinada região, a população de onças-pintadas, *P*(*t*), daqui a *t* anos, será estimada pela função: $P(t) = 60(1 + e^{-0.05t})$. O número *e* pode ser calculado com tanta precisão quanto se queira, mas, nesta questão, aproxime-o, quando necessário, para 2,7.

a) Faça uma estimativa da população de onças-pintadas que habitarão essa região daqui a vinte anos. Aproxime a resposta para o número inteiro mais próximo.

b) Se mantiver esse decrescimento, daqui a quantos anos será atingido o ponto em que a extinção é inevitável, considerada pelos biólogos em cem indivíduos?

35) Admitindo-se que a "luminosidade" L(x) de a luz solar a x metros abaixo do nível do oceano seja dada, em luxes, pela função $L(x) = 1000 \cdot e^{-x/10}$ e que um mergulhador não consiga trabalhar sem luz artificial quando essa luminosidade fica inferior a 10% de seu valor na superfície. Qual a maior

profundidade, em metros, que o mergulhador pode atingir sem ter de usar luz artificial?

36) **(UEG GO)** O número de bactérias numa cultura, depois de um tempo t, é dado pela função $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$, em que N_0 é o número inicial de bactérias e r é a taxa de crescimento. Se a taxa de crescimento é de 5% ao minuto, em quanto tempo a população de bactérias passará a ser o dobro da inicial?

37)**(UFG GO)** O eucalipto é muito usado para a produção de papéis e celulose por causa da qualidade da matéria-prima e seu curto ciclo de vida. Um produtor de eucalipto possui uma plantação de determinada espécie adequada ao clima e ao tipo de solo de tal região.

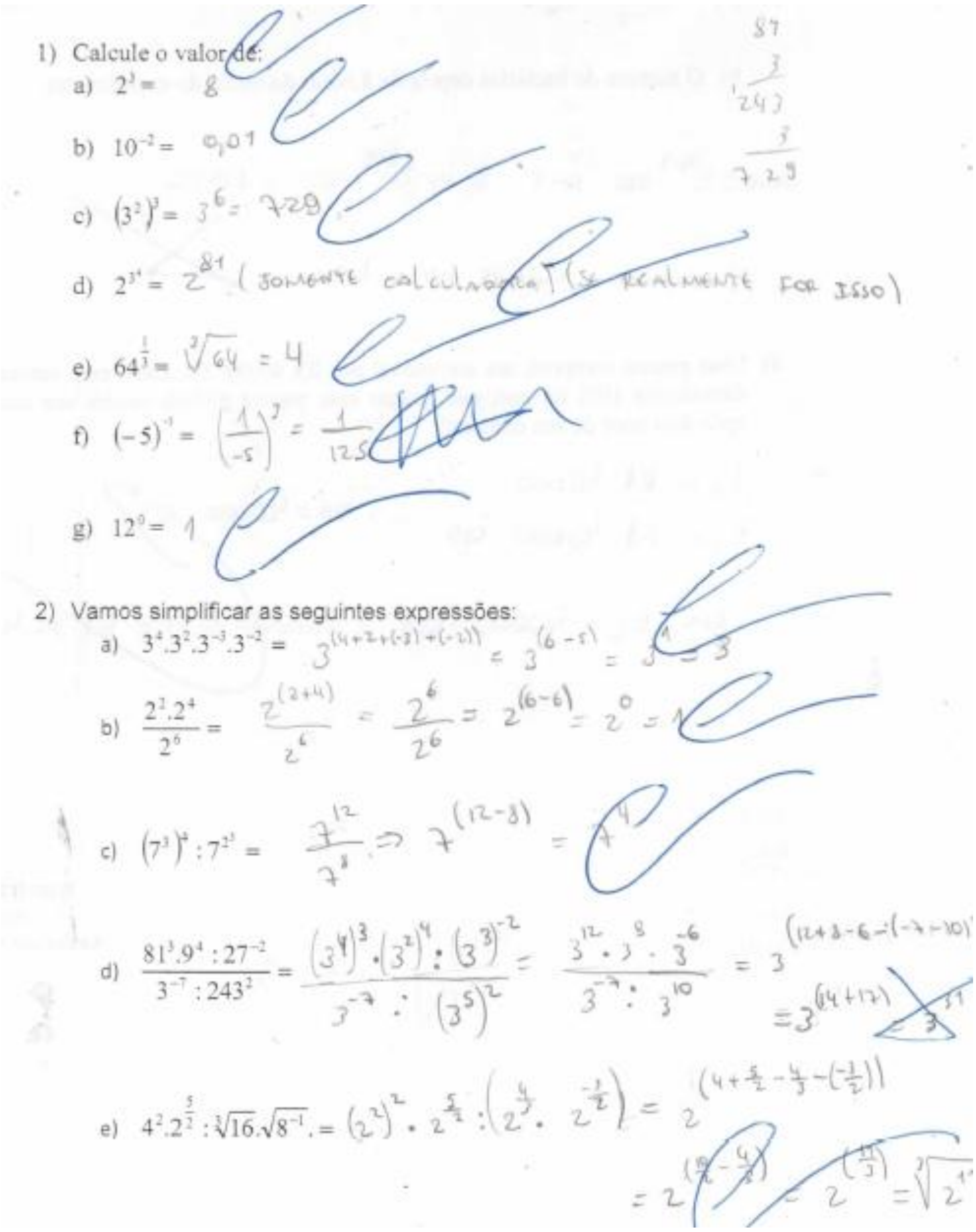
Essa espécie tem seu crescimento modelado pela função $h(t) = 50 \cdot (1 - 10^{-kt})$, onde h é a altura (em metros) em função do tempo *t* (em anos) e *k* é uma constante. Sabe-se que esse eucalipto alcança a altura de 10 m em 2 anos e que o produtor realizará o corte quando as árvores tiverem 8 anos.

Com base nestas informações, calcule o valor da constante *k* e a altura que os eucaliptos terão, em metros, quando o produtor for realizar o corte.

Anexo 4

Primeira avaliação (Avaliação diagnóstica)

Aluno 1



1) Calcule o valor de:

a) $2^3 =$ 8

b) $10^{-2} =$ 0,01

c) $(3^2)^3 =$ $3^6 = 729$

d) $2^{3^4} =$ 2^{81} (SOMENTE CALCULADORA) (SE REALMENTE FOR ISSO)

e) $64^{\frac{1}{3}} =$ $\sqrt[3]{64} = 4$

f) $(-5)^{-3} =$ $\left(\frac{1}{-5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

g) $12^0 =$ 1

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $3^4.3^2.3^{-3}.3^{-2} =$ $3^{(4+2+(-3)+(-2))} = 3^{(6-5)} = 3^1 = 3$

b) $\frac{2^2.2^4}{2^6} =$ $\frac{2^{(2+4)}}{2^6} = \frac{2^6}{2^6} = 2^{(6-6)} = 2^0 = 1$

c) $(7^3)^4 : 7^{2^3} =$ $\frac{7^{12}}{7^8} \Rightarrow 7^{(12-8)} = 7^4$

d) $\frac{81^3.9^4 : 27^{-2}}{3^{-7} : 243^2} =$ $\frac{(3^4)^3.(3^2)^4:(3^3)^{-2}}{3^{-7}:(3^5)^2} = \frac{3^{12}.3^8.3^{-6}}{3^{-7}:3^{10}} = 3^{(12+8-6-(-7-10))}$ $= 3^{(14+17)}$ 3^{31}

e) $4^2.2^{\frac{5}{2}} : \sqrt[3]{16}.\sqrt{8^{-1}}. =$ $(2^2)^2 . 2^{\frac{5}{2}} : (2^{\frac{4}{3}} . 2^{\frac{-3}{2}}) = 2^{(4+\frac{5}{2}-\frac{4}{3}-(\frac{-3}{2}))}$ $= 2^{(\frac{13}{2}-\frac{4}{3})} = 2^{(\frac{31}{3})} = \sqrt[3]{2^{31}}$

87 $\frac{3}{243}$ $\frac{3}{729}$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:

a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

$t_0 \rightarrow t_1$

200 bac → 400 bac ⇒ $2^{(t+1)} \cdot 100$ em $t=4 \Rightarrow 2^{(4+1)} \cdot 100 = 3200$

b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

bac $= 2^{(t+1)} \cdot 100$ em $t = 8 \Rightarrow 2^{(8+1)} \cdot 100 = 51200$

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

$t_0 =$ R$ 40000

$t_1 =$ R$ 40000 · 0,9 ⇒ VA = 40000 · 0,9^t

em $t_2 = 40000 \cdot 0{,}9^2 = 40000 \cdot 0{,}81 =$ R$ 32 400,00

40 000
0,81
40000
320 000
32400,00

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 2

1) Calcule o valor de:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$

c) $(3^2)^3 = 3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

d) $2^{3^2} = 2^7$

e) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

f) $(-5)^{-3} = \left(\frac{1}{-5}\right) \cdot \left(\frac{1}{-5}\right) \cdot \left(\frac{1}{-5}\right) = \left(\frac{1}{-125}\right) = -\frac{1}{125}$

g) $12^0 = 1$

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $3^4 . 3^2 . 3^{-3} . 3^{-2} = 3^6 . 3^{-5} = 3^1 = 3$

b) $\frac{2^2 . 2^4}{2^6} = \frac{2^6}{2^6} = 1$

c) $(7^3)^4 : 7^{2^3} = \frac{7^{12}}{7^5} = 7^7$

d) $\frac{81^3 . 9^4 : 27^{-2}}{3^{-7} : 243^2} = \frac{(3^4)^3 . (3^2)^4 : (3^3)^{-2}}{3^{-7} : (3^5)^2} = \frac{3^{12} . 3^8 : 3^{-6}}{3^{-7} : 3^{10}} = 3^{20} :$

e) $4^2 . 2^{\frac{5}{2}} : \sqrt[3]{16} . \sqrt{8^{-1}} . = 2^4 . 2^{5/2} : 2^{\frac{4}{3}} . 2^2 = 2^{\frac{42}{2}} : 2^{\frac{10}{3}} = 2^{\frac{34}{6}} = \sqrt[6]{2^{34}}$

$= \sqrt[6]{2^6 . 2^6 . 2^6 . 2^4} = 2 . 2 . 2 . \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:

a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

$S = S_0 +$

$S = 200 +$

b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

Bom trabalho!
Sucessó...
Anderson Gadioli

Aluno 3

1) Calcule o valor de:

a) $2^3 = 2.2.2 = \boxed{8}$

b) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = \boxed{0{,}01}$

c) $(3^2)^3 = 3^{2.3} = 3^6 = 3.3.3.3.3.3 = \boxed{729}$

d) $2^{3^4} = \quad 3^4 = 3.3.3.3 = 81 \rightarrow \boxed{2^{81}}$

e) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

f) $(-5)^{-3} = \frac{1}{-5^3} = \frac{1}{-5} \cdot \frac{1}{-5} \cdot \frac{1}{-5} = \boxed{\frac{1}{125}}$

g) $12^0 = \boxed{1}$

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $3^4.3^2.3^{-3}.3^{-2} = 3^{\underbrace{+4+2}_{+6}+\underbrace{(-3)+(-2)}_{-5}} = \boxed{3^1}$

b) $\frac{2^2.2^4}{2^6} = \quad \frac{2^6}{2^6} = 1$

c) $(7^3)^4 : 7^{2^3} = \frac{7^{12}}{7^8} = 7^{12-8} = 7^4$

d) $\frac{81^3.9^4:27^{-2}}{3^{-7}:243^2} = \frac{(3^4)^3.(3^2)^4:(3^3)^{-2}}{3^{-7}:(3^5)^2} = \frac{3^{12}.3^8:3^{-6}}{3^{-7}:3^{10}} = \frac{3^{12+8-(-6)}}{3^{-7-10}}$

$\rightarrow 3^{26-(-17)} =$

e) $4^2.2^{\frac{5}{2}}:\sqrt[3]{16}.\sqrt{8^{-1}} = \frac{16.4.\sqrt{2}}{2\sqrt[3]{2}.\sqrt{\frac{1}{8}}} = \frac{(2^4).2^1.\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2^5.\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{2}{\sqrt[3]{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}}$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:

a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

$2x \rightarrow 2$ horas

início 200 bact.

t_1 início

200 bactérias

1800 bactérias

b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

$200^8 = 2.2.2.2.2.2.2.2 =$

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

$$\begin{array}{r} 40\,000 \\ 0{,}1 \\ \hline 40\,000 \\ 00\,000 \\ 04{,}000{,}0 \\ \hline 4000{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36\,000, \\ \times\ 0{,}1 \\ \hline 36\,000 \\ 00\,000 \\ \hline 3.600{,}0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36\,000 \\ 3\,600 \\ \hline 32\,400 \end{array}$$

R$ 32.400 reais

Bom trabalho!
Sucessó...
Anderson Gadioli

Aluno 4

1) Calcule o valor de:

a) $2^3 =$ 8

b) $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \to \frac{1}{100}$

c) $(3^2)^3 = 9^3 \to 729$

d) $2^{3^4} = 2^{81}$

e) $64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$

f) $(-5)^{-3} = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 = -\frac{1}{125}$

g) $12^0 = 1$

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $3^4.3^2.3^{-3}.3^{-2} =$ $4+2-3-2 = 1 \to 3^1 = 3$

b) $\frac{2^2.2^4}{2^6} = \frac{2^6}{2^6} = 2^0 = 1$

c) $(7^3)^4 : 7^{2^3} =$

d) $\frac{81^3.9^4:27^{-2}}{3^{-7}:243^2} = \frac{3^{4^3} . 3^{2^4} : 3^{3^{-2}}}{3^{-7} : 3^{4^2}} = \frac{3^{64} . 3^{16} : 3^{-9}}{3^{-7} : 3^{81}}$

$\frac{3^{80} : 3^{-9}}{3^{-7} : 3^{81}}$

e) $4^2.2^{\frac{5}{2}}:\sqrt[3]{16}.\sqrt{8^{-1}}. =$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:

a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

$f(x) = 200^{2x}$

$f(x) = 200^{2x}$

$f(x) = 200^{8}$

b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

40.000 .

10%

40.000 —— 100%

x —— 20%

$100x = 800000$

$x = \frac{800000}{100}$

$x = 8000$

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 5

1) Calcule o valor de:

a) $2^3 =$ 16

b) $10^{-2} =$ 0,01

c) $(3^2)^3 =$ 27^6

d) $2^{3^4} =$ 2^{12}

e) $64^{\frac{1}{3}} =$

f) $(-5)^{-3} =$ -125

g) $12^0 =$ 1

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $3^4.3^2.3^{-3}.3^{-2} = 81^1 = 81$

b) $\frac{2^2.2^4}{2^5} = \frac{4^6}{2^6} = 2^0 = 1$

c) $(7^3)^4 : 7^{2^3} = 7^{12} : 7^6 = 7^6$

d) $\frac{81^3.9^4 : 27^{-2}}{3^{-7} : 243^2} = \frac{\cancel{729}^4 : 27^{-2}}{3^{-4} : 243^2} = 3^5 : 9^5 = 3^0 = 1$

e) $4^2.2^{\frac{5}{2}} : \sqrt[3]{16}.\sqrt{8^{-1}}. =$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:

a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

$200 \times 2 = 400$

$400 \times 2 = \boxed{800 \text{ bactérias}}$

b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

$8 : 2 = 4$

$800 \times 2 = 1600$

$1600 \times 2 = \boxed{3200 \text{ bactérias}}$

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

$100\% \longrightarrow 40\,000$

$10\% \longrightarrow x$

$x = 400$

1 ano $\longrightarrow$ - 400 reais

2 anos $\longrightarrow$ x

x = R$ 800

$40000 - 800 =$ $\boxed{\text{R\$ } 39.200{,}00}$

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 6

1) Calcule o valor de:

a) $2^3 =$ 8

b) $10^{-2} =$ -100

c) $\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 =$ $3^6 = 729$

d) $2^{3^2} =$ $2^7 = 128$

e) $64^{\frac{1}{3}} =$

f) $(-5)^{-3} =$ -125

g) $12^0 =$ 0

2) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $3^4.3^2.3^{-3}.3^{-2} =$ $81.9.(-27).(-9) = 72.63 = 4536$

b) $\dfrac{2^2.2^4}{2^6} =$ $\dfrac{64}{64} = 1$

c) $(7^3)^4 : (7^{2^3}) =$ $\dfrac{7^{12}}{7^6}$

d) $\dfrac{81^3.9^4 : 27^{-2}}{3^{-7} : 243^2} =$

e) $4^2.2^{\frac{5}{2}} : \sqrt[3]{16}.\sqrt{8^{-1}}. =$

3) Durante uma cultura de bactérias, verificou-se que o número de bactérias dobrou a cada duas horas. Se, no momento inicial, essa cultura tinha 200 bactérias, determine:

a) O número de bactérias após 4 horas do início do experimento;

$200 \times 2 = 400$

$400 \times 2 = \boxed{800 \text{ bactérias}}$

b) O número de bactérias depois de 8 horas do início do experimento.

$8 : 2 = 4$

$800 \times 2 = 1600$

$1600 \times 2 = \boxed{32.000 \text{ bactérias}}$

4) Uma pessoa comprou um automóvel por R$ 40.000,00. Caso esse automóvel se desvalorize 10% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu automóvel após dois anos de sua compra?

40 000 — 100%

x — 10%

x = 4

$4^2 = 16$ → $\boxed{\text{R\$ } 16\,000,00}$

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Anexo 5

Segunda avaliação (Avaliação do minicurso)

Aluno 1

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $5^4 : 5^6 \cdot 5^{-2} : 5^{-5} =$ $5^{-2} \cdot 5^3 = 5$

b) $(6^4)^4 : 6^{2^4} =$ $6^{16} : 6^{16} = 6^0 = 1$

c) $\frac{64^3 \cdot 8^4 : 32^{-2}}{256^{-7} : 1024^2} =$ $\left(2^{6\cdot3} \cdot 2^{3\cdot4} : 2^{5\cdot(-2)}\right) : \left(2^{8\cdot(-7)} : 2^{10\cdot2}\right) = \left(2^{18} \cdot 2^{12} : 2^{-10}\right) : \left(2^{-56}\right)$
$= 2^{20} : 2^{-36} = 2^{56}$

d) $9^3 \cdot 3^{\frac{1}{6}} : \sqrt{243} \cdot \sqrt{81^{-3}} =$ $\left(3^{2\cdot3} \cdot 3^{1/6}\right) : \left(3^{5/2} \cdot 3^{4\cdot(-3)/2}\right) = \left(3^{\frac{36+1}{6}}\right) : \left(3^{\frac{10-30}{6}}\right)$
$= 3^{\frac{45+120}{6}} = 3^{65/6}$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

$M(0) = 200$ $:2$
$M(6) = 100$

$100 = 200 \cdot x^6$
$x^6 = \frac{1}{2}$ / $x = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$

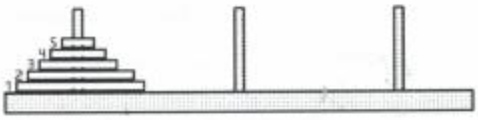
$M(18) = 200 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^{18} = 200 \cdot \frac{1}{8} = 25$

$M(t) = 200 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)^t$

3) (UNIFOR CE) Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t)=P_0 \cdot 2^{0,05t}$, na qual P_0 é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

$4P_0 = P_0 \cdot 2^{0,05t}$
$2^{0,05t} = 2^2 \Rightarrow t = \frac{2}{0,05} = \frac{2}{5 \cdot 10^{-2}} = \frac{200}{5} = 40$ DIAS

4) (UNIRG TO) A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte: http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter 2.047 movimentos mínimos na torre de Hanói.

$2047 = 2^n - 1$

$2^n = 2048$

$2^n = 2^{11}$ $n = 11$ discos

5) Uma pessoa comprou um apartamento por R$ 400.000,00. Caso esse apartamento se valorize 2% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu apartamento após dois anos de sua compra?

$V(t) = V_0 \cdot (0{,}98)^t$

$V(2) = 400\,000 \cdot (0{,}98)^2$

$V(2) = 400\,000 \cdot 0{,}9604$

$V(2) = R\$\ 384\,160{,}00$

98
× 98
784
882
0,9604

400000
× 9604
...
384160

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 2

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $5^4 : 5^6 5^{-2} : 5^{-5} = 5^{4-6} . 5^{-2} : 5^{-5} = 5^{-2+(-2)} : 5^{-5} = 5^{-4} : 5^{-5} = 5^{-4-(-5)} = 5$

b) $(6^4)^4 : 6^{16} = 6^{16} : 6^{16} = 6^{16-16} = 6^0 = 1$

c) $\dfrac{64^3 8^4 : 32^{-2}}{256^{-7} : 1024^2} = \dfrac{(2^6)^3 . (2^3)^4 : (2^5)^{-2}}{(2^8)^{-7} : (2^{10})^2} = \dfrac{2^{30} : 2^{-10}}{2^{-56} : 2^{20}} = \dfrac{2^{30-(-10)}}{2^{-56-(20)}}$

$= 2^{40-(-76)}$

$= 2^{116}$

d) $9^3 3^{\frac{1}{5}} : \sqrt[5]{243} \sqrt{81^{-3}} = 3^6 . 3^{\frac{1}{5}} \div 243^{\frac{1}{5}} . 81^{-\frac{3}{2}} = 3^6 .$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

$200 \div \frac{1}{2} = 100$ → $100 \div \frac{1}{2} = 50$ → $50 \div \frac{1}{2} =$

após 6 horas — após 12 horas — após 18 h

3) (UNIFOR CE) Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t) = P_0 \, 2^{0,05t}$, na qual P_0 é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

$P(T) = P_0 . 2^{0,05T}$

$4P_0 = P_0 . 2^{0,05T}$

$\frac{4P_0}{P_0} = 2^{0,05T}$

$4 = 2^{0,05T}$

$2^2 = 2^{0,05T}$

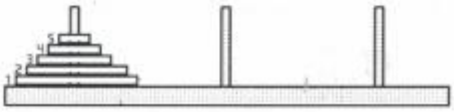
$2 = 0,05T$ → $2 = \frac{5}{100} T$

$5T = 200$

$\boxed{T = 40}$

R: Serão necessários 40 dias para a população da cultura seja quádruplo da ...

4) (UNIRG TO) A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte: http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter 2.047 movimentos mínimos na torre de Hanói.

$T(n) = 2^n - 1$
$2047 = 2^n - 1$
$2048 = 2^n$
$2^{11} = 2^n$

$\boxed{n = 11}$

R: Para se obter 2047 movimentos mínimos deve haver 11 discos.

5) Uma pessoa comprou um apartamento por R$ 400.000,00. Caso esse apartamento se valorize 2% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu apartamento após dois anos de sua compra?

$M(T) = M_0 \cdot (1 + i)^T$
$M(T) = 400.000,00 \cdot (1 + 2)^2$

$M(T) = 400.000,00 \cdot (3)^2$
$M(T) = 400.000,00 \cdot 9$

$M(T) = 3600000,00$

400000
× 9
3600000

R: Essa pessoa poderá vender seu apartamento após 2 anos de sua compra por R$ 3.600

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 3

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $5^4 : 5^6 \cdot 5^{-2} : 5^{-5} = \frac{5^4}{5^6} \cdot \frac{5^{-2}}{5^{-5}} = 5^{4-6} \cdot 5^{-2-(-5)} = 5^{-2+3} = 5^2 = 25$

b) $(6^4)^4 : 6^{2^4} = \frac{6^{16}}{6^{16}} = 6^{16-16} = 6^0 = 1$

c) $\frac{64^3 \cdot 8^4 : 32^{-2}}{256^{-1} : 1024^2} = \frac{(2^6)^3 \cdot (2^3)^4 : (2^5)^{-2}}{(2^8)^{-1} : (2^{10})^2} = \frac{2^{18+12-(-10)}}{2^{-8-20}} = 2^{38-(-76)} = 2^{114}$

d) $9^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} : \sqrt[5]{243} \sqrt{81^{-3}} = \frac{3^6 \cdot \sqrt[4]{3^4 \cdot 3}}{\sqrt[5]{3^5 3^5} \cdot \sqrt{\frac{1}{81^3}}} = \frac{3^6 \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{3}}{3^1 \sqrt{3^5} \cdot 3^{-6}} = \frac{3^2 \cdot \sqrt[4]{3}}{3^{-5} \cdot \sqrt[3]{3^3}}$

$\sqrt{\frac{1}{(3^4)^3}} = \sqrt{\frac{1}{3^{12}}} = 3^{-6}$

243 | 3
81 | 3
27 | 3
9 | 3
3 | 3
1

$81 = 3^4$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

6 h após → 100 mg
12 h após → 50 mg
18 h após → 25 mg

$f(x) = 200 \cdot (0,5)^{\frac{t}{6}}$

3) (UNIFOR CE) Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t) = P_0 \cdot 2^{0,05t}$, na qual P_0 é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

$4 \times P_0$

$P(t) = P_0 \cdot 2^{0,05t}$

$4P_0 = P_0 \cdot 2^{0,05t}$

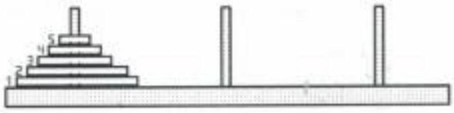
$\frac{4P_0}{P_0} = 2^{0,05t}$

$2^2 = 2^{0,05t}$

$0,05t = 2$

$t = \frac{2}{0,05} = 40$ dias

4) (UNIRG TO) A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte: http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter $\boxed{2.047}$ movimentos mínimos na torre de Hanói.

nº mov. mínimos

nº discos

$T(n) = 2^n - 1$

$2047 = 2^n - 1$

$2^n = 2048$

$2^n = 2^{11}$

$n = 11$ discos

$1024 = 2^{10}$

$\times 2$

$2048 = 2^{11}$

5) Uma pessoa comprou um apartamento por $\boxed{\text{R\$ 400.000,00}}$. Caso esse apartamento se valorize $\boxed{\text{2\% ao ano}}$, por $\boxed{\text{quanto}}$ essa pessoa poderá vender seu apartamento após $\boxed{\text{dois anos}}$ de sua compra?

$i = 2\% = 0,02$

$400\,000 \xrightarrow{1 \text{ ano}} 392\,000$

$$\begin{array}{r} 400\,000 \\ \times\ 0,02 \\ \hline 800\,000 \\ 0000\,00 \\ 000000 \\ \hline 00800\,000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 392\,000 \\ \times\ 0,02 \\ \hline 784000 \\ 000000 \\ 000000 \\ \hline 007840,00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 392\,000 \\ 7\,840 \\ \hline 384.160 \end{array}$$

poderá vender por R$ 384.160,00

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 4

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $5^4 : 5^6 \cdot 5^{-2} : 5^{-3} =$ $5^{-2} \cdot 5^{-2} : 5^{-3} = 5^0 : 5^{-5} = 5^{-5}$ $\frac{1}{5^5}$

b) $(6^4)^4 : 6^{16} =$ $6^{16} : 6^{16} = 6^0 = 1$

c) $\frac{64^3 \cdot 8^4 : 32^{-2}}{256^{-3} : 1024^2} =$ $\frac{(2^6)^3 \cdot (2^3)^4 \cdot (2^5)^{-2}}{(2^8)^{-3} \cdot (2^{10})^2} = \frac{2^{18} \cdot 2^{12} : 2^{-10}}{(2)^{-24} : (2)^{20}} = \frac{2^{20}}{2}$

d) $9^3 \cdot 3^{\frac{2}{6}} : \sqrt[3]{243} \cdot \sqrt{81^{-3}} =$ $3^6 \cdot 3^{\frac{2}{6}} : 3^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{-\frac{12}{2}}$ $3^6 \cdot 3^1 : 3^2 \cdot 3^{-6}$ $3^7 : 3^{-4} = 3^{11}$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

$m = m_0 \cdot 200^t$

$\frac{1}{2} m_0 = m_0 \cdot 200^t$

$\frac{1}{2}$ $t = 18$

$2^{-1} = 200^{18}$

3) (UNIFOR CE) Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t) = P_0 \cdot 2^{0,05t}$, na qual P_0 é a população inicial da cultura (instante $t = 0$). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

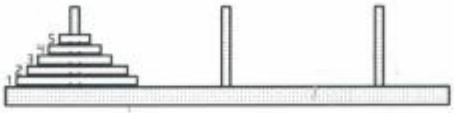
$4p_0 = p_0 \cdot 2^{0,05t}$

$4 = 2^{0,05t}$

$2^2 = 2^{0,05t}$

$t = \frac{2}{0,05}$

4) (UNIRG TO) A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte: http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter 2.047 movimentos mínimos na torre de Hanói.

$T(11) = 2^{11} - 1$

$T(11) = 2048 - 1$

$T(11) = 2047$

R: 11

5) Uma pessoa comprou um apartamento por R$ 400.000,00. Caso esse apartamento se valorize 2% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu apartamento após dois anos de sua compra?

$M = 400.000 \cdot 0{,}98^{1}$

$M = 400.000 \cdot 0{,}98^{2}$

$M = 400000 \cdot 0{,}9604$

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 5

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $5^4 : (5^6 \cdot 5^{-2}) : 5^{-5} = 5^4 : 5^4 : 5^{-5} = 5$

b) $(6^4)^4 : 6^{2^4} = 6^{16} : 6^{16} = 1^0 = 1$

c) $\frac{(64^3 \cdot 8^4) : 32^{-2}}{256^{-7} : 1024^2} = \frac{672 : 32}{256^{-7} : 1024^2} = \frac{21^3}{256^{-7} : 1024^2}$

d) $9^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{243} \sqrt{81^{-1}} =$

② após T horas

$QR = Q_0 \cdot Q^{T/6}$

$\boxed{QR = 200 \cdot 0{,}5^{T/6}}$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

após 18 horas

$QR = Q_0 \cdot Q^{\frac{T}{6}}$

$QR = 200 \cdot 0{,}5^{18/6}$

$QR = 200 \cdot 0{,}5^3$

$\rightarrow QR = 200 \times 0{,}125$

$\boxed{QR = 25\ mg}$

$18 : 6 = 3$

$0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

$0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

$0{,}125 \times 200 = 25$

3) (UNIFOR CE) Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t)=P_0 \cdot 2^{0,05t}$, na qual P_0 é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

$4P_0 = P_0 \cdot 2^{0,05T}$

$4 = 2^{0,05T}$

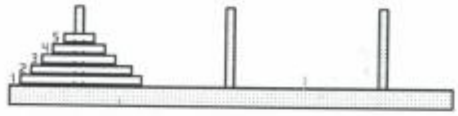
$2^2 = 2^{0,05T}$

$2 = 0{,}05T$

$\boxed{T = 40\ dias}$

$2{,}00 : 0{,}05 = 40$

4) (UNIRG TO) A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte: http://www.mat.ibilce.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter 2.047 movimentos mínimos na torre de Hanói.

$T(n) = 2^n - 1$
$2047 = 2^n - 1$
$2047 + 1 = 2^n$
$2^n = 2048$

$\rightarrow 2^n = 2^{11}$

$\boxed{n = 11 \text{ discos}}$

5) Uma pessoa comprou um apartamento por R$ 400.000,00. Caso esse apartamento se valorize 2% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu apartamento após dois anos de sua compra?

$M = C \cdot (1 + i)^t$ 2 : 100 = 0,02
$M = 400.000 \cdot (1 + 0{,}02)^2$
$M = 400.000 \cdot (1{,}02)^2$
$M = 400.000 (1{,}0404)$
$\boxed{M = 416.160 \text{ reais}}$

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli

Aluno 6

1) Vamos simplificar as seguintes expressões:

a) $5^{4} : 5^{6} . 5^{-2} : 5^{-4} =$ $\frac{625}{15625}$

b) $(6^{4})^{4} : 6^{2} =$ $\frac{6^{16}}{6^{6}}$

c) $\frac{64^{2} . 8^{4} : 32^{-2}}{256^{-1} : 1024^{2}} =$ 64.64

d) $9^{3} . 3^{[illegible]} : \sqrt[3]{243} . \sqrt{81^{-1}} =$ $729 . \sqrt[7]{3^{6}}$

2) A bula de certo medicamento informa que, a cada seis horas após sua ingestão, metade dele é absorvida pelo organismo. Se uma pessoa tomar 200 mg desse medicamento, quanto ainda restará a ser absorvido pelo organismo imediatamente após 18 horas de sua ingestão? E após t horas?

$y = Q.I.x$

$y = 200 \times 0{,}5^{\frac{18}{6}}$

$y = 200 \times 0{,}125$

$\boxed{y = 25\ mg}$

Após t horas

$y = 200 \times x^{\frac{t}{6}}$

$\boxed{y = 200 \times 0{,}5^{\frac{t}{6}}}$

3) (UNIFOR CE) Suponha que, após t dias de observação, a população de uma cultura de bactérias é dada pela expressão $P(t) = P_0 . 2^{0{,}05t}$, na qual P_0 é a população inicial da cultura (instante t = 0). Quantos dias serão necessários para que a população dessa cultura seja o quádruplo da inicial?

$4 \cancel{P_0} = \cancel{P_0} \times 2^{0{,}05t}$

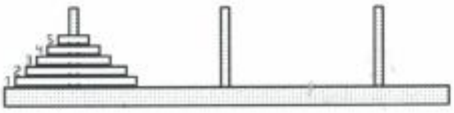
$4 = 2^{0{,}05t}$

$\cancel{2}^{2} = \cancel{2}^{0{,}05t}$

$2 = 0{,}05t$

$\boxed{t = 40\ dias}$

4) (UNIRG TO) A torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático inventado pelo francês Edouard Lucas em 1883. A torre consiste em uma base, três hastes verticais e uma quantidade de discos com diâmetros diferentes furados no centro, para que os discos sejam inseridos nas hastes. A figura a seguir, ilustra a torre de Hanói:



O objetivo do quebra-cabeça é deslocar os discos inseridos na primeira haste para a última haste com o auxílio da segunda haste, com o mínimo de movimentos possível, respeitando as seguintes regras: somente um disco pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser posto sobre um disco menor. Na tabela seguinte estão representados alguns exemplos relacionados ao número de discos com os seus movimentos mínimos.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
...	...

Fonte: http://www.matbiloa.unesp.br/laboratorio/pages/artigos/Torre_de_Hanoi.pdf

Para determinar a quantidade mínima de movimentos em relação ao número de discos, a fórmula pode ser representada por $T(n) = 2^n - 1$, onde $T(n)$ são os números de movimentos mínimos e n é o número de discos. Com base nas informações anteriores, determine a quantidade de discos para se obter 2.047 movimentos mínimos na torre de Hanói.

$T(n) = 2^n - 1$

$2047 + 1 = 2^n$

$2^n = 2048$

$2^n = 2^{11}$ → $\boxed{n = 11}$

5) Uma pessoa comprou um apartamento por R$ 400.000,00. Caso esse apartamento se valorize 2% ao ano, por quanto essa pessoa poderá vender seu apartamento após dois anos de sua compra?

$M = C(1+i)^t$

$M = 400000(1+0,2)^2$

$M = 400000 \times 1,0404$

$\boxed{M = 416.160,00}$

Bom trabalho!
Sucesso...
Anderson Gadioli