Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado em Matemática

Multiplicidade e concentração de soluções positivas para uma equação elíptica quasilinear

José Carlos de Oliveira Junior

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Magda Soares Xavier

Vitória, março de 2012

Agradecimentos

- De uma forma muito especial, à Deus, que tem sido um ótimo pai e tem me concedido grandes oportunidades. Se cheguei até aqui, isso devo à Ele.

- Ao meu pai (mais do que em memória), José Carlos, e à minha mãe, Maria de Lourdes, pela educação, pelo forte incentivo e por todos preciosos conselhos. À minha família, pelo acolhimento durante a graduação e o mestrado e por se preocuparem tanto comigo nesse período. Destaco minha avó, Nascirema, cujo carinho e cuidado com minha formação me deram forças pra continuar.

- À todos os amigos da igreja, dentre os quais destaco Maurílio e Gabriela, por me proporcionarem dias indescritíveis que sempre guardarei comigo. Aos amigos do poker, pelos momentos únicos de descontração. Às amigas Michelle e Jaqueline, por terem tornado a graduação um período mais agradável e divertido.

- Aos professores Marcelo Fernandes Furtado e João Pablo Pinheiro da Silva, por terem aceito participar da banca examinadora deste trabalho.

- À minha orientadora Magda Soares Xavier, por sua enorme paciência em responder minhas inúmeras perguntas, por sua dedicação a este trabalho e pela experiência que pude adquirir com seus ensinamentos.

- À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos resultados de existência e concentração de soluções positivas de uma equação de Schrödinger em $\mathbb{R}^N$ envolvendo o operador p-laplaciano com $2 \leq p < N$, uma não-linearidade do tipo potência com expoente q subcrítico, um parâmetro λ positivo e um potencial $a(x)$ satisfazendo certas hipóteses. Tal problema foi inicialmente estudado por Bartsch e Wang em [5] no caso do operador laplaciano ($p = 2$). Apresentamos as versões dos resultados de [5] para o caso do p-laplaciano, demonstradas por Furtado em [17, 18].

Abstract

In this work, we study results on existence and concentration of positive solutions for a Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$ involving the p-laplacian operator with $2 \leq p < N$, a subcritical nonlinearity, a positive parameter λ and a potencial $a(x)$ satisfying some hypotheses. Such problem was first studied by Bartsch and Wang [5] in the case of laplacian operator ($p = 2$). We present versions of the results of [5] in the case of the p-laplacian, which were demonstrated by Furtado [17, 18].

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar resultados de existência, multiplicidade e concentração de soluções positivas da seguinte classe de equações quasilineares de Schrödinger

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$S_{\lambda,q}$}$$

em que $2 \leq p < N$, $p < q < p^*$, onde $p^* = Np/(N-p)$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador p-laplaciano e λ é um parâmetro positivo. Vamos considerar a uma função satisfazendo

(A_1) $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é não negativa, $\Omega = \operatorname{int} a^{-1}(0)$ é um conjunto não vazio de classe C^2 e $\overline{\Omega} = a^{-1}(0)$;

(A_2) existe $M_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R}^N : \ a(x) \leq M_0\}) < \infty,$$

onde $\mathcal{L}$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Um dos motivos de estudarmos soluções de $(S_{\lambda,q})$ é que, para λ suficientemente grande, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{D_q}$$

se torna um tipo de problema limite.

Em [6], Benci e Cerami estudaram o problema (D_q) no caso do operador laplaciano. Eles provaram que (D_q) com $p = 2$ possui pelo menos $\operatorname{cat}(\Omega)$ soluções para q próximo de

2^*. Aqui, $\mathrm{cat}(\Omega)$ denota a categoria de Ljusternik-Schnirelmann do conjunto Ω. Posteriormente, outros artigos foram publicados tratando da multiplicidade de soluções para (D_q) com $p = 2$ em função da topologia de Ω, tanto no caso subcrítico [8, 11, 7] quanto no caso crítico [28, 22]. O caso quasilinear $(2 < p < N)$ foi considerado por Alves e Ding em [2] e Furtado em [16].

O problema $(S_{\lambda,q})$ foi estudado por Bartsch e Wang em [5] no caso semilinear $p = 2$. Eles provaram a existência de uma solução positiva de energia mínima para λ suficientemente grande. Mais ainda, quando $\lambda \to \infty$, essas soluções se concentram em uma solução positiva de energia mínima do problema (D_q). Também, supondo Ω um domínio limitado e apoiados no resultado anterior de Benci e Cerami, os autores provaram que $(S_{\lambda,q})$ com $p = 2$ possui $\mathrm{cat}(\Omega)$ soluções positivas para λ suficientemente grande e q próximo de 2^*.

Em [17, 18], Furtado estudou o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u(\tau x) = -u(x) & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

com $\lambda > 0$, $2 \leq p < N$, $p < q < p^*$, τ uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{R}^N$ satisfazendo $\tau \neq Id$ e $\tau^2 = Id$. O potencial a satisfaz (A_1), (A_2) e é invariante por τ, isto é, $a(\tau x) = a(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Utilizando métodos variacionais ele obteve, para λ grande, resultados de existência e concentração de soluções que mudam de sinal exatamente uma vez, além da relação entre o número dessas soluções com a topologia equivariante do conjunto Ω onde o potencial se anula, quando q é próximo de p^*. Adaptando as ideias das demonstrações desses resultados de soluções nodais para o caso sem hipótese de simetria, o autor pôde estender os resultados de [5] para o caso quasilinear.

Nosso objetivo aqui é estudar os resultados de Bartsch e Wang [5] estendidos para o caso $2 \leq p < N$, demonstrados por Furtado em [17, 18]. O espaço vetorial em que trabalharemos é

$$E = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p < \infty \right\}.$$

Para $\lambda \geq 0$, definimos $E_\lambda = (E, \|\cdot\|_\lambda)$ o espaço vetorial E munido da norma

$$\|u\|_\lambda = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) \right\}^{1/p}.$$

Associado ao problema $(S_{\lambda,q})$ temos o funcional $\widetilde{I}_{\lambda,q} : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p + (\lambda a(x)+1)|u|^p) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^q.$$

Dizemos que $u \in E_\lambda$ é uma solução fraca de $(S_{\lambda,q})$ quando

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\phi + \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda a(x)+1)|u|^{p-2}u\phi - \int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-2}u\phi = 0,$$

para toda função $\phi \in E_\lambda$. Uma solução u de $(S_{\lambda,q})$ é de energia mínima quando

$$\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) = \inf\left\{\widetilde{I}_{\lambda,q}(v) : v \text{ é uma solução não trivial de } (S_{\lambda,q})\right\}.$$

No Capítulo 2, apresentamos os resultados de existência e concentração de soluções positivas de $(S_{\lambda,q})$ para λ suficientemente grande. São eles:

Teorema A *Suponha que (A_1) e (A_2) sejam válidas. Então existe $\Lambda_0 = \Lambda_0(q)$ tal que, para todo $\lambda \geq \Lambda_0$, o problema $(S_{\lambda,q})$ tem pelo menos uma solução positiva de energia mínima.*

Teorema B *Sejam $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_n \to \infty$ e (u_n) uma sequência de soluções positivas do problema $(S_{\lambda_n,q})$ tal que $\widetilde{I}_{\lambda_n,q}(u_n)$ é limitado. Então, a menos de uma subsequência, $u_n \to u$ forte em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ com u sendo uma solução positiva do problema (D_q).*

Corolário C *Sejam $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ com $\lambda_n \to \infty$ e (u_n) uma sequência de soluções positivas de energia mínima do problema $(S_{\lambda_n,q})$. Então (u_n) converge em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ao longo de uma subsequência para uma solução positiva de energia mínima de (D_q).*

No Capítulo 3, estudamos a relação entre a topologia do conjunto $\Omega = \operatorname{int} a^{-1}(0)$ e o número de soluções positivas de $(S_{\lambda,q})$. Mais especificamente, apresentamos a demonstração do seguinte teorema.

Teorema D *Suponha que (A_1) e (A_2) sejam válidas e que Ω seja limitado. Então existe $q_0 \in (p, p^*)$ com a propriedade de, para cada $q \in (q_0, p^*)$, existe um número $\Lambda(q) > 0$ tal que, para todo $\lambda \geq \Lambda(q)$, o problema $(S_{\lambda,q})$ tem pelo menos cat(Ω) soluções positivas.*

Embora as demonstrações dos resultados acima sigam aquelas de Bartsch e Wang, existe uma maior dificuldade técnica devida à não-linearidade do operador p-laplaciano e pelo fato do espaço de funções em que se deve trabalhar não ser um espaço de Hilbert. Dentre os resultados que auxiliam a transpor a dificuldade introduzida pelo p-laplaciano, citamos uma versão vetorial do lema de Brézis-Lieb demonstrada por Alves ([1], Lema 3), uma versão de um resultado de concentração e compacidade ([33], Lema 1.40) demonstrada por Furtado ([18], Lema 2.6) e uma propriedade das sequências minimizantes para S ([18], Lema A.11), onde S é a melhor constante da imersão de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

Capítulo 1

Resultados preliminares

Neste capítulo, apresentamos resultados e definições que utilizamos no decorrer deste trabalho.

1.1 Conjuntos homotopicamente equivalentes

Definição 1.1 *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Uma homotopia entre as aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ é uma aplicação contínua $H : [0,1] \times X \to Y$ tal que para todo $x \in X$, tem-se $H(0,x) = f(x)$ e $H(1,x) = g(x)$. Escreve-se $f \simeq g$ para indicar que existe uma homotopia H entre f e g.*

Definição 1.2 *Sejam X e Y dois espaços topológicos. Dizemos que X e Y são homotopicamente equivalentes se existem aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que $f \circ g \simeq Id_Y$ e $g \circ f \simeq Id_X$, onde Id_X é a função identidade de X e Id_Y de Y.*

Para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ definimos

$$\Omega_r^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, \Omega) < r\} \quad \text{e} \quad \Omega_r^- = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}.$$

Nesta seção, nosso objetivo é provar o seguinte resultado, importante para a demonstração do Teorema D.

Lema 1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado de classe C^2. Então para $r_1, r_2 > 0$ suficientemente pequenos, os conjuntos $\Omega_{r_1}^+$ e $\Omega_{r_2}^-$ são homotopicamente equivalentes a Ω.*

A demonstração que damos aqui encontra-se em [13] (Proposição 2.3.3). Antes, apresentamos algumas definições e um resultado sobre superfícies compactas que serão necessários.

Definição 1.4 *Seja $M = M^m \subset \mathbb{R}^N$ uma superfície de dimensão m e classe C^k, $k \geq 1$. Seja $\varphi : U_0 \to U$ uma parametrização com $U_0 \subset \mathbb{R}^m$ um aberto, $U \subset \mathbb{R}^N$ e $p = \varphi(x) \in M$ para algum $x \in U_0$. O espaço tangente a M no ponto p é o espaço vetorial de dimensão m*

$$T_pM = \varphi'(x) \cdot \mathbb{R}^m.$$

Dizemos que um vetor $u \in \mathbb{R}^N$ é *normal a superfície M no ponto p* quando u for perpendicular a todos os vetores tangentes a M no ponto p, isto é, quando se tiver $u \cdot v = 0$ para todo $v \in T_pM$. Indicamos o conjunto dos vetores normais a M no ponto p por ν_pM.

Dizemos que o segmento $[p, a] = \{p + t(a - p) : 0 \leq t \leq 1\}$ é *normal a M no ponto p* se $p \in M$ e $v = a - p \in \nu_pM$.

Dado $\varepsilon > 0$, a bola normal $B^{\perp}(p; \varepsilon)$ é a reunião dos segmentos normais a M no ponto p, de comprimento menor que ε. Dizemos que ε é um *raio normal admissível* para um subconjunto $X \subset M$ quando, dados quaisquer dois segmentos $[p, a]$ e $[q, b]$, normais a M, de comprimento menor que ε, com $p \neq q \in X$, tem-se $[p, a] \cap [q, b] = \emptyset$.

Enunciamos agora o teorema da vizinhança tubular para superfícies compactas cuja demonstração pode ser encontrada em [24].

Teorema 1.5 *Seja $M = M^m \subset \mathbb{R}^N$ uma superfície compacta de classe C^k, $k \geq 2$. Então:*

(i) Existe $\varepsilon > 0$, raio normal admissível para M.

(ii) A reunião $V_\varepsilon(M) = \cup_{p \in M} B^{\perp}(p; \varepsilon)$ dos segmentos normais a M de comprimento menor que ε é um aberto de $\mathbb{R}^N$ chamado a vizinhança tubular de M de raio ε.

(iii) A aplicação $\eta : V_\varepsilon(M) \to M$, que associa a cada ponto $q \in V_\varepsilon(M)$ o pé do único segmento normal que o contém, é de classe C^{k-1}.

Demonstração do Lema 1.3: Por hipótese, $\partial\Omega$ é uma superfície compacta de classe C^2. Logo valem $(i) - (iii)$ do Teorema 1.5 para algum $\varepsilon > 0$. Seja $0 < r_1 < \varepsilon$. Definimos

$g : \Omega \to \Omega_{r_1}^- \subset \Omega_{r_1}^+$ a projeção dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \in \Omega_{r_1}^-, \\ \pi(x) - r_1\eta(x), & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus \Omega_{r_1}^-, \end{cases}$$

onde $\eta(x)$ é o vetor unitário na direção do único segmento normal que contém x. Definimos também $f : \Omega_{r_1}^+ \to \Omega$ por

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ x - r_1\eta(x), & \text{se} \quad x \in \Omega_{r_1}^+ \setminus \Omega. \end{cases}$$

Observamos que f e g estão bem definidas e são contínuas. Vamos mostrar que $f\circ g \simeq Id_\Omega$ e $g\circ f \simeq Id_{\Omega_{r_1}^+}$. Para isso, tomamos $H_1 : [0,1] \times \Omega \to \Omega$ dada por

$$H_1(t,x) = (1-t)f\circ g(x) + tx = (1-t)g(x) + tx.$$

Se $x \in \Omega_{r_1}^-$, $H_1(t,x) = x \in \Omega_{r_1}^- \subset \Omega$. Se $x \in \Omega \setminus \Omega_{r_1}^-$, $H_1(t,x)$ está contido no segmento $[x, g(x)] \subset [\pi(x), g(x)]$ de $V_\varepsilon(\partial\Omega)$. Desde que esse segmento não contém outro ponto de fronteira além de $\pi(x)$, segue que $H_1(t,x) \subset \Omega$. Logo H_1 está bem definida e é uma homotopia entre $f\circ g$ e Id_Ω. Analogamente, definimos $H_2 : [0,1] \times \Omega_{r_1}^+ \to \Omega_{r_1}^+$ por

$$H_2(t,x) = (1-t)g\circ f(x) + tx.$$

Observamos que

$$g\circ f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{se} \quad x \in \Omega, \\ \pi(x) - r_1\eta(x), & \text{se} \quad x \in \Omega_{r_1}^+ \setminus \Omega. \end{cases}$$

Logo $H_2(t,x)$ está contido no segmento normal de $V_\varepsilon(\partial\Omega)$ que contém x, segmento esse contido em $\Omega_{r_1}^+$. Assim H_2 é uma homotopia entre $g\circ f$ e $Id_{\Omega_{r_1}^+}$. Daí $\Omega_{r_1}^+$ é homotopicamente equivalente a Ω. De forma análoga mostra-se que $\Omega_{r_2}^-$ também o é. $\square$

1.2 Funcional restrito a uma variedade

Considere $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach, $\psi \in C^1(X, \mathbb{R})$,

$$V = \{v \in X : \psi(v) = 0\} \quad \text{e} \quad \psi'(v) \neq 0, \text{ para todo } v \in V.$$

Definição 1.6 *O espaço tangente a variedade V num ponto $z \in V$ é o conjunto*

$$T_zV = \{y \in X : \ \langle \psi'(z), y\rangle = 0\}$$

ou seja, T_zV é o núcleo do funcional $\psi'(z)$.

Definição 1.7 *Seja $\varphi \in C^1(X,\mathbb{R})$. A norma da derivada de $\varphi|_V := \varphi_V$ em $v \in V$ é definida por*

$$\|\varphi_V'(v)\|_* = \sup\left\{\langle \varphi'(v), y\rangle : y \in T_vV \text{ e } \|y\| = 1\right\}.$$

Lema 1.8 *Sejam f e g funcionais lineares em um espaço vetorial F. Se $N(f) \subset N(g)$ então $g \equiv kf$ para alguma constante $k \in \mathbb{R}$, onde $N(f)$ e $N(g)$ denotam o núcleo das funções f e g, respectivamente.*

Demonstração: Se $f \equiv 0$ então $g \equiv 0$ e o lema está provado para qualquer escolha de $k \in \mathbb{R}$. Caso $f \neq 0$, existe $v \in F$ tal que $f(v) \neq 0$. Considere $k = \dfrac{g(v)}{f(v)}$ e o funcional linear $h(x) = g(x) - kf(x)$ para $x \in F$. Vamos mostrar que $h \equiv 0$ e, com isso, concluir a demosntração do lema. Para tanto, seja $w \in F$. Escolhendo $s = s(w) = \dfrac{f(w)}{f(v)}$ vemos que $w = sv + u$ onde $u = w - sv \in N(f)$. Como $N(f) \subset N(g)$ temos $h(u) = 0$ e, portanto, $h(w) = sh(v) + h(u) = 0$. Logo, $h \equiv 0$. □

O lema a seguir corresponde à Proposição 5.12 de [33], cuja demonstração pode também ser encontrada em [13].

Lema 1.9 *Seja $u \in V$. Então*

$$\|\varphi_V'(u)\|_* = \min_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi'(u) - t\psi'(u)\|_{X'}.$$

Demonstração: Para $t \in \mathbb{R}$, de acordo com as Definições 1.7 e 1.6,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_V'(u)\|_* &= \sup\{\langle \varphi'(u), y\rangle : y \in T_uV \text{ e } \|y\| = 1\} \\
&= \sup\left\{\langle \varphi'(u) - t\psi'(u), y\rangle : y \in T_uV \text{ e } \|y\| = 1\right\} \\
&\leq \sup\{\langle \varphi'(u) - t\psi'(u), y\rangle : y \in X \text{ e } \|y\| = 1\} \\
&= \|\varphi'(u) - t\psi'(u)\|_{X'}.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Pelo Teorema de Hanh-Banach, existe $\Phi : X \to \mathbb{R}$ linear contínua tal que

$$\Phi\,|_{T_u V} = \varphi'_V(u) \;\text{ e }\; \|\Phi\|_{X'} = \|\varphi'_V(u)\|_*$$

Como $N(\psi'(u)) = T_u V \subset N(\varphi'(u) - \Phi)$, pelo Lema 1.8, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi'(u) - \Phi = t_0 \psi'(u).$$

Assim,

$$\|\varphi'(u) - t_0 \psi'(u)\|_{X'} = \|\Phi\|_{X'} = \|\varphi'_V(u)\|_*.$$

Combinando com (1.1), concluímos a demonstração do lema. □

1.3 A categoria de Ljusternik-Schnirelmann

Nesta seção, apresentamos a definição da categoria de Lusternik-Schnirelmann bem como algumas de suas propriedades usadas na demonstração do Teorema D. Para um melhor estudo sobre o assunto, veja [29, 33, 12, 3] e também [13].

Definição 1.10 *Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é contrátil em X quando existe uma aplicação contínua $h : [0;1] \times A \to X$ tal que, para todo $x \in A$, $h(0,x) = x$ e $h(1,x) = x_0$ para algum $x_0 \in X$. Equivalentemente, existe uma homotopia entre a aplicação identidade de A e uma aplicação constante. Tal h é chamada de deformação de A em X.*

Definição 1.11 *Seja $A \subset X$, onde X é um espaço topológico. A categoria de A em X, que denotamos por $cat_X(A)$, é o menor inteiro k tal que A pode ser coberto por k subconjuntos fechados e contráteis em X. Se não existir tal inteiro, dizemos que $cat_X(A) = +\infty$. Além disso, $cat_X(\emptyset) = 0$ e representamos $cat_X(X)$ por $cat(X)$.*

Como exemplos, temos que $cat_{\mathbb{R}^N}(S^{N-1}) = cat_{\mathbb{R}^N}(\overline{B_1(0)}) = 1$. Exemplos de conjuntos que tem categoria maior que 1 é a esfera N-dimensional $S^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ cuja $cat_{S^N}(S^N) = 2$ e o toro N-dimensinonal $\mathcal{T}^N$ cuja $cat_{\mathcal{T}^N}(\mathcal{T}^N) = N+1$. A demonstração desses fatos pode ser encontrada em [29].

Proposição 1.12 *Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X. A categoria satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Se $A \subset B$, então $cat_X(A) \leq cat_X(B)$;

(ii) $cat_X(A \cup B) \leq cat_X(A) + cat_X(B)$;

(iii) Se B é fechado em X, então $cat_X(B) \leq cat_B(B)$;

(iv) Sejam M uma variedade modelada em um espaço de Hilbert e K um subconjunto compacto de M. Então, $cat_M(K) < +\infty$ e existe uma vizinhança U de K tal que $cat_M(\overline{U}) = cat_M(K)$;

(v) Se X é homotopicamente equivalente a Y, então $cat_X(X) = cat_Y(Y)$.

Teorema 1.13 *Sejam X um espaço de Banach, $M \subset X$ uma C^1-variedade e $I \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional limitado inferiormente em M. Suponha que I satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \leq d$ e considere $I^d = \{u \in M : I(u) \leq d\}$. Então o funcional I restrito à M tem pelo menos $cat(I^d)$ pontos críticos u tais que $I(u) \leq d$.*

1.4 Resultados de concentração e compacidade

Enunciamos aqui resultados de concentração e compacidade que serão úteis no Capítulo 3. Antes, damos algumas definições e um resultado da Teoria da Medida que podem ser encontrados em [15].

Definição 1.14 *Seja μ uma medida de Borel em $\mathbb{R}^N$ e $B \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto de Borel. μ é regular exterior em B se $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \supset B,\ U \text{ é aberto}\}$ e μ é regular interior em B se $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B,\ K \text{ é compacto}\}$. Dizemos que μ é regular se μ é regular exterior e regular interior em todos os conjuntos de Borel.*

Definição 1.15 *Uma medida de Radon em $\mathbb{R}^N$ é uma medida de Borel que é finita em conjuntos compactos, regular exterior em todos os conjuntos de Borel e regular interior em todos os conjuntos abertos.*

Denotamos por $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ o espaço de Banach das medidas de Radon sobre $\mathbb{R}^N$ equipado com a norma

$$|\omega| = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^N} \phi(x)d\omega\right| : \phi \in C_0(\mathbb{R}^N),\ |\phi|_\infty \leq 1\right\}.$$

Dizemos que uma sequência $(\omega_n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ converge fracamente para ω em $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \phi\ d\omega_n \to \int_{\mathbb{R}^N} \phi\ d\omega$ para toda $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.16 *Seja μ uma medida positiva de Radon em $\mathbb{R}^N$ e $(f_n) \subset L^1(\mathbb{R}^N, \mu)$ com $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |f_n| d\mu \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para alguma constante C. Então existe uma medida positiva de Radon μ_0 tal que, a menos de subsequência, $\mu_n = |f_n|d\mu \rightharpoonup \mu_0$ fracamente no sentido das medidas.*

Desde os trabalhos de P.L. Lions em [26, 27], o método de concentração de compacidade tem sido largamente utilizado por vários autores para compensar problemas de falta de compacidade. O lema que apresentamos a seguir corresponde ao Lema 2.6 em [18]. Ele foi provado no caso particular $p = 2$, $q_n \equiv 2^*$ por Willem em [33] no Lema 1.40. A versão demonstrada por Furtado, bem como sua demonstração, foi inspirada nesse último trabalho e também pelo de Smets em [31] (veja Lema 2.1 e Observação 2.2), onde o autor considera o caso $1 < p < N$, $q_n \equiv p^*$ e permite o aparecimento de um pontencial V que pode ser singular.

Lema 1.17 *Seja $(q_n) \subset [p, p^*]$ uma sequência não-decrescente tal que $q_n \to p^*$. Seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo*

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \textit{fracamente em } D^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\[2ex] |\nabla(u_n - u)|^p \rightharpoonup \omega & \textit{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\[2ex] |u_n - u|^{q_n} \rightharpoonup \nu & \textit{fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \\[2ex] u_n(x) \to u(x) & q.t.p.\ x \in \mathbb{R}^N, \\[2ex] \nabla u_n(x) \to \nabla u(x) & q.t.p.\ x \in \mathbb{R}^N, \end{array}$$

e defina

$$\omega_\infty = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^p, \quad \nu_\infty = \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} |u_n|^{q_n}.$$

Então

$$|\nu|^{p/p*} \leq S^{-1}|\omega|,$$

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n|^p_{p,\mathbb{R}^N} = |\nabla u|^p_{p,\mathbb{R}^N} + |\omega| + \omega_\infty,$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n|^{q_n}_{q_n,\mathbb{R}^N} = |\nabla u|^{p^*}_{p^*,\mathbb{R}^N} + |\nu| + \nu_\infty.$$

Além do mais, se $u = 0$ e $|\nu|^{p/p^*} = S^{-1}|\omega|$, então cada uma das medidas ω e ν se concentra em um único ponto.

Abaixo enunciamos o Princípio de Concentração-Compacidade devido a Lions ([27], Lema I.1) cuja demonstração também pode ser encontrada em [32] (Lema 4.8).

Lema 1.18 *Seja $(u_n) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência convergindo fracamente para u em $D^{1,p}(R^N)$. Então existem duas medidas finitas não-negativas $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$, um conjunto no máximo enumerável J, uma família $(x_j)_{j\in J}$ de pontos distintos em $\mathbb{R}^N$ e duas sequências $(\mu_j)_{j\in J}, (\nu_j)_{j\in J}$ contidas em $(0,\infty)$ tais que*

$$\begin{aligned} \nu &= |u|^{p^*} + \sum_{j\in J} \nu_j \delta_{x_j}, \\ \mu &\geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in J} \mu_j \delta_{x_j}, \\ \mu_j &\geq S\nu_j^{p/p^*}, \end{aligned}$$

para todo $j \in J$. Em particular, $\sum_{j\in J} \nu_j^{p/p^*} < \infty$. Além do mais, se $\nu(\mathbb{R}^N)^{1/p^*} \geq S\mu(\mathbb{R}^N)^{1/p}$ então $\nu = \gamma\delta_{x_0} = \gamma^{-p/q} C_0^p \mu$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\gamma \geq 0$.

Utilizando o Lema 1.18 e ideias de [30], Furtado [18] demonstrou a seguinte propriedade das sequências minimizantes para S.

Lema 1.19 *Seja $(v_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega |v_n|^{p^*} dx = 1$ e $\|v_n\|^p \to S$. Então existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ q.t.p. em Ω.*

1.5 O Lema de Brézis-Lieb

Nesta seção apresentamos o Lema de Brézis-Lieb [10] e também uma versão vetorial do mesmo, devido a [1]. A demonstração do Lema de Brézis-Lieb que damos aqui pode ser encontrada em [21] (Lema 4.6).

Lema 1.20 (Brézis-Lieb) *Sejam $1 \leq p < \infty$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de funções em $L^p(\mathcal{D})$ que converge em quase todo ponto de $\mathcal{D}$ para f. Então $f \in L^p(\mathcal{D})$ e*

$$|f|_{p,\mathcal{D}}^p = \lim_{n\to\infty} (|f_n|_{p,\mathcal{D}}^p - |f - f_n|_{p,\mathcal{D}}^p),$$

onde $|\cdot|_{p,\mathcal{D}}$ *denota a norma usual em* $L^p(\mathcal{D})$.

Demonstração: Por hipótese, existe $C > 0$ tal que $|f_n|_{p,\mathcal{D}}^p \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema de Fatou,

$$\int_{\mathcal{D}} |f|^p = \int_{\mathcal{D}} \liminf_{n\to\infty} |f_n|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{D}} |f_n|^p \leq C.$$

Isso mostra que $f \in L^p(\mathcal{D})$.

Seja $\varepsilon > 0$. Afirmamos que existe $C_\varepsilon > 0$ que depende de ε e de p tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$, se tem

$$\Big| |s+1|^p \ - |s|^p - 1 \Big| \leq \varepsilon |s|^p + C_\varepsilon. \tag{1.2}$$

Com efeito, como $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{|s+1|^p - |s|^p - 1}{|s|^p} = 0$, existe $A_\varepsilon > 0$ tal que

$$\Big| |s+1|^p \ - |s|^p - 1 \Big| \leq \varepsilon |s|^p, \quad \text{sempre que } |s| > A_\varepsilon. \tag{1.3}$$

Para $|s| \leq A_\varepsilon$ temos

$$\Big| |s+1|^p \ - |s|^p - 1 \Big| \leq 2^p |s|^p + 2^p + |s|^p + 1 \leq 2^p A_\varepsilon^p + 2^p + A_\varepsilon^p + 1.$$

Definindo $C_\varepsilon = 2^p A_\varepsilon^p + 2^p + A_\varepsilon^p + 1 > 0$, a expressão acima e a desigualdade (1.3) mostram nossa afirmação. Dado $b \in \mathbb{R}$, multiplicando a desigualdade (1.2) por $|b|^p$ obtemos

$$\Big| |sb+b|^p \ - |sb|^p - |b|^p \Big| \leq \varepsilon |sb|^p + C_\varepsilon |b|^p, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R},$$

donde concluímos que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\Big| |a+b|^p \ - |a|^p - |b|^p \Big| \leq \varepsilon |a|^p + C_\varepsilon |b|^p. \tag{1.4}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$u_n = \Big| |f_n|^p \ - |f_n - f|^p - |f|^p \Big| \quad \text{e} \quad Z_n = (u_n - \varepsilon |f_n - f|^p)^+,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ para qualquer função real u. Vamos mostrar que $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} u_n \to 0$. Para isso, aplicando a desigualdade (1.4) com $a = f_n - f$ e $b = f$ obtemos

$$u_n - \varepsilon |f_n - f|^p \leq C_\varepsilon |f|^p$$

e, portanto,

$$0 \leq Z_n = \max\{(u_n - \varepsilon|f_n - f|^p), 0\} \leq C_\varepsilon |f|^p.$$

Como $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em $\mathcal{D}$, temos que $Z_n \to 0$ q.t.p. em $\mathcal{D}$. Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (T.C.D.L.) que

$$\int_{\mathcal{D}} Z_n \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty. \tag{1.5}$$

Temos também que

$$\begin{aligned} u_n = u_n^+ = (\varepsilon|f_n - f|^p + u_n - \varepsilon|f_n - f|^p)^+ &\leq \varepsilon|f_n - f|^p + (u_n - \varepsilon|f_n - f|^p)^+ \\ &= \varepsilon|f_n - f|^p + Z_n. \end{aligned}$$

Por hipótese, (f_n) é limitada em $L^p(\mathcal{D})$ e, portanto, existe $M > 0$ tal que $|f_n - f|_p^p \leq M$. Daí e da expressão acima, segue que

$$\int_{\mathcal{D}} u_n = \varepsilon|f_n - f|_p^p + \int_{\mathcal{D}} Z_n \leq \varepsilon M + \int_{\mathcal{D}} Z_n.$$

Fazendo $n \to \infty$ e $\varepsilon \to 0$, por (1.5) obtemos $\displaystyle\int_{\mathcal{D}} u_n \to 0$. Como

$$\left||f_n|_{p,\mathcal{D}}^p - |f_n - f|_{p,\mathcal{D}}^p - |f|_{p,\mathcal{D}}^p\right| \leq \int_{\mathcal{D}} u_n,$$

o lema está provado. $\square$

Observação 1.21 *Adaptando ligeiramente a demonstração acima, é possível mostrar que, para* $1 < p < \infty$*,*

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla(u_n - u)|^p = \int_{\mathcal{D}} |\nabla u_n|^p - \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p + o(1) \tag{1.6}$$

quando $n \to \infty$*, sempre que* (u_n) *é uma sequência tal que* $(|\nabla u_n|)$ *é limitada em* $L^p(\mathcal{D})$ *e* $\nabla u_n(x)$ *converge em quase todo ponto de* $\mathcal{D}$ *para* $\nabla u(x)$*.*

De fato, pelo Lema de Fatou, $|\nabla u|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Também podemos mostrar que, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $C_\varepsilon > 0$ que depende de ε e de p tal que

$$\Big||A + B|^p - |A|^p - |B|^p\Big| \leq \varepsilon|A|^p + C_\varepsilon|B|^p, \quad \text{para todos } A, B \in \mathbb{R}^N. \tag{1.7}$$

Com efeito, sejam $A, B \in \mathbb{R}^N$ e considere $F(x) = |x|^p$, $x \in \mathbb{R}^N$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} |F(A+B) - F(A)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} F(A+tB)\, dt \right| = \left| \int_0^1 \nabla F(A+tB) \cdot B\, dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left| \frac{\partial F}{\partial x_i}(A+tB) \right| |B_i|\, dt \leq \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 p|A+tB|^{p-1}|B_i|\, dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pela desigualdade de Young, existe uma constante $d(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo $0 \leq t \leq 1$,

$$|A+tB|^{p-1}|B_i| \leq \varepsilon|A+tB|^p + d(\varepsilon)|B_i|^p \leq \varepsilon 2^p |A|^p + (2^p\varepsilon + d(\varepsilon))\, |B|^p.$$

Substituindo em (1.8) obtemos constantes $C, k(\varepsilon) > 0$ tais que

$$\Big| |A+B|^p - |A|^p \Big| \leq \varepsilon C|A|^p + k(\varepsilon)|B|^p.$$

Daí segue (1.7). Agora escolha $A = \nabla u_n - \nabla u$ e $B = \nabla u$. Então

$$\Big| |\nabla u_n|^p - |\nabla u_n - \nabla u|^p - |\nabla u|^p \Big| \leq \varepsilon|\nabla u_n - \nabla u|^p + C_\varepsilon |\nabla u|^p$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$. Considerando $\widetilde{u}_n = \big|\, |\nabla u_n|^p - |\nabla u_n - \nabla u|^p - |\nabla u|^p \big|$, a verificação de (1.6) segue os mesmos passos da demonstração do lema anterior. □

Apresentamos abaixo uma versão vetorial do lema de Brézis-Lieb que foi provada por Alves em [1].

Lema 1.22 *Sejam $K \geq 1$, $s \geq 2$ e $A(y) = |y|^{s-2}y$, para $y \in \mathbb{R}^K$. Considere uma sequência de funções vetoriais $\eta_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ tal que $(\eta_n) \subset (L^s(\mathbb{R}^N))^K$ e $\eta_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Então, se $|\eta_n|_{(L^s(\mathbb{R}^N))^K}$ é limitado, temos*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n) + A(\omega) - A(\eta_n + \omega)|^{s/(s-1)} = 0.$$

para cada $\omega \in (L^s(\mathbb{R}^N))^K$ fixado.

Demonstração: Para $y \in \mathbb{R}^K$ e $x \in \mathbb{R}^N$ e $1 \leq i \leq K$, sejam $A_i(y)$ e $\omega_i(x)$ a i-ésima componente dos vetores $A(y)$ e $\omega(x)$, respectivamente. Então

$$A_i(\eta_n + \omega) - A_i(\eta_n) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} A_i(\eta_n + t\omega) \right) dt = \int_0^1 \nabla A_i(\eta_n + t\omega) \cdot \omega dt.$$

Observe que, para cada $y \in \mathbb{R}^K$ com $y \neq 0$ e $1 \leq j \leq K$,

$$\frac{\partial A_i(y)}{\partial y_j} = \begin{cases} (s-2)y_i y_j |y|^{s-4}, & \text{se} \quad j \neq i, \\ |y|^{s-2} + (s-2)y_i^2 |y|^{s-4}, & \text{se} \quad j = i. \end{cases}$$

Como $|y_j| \leq |y|$, segue que

$$\left| \frac{\partial A_i(y)}{\partial y_j} \right| \leq (s-1)|y|^{s-2}.$$

Logo existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |A_i(\eta_n + \omega) - A_i(\eta_n)| \ \leq \ |\omega| \int_0^1 |\nabla A_i(\eta_n + t\omega)| dt \ &\leq \ C_1 |\omega| \int_0^1 |\eta_n + tw|^{s-2} dt \\ &\leq \ C_1 |\omega| (|\eta_n| + |\omega|)^{s-2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, existem constante $C_2, C_3 > 0$ tais que

$$|A_i(\eta_n + \omega) - A_i(\eta_n)| \leq C_2 |\omega|^{s-1} + C_3 |\omega| |\eta_n|^{s-2}.$$

Para $s = 2$, o lema é verdadeiro. Para $s > 2$, $0 < \varepsilon < 1$ fixado e $\theta = s - 2$, usando a desigualdade de Young com expoentes $\frac{s-1}{s-2} > 1$ e $s - 1$ na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} |A_i(\eta_n + \omega) - A_i(\eta_n)| \ &\leq \ C_2 |\omega|^{s-1} + \frac{C_3}{\varepsilon^\theta} |\omega| \varepsilon^\theta |\eta_n|^{s-2} \\ &\leq \ C_2 |\omega|^{s-1} + \frac{C_3}{\varepsilon^\theta} \left(|\omega|^{s-1} + \varepsilon^{\theta \frac{s-1}{s-2}} |\eta_n|^{s-1} \right) \end{aligned}$$

Logo

$$|A_i(\eta_n + \omega) - A_i(\eta_n)| \leq \widehat{C}_\varepsilon |\omega|^{s-1} + \varepsilon |\eta_n|^{s-1},$$

onde $\widehat{C}_\varepsilon = C_2 + \dfrac{C_3}{\varepsilon^{s-2}} > 0$. Portanto existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n)| \leq C_\varepsilon |\omega|^{s-1} + \varepsilon |\eta_n|^{s-1}. \tag{1.9}$$

Considere agora a função $G_{\varepsilon,n} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$G_{\varepsilon,n}(x) = \max\{|A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n) - A(\omega)|(x) - \varepsilon |\eta_n(x)|^{s-1}, 0\}.$$

Por hipótese, $\eta_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Daí, como A é contínua, segue da definição $G_{\varepsilon,n}$ que

$$\lim_{n\to\infty} G_{\varepsilon,n}(x) = 0, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

De (1.9) temos

$$0 \leq G_{\varepsilon,n}(x) \leq (C_\varepsilon + 1)|\omega|^{s-1} \in L^{s/(s-1)}(\mathbb{R}^N).$$

Logo podemos usar o T.C.D.L. para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |G_{\varepsilon,n}(x)|^{s/(s-1)} dx = 0. \tag{1.10}$$

Também da definição de $G_{\varepsilon,n}$, temos

$$|A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n) - A(\omega)| \leq \varepsilon|\eta_n|^{s-1} + G_{\varepsilon,n}.$$

Como $0 < \varepsilon < 1$, temos $\varepsilon^{s/(s-1)} < \varepsilon$ e a expressão acima implica que existe $C_5 > 0$ tal que

$$|A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n) - A(\omega)|^{s/(s-1)} \leq C_5\varepsilon|\eta_n|^s + C_5|G_{\varepsilon,n}|^{s/(s-1)}.$$

Por (1.10) e pelo fato de (η_n) ser limitada em $(L^s(\mathbb{R}^N))^K$, obtemos $C_6 > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n) - A(\omega)|^{s/(s-1)} dx \leq C_5\varepsilon \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_n|^s dx \leq C_6\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n) - A(\omega)|^{s/(s-1)} dx \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |A(\eta_n + \omega) - A(\eta_n) - A(\omega)|^{s/(s-1)} dx \leq 0, \end{aligned}$$

o que mostra o lema. □

1.6 Um resultado de convergência

Aqui apresentamos um resultado de convergência em espaços L^p cuja demonstração encontra-se em [21] (veja Lema 4.8).

Lema 1.23 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto não necessariamente limitado, $1 < p < \infty$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $L^p(\Omega)$ que converge em quase todo ponto de Ω para*

f. Então $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^p(\Omega)$.

Demonstração: Pelo Lema de Fatou, $f \in L^p(\Omega)$. Como (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$ e $L^p(\Omega)$ é reflexivo, existe $g \in L^p(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $f_n \rightharpoonup g$ fracamente em $L^p(\Omega)$. Vamos mostrar que $g(x) = f(x)$ q.t.p. em Ω. Consideramos para $j \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$\Omega_j := \{x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| \leq 1, \text{ para todo } n \geq j\}.$$

Fixado $j \geq 1$, seja $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$. Por hipótese, $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω. Para $n \geq j$, tem-se

$$\begin{aligned} |f_n(x)\varphi_j(x)| \leq C|f_n(x)| &\leq C(|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|) \\ &\leq C + C|f(x)| := h(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in K_j := \text{supp } \varphi_j \subset \Omega_j$ e para alguma constante $C > 0$. Como K_j é compacto e $f \in L^p(\Omega)$, usando a desigualdade de Hölder podemos concluir que $h \in L^1(K_j)$. Pelo T.C.D.L.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\varphi_j(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{K_j} f_n(x)\varphi_j(x) = \int_{K_j} f(x)\varphi_j(x) = \int_\Omega f(x)\varphi_j(x). \tag{1.11}$$

Além disso, como $\varphi_j \in L^{p'}(\Omega)$, $T : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $T(f) = \int_\Omega f\varphi_j$ é linear contínua. Pela convergência fraca $f_n \rightharpoonup g$ em $L^p(\Omega)$ segue que $T(f_n) \to T(g)$, isto é,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\varphi_j(x) = \int_\Omega g(x)\varphi_j(x). \tag{1.12}$$

Combinando (1.11) e (1.12) obtemos

$$\int_{\Omega_j} (g(x) - f(x))\varphi_j(x) = 0, \quad \text{para toda } \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j).$$

Pelo Lema 4.24 em [9],

$$g(x) = f(x) \quad \text{q.t.p. em } \Omega_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Daí, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe um conjunto $Z_j \subset \Omega_j$ de medida nula tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega_j \setminus Z_j$. Considere $A = \cup_{j=1}^\infty \Omega_j$ e $N = \cup_{j=1}^\infty Z_j$. Dado $x \in A \setminus N$ tem-se $x \in \Omega_j \setminus Z_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$ e, portanto, $g(x) = f(x)$. Mostramos com isso que

$$g(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in A \setminus N. \tag{1.13}$$

Por outro lado, como $f_n(x) \to f(x)$ q.t.p. em Ω, existe um conjunto $Z \subset \Omega$ de medida nula tal que $f_n(x) \to f(x)$ seja qual for $x \in \Omega \setminus Z$. Isso diz que para cada $x \in \Omega \setminus Z$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 1 \quad \text{sempre que } n \geq j_0.$$

Assim $x \in \Omega_{j_0} \subset A$. Com isso, $\Omega \setminus Z \subset A$ e, daí, $\Omega \setminus (Z \cup N) \subset A \setminus N$. Segue de (1.13) que

$$g(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in \Omega \setminus (Z \cup N).$$

Como $Z \cup N$ tem medida nula, segue o resultado. $\square$

1.7 Teorema de extensão de Dugundji

A seguir enunciamos um teorema que trata da extensão de funções contínuas, devido a Dugundji. Sua demonstração pode ser encontrada em [14] (Teorema 6.1).

Definição 1.24 *Seja L um espaço métrico. Então L é um espaço afim do tipo m se, para cada espaço métrico X e para toda função contínua $f : X \to L$, vale a seguinte propriedade: para todo $x \in X$ e toda vizinhança $W \supset f(x)$, existem uma vizinhança $U \supset x$ e um conjunto convexo $C \subset L$ tal que $f(U) \subset C \subset W$.*

Teorema 1.25 (Dugundji) *Sejam X um espaço métrico, $A \subset X$ um subconjunto fechado e L um espaço afim do tipo m. Então, cada função contínua $f : A \to L$ possui uma extensão contínua $F : X \to L$.*

Capítulo 2

Demonstração dos Teoremas A e B

2.1 Considerações iniciais

Estamos interessados em estudar a existência e o comportamento das soluções da equação

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{$S_{\lambda,q}$}$$

em que $2 \leq p < N$, $p < q < p^*$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla^{p-2} u|\nabla u)$ é o operador p-Laplaciano e λ é um parâmetro positivo. Vamos considerar a uma função satisfazendo

(A_1) $a \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é não negativa, $\Omega = \text{int } a^{-1}(0)$ é um conjunto não vazio com fronteira suave e $\overline{\Omega} = a^{-1}(0)$;

(A_2) existe $M_0 > 0$ tal que

$$\mathcal{L}(\{x \in \mathbb{R}^N : \ a(x) \leq M_0\}) < \infty,$$

onde $\mathcal{L}$ é a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

O espaço vetorial natural em que trabalhamos é

$$E = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) : \ \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^p < \infty \right\}.$$

Para $\lambda \geq 0$, definimos $E_\lambda = (E, \|\cdot\|_\lambda)$ o espaço vetorial E munido da norma

$$\|u\|_\lambda = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) dx \right\}^{1/p}.$$

Durante todo o desenvolvimento deste trabalho, denotamos por $\|\cdot\|$ a norma em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\|u\| = \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) \right\}^{1/p}.$$

Dados $1 \leq s < \infty$ e $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$, indicamos por $|\cdot|_{s,\mathcal{D}}$ a usual de$L^s(\mathcal{D})$. Para simplificar, quando $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N$, escrevemos $|u|_s$ ao invés de $|u|_{s,\mathbb{R}^N}$.

O funcional associado a $(S_{\lambda,q})$ é $\widetilde{I}_{\lambda,q} : E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) \;=\; \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x)+1)|u|^p) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \;=\; \frac{1}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{1}{q}|u|_q^q.$$

É possível mostrar (veja Proposição 1.12 em [33]) que $\widetilde{I}_{\lambda,q} \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ com

$$\langle \widetilde{I}'_{\lambda,q}(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v + (\lambda a(x)+1)|u|^{p-2}uv\right) - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}uv,$$

para todo $u, v \in E_\lambda$. Dizemos que $u \in E_\lambda$ é solução fraca de $(S_{\lambda,q})$ quando

$$\langle \widetilde{I}'_{\lambda,q}(u), v\rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in E_\lambda.$$

Uma solução fraca de $(S_{\lambda,q})$ é de energia mínima quando

$$\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) = \inf\left\{\widetilde{I}_{\lambda,q}(v) : v \text{ é uma solução não trivial de } (S_{\lambda,q})\right\}.$$

Definimos a variedade de Nehari para o funcional $\widetilde{I}_{\lambda,q}$ por

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q} = \left\{u \in E_\lambda \setminus \{0\} : \langle \widetilde{I}'{}_{\lambda,q}(u), u\rangle = 0\right\} = \left\{u \in E_\lambda \setminus \{0\} : \|u\|_\lambda^p = |u|_q^q\right\}.$$

Observamos que $\widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q}$ contém todas as soluções fracas de $(S_{\lambda,q})$. Quando $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q}$ tem-se

$$\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u\|_\lambda^p,$$

e, portanto, o funcional $\widetilde{I}_{\lambda,q}$ é limitado inferiormente em $\widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q}$. Assim, é finito o número

$$\widetilde{c}_{\lambda,q} = \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q}} \widetilde{I}_{\lambda,q}(u).$$

Neste capítulo, inicialmente mostramos que para todo $\lambda > 0$ suficientemente grande, $(S_{\lambda,q})$ possui uma solução positiva de energia mínima. Posteriormente, vamos mostrar que as soluções de $(S_{\lambda,q})$ se concentram numa solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{D_q}$$

Para este problema, o funcional associado é $\widetilde{J}_{q,\Omega} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\widetilde{J}_{q,\Omega}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q.$$

Temos que $\widetilde{J}_{q,\Omega} \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e a variedade de Nehari para este funcional é o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{q,\Omega} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle \widetilde{J'}_{q,\Omega}(u), u\rangle = 0\right\} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\|_\Omega^p = |u|_{q,\Omega}^q\right\},$$

onde $\|u\|_\Omega$ denota a norma de u em $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\|u\|_\Omega = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\right)^{1/p}.$$

Um cálculo análogo àquele feito para $\widetilde{I}_{\lambda,q}$ mostra que é finito o elemento

$$\widetilde{m}_{q,\Omega} = \inf_{u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{q,\Omega}} \widetilde{J}_{q,\Omega}(u).$$

Como estamos interessados em soluções positivas de $(S_{\lambda,q})$, vamos trabalhar com um problema um pouco modificado. A saber, para $\lambda \geq 0$, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2}u = (u^+)^{q-1}, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{$S_{\lambda,q}^+$}$$

e seu funcional associado $I_{\lambda,q} : E_\lambda \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + (\lambda a(x) + 1)|u|^p) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^q,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$. Da mesma maneira que se mostra que $\widetilde{I}_{\lambda,q} \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ mostra-se também que $I_{\lambda,q} \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$.

A variedade de Nehari para o funcional $I_{\lambda,q}$ é o conjunto

$$\mathcal{N}_{\lambda,q} = \left\{u \in E_\lambda \setminus \{0\} : \langle I'_{\lambda,q}(u), u\rangle = 0\right\} = \left\{u \in E_\lambda \setminus \{0\} : \|u\|_\lambda^p = |u^+|_q^q\right\}.$$

Assim como $\widetilde{c}_{\lambda,q}$ é finito, está bem definido o número real

$$c_{\lambda,q} = \inf_{u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}} I_{\lambda,q}(u).$$

Dizemos que $u \in E_\lambda$ é uma solução fraca de $(S^+_{\lambda,q})$ quando

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)|u|^{p-2} u\phi - \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q-1}\phi = 0,$$

para toda função $\phi \in E_\lambda$. Uma solução u de $(S^+_{\lambda,q})$ é de energia mínima quando

$$I_{\lambda,q}(u) = \inf \left\{ I_{\lambda,q}(v) : v \text{ é uma solução não trivial de } (S^+_{\lambda,q}) \right\}.$$

Mostraremos que soluções de $(S^+_{\lambda,q})$ são positivas e se concentram numa solução positiva de

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = (u^+)^{q-1} & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (D^+_q)$$

O funcional associado a esse problema é $J_{q,\Omega} : W^{1,p}_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_{q,\Omega}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) - \frac{1}{q} \int_\Omega (u^+)^q.$$

Então, $J_{q,\Omega} \in C^1(W^{1,p}_0(\Omega), \mathbb{R})$ e a variedade de Nehari para este funcional é o conjunto

$$\mathcal{M}_{q,\Omega} = \left\{ u \in W^{1,p}_0(\Omega) \setminus \{0\} : \langle J'_{q,\Omega}(u), u \rangle = 0 \right\} = \left\{ u \in W^{1,p}_0(\Omega) \setminus \{0\} : \|u\|^p_\Omega = |u^+|^q_{q,\Omega} \right\}.$$

Definimos

$$m_{q,\Omega} = \inf_{u \in \mathcal{M}_{q,\Omega}} J_{q,\Omega}(u).$$

Finalizando esta seção, fazemos algumas considerações sobre o espaço vetorial E_λ.

Lema 2.1 *Para $\lambda \geq 0$, E_λ é um espaço de Banach reflexivo.*

Demonstração: Se (u_n) é uma sequência de Cauchy em E_λ, então (u_n) é uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Daí, como $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é completo, existe $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Assim, passando a uma subsequência, podemos supor que $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Vamos mostrar que $u_n \to u$ em E_λ, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_n - u)|^p + |u_n - u|^p) + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^p \to 0.$$

Como $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, resta-nos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^p \to 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como (u_n) é de Cauchy em E_λ, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geq n_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|a(x)^{1/p}u_n - a(x)^{1/p}u_m\right|^p = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u_m|^p < \|u_n - u_m\|_\lambda^p < \varepsilon.$$

Logo, a sequência $(a(x)^{1/p}u_n)$ é de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, existe $v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $a(x)^{1/p}u_n \to v$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ e, consequentemente, a menos de subsequência, $a(x)^{1/p}u_n(x)$ converge para $v(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Por outro lado, como $a(x)^{1/p}u_n(x) \to a(x)^{1/p}u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, vemos que $v = a(x)^{1/p}u$. Isso mostra que E_λ é um espaço de Banach.

Para mostrar que E_λ é reflexivo, defina $E_a = (E, \|\cdot\|_a)$ o espaço vetorial E munido da norma

$$\|u\|_a = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)|u|^p\right)^{1/p}.$$

Afirmamos que E_a é uniformemente convexo. Com efeito, vamos mostrar antes que vale a seguinte desigualdade em E_a:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_a^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_a^p \leq \frac{1}{2}(\|u\|_a^p + \|v\|_a^p), \quad \text{para todo } u, v \in E_a. \tag{2.1}$$

Para tanto, utilizamos a primeira desigualdade de Clarkson (veja [9], Teorema 4.10]), que diz que para $a, b \in \mathbb{R}$ vale

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p).$$

Dessa desigualdade, segue que

$$\begin{aligned} \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_a^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_a^p &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^p + \left|\frac{u-v}{2}\right|^p\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)(|u|^p + |v|^p) = \frac{1}{2}(\|u\|_a^p + \|v\|_a^p), \end{aligned}$$

o que mostra (2.1). Agora, para ver que E_a é uniformemente convexo, sejam $\varepsilon > 0$, $u, v \in E_a$ com $\|u\|_a \leq 1$, $\|v\|_a \leq 1$ e $\|u - v\|_a > \varepsilon$. A desigualdade (2.1) implica que

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_a^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

e, então, $\left\| \dfrac{u+v}{2} \right\|_a \leq 1-\delta$, onde $\delta = 1-[1-(\frac{\varepsilon}{2})^p]^{1/p}$. Portanto E_a é uniformemente convexo e, pelo Teorema 3.31 em [9], E_a é reflexivo. Considere agora $T : E_\lambda \to E_a \times (L^p(\mathbb{R}^N))^N$ definida por $T(u) = (u, \nabla u)$. É fácil ver que T está bem definida e é linear. Observe que o espaço produto $E_a \times (L^p(\mathbb{R}^N))^N$ munido da norma $\|(u,v)\|_\times = \left(\|u\|_a^p + \big|\, |v|\, \big|_p^p \right)^{1/p}$ é um espaço de Banach reflexivo, uma vez que E_a e $(L^p(\mathbb{R}^N))^N$ o são. Temos que T é linear e $\|T(u)\|_\times = \|u\|_\lambda$ para toda função $u \in E_\lambda$, isto é, T é uma isometria linear. Daí e do fato de E_λ ser completo, $T(E_\lambda)$ é um subespaço fechado de $E_a \times (L^p(\mathbb{R}^N))^N$. Logo, pela Proposição 3.30 em [9], $T(E_\lambda)$ é reflexivo. E como T é uma isometria linear sobrejetiva entre E_λ e $T(E_\lambda)$, segue que (veja nota em [9], página 71) E_λ é reflexivo. Isso conclui a demonstração do lema. □

Proposição 2.2 *Sejam $\lambda \geq 0$ e (u_n) uma sequência limitada em E_λ. Então existe $u \in E_\lambda$ tal que, a menos de subsequência,*

(i) $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E_λ;

(ii) $u_n \to u$ fortemente em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \leq s < p^*$;

(iii) $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$.

Demonstração: Pelo lema anterior, E_λ é reflexivo. Logo, existe $u \in E_\lambda$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E_λ. Isso mostra (i). Como $E_\lambda \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ continuamente e $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ compactamente para $p \leq s < p^*$, segue que $E_\lambda \hookrightarrow L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ compactamente. Assim $u_n \to u$ em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$, o que mostra (ii). Para provar (iii), usamos um processo diagonal. Dado $r > 0$, seja $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$. Como $u_n \to u$ em $L^s(B_1)$, existe um subconjunto infinito $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que a subsequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge para u em quase todo ponto de B_1. Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge para u em $L^s(B_2)$, obtemos uma subsequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ com $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ tal que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_2}$ converge para u em quase todo ponto de B_2. Procedendo dessa maneira, obtemos conjuntos infinitos de índices $\mathbb{N}_{k+1} \subset \mathbb{N}_k \subset \mathbb{N}$ tais que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge para u em quase todo ponto de B_k. Considere $\mathbb{N}^* = \{n_1^*, n_2^*, \ldots, n_k^*, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ com n_k^* o k-ésimo elemento de $\mathbb{N}_k$. Assim, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é, a partir do seu k-ésimo elemento, uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_k}$ e, portanto, converge para u em quase todo ponto de B_k. Temos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $Z_k \subset B_k$ de medida nula tal que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}_k}$ converge para $u(x)$ seja qual for $x \in B_k \setminus Z_k$. Tome $Z = \cup_{m=1}^\infty Z_m$. Então Z tem medida nula e, para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus Z$ temos $x \in B_k \setminus Z_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para $u(x)$. Isso mostra (iii). □

2.2 A condição de compacidade de Palais-Smale

Quando F é um espaço de Banach e $I \in C^1(F, \mathbb{R})$, dizemos que uma sequência (u_n) em F é uma sequência de Palais-Smale para I no nível c, que denotamos por $(PS)_c$, quando $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ em F' quando $n \to \infty$. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c quando toda sequência $(PS)_c$ possui uma subsequência convergente em F.

Nesta seção, estabelecemos uma condição de compacidade para o funcional $I_{\lambda,q}$. Mostramos que a condição de Palais-Smale vale abaixo de um certo nível, desde que o parâmetro λ seja suficientemente grande. Precisamente, vamos demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 2.3 *Para todo $C_1 > 0$ dado, existe $\Lambda_0 = \Lambda_0(q) > 0$ tal que $I_{\lambda,q}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c para todo $c \leq C_1$ e $\lambda \geq \Lambda_0$.*

Para provar este resultado, vamos precisar de vários lemas auxiliares.

Lema 2.4 *Seja $(u_n) \subset E_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$. Então*

(i) (u_n) *é limitada em* E_λ,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_\lambda^p = \lim\limits_{n\to\infty} |u_n^+|_q^q = \dfrac{pq}{q-p}c.$

Demonstração: Pela definição de sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$I_{\lambda,q}(u_n) \leq c + \varepsilon \quad \text{e} \quad \frac{1}{q}\|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_{E'_\lambda} \leq \varepsilon,$$

sempre que $n \geq n_0$. Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{q}\langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + (\lambda a(x)+1)|u_n|^p) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^q \\
&\quad -\frac{1}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + (\lambda a(x)+1)|u_n|^p) - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^q\right) \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u_n\|_\lambda^p. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq n_0$,

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^p = I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{q}\langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle \leq c + \varepsilon + \varepsilon \|u_n\|_\lambda.$$

Sendo $2 \leq p < q$, a expressão acima implica que (u_n) é limitada em E_λ. Isso mostra (i).

Para provar (ii) observamos que, sendo (u_n) uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$ limitada, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q}\langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle = 0$$

e, assim, de (2.2) segue que

$$c = \lim_{n\to\infty} \left(I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{q}\langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_\lambda^p. \tag{2.3}$$

De maneira análoga a (2.2) obtemos

$$I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) |u_n^+|_q^q$$

e, portanto,

$$c \;=\; \lim_{n\to\infty} \left(I_{\lambda,q}(u_n) - \frac{1}{q}\langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) |u_n^+|_q^q. \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) segue (ii). □

Lema 2.5 *Seja $(u_n) \subset E_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$. Existe $C_0 > 0$ independente de λ tal que se $c \neq 0$ então $c \geq C_0$.*

Demonstração: Pela continuidade da imersão de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$|u^+|_q^q \leq |u|_q^q \leq C_1 \|u\|^q \leq C_1 \|u\|_\lambda^q. \tag{2.5}$$

Segue daí que, para $u \in E_\lambda$,

$$\langle I'_{\lambda,q}(u), u\rangle = \|u\|_\lambda^p - |u^+|_q^q \geq \|u\|_\lambda^p - C_1 \|u\|_\lambda^q.$$

Observe que $\|u\|_\lambda^p - C_1\|u\|_\lambda^q \geq \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^p$ se, e somente se, $\|u\|_\lambda \leq (2C_1)^{\frac{1}{p-q}} := \delta$. Portanto

$$\langle I'_{\lambda,q}(u), u\rangle \;\geq\; \frac{1}{2}\|u\|_\lambda^p, \quad \text{para todo } u \in E_\lambda \text{ com } \|u\|_\lambda \leq \delta. \tag{2.6}$$

Vamos mostrar que a tese do lema é verdadeira para $C_0 = \delta^p \cdot \dfrac{(q-p)}{pq} > 0$. Supondo que $c < C_0$, o Lema 2.4 (ii) diz que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_\lambda^p < \delta^p$. Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_n\|_\lambda < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Sendo $(u_n) \subset E_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_{E'_\lambda} \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_1$. Tomando $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, segue de (2.6) que para $n \geq n_2$,

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_\lambda^p \;\leq\; \langle I'_{\lambda,q}(u_n), u_n\rangle \;\leq\; \|I'_{\lambda,q}(u_n)\|_{E'_\lambda}\|u_n\|_\lambda \;\leq\; \varepsilon\|u_n\|_\lambda,$$

ou seja,

$$\|u_n\|_\lambda \leq (2\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}, \quad \text{sempre que} \quad n \geq n_2.$$

Isso mostra que $\|u_n\|_\lambda \to 0$ quando $n \to \infty$. Segue de (2.5) que $|u_n^+|_q \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim, $I_{\lambda,q}(u_n) = \dfrac{1}{p}\|u_n\|_\lambda^p - \dfrac{1}{q}|u_n^+|_q^q \to 0$, isto é, $c = 0$. O lema está provado. □

Lema 2.6 *Seja $C_1 > 0$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existem $\Lambda_\varepsilon, R_\varepsilon > 0$ tais que, se $(u_n) \subset E_\lambda$ é uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$ com $c \leq C_1$ e $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$, vale*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{B^c_{R_\varepsilon}} |u_n|^q \leq \varepsilon.$$

onde $B^c_{R_\varepsilon} = \big\{x \in \mathbb{R}^N : |x| > R_\varepsilon\big\}$.

Para provar esse lema, usamos o seguinte resultado.

Lema 2.7 *Seja $A \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto mensurável tal que $\mathcal{L}(A) < \infty$. Então*

$$\lim_{R\to\infty} \mathcal{L}(A \cap \overline{B}_R^c) = 0.$$

Demonstração: Para $n \in \mathbb{N}$, temos $A = (A \cap B_n) \cup (A \cap B_n^c)$, sendo a união disjunta. Assim

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A \cap B_n) + \mathcal{L}(A \cap B_n^c). \tag{2.7}$$

Claramente $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$ e a sequência de conjuntos $(A \cap B_n)$ é crescente, isto é, $A \cap B_1 \subset A \cap B_2 \subset \cdots$. Portanto, pelo Lema 3.4 em [4],

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)\right) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(A \cap B_n). \tag{2.8}$$

Por hipótese, $\mathcal{L}(A) < \infty$. Como $A \cap B_n \subset A$ temos que $\mathcal{L}(A \cap B_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, usando (2.7) obtemos

$$\mathcal{L}(A) - \mathcal{L}(A \cap B_n) = \mathcal{L}(A \cap B_n^c)$$

De (2.8) segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{L}(A \cap B_n^c) = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{L}(A \cap B_n^c) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Tome $R_0 = n_0 > 0$. Se $R > R_0 = n_0$ então $(A \cap B_R^c) \subset (A \cap B_{n_0}^c)$. Isso implica que $\mathcal{L}(A \cap \overline{B}_R^c) \leq \mathcal{L}(A \cap B_R^c) \leq \mathcal{L}(A \cap B_{n_0}^c) < \varepsilon$ para todo $R > R_0$. Isso mostra o lema. □

Demonstração do Lema 2.6: Considere para $R > 0$ os conjuntos

$$C(R) = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| > R,\ a(x) > M_0\}$$

e

$$D(R) = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| > R,\ a(x) \leq M_0\}.$$

Observamos que $D(R) = A_{M_0} \cap \overline{B}_R^c$, onde $A_{M_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) \leq M_0\}$. Pela hipótese (A_2), $\mathcal{L}(A_{M_0}) < \infty$. Segue do Lema 2.7 que

$$\lim_{R\to\infty} \mathcal{L}(D(R)) = 0. \tag{2.9}$$

Passando a uma subsequência, se necessário, usando o Lema 2.4 (ii) e o fato de que $a(x) > M_0$ em $C(R)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{C(R)} |u_n|^p &= \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \int_{C(R)} (\lambda M_0 + 1)|u_n|^p \\
&< \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \int_{C(R)} (\lambda a(x) + 1)|u_n|^p \\
&\leq \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \int_{C(R)} (|\nabla u_n|^p + (\lambda a(x) + 1)|u_n|^p) \\
&\leq \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \|u_n\|_\lambda^p \\
&\leq \frac{1}{\lambda M_0 + 1} \cdot \frac{pq}{q-p}(c+1)
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \frac{1}{\lambda M_0+1}\cdot\frac{pq}{q-p}(C_1+1) \tag{2.10}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$.

Pelo Lema 2.4 (i), (u_n) é limitada em E_λ, digamos $\|u_n\|_\lambda\leq\sigma$. Como $u_n\in E_\lambda\hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ continuamente para todo $s\in[p,p^*]$, escolhendo $1<r<\dfrac{N}{N-p}$, vemos que $|u_n|^p\in L^r(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ para todo $n\in\mathbb{N}$, uma vez que $p<pr<pN/(N-p)=p^*$. Pela desigualdade de Hölder e pela imersão acima obtemos uma constante $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{D(R)}|u_n|^p \;&\leq\; \left(\int_{D(R)}|u_n|^{pr}\right)^{1/r}\left(\int_{D(R)}1\right)^{1/r'} &&\leq\; |u_n|_{pr}^p\,\mathcal{L}(D(R))^{1/r'}\\ &\leq\; C\|u_n\|_\lambda^p\mathcal{L}(D(R))^{1/r'} &&\leq\; C\sigma^p\mathcal{L}(D(R))^{1/r'}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Vamos estimar $\displaystyle\int_{B_R^c}|u_n|^q$. Devido a imersão contínua de E_λ em $L^s(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})\subset L^s(B_R^c)$ para todo $s\in[p,p^*]$, vemos que $u_n\in L^p(B_R^c)\cap L^{p^*}(B_R^c)$. Como $q\in[p,p^*]$ segue da desigualdade de interpolação que existe $\alpha\in[0,1]$ tal que, para todo $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|u_n|_{q,B_R^c}^q \;&\leq\; |u_n|_{p^*,B_R^c}^{q(1-\alpha)}|u_n|_{p,B_R^c}^{q\alpha}\\ &\leq\; |u_n|_{p^*}^{q(1-\alpha)}|u_n|_{p,B_R^c}^{q\alpha}\\ &\leq\; C\|u_n\|_\lambda^{q(1-\alpha)}|u_n|_{p,B_R^c}^{q\alpha}\\ &\leq\; C\sigma^{q(1-\alpha)}\|u_n\|_{p,B_R^c}^{q\alpha}\\ &=\; C\sigma^{q(1-\alpha)}\left(\int_{C(R)}|u_n|^p dx+\int_{D(R)}|u_n|^p dx\right)^{q\alpha/p}\end{aligned}$$

Usando (2.10), (2.11) e (2.9), para λ e R suficientemente grandes a expressão acima se torna tão pequena quanto se queira. Isso mostra o lema. □

Lema 2.8 *Sejam $\lambda\geq 0$ e $(u_n)\subset E_\lambda$ uma sequência limitada tal que $I'_{\lambda,q}(u_n)\to 0$ quando $n\to\infty$. Então, a menos de subsequência,*

$$\nabla u_n(x)\to\nabla u(x) \qquad \textit{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

$$|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\rightharpoonup|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \textit{fracamente em } L^{p'}(\mathbb{R}^N),\ 1\leq i\leq N.$$

Demonstração: Pela Proposição 2.2, existe $u \in E_\lambda$ tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } E_\lambda, \\ u_n \to u & \text{em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } p \leq s < p^*, \\ u_n(x) \to u(x) & q.t.p. \ em \ \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^N$,

$$P_n(x) = (|\nabla u_n(x)|^{p-2}\nabla u_n(x) - |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) \cdot \nabla(u_n(x) - u(x)).$$

Observamos que $P_n(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $n \in \mathbb{N}$. De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz,

$$\begin{aligned} P_n &= |\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p - \nabla u \cdot \nabla u_n(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2}) \\ &\geq |\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p - |\nabla u||\nabla u_n|(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u_n|^{p-2}) \\ &= |\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p - |\nabla u|^{p-1}|\nabla u_n| - |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla u| \\ &= |\nabla u_n|^{p-1}(|\nabla u_n| - |\nabla u|) - |\nabla u|^{p-1}(|\nabla u_n| - |\nabla u|) \\ &= (|\nabla u_n|^{p-1} - |\nabla u|^{p-1})(|\nabla u_n| - |\nabla u|) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

uma vez que os fatores $(|\nabla u_n|^{p-1} - |\nabla u|^{p-1})$ e $(|\nabla u_n| - |\nabla u|)$ possuem o mesmo sinal.

Afirmamos que, para todo $r > 0$,

$$\int_{B_r} P_n \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty,$$

onde $B_r = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq r\}$. Para verificar isso, dados $r, \varepsilon > 0$ quaisquer, tomamos $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em B_r e $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash B_{r+\varepsilon}$. Então,

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ \int_{B_r} P_n \ = \ \int_{B_r} P_n\psi \ &\leq \ \int_{\mathbb{R}^N} P_n\psi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) + \int_{\mathbb{R}^N} \psi|\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla(u - u_n)). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Como $(u_n) \subset E_\lambda$ é limitada e $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos $((u_n - u)\psi) \subset E_\lambda$ limitada. Por hipótese, $I'_{\lambda,q}(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$ e assim,

$$\begin{aligned}
o(1) &= \langle I'_{\lambda,q}(u_n), (u_n - u)\psi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla((u_n - u)\psi) + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)|u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)\psi \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{q-1}(u_n - u)\psi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \psi|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}(\nabla u_n \cdot \nabla\psi)(u_n - u) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)|u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)\psi - \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{q-1}(u_n - u)\psi
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) = I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + o(1)$$

quando $n \to \infty$. Substituindo a igualdade acima em (2.12) obtemos:

$$0 \le \int_{B_r} P_n \ \le \ I_1(n) + I_2(n) + I_3(n) + I_4(n) + o(1) \tag{2.13}$$

quando $n \to \infty$, onde

$$\begin{aligned}
I_1(n) &= -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}(\nabla u_n \cdot \nabla\psi)(u_n - u), \\
I_2(n) &= -\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)|u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)\ \psi, \\
I_3(n) &= \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{q-1}(u_n - u)\ \psi, \\
I_4(n) &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla(u - u_n).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que, para $1 \le i \le 4$, tem-se $\lim_{n\to\infty} I_i(n) = 0$. Com efeito, como $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, podemos supor $|\nabla\psi| \le M_1$ em $\mathbb{R}^N$ para alguma constante $M_1 \in \mathbb{R}$. Daí, da desigualdade de Cauchy-Schwartz e do fato de $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{r+\varepsilon}$ segue que

$$\begin{aligned} |I_1(n)| &\leq \int_{B_{r+\varepsilon}} |\nabla u_n|^{p-2}|\nabla u_n||\nabla\psi||u_n - u| \\ &\leq M_1 \int_{B_{r+\varepsilon}} |\nabla u_n|^{p-1}|u_n - u| \end{aligned}$$

Por hipótese, $\|u_n\|_\lambda \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para alguma constante $M > 0$. Por isso, pela desigualdade de Hölder com expoentes p e p' e pelo fato de que $u_n \to u$ em $L^p(B_{r+\varepsilon})$, segue que

$$\begin{aligned} |I_1(n)| &\leq M_1 \left(\int_{B_{r+\varepsilon}} |\nabla u_n|^p\right)^{1/p'} \left(\int_{B_{r+\varepsilon}} |u_n - u|^p\right)^{1/p} \\ &\leq M_1 \|u_n\|_\lambda^{p-1} |u_n - u|_{p,B_{r+\varepsilon}} \\ &\leq M_1 M^{p-1} |u_n - u|_{p,B_{r+\varepsilon}} \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. De modo análogo,

$$\begin{aligned} |I_2(n)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)|u_n|^{p-1}|u_n - u|\ \psi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)^{\frac{p-1}{p}} |u_n|^{p-1} (\lambda a(x) + 1)^{\frac{1}{p}} |u_n - u|\ \psi \\ &\leq \left(\int_{B_{r+\varepsilon}} (\lambda a(x) + 1)|u_n|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_{r+\varepsilon}} \psi^p(\lambda a(x) + 1)|u_n - u|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como a é contínua no compacto $B_{r+\varepsilon}$, existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq |\lambda a(x) + 1| \leq a_0$ em $B_{r+\varepsilon}$. Assim, lembrando que $0 \leq \psi \leq 1$, temos

$$|I_2(n)| \ \leq\ a_0^{\frac{1}{p}} \|u_n\|_\lambda^{p-1} |u_n - u|_{p,B_{r+\varepsilon}} \ \leq\ a_0^{\frac{1}{p}} M^{p-1} |u_n - u|_{p,B_{r+\varepsilon}} \ \to\ 0,$$

quando $n \to \infty$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $u_n^+ \leq |u_n|$. Usando esse fato, a desigualdade de Hölder e a continuidade da imersão $E_\lambda \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$, obtemos uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|I_3(n)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q-1}\psi|u_n - u| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{B_{r+\varepsilon}} \psi^q|u_n - u|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C\|u_n\|_\lambda^{q-1}|u_n - u|_{q,B_{r+\varepsilon}} \\
&\leq CM^{q-1}|u_n - u|_{q,B_{r+\varepsilon}} \to 0
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, uma vez que $p < q < p^*$. Para mostrar que $\lim_{n\to\infty} I_4(n) = 0$, considere $f : E_\lambda \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^N} \psi|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla z.$$

Para cada $z \in E_\lambda$, tem-se

$$|f(z)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-1}|\nabla z|\psi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla z|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_u\|z\|_\lambda.$$

onde $C_u = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$. Isso mostra que f está bem definida e, por ser linear, mostra também que f é contínua. Como $u_n \rightharpoonup u$ em E_λ segue que $I_4(n) = f(u) - f(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Concluímos de (2.13) que, para todo $r > 0$,

$$\int_{B_r} P_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.14}$$

Afirmamos que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{em} \quad (L^p(B_r))^N, \quad \text{para todo } r > 0. \tag{2.15}$$

De fato, aplicando a desigualdade (veja [25])

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a - b) \geq M_p|a - b|^p$$

que vale para todo $a, b \in \mathbb{R}^N$ e alguma constante $M_p > 0$, com $a = \nabla u_n$, $b = \nabla u$ e lembrando (2.14), segue que

$$0 \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \int_{B_r} |\nabla u_n - \nabla u|^p \;\leq\; \frac{1}{M_p} \lim_{n\to\infty} \int_{B_r} P_n \;=\; 0,$$

o que mostra (2.15) e, consequentemente, $|\nabla u_n(x) - \nabla u(x)| \to 0$ q.t.p. em B_r, seja qual for $r > 0$. Como na demonstração da Proposição 2.2 (iii), podemos usar um processo diagonal para concluir que, a menos de subsequência,

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Resta-nos mostrar que

$$|\nabla u_n|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{fracamente em } L^{p'}(\mathbb{R}^N),\ 1 \le i \le N.$$

Para isso, considere a sequência de funções em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ dada por $f_n \equiv |\nabla u_n|^{p-2}\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$|f_n|_{p'}^{p'} = \int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u_n|^{p-2}\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right|\right]^{\frac{p}{p-1}} \le \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^p \le \|u_n\|_\lambda^p \le M^p$$

Daí, como $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo, existe $f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência, $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Pelo que já foi provado, $f_n(x) \to |\nabla u(x)|^{p-2}\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Segue daí e do Lema 1.23 que $f \equiv |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Isso termina a demonstração do lema. □

Lema 2.9 *Sejam $\lambda > 0$ e $(u_n) \subset E_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$. Então, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E_λ com u sendo uma solução fraca de $(S^+_{\lambda,q})$. Além disso, $v_n = u_n - u$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ para $I_{\lambda,q}$, onde $c' = c - I_{\lambda,q}(u)$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.4 (i), (u_n) é limitada em E_λ. Pela Proposição 2.2, a menos de subsequência,

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } E_\lambda, \\ u_n \to u & \text{em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } p \le s < p^*, \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Seja $v \in E_\lambda$. Como (u_n) é uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$,

$$\begin{aligned} \langle I'_{\lambda,q}(u_n), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\cdot\nabla v + \int_{\mathbb{R}^N}(\lambda a(x)+1)|u_n|^{p-2}u_n\, v - \int_{\mathbb{R}^N}(u_n^+)^{q-1}v \\ &= o(1), \end{aligned} \tag{2.16}$$

quando $n \to \infty$. Vamos calcular o limite de cada parcela em (2.16). Pelo Lema 2.8 e usando que $v \in E_\lambda$ e, portanto, $\nabla v \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla v &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \\ &\to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v\end{aligned} \tag{2.17}$$

quando $n \to \infty$. Agora, seja $g_n \equiv (\lambda a(x)+1)^{\frac{p}{p-1}} |u_n|^{p-2}u_n$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g_n|^{p'} = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)+1)|u_n|^p \leq \|u_n\|_\lambda^p,$$

onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Como (u_n) é limitada em E_λ, segue que (g_n) é limitada em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Sendo $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ um espaço de Banach reflexivo, existe $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ tal que, a menos de subsequência, $g_n \rightharpoonup g$ fracamente em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Já temos a convergência $g_n(x) \to (\lambda a(x)+1)^{\frac{p}{p-1}}|u|^{p-2}u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Pelo Lema 1.23, $g \equiv (\lambda a(x)+1)^{\frac{p}{p-1}}|u|^{p-2}u$. Assim,

$$\langle \varphi, g_n \rangle \to \langle \varphi, g \rangle \quad \text{para toda } \varphi \in (L^{p'}(\mathbb{R}^N))', \tag{2.18}$$

onde $(L^{p'}(\mathbb{R}^N))'$ denota o espaço dual de $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema da Representação de Riesz (veja Teorema 4.11 em [9]), para cada $\varphi \in (L^{p'}(\mathbb{R}^N))'$ existe uma única $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} fw, \quad \text{para todo } f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N).$$

Logo (2.18) é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g_n w \to \int_{\mathbb{R}^N} gw, \quad \text{para todo } w \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Como $w \equiv (\lambda a(x)+1)^{\frac{1}{p}} v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $v \in E_\lambda$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)+1)^{\frac{p}{p-1}}|u_n|^{p-2}u_n(\lambda a(x)+1)^{\frac{1}{p}} v \to \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)+1)^{\frac{p}{p-1}}|u|^{p-2}u(\lambda a(x)+1)^{\frac{1}{p}} v,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)+1)|u_n|^{p-2}u_n v \to \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x)+1)|u|^{p-2}uv. \tag{2.19}$$

De maneira análoga, para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^{q-1} v \to \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^{q-1} v, \tag{2.20}$$

escolhemos $g_n \equiv (u_n^+)^{q-1}$ e observamos que, devido a imersão contínua de E_λ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, (g_n) é limitada em $L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, converge para $(u^+)^{q-1}$ fracamente em $L^{q'}(\mathbb{R}^N)$. De (2.17), (2.19) e (2.20) em (2.16), segue que

$$\langle I'_{\lambda,q}(u), v\rangle = 0, \quad \text{para todo } v \in E_\lambda.$$

Isso mostra que $I'_{\lambda,q}(u) = 0$ e, portanto, $u \in E_\lambda$ é solução fraca de $(S^+_{\lambda,q})$. Agora observamos que

$$I_{\lambda,q}(v_n) = I_{\lambda,q}(u_n) - I_{\lambda,q}(u) + R_n$$

onde

$$\begin{aligned} R_n &= I_{\lambda,q}(u_n - u) - I_{\lambda,q}(u_n) + I_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla(u_n - u)|^p - |\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p) \\ &+\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(\lambda a(x)+1)(|u_n - u|^p - |u_n|^p + |u|^p) - \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^N}\left((u_n - u)^+\right)^q - (u_n^+)^q - (u^+)^q. \end{aligned}$$

A limitação de (u_n) em E_λ, as convergências pontuais da Proposição 2.2 e do Lema 2.8 nos permitem aplicar o Lema de Brézis-Lieb (Lema 1.20 e a Observação 1.21) para concluir que $R_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto

$$I_{\lambda,q}(v_n) = I_{\lambda,q}(u_n) - I_{\lambda,q}(u) + o(1)$$

quando $n \to \infty$. Assim $\lim_{n\to\infty} I_{\lambda,q}(v_n) = c - I_{\lambda,q}(u)$. Resta apenas mostrar que $I'_{\lambda,q}(v_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Para isso, seja $\varphi \in E_\lambda$ qualquer. Uma vez que $\langle I'_{\lambda,q}(u), \varphi\rangle = 0$, somando e subtraindo $\langle I'_{\lambda,q}(u_n), \varphi\rangle$ na expressão de $\langle I'_{\lambda,q}(v_n, \varphi)\rangle$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle I'_{\lambda,q}(v_n), \varphi\rangle &= \langle I'_{\lambda,q}(u_n), \varphi\rangle - \langle I'_{\lambda,q}(u), \varphi\rangle + I_5(n) + I_6(n) - I_7(n) \\ &= o(1) + I_5(n) + I_6(n) - I_7(n), \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde

$$I_5(n) = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)\cdot\nabla\varphi,$$

$$I_6(n) = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)(|v_n|^{p-2}v_n + |u|^{p-2}u - |u_n|^{p-2}u_n)\varphi,$$

e

$$I_7(n) = \int_{\mathbb{R}^N} (|v_n|^{q-2}v_n + |u|^{q-2}u - |u_n|^{q-2}u_n)\varphi.$$

Sendo (v_n) limitada em E_λ, temos que $\eta_n := (\nabla v_n) \subset (L^p(\mathbb{R}^N))^N$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.22 com $K = N$. Assim, aplicando esse lema com $\omega = \nabla u$, $p = s$ e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |I_5(n)| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \, |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n + |\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \, \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \|\varphi\|_\lambda \\ &\leq o(1)\|\varphi\|_\lambda. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, é possível mostrar que essa estimativa também vale para $I_7(n)$. No caso de $I_6(n)$, essa estimativa é obtida aplicando-se novamente o Lema 1.22 para $K = 1$, $s = p$, $\eta_n = (\lambda a(x) + 1)^{\frac{1}{p}} v_n$ e $\omega = (\lambda a(x) + 1)^{\frac{1}{p}} u$, uma vez que (v_n) é limitada em E_λ e $|\eta_n|_p \leq \|v_n\|_\lambda$. Por isso e pela desigualdade de Hölder com expoentes p e $p' = \dfrac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned} |I_6(n)| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1)^{\frac{1}{p'}} \left| |v_n|^{p-2}v_n + |u|^{p-2}u - |u_n|^{p-2}u \right| (\lambda a(x) + 1)^{\frac{1}{p}} |\varphi| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (\lambda a(x) + 1) \left| |v_n|^{p-2}v_n + |u|^{p-2}u - |u_n|^{p-2}u_n \right|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|\varphi\| \\ &\leq o(1) \cdot \|\varphi\|_\lambda. \end{aligned}$$

Então, de (2.21) segue que

$$|\langle I'_{\lambda,q}(v_n), \varphi)\rangle| \leq o(1)\|\varphi\|_\lambda, \quad \text{para toda } \varphi \in E_\lambda.$$

Logo $\|I'_{\lambda,q}(v_n)\|_{E'_\lambda} = \sup\limits_{\varphi \in E_\lambda \setminus \{0\}} \dfrac{\left|\langle I'_{\lambda,q}(v_n), \varphi\rangle\right|}{\|\varphi\|_\lambda} \to 0$ quando $n \to \infty$. Isso conclui a prova do lema. □

Agora temos ferramentas suficientes para provar a Proposição 2.3.

Demonstração da Proposição 2.3: Seja $C_0 > 0$ dado pelo Lema 2.5. Seja também $\varepsilon > 0$ tal que $2\varepsilon < C_0 \dfrac{pq}{p-q}$. Dado $C_1 > 0$, sejam $\Lambda_\varepsilon, R_\varepsilon > 0$ dados pelo Lema 2.6. Tome $\Lambda_0 = \Lambda_\varepsilon$. Seja $(u_n) \subset E_\lambda$ uma sequência $(PS)_c$ para $I_{\lambda,q}$ com $\lambda \geq \Lambda_\varepsilon$ e $c \leq C_1$.

Pelo Lema 2.4 (i), (u_n) é limitada em E_λ. Pela Proposição 2.2, a menos de subsequência,

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } E_\lambda, \\ u_n \to u & \text{em } L^s_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ para todo } p \leq s < p^*, \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Pelo Lema 2.9, $v_n = u_n - u$ é uma sequência $(PS)_{c'}$ para $I_{\lambda,q}$ com $c' = c - I_{\lambda,q}(u)$. Afirmamos que $c' = 0$. De fato, caso contrário, pelo Lema 2.5, $c' \geq C_0 > 0$. Por termos $v_n \to 0$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$, segue dos Lemas 2.4 (ii) e 2.6 que

$$\begin{aligned} C_0 \frac{pq}{q-p} \leq c' \frac{pq}{q-p} &= \lim_{n\to\infty} |v_n^+|_q^q \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(\int_{B_{R_\varepsilon}} |v_n^+|^q + \int_{B^c_{R_\varepsilon}} |v_n^+|^q \right) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{B_{R_\varepsilon}} |v_n|^q + \limsup_{n\to\infty} \int_{B^c_{R_\varepsilon}} |v_n|^q \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso nos dá uma contradição com a escolha de ε. Então $c' = 0$. Pelo Lema 2.4 (ii), $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_\lambda = 0$, isto é, $u_n \to u$ em E_λ, o que conclui a demonstração. □

2.3 Soluções positivas de energia mínima

Nosso objetivo nesta seção é provar o Teorema A que nos garante a existência de uma solução positiva de energia mínima para $(S_{\lambda,q})$ quando λ é suficientemente grande. Nos apoiamos em alguns lemas. No caso dos Lemas 2.10 e 2.11 abaixo, adaptamos a demonstração do Lema 4.1 em [33] (veja também o Lema 1.3 em [20]). Consideramos S_{E_λ} a esfera unitária em E_λ, isto é, $S_{E_\lambda} = \{u \in E_\lambda : \|u\|_\lambda = 1\}$ e definimos $S^+_{E_\lambda} = \{w \in S_E : w^+ \neq 0\}$.

Lema 2.10 *Seja $u \in E_\lambda$ com $u^+ \neq 0$. Então existe um único $t(u) > 0$ tal que $t(u)u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. O máximo de $I_{\lambda,q}(tu)$ para $t \geq 0$ é atingido em $t = t(u)$.*

Demonstração: Dado $u \in E_\lambda$ com $u^+ \neq 0$, considere $g(t) = I_{\lambda,q}(tu)$ para $t \geq 0$. Então

$$g'(t) = \langle I'_{\lambda,q}(tu), u\rangle = t^{p-1}\|u\|_\lambda^p - t^{q-1}|u^+|_q^q, \quad \text{para } t \geq 0.$$

Por hipótese, $|u^+|_q \neq 0$. Sendo $1 \leq p-1 < q-1$, a expressão acima implica que o único ponto $t \neq 0$ no qual g' se anula é $t(u) = \left(\dfrac{\|u\|_\lambda^p}{|u^+|_q^q}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, que é o máximo de g para $t \geq 0$. Daí,

$$0 = g'(t(u)) = \langle I'_{\lambda,q}(t(u)u), u\rangle = \frac{1}{t(u)}\langle I'_{\lambda,q}(t(u)u), t(u)u\rangle.$$

Assim, $t(u)u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$ e conclui a prova do lema. □

Lema 2.11 *Para cada $u \in S^+_{E_\lambda}$, seja $t(u)$ obtido do Lema 2.10. A função $\varphi : S^+_{E_\lambda} \to \mathcal{N}_{\lambda,q}$ dada por $\varphi(u) = t(u)u$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Pelo lema anterior, a função φ está bem definida. Para provar a continuidade de φ, sejam $u_0 \in S^+_{E_\lambda}$ e (u_n) em $S^+_{E_\lambda}$ tal que $u_n \to u_0$ em E_λ e, consequentemente, em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Pela imersão contínua de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, $u_n \to u_0$ fortemente em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Pelo Teorema 4.9 em [9], a menos de subsequência,

$$u_n(x) \to u_0(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N$$

e

$$u_n^+(x) \leq |u_n(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Como $u_n^+(x) = \dfrac{u_n(x) + |u_n(x)|}{2}$, segue que

$$u_n^+(x) \to u_0^+(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Pelo T.C.D.L.,

$$|u_n^+ - u_0^+|_q \to 0 \ \text{ quando } n \to \infty.$$

Logo $|u_n^+|_q \to |u_0^+|_q$ e por conseguinte $t(u_n) \to t(u_0)$. Com isso, podemos concluir que φ é contínua. Consideramos agora a função $\theta : \mathcal{N}_{\lambda,q} \to S^+_{E_\lambda}$ dada por $\theta(u) = \dfrac{u}{\|u\|_\lambda}$. Então, θ está bem definida, pois se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$, então $|u^+|_q^q = \|u\|_\lambda^p \neq 0$ e tem-se $\|\theta(u)\|_\lambda = 1$. Além disso, θ é contínua. Afirmamos que θ é a inversa da φ. Com efeito, seja $u \in S^+_{E_\lambda}$. Então $\|u\|_\lambda = 1$. Pelo lema anterior, $t(u) > 0$ e, pela definição de θ, temos

$$\theta(\varphi(u)) = \frac{\varphi(u)}{\|\varphi(u)\|_\lambda} = \frac{t(u)u}{|t(u)|\|\theta\|_\lambda} = \frac{u}{\|u\|_\lambda} = u.$$

Por outro lado, se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$, então

$$\varphi(\theta(u)) = t(\theta(u))\theta(u) = t(\theta(u))\frac{u}{\|u\|_\lambda}.$$

Segue daí que, para mostrar nossa afirmação e por conseguinte o lema, resta-nos mostrar que $t(\theta(u)) = \|u\|_\lambda$. Usando que $\|u\|_\lambda^p = |u^+|_q^q$, a expressão de $t(u)$ no lema anterior nos fornece

$$t(\theta(u)) = t\left(\frac{u}{\|u\|_\lambda}\right) = \left(\frac{\|u\|_\lambda^q}{|u^+|_q^q}\right)^{\frac{1}{q-p}} = \left(\frac{\|u\|_\lambda^q}{\|u\|_\lambda^p}\right)^{\frac{1}{q-p}} = \|u\|_\lambda,$$

como queríamos. □

Definimos os níveis minimax

$$\widehat{c}_\lambda = \inf_{\substack{u\in E_\lambda \\ u^+\neq 0}} \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,q}(tu) \quad \text{e} \quad \overline{c}_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I_{\lambda,q}(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_\lambda) : \gamma(0) = 0;\ I_{\lambda,q}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Observamos que, como $I_{\lambda,q}(0) = 0$ e $\lim\limits_{t\to\infty} I_{\lambda,q}(tu) = -\infty$ para toda $u \not\equiv 0$ em E_λ, temos $\widehat{c}_\lambda \in \mathbb{R}$ bem definido.

Lema 2.12 *$\overline{c}_\lambda$ está bem definido e $\overline{c}_\lambda > 0$.*

Demonstração: Seja $u \in E_\lambda$ com $u^+ \neq 0$. Como $|u^+|_q$ e $\|u\|_\lambda$ são valores não nulos e $p < q$, segue da expressão

$$I_{\lambda,q}(tu) = \frac{t^p}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{t^q}{q}|u^+|_q$$

que existe $t_0 > 0$ suficientemente grande que depende de u tal que $I_{\lambda,q}(t_0u) < 0$. Definimos $\gamma_0 : [0,1] \to E_\lambda$ dada por $\gamma_0(t) = tt_0u$. Então $\gamma_0 \in C([0,1],\ E_\lambda)$, $\gamma_0(0) = 0$ e $I_{\lambda,q}(\gamma_0(1)) = I_{\lambda,q}(t_0u) < 0$, isto é, $\gamma_0 \in \Gamma$. Logo $\Gamma \neq \emptyset$. Devido a continuidade da imersão de E_λ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in E_\lambda$,

$$|u^+|_q^q \leq |u|_q^q \leq C\|u\|_\lambda^q.$$

Daí,

$$I_{\lambda,q}(u) = \frac{1}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{1}{q}|u^+|_q^q \geq \frac{1}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{C}{q}\|u\|_\lambda^q.$$

Para $\|u\|_\lambda = \rho = \left(\frac{q}{2pC}\right)^{\frac{1}{q-p}} > 0$,

$$I_{\lambda,q}(u) \geq \frac{1}{p}\rho^p - \frac{C}{q}\rho^q = \frac{\rho^p}{2p} := \alpha > 0. \tag{2.22}$$

Além disso,

$$I_{\lambda,q}(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|_\lambda^p - \frac{C}{q}\|u\|_\lambda^q \geq 0 \text{ sempre que } \|u\|_\lambda \leq \rho_1 := \left(\frac{q}{pC}\right)^{\frac{1}{q-p}}. \tag{2.23}$$

Seja $\gamma \in \Gamma$. Então $I_{\lambda,q}(\gamma(1)) < 0$. Por (2.23), $\|\gamma(1)\|_\lambda > \rho$. Pela continuidade de γ, existe $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $\|\gamma(\bar{t})\|_\lambda = \rho$. Portanto

$$\sup_{t\in[0,1]} I_{\lambda,q}(\gamma(t)) \geq I_{\lambda,q}(\gamma(\bar{t})) \geq \inf_{\|u\|_\lambda=\rho} I_{\lambda,q}(u) \geq \alpha, \quad \text{para todo } \gamma \in \Gamma.$$

Daí $\bar{c}_\lambda$ está bem definido e

$$\bar{c}_\lambda = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I_{\lambda,q}(\gamma(t)) \geq \alpha > 0.$$

Isso mostra o lema. □

Lema 2.13 *Para todo $\lambda > 0$, vale $\bar{c}_\lambda \leq \widehat{c}_\lambda = c_{\lambda,q} = \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,q}} I_{\lambda,q}(u)$.*

Demonstração: Seja $\gamma_0 \in \Gamma$ definida no início da demonstração do Lema 2.12. Pela definição de γ_0 e $\bar{c}_\lambda$,

$$\bar{c}_\lambda \leq \sup_{t\in[0,1]} I_{\lambda,q}(\gamma_0(t)) = \sup_{t\in[0,1]} I_{\lambda,q}(tt_0u) = \sup_{t\in[0,t_0]} I_{\lambda,q}(tu) \leq \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,q}(tu).$$

Logo, $\bar{c}_\lambda$ é uma cota inferior do conjunto $\left\{\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,q}(tu) : u \in E_\lambda \text{ com } u^+ \neq 0\right\}$. Portanto $\bar{c}_\lambda \leq \widehat{c}_\lambda$. Para mostrar que $\widehat{c}_\lambda = c_{\lambda,q}$, seja $z \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Pelo Lema 2.11, existe $u \in S^+_{E_\lambda}$ tal que $z = t(u)u$. Pelo Lema 2.10 e pela definição de $\widehat{c}_\lambda$,

$$I_{\lambda,q}(z) = I_{\lambda,q}(t(u)u) = \sup_{t\geq 0} I_{\lambda,q}(tu) \geq \widehat{c}_\lambda.$$

Logo $\widehat{c}_\lambda$ é uma cota inferior para o conjunto $\{I_{\lambda,q}(z) : z \in \mathcal{N}_{\lambda,q}\}$ e, portanto, $c_{\lambda,q} \geq \widehat{c}_\lambda$. Por outro lado, para todo $u \in E_\lambda$ com $u^+ \neq 0$, tem-se $t(u)u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$ e vale

$$\sup_{t\geq 0} I_{\lambda,q}(tu) = I_{\lambda,q}(t(u)u) \geq c_{\lambda,q}.$$

Assim, $\widehat{c}_\lambda \leq c_{\lambda,q}$, o que conclui a demonstração □

Lema 2.14 *Suponha que $q \in (p, p^*)$ e $\lambda > 0$. Então existe $r_q > 0$ tal que*

$$\|u\|_\lambda \geq r_q, \tag{2.24}$$

para todo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Em particular, $c_{\lambda,q} > 0$.

Demonstração: Pela continuidade da imersão de E_λ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, existe $C > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$,

$$\|u\|_\lambda^p = |u^+|_q^q \leq |u|_q^q \leq C\|u\|_\lambda^q$$

e assim, $\|u\|_\lambda^{q-p} \geq C^{-1}$. Definindo $r_q = C^{\frac{1}{p-q}} > 0$ concluímos (2.24). Consequentemente, como $I_{\lambda,q}(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u\|_\lambda^p \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) r_q^p$ para todo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$, segue que

$$c_{\lambda,q} = \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,q}} I_{\lambda,q}(u) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) r_q^p > 0.$$ □

Lema 2.15 *Para $q \in (p, p^*)$ e $\lambda > 0$ vale*

$$c_{\lambda,q} \leq m_{q,\Omega} = \inf_{u\in\mathcal{M}_{q,\Omega}} J_{q,\Omega}(u).$$

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{M}_{q,\Omega}$. Defina $\tilde{u} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $\tilde{u} = u$ em Ω e $u = 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Pelo Teorema 9.18 em [9], $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Como $\tilde{u}(x)a(x) = 0$ em $\mathbb{R}^N$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla\tilde{u}|^p + (\lambda a(x) + 1)|\tilde{u}|^p) = \int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) = \int_\Omega (u^+)^q = \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{u}^+)^q.$$

Logo a extensão $\tilde{u} \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Usando novamente que $a = 0$ em Ω vemos que $I_{\lambda,q}(\tilde{u}) = J_{q,\Omega}(u)$. Assim,

$$\{J_{q,\Omega}(u) : u \in \mathcal{M}_{q,\Omega}\} \subset \{I_{\lambda,q}(v) : v \in \mathcal{N}_{\lambda,q}\}$$

e, consequentemente, $c_{\lambda,q} \leq m_{q,\Omega}$. □

Lema 2.16 *Existe $\Lambda_0 > 0$ tal que $I_{\lambda,q}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $\overline{c}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \Lambda_0$.*

Demonstração: Pelos Lemas 2.14 e 2.15, $0 < c_{\lambda,q} \leq m_{q,\Omega}$, para todo $\lambda > 0$. Daí e do Lema 2.13,

$$\overline{c}_\lambda \leq m_{q,\Omega} \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

Aplicando a Proposição 2.3 com $C_1 = m_{q,\Omega}$, obtemos $\Lambda_0 > 0$ tal que $I_{\lambda,q}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $\overline{c}_\lambda$ para todo $\lambda \geq \Lambda_0$. □

Aplicando o Teorema 2.9 em [33] com $X = E_\lambda$, $\varphi = I_{\lambda,q}$, $M = [0,1]$, $M_0 = \{0,1\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma_0 : \{0,1\} \to E_\lambda : \gamma_0(0) = 0,\ I_{\lambda,q}(\gamma_0(1)) < 0\}$ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.17 *Seja X um espaço de Banach e $I \in C^1(X,\mathbb{R})$ tal que $I(0) = 0$ e*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1],X) : \gamma(0) = 0 \ e \ I(\gamma(1)) < 0\} \neq \emptyset.$$

Seja $c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$. Se $c > 0$ e se I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c então c é um valor crítico de I.

Para $\lambda > 0$, consideramos $\psi : E_\lambda \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(u) = \langle I'_{\lambda,q}(u), u\rangle = \|u\|_\lambda^p - |u^+|_q^q.$$

Então $\mathcal{N}_{\lambda,q} = \{u \in E_\lambda : \psi(u) = 0\}$. Denotaremos o funcional $I_{\lambda,q}$ restrito a $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ por $I_{\mathcal{N}_{\lambda,q}}$. O lema a seguir mostra que $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ é uma variedade de classe C^1 (veja Lema 1.5 em [20]).

Lema 2.18 *Suponha que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Então, existe uma constante $\delta > 0$ tal que*

$$\langle \psi'(u), u\rangle < -\delta.$$

Consequentemente, $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ é uma variedade de classe C^1.

Demonstração: Dado $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$, pelo Lema 2.14, existe $r_q > 0$ tal que $\|u\|_\lambda \geq r_q$. Segue daí e da definição de ψ que

$$\langle \psi'(u), u\rangle = p\|u\|_\lambda^p - q|u^+|_q^q = p\|u\|_\lambda^p - q\|u\|_\lambda^p = -(q-p)\|u\|_\lambda^p \leq -(q-p)r_q$$

Definindo $\delta := (q-p)r_q$ concluímos que

$$\langle \psi'(u), u\rangle < -\delta. \tag{2.25}$$

Da mesma maneira que se demonstra que $I_{\lambda,q} \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ é possível mostrar que $\psi \in C^1(E_\lambda, \mathbb{R})$ e, além disso, por (2.25), $\psi'(u) \not\equiv 0$. Daí, argumentando como no Lema 1.5 em [20], concluímos que $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ é uma variedade de classe C^1. □

Lema 2.19 *Seja $\lambda > 0$. Se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$ é um ponto crítico de $I_{\lambda,q}$ restrito a $\mathcal{N}_{\lambda,q}$, então u é um ponto crítico de $I_{\lambda,q}$.*

Demonstração: Se $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$ é um ponto crítico não trivial de $I_{\lambda,q}$ rstrito a $\mathcal{N}_{\lambda,q}$, então $I'_{\mathcal{N}_{\lambda,q}}(u) = 0$. Aplicando o Lema 1.9 com $V = \mathcal{N}_{\lambda,q}$ e $\varphi = I_{\lambda,q}$, obtemos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle I'_{\lambda,q}(u), v\rangle = t_0 \langle \psi'(u), v\rangle, \qquad \text{para todo } v \in E_\lambda. \tag{2.26}$$

Em particular, para $v = u$

$$0 = \psi(u) = \langle I'_{\lambda,q}(u), u\rangle = t_0\langle \psi'(u), u\rangle.$$

Pelo Lema 2.18, $\langle \psi'(u), u\rangle \neq 0$. Logo, a expressão acima diz que $t_0 = 0$ e, por (2.26), $I'_{\lambda,q}(u) = 0$. Assim, u é ponto crítico de $I_{\lambda,q}$ sobre E_λ. O lema está demonstrado. □

Nesse ponto, é possível demonstrar o Teorema A.

Demonstração do Teorema A: Pelo Lema 2.16, $I_{\lambda,q}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $\overline{c}_\lambda$ para λ suficientemente grande. Daí e do Lema 2.12, segue que $I = I_{\lambda,q}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.17 com $X = E_\lambda$. Portanto $\overline{c}_\lambda$ é valor crítico de $I_{\lambda,q}$, isto é, existe $u \in E_\lambda$ tal que $I_{\lambda,q}(u) = \overline{c}_\lambda$ e $I'_{\lambda,q}(u) = 0$, para λ suficientemente grande. Logo $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Pelo Lema 2.12, $I_{\lambda,q}(u) = \overline{c}_\lambda > 0$ e, portanto, $u \neq 0$ já que $I_{\lambda,q}(0) = 0$. Segue do Lema 2.13 que $c_{\lambda,q} \leq I_{\lambda,q}(u) = \overline{c}_\lambda \leq c_{\lambda,q}$, ou seja, $I_{\lambda,q}(u) = c_{\lambda,q}$. Como $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ contém todas as soluções de $(S^+_{\lambda,q})$, segue que u é solução de energia mínima de $(S^+_{\lambda,q})$. Além disso,

$$0 = \langle I'_{\lambda,q}(u), u^-\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u^- + (\lambda a(x)+1)|u|^{p-2}u\cdot u^-\right) = \|u^-\|^p_\lambda$$

donde segue que $u^- = 0$. Portanto $u = u^+ \geq 0$. Pelo Princípio do Máximo Forte (veja Teorema 3.5 e observação posterior em [19]), $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$ e, desse modo, u também é solução para $(S_{\lambda,q})$. Segue desses fatos que $u \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q}$ e

$$c_{\lambda,q} = I_{\lambda,q}(u) = \widetilde{I}_{\lambda,q}(u) \geq \widetilde{c}_{\lambda,q}.$$

Supondo por contradição que $\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) > \widetilde{c}_{\lambda,q}$, existe $u_1 \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda,q}$ tal que $\widetilde{I}_{\lambda,q}(u_1) < \widetilde{I}_{\lambda,q}(u)$. Daí

$$c_{\lambda,q} = I_{\lambda,q}(u) = \widetilde{I}_{\lambda,q}(u) > \widetilde{I}_{\lambda,q}(u_1) = \widetilde{I}_{\lambda,q}(|u_1|) = I_{\lambda,q}(|u_1|,)$$

uma contradição, visto que $|u_1| \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Então, necessariamente, $\widetilde{I}_{\lambda,q}(u) = \widetilde{c}_{\lambda,q}$. Isso mostra que u é solução de energia mínima de $(S_{\lambda,q})$, o que conclui a demonstração do teorema. □

2.4 Concentração das soluções

Agora nos concentramos em provar o Teorema B. Começamos com o seguinte resultado (veja Lema 3.10 em [18]).

Lema 2.20 *Seja $M > 0$, $\lambda_n \geq 1$ e $(u_n) \subset E_{\lambda_n}$ tais que $\lambda_n \to \infty$ e $\|u_n\|_{\lambda_n} \leq M$. Então existe uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a menos de uma subsequência, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E_1, $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $u_n \to u$ e $u_n^+ \to u^+$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \leq s < p^*$.*

Demonstração: Como $\|u_n\|_1 \leq \|u_n\|_{\lambda_n} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 2.2 existe $u \in E_1$ tal que, a menos de subsequência,

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } E_1, \\ u_n \to u & \text{em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N), \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N, \\ u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \end{array}$$

Vamos provar que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para isso, vamos mostrar que $u = 0$ em Ω^c . Seja $C_j = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 1/j\} \cap B_j(0)$, para $j \in \mathbb{N}$. Então cada C_j é limitado e vale $\Omega^c = \cup_{j=1}^{\infty} C_j$. Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ Lebesgue mensurável definimos $\mu(A) = \displaystyle\int_A |u|^p$. Como $u \in E_1 \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ continuamente, temos que μ define uma medida e daí

$$0 \leq \int_{\Omega^c} |u|^p = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{C_j} |u|^p. \tag{2.27}$$

Afirmamos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\int_{C_j} |u|^p = 0$. Com efeito, como $a(x)j > 1$ em C_j,

$$0 \leq \int_{C_j} |u_n|^p < \frac{j}{\lambda_n}\int_{C_j} \lambda_n a(x) u_n^p \leq \frac{j}{\lambda_n}\|u_n\|_{\lambda_n}^p \leq M^p \frac{j}{\lambda_n} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Por outro lado, $\displaystyle\int_{C_j} |u_n|^p \to \int_{C_j} |u|^p$ uma vez que $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e C_j é limitado. Daí e da observação acima, segue que $\displaystyle\int_{C_j} |u|^p = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Esse resultado combinado com (2.27) prova nossa afirmação.

Para verificar que $u_n \to u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $p \leq s < p^*$ seja $A_{M_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) \leq M_0\}$, onde $M_0 > 0$ é dada pela hipótese (A_2). Como $\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0} \subset \Omega^c$, temos $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}$. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}} |u_n - u|^p = \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}} |u_n|^p \leq \frac{1}{\lambda_n M_0}\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}} \lambda_n a(x)|u_n|^p \leq \frac{\|u_n\|_{\lambda_n}^p}{\lambda_n M_0} \leq \frac{M^p}{\lambda_n M_0}.$$

Como $\lambda_n \to \infty$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}} |u_n - u|^p < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sempre que } n \geq n_1. \tag{2.28}$$

Dado $R > 0$, para simplificar a notação, denotamos $B_R(0)$ por B_R. Seja $r \in (1, N/(N-p))$. Argumentando como em (2.11) e observando que $\|u_n - u\|_1 \leq \|u_n\|_{\lambda_n} + \|u\|_1$ é limitada, é possível obter uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$\int_{A_{M_0} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R)} |u_n - u|^p \leq C_0\, \mathcal{L}(A_{M_0} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_R))^{1/r'}.$$

Pelo Lema 2.7, existe $R_0 > 0$ tal que

$$\int_{A_{M_0} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_{R_0})} |u_n - u|^p \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.29}$$

Como $u_n \to u$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{A_{M_0} \cap B_{R_0}} |u_n - u|^p \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sempre que } n \geq n_2.$$

Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Usando a expressão acima, (2.29) e (2.28), concluímos que, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}} |u_n - u|^p + \int_{A_{M_0}} |u_n - u|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A_{M_0}} |u_n - u|^p + \int_{A_{M_0} \cap B_{R_0}} |u_n - u|^p + \int_{A_{M_0} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_{R_0})} |u_n - u|^p \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

isto é, $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Para $s \in (p, p^*)$, tomamos $\theta \in (0,1)$ tal que $s = (1-\theta)p + \theta p^*$. Usando a desigualdade de Hölder, a continuidade da imersão $E_1 \hookrightarrow L^{p*}(\mathbb{R}^N)$ e que $\|u_n - u\|_1 \leq \|u_n\|_{\lambda_n} + \|u\|_1$ é limitada, obtemos constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^s = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{\theta p^*} |u_n - u|^{(1-\theta)p} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{p^*}\right)^{\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p\right)^{1-\theta} \\ &\leq C_1 \|u_n - u\|_1^{\theta p^*} |u_n - u|_p^{(1-\theta)p} \\ &\leq C_2 |u_n - u|_p^{(1-\theta)p}.\end{aligned}$$

Como $u_n \to u$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, a desigualdade acima implica que $u_n \to u$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. Então, a menos de subsequência, existe $h \in L^s(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$u_n^+(x) \leq |u_n(x)| \leq h(x) \ \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Como $u_n^+ = \dfrac{u_n + |u_n|}{2} \to u^+(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue do T.C.D.L. que $u_n^+ \to u^+$ em $L^s(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Demonstração do Teorema B: Por hipótese, $u_n^+ = u_n > 0$ é solução de $(S_{\lambda_n,q})$ e, portanto, de $(S^+_{\lambda_n,q})$. Daí $u_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,q}$ e

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_{\lambda_n}^p = I_{\lambda_n,q}(u_n) = \widetilde{I}_{\lambda_n,q}(u_n).$$

Sendo $\widetilde{I}_{\lambda_n,q}(u_n)$ limitada, segue que $\|u_n\|_{\lambda_n}$ é limitada. Como $\lambda_n \to \infty$, podemos supor $\lambda_n > 1$. Aplicando o Lema 2.20, obtemos $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{em } E_1, \\ u_n \to u \text{ e } u_n^+ \to u^+ & \text{em } L^s(\mathbb{R}^N), \quad p \le s < p^* \\ u_n(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N. \end{array} \tag{2.30}$$

Argumentando como na demonstração do Lema 2.8 agora com $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e usando que $I'_{\lambda_n,q}(u_n) = 0$ e $a(x) \equiv 0$ em Ω, obtemos

$$\nabla u_n \to \nabla u \ \text{ em } \ (L^p(B_r))^N,$$

para todo $r > 0$ tal que $B_r \subset \Omega$. Como $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, pelo Teorema de Lindelöf (veja Teorema 22 do Capítulo 1 em [23]), existe uma família enumerável de bolas $B_{n_j} \subset \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, tais que $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} B_{n_j}$. Por um processo diagonal semelhante ao da Proposição 2.2 (iii), podemos concluir que, a menos de subsequência,

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x), \quad \text{q.t.p. em } \Omega. \tag{2.31}$$

Além disso,

$$|\nabla u_n|^{p-2} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{fracamente em } L^{p'}(\Omega), \ 1 \le i \le N. \tag{2.32}$$

Para toda $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se $\langle I'_{\lambda_n,q}(u_n), \phi \rangle = 0$ e daí

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \phi + \int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n \phi = \int_\Omega (u_n^+)^{q-1} \phi. \tag{2.33}$$

Como $\nabla \phi \in (L^p(\Omega))^N$, de (2.32) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla \phi \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \phi,$$

quando $n \to \infty$. Com argumentos semelhantes aos da demonstração do Lema 2.9, é possível mostrar que

$$\int_\Omega |u_n|^{p-2} u_n \phi \longrightarrow \int_\Omega |u|^{p-2} u \phi$$

como também

$$\int_\Omega (u_n^+)^{q-1} \phi \longrightarrow \int_\Omega (u^+)^{q-1} \phi.$$

Fazendo $n \to \infty$ em (2.33) e usando as convergências acima, obtemos

$$\langle J'_{q,\Omega}(u), \phi \rangle = 0, \quad \text{para todo } \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Assim u é solução de (D_q^+). Em particular $u \in \mathcal{M}_{q,\Omega}$. Vamos mostrar que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Para tanto, usando (2.31) e o Lema de Brézis-Lieb (veja Observação 1.21) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1). \tag{2.34}$$

Além disso, usando que $u \equiv 0$ em Ω^c e $a \equiv 0$ em Ω, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n - u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u_n|^p.$$

Da igualdade acima, de (2.34), de (2.30) e do fato de que $u_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,q}$ e $u \in \mathcal{M}_{q,\Omega}$ segue que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{W^{1,p}}^p \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n a(x)|u_n - u|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1) + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_n a(x)|u_n|^p + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^q - \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^q - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + o(1) \\ &= 0 + o(1) \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$. Para n suficientemente grande, $\lambda_n \geq 1$. Assim $\|u_n - u\|_1 \leq \|u_n - u\|_{\lambda_n}$ e, portanto, $u_n \to u$ em E_1. Pelo Lema 2.14, $\|u_n\|_1 \geq r_q > 0$. Daí, fazendo $n \to \infty$, obtemos $\|u\|_1 \geq r_q > 0$. Logo $u \neq 0$. Além disso, sendo u solução de (D_q^+),

$$0 = \langle J'_{q,\Omega}(u), u^- \rangle = \|u^-\|^p,$$

donde segue que $u \geq 0$. Pelo Princípio do Máximo Forte, $u > 0$ em Ω. Logo u é solução de (D_q). Isso conclui a demonstração do teorema. □

Demonstração do Corolário C: Como $\lambda_n \to \infty$, podemos supor que $\lambda_n \geq \Lambda_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com Λ_0 dado pelo Teorema A. Como vimos na demonstração desse mesmo teorema, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe uma solução no nível $\widetilde{c}_{\lambda_n,q}$. Logo tem-se $\widetilde{c}_{\lambda_n,q} = c_{0,\lambda_n}$, onde $c_{0,\lambda_n} = \inf \left\{ \widetilde{I}_{\lambda_n,q}(v) : v \text{ é solução não trivial de } (S_{\lambda_n,q}) \right\}$. Procedendo similarmente como na demonstração do Lema 2.15, obtemos $\widetilde{c}_{\lambda_n,q} \leq \widetilde{m}_{q,\Omega}$. Como u_n é solução de energia mínima de $(S_{\lambda_n,q})$, tem-se $u_n \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda_n,q}$. Logo

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|_{\lambda_n}^p = \widetilde{I}_{\lambda_n,q}(u_n) = c_{0,\lambda_n} = \widetilde{c}_{\lambda_n,q} \leq \widetilde{m}_{q,\Omega}.$$

Assim, aplicando o Lema 2.20 podemos supor $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ com $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Mais ainda, pelo Teorema B, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, sendo u uma solução positiva de (D_q). Logo $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{q,\Omega}$. Vamos mostrar que u é uma solução de energia mínima de (D_q). Para isso, como $u_n \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\lambda_n,q}$ para cada n, tem-se $\langle \widetilde{I'}_{\lambda_n,q}(u_n), u_n \rangle = 0$. Então

$$\widetilde{m}_{q,\Omega} \geq \widetilde{c}_{\lambda_n,q} = \widetilde{I}_{\lambda_n,q}(u_n) - \frac{1}{p}\langle \widetilde{I}_{\lambda_n,q}(u_n), u_n \rangle = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^q.$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando que $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{q,\Omega}$ temos

$$\widetilde{m}_{q,\Omega} \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\Omega} |u|^q = \widetilde{J}_{q,\Omega}(u) \geq \widetilde{m}_{q,\Omega}.$$

Assim, $\widetilde{J}_{q,\Omega}(u) = \widetilde{m}_{q,\Omega} = \inf\limits_{v \in \widetilde{\mathcal{M}}_{q,\Omega}} \widetilde{J}_{q,\Omega}(v)$. Como $\widetilde{\mathcal{M}}_{q,\Omega}$ contém todas as soluções não triviais de (D_q), tem-se que u é solução de energia mínima de (D_q). Isso conclui a demonstração do corolário. $\square$

Capítulo 3

O efeito da topologia do conjunto Ω no número de soluções

Neste capítulo apresentamos a demonstração do Teorema D. Continuamos a usar as mesmas notações introduzidas na Seção 2.1. Lembramos que no Teorema D, o conjunto $\Omega = \text{int } a^{-1}(0)$ é limitado.

Daqui em diante, fixamos $r > 0$ tal que os conjuntos

$$\Omega^+_{2r} = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \text{dist}(x, \Omega) < 2r\} \ \text{ e } \ \Omega^-_r = \{x \in \Omega : \ \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq r\}$$

sejam homotopicamente equivalentes a Ω. Tal r existe pelo Lema 1.3. Sem perda de generalidade, podemos supor que $B_r \subset \Omega$. Definimos também $\beta_q : W^{1,p}_0(\Omega) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^N$ a função centro de massa por

$$\beta_q(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |u|^q x dx}{\displaystyle\int_\Omega |u|^q dx}.$$

Pela continuidade da imersão $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e pelo fato de Ω ser limitado, β_q está bem definida.

Seja $\mathcal{D}$ um domínio do $\mathbb{R}^N$. Denotamos por S a melhor constante da imersão $W^{1,p}_0(\mathcal{D}) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathcal{D})$, isto é,

$$S(\mathcal{D}) = \ S \ \ = \ \ \inf\left\{\int_\mathcal{D}(|\nabla u|^p + |u|^p) : u \in W^{1,p}_0(\mathcal{D}), \ |u|_{p*,\mathcal{D}} = 1\right\}$$

$$= \inf\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^p + |u|^p}{|u|^p_{p^*,\mathcal{D}}} : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}\right\}.$$

Lembramos que S não depende do conjunto $\mathcal{D}$ tomado e, além disso, não é atingido a menos que $\mathcal{D} = \mathbb{R}^N$. Definimos $m_{q,\mathcal{D}} = \inf\limits_{u \in \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}} J_{q,\mathcal{D}}(u)$. Quando $\mathcal{D} = B_r$ denotamos m_{q,B_r} por $m_{q,r}$, para simplificar a notação.

Lema 3.1 *Seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Então* $\liminf\limits_{q \to p^*} m_{q,\mathcal{D}} = \dfrac{S^{\frac{N}{p}}}{N}$.

Demonstração: Para $p < q < p^*$ definimos

$$\begin{aligned} \alpha_{q,\mathcal{D}} &= \inf\left\{\int_\mathcal{D} (|\nabla u|^p + |u|^p) : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}), \int_\mathcal{D} (u^+)^q = 1\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{\int_\mathcal{D} (|\nabla u|^p + |u|^p)}{|u^+|^p_{q,\mathcal{D}}} : u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}), u^+ \neq 0\right\} \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{A}_{q,\mathcal{D}} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) : \int_\mathcal{D} (u^+)^q = 1\right\}$. Lembramos que

$$\mathcal{M}_{q,\mathcal{D}} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\} : \int_\mathcal{D} (|\nabla u|^p + |u|^p) = \int_\mathcal{D} (u^+)^q\right\}.$$

Afirmamos que existe uma bijeção entre $\mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$ e $\mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}$. De fato, seja $\theta : \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}} \to \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}$ dada por $\theta(u) = \|u\|_D^{\frac{p}{q-p}} u$. Observamos que θ está bem definida, pois se $u \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$ então

$$\int_\mathcal{D} (|\nabla \theta(u)|^p + |\theta(u)|^p) = \|u\|_D^{\frac{p^2}{q-p}} \|u\|^p_\mathcal{D} = \|u\|_D^{\frac{pq}{q-p}}$$

como também,

$$\int_\mathcal{D} (\theta(u)^+)^q = \int_\mathcal{D} (\|u\|_D^{\frac{p}{q-p}} u^+)^q = \|u\|_D^{\frac{pq}{q-p}} \int_\mathcal{D} (u^+)^q = \|u\|_D^{\frac{pq}{q-p}},$$

o que mostra que $\theta(u) \in \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}$. Definimos $\Phi : \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}} \to \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$ por $\Phi(v) = \dfrac{v}{|v^+|_{q,\mathcal{D}}}$. Assim, para $u \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$,

$$\Phi(\theta(u)) = \Phi\left(\|u\|_D^{\frac{p}{q-p}} u\right) = \frac{\|u\|_D^{\frac{p}{q-p}} u}{\|u\|_D^{\frac{p}{q-p}} |u^+|_{q,\mathcal{D}}} = u.$$

Agora, se $v \in \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}$,

$$\theta(\Phi(v)) = \theta\left(\frac{v}{|v^+|_{q,\mathcal{D}}}\right) = \left\|\frac{v}{|v^+|_{q,\mathcal{D}}}\right\|^{\frac{p}{q-p}} \frac{v}{|v^+|_{q,\mathcal{D}}} = \left(\frac{\|v\|_{\mathcal{D}}^p}{|v^+|_{q,\mathcal{D}}^q}\right)^{\frac{1}{q-p}} v = v.$$

Isso prova que existe uma bijeção entre $\mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}$ e $\mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}$. Logo

$$\{\|u\|_{\mathcal{D}}^p : u \in \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}\} = \{\|\theta(v)\|_{\mathcal{D}}^p : v \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}\}.$$

Lembrando que para $u \in \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}$ vale $J_{q,\mathcal{D}}(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\|u\|_{\mathcal{D}}^p$ segue que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)^{-1} m_{q,\mathcal{D}} &= \inf_{u \in \mathcal{M}_{q,\mathcal{D}}} \|u\|_{\mathcal{D}}^p &&= \inf_{v \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}} \|\theta(v)\|_{\mathcal{D}}^p \\
&= \inf_{v \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}} \|v\|_{\mathcal{D}}^{\frac{p^2}{q-p}} \|v\|_{\mathcal{D}}^p &&= \inf_{v \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}} \|v\|_{\mathcal{D}}^{\frac{pq}{q-p}} \\
&= \left(\inf_{v \in \mathcal{A}_{q,\mathcal{D}}} \|v\|_{\mathcal{D}}^p\right)^{\frac{q}{q-p}} &&= (\alpha_{q,\mathcal{D}})^{\frac{q}{q-p}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$m_{q,\mathcal{D}} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)(\alpha_{q,\mathcal{D}})^{\frac{q}{q-p}}. \tag{3.1}$$

Uma vez que $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right) = \frac{1}{N}$ e $\frac{p^*}{p^*-p} = \frac{N}{p}$ é suficiente mostrarmos que $\liminf_{q \to p^*} \alpha_{q,\mathcal{D}} = S$ para concluir a demonstração do lema. Para isso, aplicando a desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p^*}{q} > 1$ e $\frac{p^*}{p^*-q}$ obtemos

$$|u|_{q,\mathcal{D}} \le \mathcal{L}(\mathcal{D})^{\frac{p^*-q}{p^*q}} |u|_{p^*,\mathcal{D}}.$$

Assim, para $u \in W_0^{1,p}(\mathcal{D})$ com $u^+ \neq 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p + |u|^p}{|u^+|_{q,\mathcal{D}}^p} \ge \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p + |u|^p}{|u|_{q,\mathcal{D}}^p} &\ge \mathcal{L}(\mathcal{D})^{\frac{-p(p^*-q)}{qp^*}} \left(\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p + |u|^p}{|u|_{p^*,\mathcal{D}}^p}\right) \\
&\ge \mathcal{L}(\mathcal{D})^{\frac{-p(p^*-q)}{qp^*}} S
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\alpha_{q,\mathcal{D}} \ge \mathcal{L}(\mathcal{D})^{-\frac{p(p^*-q)}{qp^*}} S$$

A expressão acima implica que $\widehat{a} = \liminf_{q\to p^*} \alpha_{q,\mathcal{D}}$ é finito e $a \geq S$. Vamos mostrar que $a = S$. Argumentando por contradição, supomos que $\widehat{a} > S$. Seja $\varepsilon \in (0, \widehat{a} - S)$. Pela definição de S existe $u_1 \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}$ tal que

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_1|^p + |u_1|^p}{|u_1|^p_{p^*,\mathcal{D}}} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Seja $u_0 = |u_1|$. Então $u_0 \in W_0^{1,p}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}$. Afirmamos que $\int_{\mathcal{D}} |u_0|^q \to \int_{\mathcal{D}} |u_0|^{p^*}$ quando $q \to p^*$ pela esquerda. De fato, seja (q_n) uma sequência tal que $q_n \in (p, p^*)$ e $q_n \to p^*$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathcal{D}$, $f_n(x) = |u_0(x)|^{q_n}$. Então

$$\begin{aligned} f_n(x) \;=\; |u_0(x)|^{q_n} &= |u_0(x)|^{q_n}\chi(\{x\in\mathcal{D}:|u_0(x)|\leq 1\})+|u_0(x)|^{q_n}\chi(\{x\in\mathcal{D}:|u_0(x)|>1\}) \\ &\leq 1 + |u_0(x)|^{p^*}\chi(\{x \in \mathcal{D} : |u_0(x)| > 1\}) \in L^1(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

uma vez que $\mathcal{D}$ é limitado. Daí, segue do T.C.D.L. que $\int_{\mathcal{D}} |u_0|^{q_n} \to \int_{\mathcal{D}} |u_0|^{p^*}$. Como a sequência (q_n) foi tomada arbitrariamente, nossa afirmação está provada. Agora, fazendo $q \to p^*$, obtemos da afirmação acima um $q_1 \in (p, p^*)$ tal que

$$\left| \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_0|^p + |u_0|^p}{\|u_0\|^p_{q,\mathcal{D}}} - \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_0|^p + |u_0|^p}{\|u_0\|^p_{p^*,\mathcal{D}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{sempre que } q \in (q_1, p^*). \tag{3.3}$$

Da definição de $\alpha_{q,\mathcal{D}}$, do fato de $u_0^+ = u_0 = |u_1|$ e das desigualdades (3.2) e (3.3) segue que

$$\begin{aligned} \alpha_{q,\mathcal{D}} \;\leq\; \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_0|^p + |u_0|^p}{|u_0^+|^p_{q,\mathcal{D}}} &< \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_0|^p + |u_0|^p}{|u_0|^p_{p^*,\mathcal{D}}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{\mathcal{D}} |\nabla u_1|^p + |u_1|^p}{|u_1|^p_{p^*,\mathcal{D}}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< S + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = S + \varepsilon. \end{aligned}$$

Daí,

$$\widehat{a} = \liminf_{q\to p^*} \alpha_{q,\mathcal{D}} \leq S + \varepsilon < \widehat{a},$$

que é uma contradição. Logo $\widehat{a} = S$ o que conclui a prova do lema. □

Lema 3.2 *Sejam (q_n) uma sequência de números reais tal que $q_n \geq 1$ e $(u_n) \subset L^{q_n}(\mathbb{R}^N)$ com $u_n \equiv 0$ em Ω^c para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $|u_n|^{q_n}dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas onde ν é uma medida de Radon, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} f(x)dx \to \int_\Omega f(x)d\nu \text{ quando } n \to \infty$$

para qualquer $f \in C(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$.

Demonstração: Escrevendo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} f(x)dx = \int_\Omega |u_n|^{q_n} f^+(x)dx - \int_\Omega |u_n|^{q_n} f^-(x)dx$ vemos que, para demonstrar o lema, é suficiente mostrarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} g(x)dx \to \int_\Omega g(x)d\nu$$

para toda $g \in C(\mathbb{R}^N, [0, \infty))$. Para isso, lembramos que $|u_n|^{q_n}dx \rightharpoonup \nu$ fracamente no sentido das medidas significa

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} \Phi(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x)d\nu, \tag{3.4}$$

para toda $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Para $\varepsilon > 0$ qualquer, seja $\varphi_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ e $\varphi_\varepsilon \equiv 1$ em Ω e $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon^+$. Tal φ_ε existe pelo Lema de Urysohn (veja Lema 4.32 em [15]). Daí, de (3.4) e do fato de $g\varphi_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ser não negativa segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q_n} g(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(x)|u_n|^{q_n} g(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} \varphi_\varepsilon(x)g(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi_\varepsilon(x)g(x)d\nu = \int_{\Omega_\varepsilon^+} \varphi_\varepsilon(x)g(x)d\nu \\
&\leq \int_{\Omega_\varepsilon^+} g(x)d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)\chi_{\Omega_\varepsilon^+}(x)d\nu
\end{aligned} \tag{3.5}$$

onde $\chi_{\Omega_\varepsilon^+}$ é a função característica de Ω_ε^+. Observe que $g(x)\chi_{\Omega_\varepsilon^+}(x) \to \widehat{g}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ quando $\varepsilon \to 0$ onde $\widehat{g} \equiv g$ em Ω e $\widehat{g} \equiv 0$ em Ω^c. Podemos supor que para ε suficientemente pequeno, $\Omega_\varepsilon^+ \subset B_R$ para algum $R > 0$. Como $g\chi_{\Omega_\varepsilon^+} \leq g$ em B_R e $g\chi_{\Omega_\varepsilon^+} \equiv 0$ em B_R^c temos que $g\chi_{\Omega_\varepsilon^+}$ está limitada superiormente pela função $h = g\chi_{B_R}$ que pertence a $L^1(\mathbb{R}^N, \nu)$ pois $\displaystyle\int_{B_R} gd\nu \leq C\nu(B_R) < \infty$ uma vez que g é contínua e ν é de

Radon. Fazendo $\varepsilon \to 0$ em (3.5) e aplicando o T.C.D.L., obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q_n} g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{g} d\nu = \int_\Omega g d\nu. \tag{3.6}$$

Considere $\psi_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$, $\psi_\varepsilon \equiv 1$ em Ω_ε^- e $\psi_\varepsilon \equiv 0$ em Ω^c. Assim, como fizemos anteriormente,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q_n} g(x)dx &\geq \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_\varepsilon(x)|u_n|^{q_n} g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} \psi_\varepsilon(x) g(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x) g(x) d\nu \ = \ \int_\Omega \psi_\varepsilon(x) g(x) d\nu \\
&\geq \int_{\Omega_\varepsilon^-} g(x) d\nu \ = \ \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \chi_{\Omega_\varepsilon^-}(x) d\nu
\end{aligned}$$

e, fazendo $\varepsilon \to 0$, pelo T.C.D.L.,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{q_n} g(x)dx \geq \int_\Omega g(x) d\nu.$$

Da desigualdade acima e de (3.6), concluímos a demonstração do lema. $\square$

Lema 3.3 *Sejam $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ contínua e $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ uma medida que se concentra em um único ponto $y \in \overline{\Omega}$. Então $\displaystyle\int_\Omega f(x) d\nu = f(y)|\nu|$.*

Demonstração: Para todo $t > 0$, tem-se

$$\int_\Omega f(x) d\nu = \int_{B_t(y)} f(x) d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \chi_{B_t(y)}(x) d\nu \tag{3.7}$$

Temos que $f(x)\chi_{B_t(y)}(x) \to f(y)\chi_{\{y\}}(x)$ quando $t \to 0$ em $\mathbb{R}^N$. Como f é contínua, para todo $t \leq 1$ temos que existe $M > 0$ tal que $f(x)\chi_{B_t(y)} \leq f(x)\chi_{B_1(y)} \leq M\chi_{B_1(y)} \in L^1(\mathbb{R}^N, \nu)$. Fazendo $t \to 0$ em (3.7), pelo T.C.D.L. obtemos

$$\int_\Omega f(x) d\nu = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \chi_{\{y\}}(x) d\nu = f(y)\nu(\{y\}).$$

Resta mostrar que $\nu(\{y\}) = |\nu|$. Lembramos que, por definição,

$$|\nu| = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) d\nu \right| : \phi \in C_0(\mathbb{R}^N),\ |\phi|_\infty \leq 1 \right\}. \tag{3.8}$$

Seja $\phi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ com $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ em $B_1(y)$. Por (3.8),

$$|\nu| \geq \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) d\nu \geq \int_{B_1(y)} 1 d\nu = \nu(\{y\}).$$

Por outro lado, para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ com $|\varphi|_\infty \leq 1$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\nu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi| d\nu \leq \int_{\mathbb{R}^N} 1 d\nu = \nu(\{y\}).$$

Portanto $|\nu| \leq \nu(\{y\})$ e, assim, $\nu(\{y\}) = |\nu|$, o que conclui a demonstração. □

Lema 3.4 *Existe $q_2 \in (p, p^*)$ tal que, para todo $q \in (q_2, p^*)$, tem-se $\beta_q(u) \in \Omega_r^+$ sempre que $u \in \mathcal{M}_{q,\Omega}$ com $J_{q,\Omega}(u) \leq m_{q,r}$.*

Demonstração: Argumentando por contradição suponha que o lema é falso. Então para todo $q_{2,n} \in (p^* - \frac{p^*-p}{n}, p^*)$ existe $q_n \in (q_{2,n}, p^*)$ e $(u_n) \subset \mathcal{M}_{q_n,\Omega}$ com $J_{q_n,\Omega}(u_n) \leq m_{q_n,r}$ e $\beta_{q_n}(u_n) \notin \Omega_r^+$. Observe que $q_n \to p^*$. A menos de subsequência, podemos supor (q_n) crescente. Assim

$$m_{q_n,\Omega} \leq J_{q_n,\Omega}(u_n) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_n}\right) \|u_n\|_\Omega^p \leq m_{q_n,r}.$$

Pelo Lema 3.1,

$$\frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}} \leq \liminf_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_n}\right) \|u_n\|_\Omega^p \right] \leq \frac{1}{N} S^{\frac{N}{p}}.$$

Uma vez que existe $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q_n}\right) = \frac{1}{N}$ segue que

$$\liminf_{n\to\infty} |u_n|_{q_n}^{q_n} = \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_\Omega^p = S^{\frac{N}{p}}.$$

Passando a uma subsequência, podemos supor

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|_{q_n}^{q_n} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_\Omega^p = S^{\frac{N}{p}}. \tag{3.9}$$

Pela desigualdade de Hölder com expoentes $\frac{p^*}{q_n} > 1$ e $\frac{p^*}{p^*-q_n}$, obtemos

$$|u_n|_{q_n,\Omega}^{q_n} = \int_\Omega |u_n|^{q_n} dx \leq \mathcal{L}(\Omega)^{\frac{p^*-q_n}{p^*}} |u_n|_{p^*,\Omega}^{q_n}.$$

Logo

$$\left(|u_n|_{q_n,\Omega}^{q_n}\right)^{\frac{1}{q_n}} \leq \mathcal{L}(\Omega)^{\frac{p^*-q_n}{p^* q_n}} |u_n|_{p^*,\Omega}.$$

Por (3.9),

$$(S^{\frac{N}{p}})^{\frac{1}{p^*}} \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_{p^*,\Omega}. \tag{3.10}$$

Por outro lado, pela definição de S,

$$|u_n|_{p^*,\Omega} \leq S^{-\frac{1}{p}} \|u_n\|_\Omega.$$

Assim, segue de (3.9) que

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n|_{p^*,\Omega} \leq S^{-\frac{1}{p}} (S^{\frac{N}{p}})^{\frac{1}{p}} = (S^{\frac{N}{p}})^{\frac{1}{p^*}}.$$

Da desigualdade acima e de (3.10) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|_{p^*,\Omega} = (S^{\frac{N}{p}})^{\frac{1}{p^*}},$$

ou ainda,

$$\lim_{n\to\infty} |u_n|^{p^*}_{p^*,\Omega} = S^{\frac{N}{p}}. \tag{3.11}$$

Por (3.9) temos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Passando a outra subsequência se necessário, podemos supor que existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, como $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ compactamente, $u_n \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$ e, consequentemente, $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em Ω. Agora, seja $v_n = \dfrac{u_n}{|u_n|_{p^*,\Omega}}$. Então $|v_n|_{p^*,\Omega} = 1$. De (3.9) e (3.11) segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^p_\Omega = \lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|^p_\Omega}{|u_n|^p_{p^*,\Omega}} = \frac{S^{\frac{N}{p}}}{S^{\frac{N}{p^*}}} = S.$$

Assim, a sequência $(\|v_n\|^p_\Omega)$ é uma sequência minimizante para S. Pelo Lema 1.19, existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} &v_n \rightharpoonup v && \text{fracamente em } W_0^{1,p}(\Omega),\\ &v_n(x) \to v(x) && \text{q.t.p. em } \Omega,\\ &\nabla v_n(x) \to \nabla v(x) && \text{q.t.p. em } \Omega. \end{aligned}$$

Daí, tomando o limite quando $n \to \infty$ na igualdade $u_n(x) = |u_n|_{p^*,\Omega}\, v_n(x)$, obtemos, por (3.11),

$$u(x) = S^{\frac{N}{p}\cdot\frac{1}{p^*}} v(x), \quad \text{q.t.p. em } \ \Omega. \tag{3.12}$$

Segue de (3.11), (3.12) e do fato de $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ q.t.p. em Ω que

$$\nabla u_n(x) = |u_n|_{L^{p^*}(\Omega)} \nabla v_n(x) \to S^{\frac{N}{p}\frac{1}{p^*}} \cdot \nabla v(x) = \nabla u(x) \ \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Estendemos u_n e u para $\mathbb{R}^N$ pondo $u_n = u = 0$ em Ω^c. Por (3.9), existe $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u|^{q_n} \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u|^p \leq C.$$

Pela Proposição 1.16, existem medidas positivas de Radon ν e ω tais que, a menos de subsequência,

$$|u_n - u|^{q_n} \rightharpoonup \nu \quad \text{e} \quad |\nabla u_n - \nabla u|^p \rightharpoonup \omega$$

fracamente no sentido das medidas. Das considerações anteriores, vemos que as hipóteses dos Lema 1.17 são satisfeitas. Observamos que como Ω é limitado, tem-se

$$\omega_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^p = 0 \quad \text{e} \quad \nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|>R} |u_n|^{q_n} = 0.$$

Pelo Lema 1.17 obtemos

$$|\nu|^{p/p^*} \leq S^{-1}|\omega|, \tag{3.13}$$

$$\limsup_{n\to\infty} |\nabla u_n|_p^p = |\nabla u|_p^p + |\omega|, \tag{3.14}$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n|_{q_n}^{q_n} = |u|_{p^*}^{p^*} + |\nu|. \tag{3.15}$$

Como $u_n \to u$ fortemente em $L^p(\Omega)$, temos

$$\|u_n\|^p = |u_n|_p^p + |\nabla u_n|_p^p = |u|_p^p + |\nabla u_n|_p^p + o(1).$$

Daí, de (3.9) e de (3.14) segue que

$$S^{\frac{N}{p}} = |u|_p^p + |\nabla u|_p^p + |\omega| = \|u\|^p + |\omega|. \tag{3.16}$$

De (3.9) e (3.15) temos

$$S^{\frac{N}{p}} = |u|_{p^*}^{p^*} + |\nu|. \tag{3.17}$$

Pela definição de S,

$$|u|_{p^*}^p \leq S^{-1}\|u\|^p. \tag{3.18}$$

Afirmamos que ou $u \equiv 0$ ou $|u|_{p^*}^{p^*} = S^{\frac{N}{p}}$. Caso contrário, $u \not\equiv 0$ e $|u|_{p^*}^{p^*} \neq S^{\frac{N}{p}}$. Assim $|u|_{p^*}^{p^*} \neq 0$ e, por (3.17), $|\nu| \neq 0$. Usando a desigualdade $(a+b)^t < a^t + b^t$ para $a, b > 0$ e

$0 < t < 1$, segue de (3.17), (3.18), (3.13) e (3.16) que

$$\begin{aligned} S^{\frac{N-p}{p}} &= \left(|u|_{p^*}^{p^*} + |\nu|\right)^{p/p^*} < \left(|u|_{p^*}^{p^*}\right)^{p/p^*} + |\nu|^{p/p^*} \\ &\leq S^{-1}(\|u\|^p + |\omega|) = S^{\frac{N-p}{p}}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\|u\|^p \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^p = S^{\frac{N}{p}}.$$

Daí, se $|u|_{p^*}^{p^*} = S^{\frac{N}{p}}$, então

$$S \leq \frac{\|u\|^p}{|u|_{p^*}^p} \leq \frac{S^{\frac{N}{p}}}{S^{\frac{N-p}{p}}} = S$$

isto é, a constante S é atingida por alguma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Isso nos dá uma contradição, uma vez que $\Omega \neq \mathbb{R}^N$. Assim $u \equiv 0$ e, portanto, de (3.9) e (3.17),

$$\int_\Omega |u_n|^{q_n} dx \to S^{\frac{N}{p}} = |\nu| \neq 0, \tag{3.19}$$

e, além disso,

$$|u_n|^{q_n} \to \nu \ \text{ fracamente em } \mathcal{M}(\mathbb{R}^N).$$

Segue do Lema 3.2 aplicado para cada função projeção $f_i(x) = x_i$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} x dx \to \int_\Omega x d\nu. \tag{3.20}$$

Por ser $u \equiv 0$, de (3.17) e (3.16) segue que

$$|\nu|^{p/p^*} = S^{-1} S^{\frac{N}{p}} = S^{-1}|\omega|.$$

Logo, pelo Lema 1.17, podemos concluir que a medida ν está concentrada em um único ponto $y \in \mathbb{R}^N$. Pelo Lema 3.3 aplicado às funções projeções $f_i(x) = x_i$, segue que

$$\int_\Omega x d\nu = y|\nu|. \tag{3.21}$$

De (3.19), (3.20) e (3.21) vem que

$$\beta_{q_n}(u_n) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} x\, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q_n} dx} \to \frac{\int_{\Omega} x d\nu}{|\nu|} = \frac{y|\nu|}{|\nu|} = y. \tag{3.22}$$

Afirmamos que $y \in \overline{\Omega}$. Caso contrário, poderíamos tomar $B_{2R_1} \subset \overline{\Omega}^c$ e $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi \geq 0$, $\varphi \equiv 1$ em B_{R_1} e $\varphi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{2R_1}$ e valeria

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi |u_n|^{q_n} dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\nu \geq \int_{B_{R_1}(y)} 1 d\nu = \nu(\{y\}) = |\nu| > 0,$$

um absurdo. Isso mostra que $y \in \overline{\Omega}$ e nos permite concluir a demonstração do lema, pois (3.22) nos dá uma contradição com o fato de $\beta_{q_n}(u_n) \notin \Omega_r^+$. $\square$

Seguindo a ideia de Bartsch e Wang em [5], sendo Ω limitado, escolhemos $R > 0$ tal que $\overline{\Omega} \subset B_R$ e definimos

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq R, \\ R/t, & \text{se} \quad t \geq R. \end{cases}$$

Também definimos a função centro de massa truncada $\overline{\beta}_q : \mathcal{N}_{\lambda,q} \to \mathbb{R}^N$ por

$$\overline{\beta}_q(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \xi(|x|) x\, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx}. \tag{3.23}$$

Observamos que $\overline{\beta}_q$ está bem definida e, além disso, é contínua. De fato, tomando uma sequência $u_n \to u$ em $\mathcal{N}_{\lambda,q}$, pela continuidade da imersão de E_λ em $L^q(\mathbb{R}^N)$, temos que $u_n \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$. Portanto, a menos de subsequência, $|u_n|^q \leq h$ para alguma $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Usando a definição de ξ e o T.C.D.L., obtemos $\overline{\beta}_q(u_n) \to \overline{\beta}_q(u)$. Logo $\overline{\beta}_q$ é contínua.

O lema seguinte corresponde ao Lema 3.14 em [18].

Lema 3.5 *Seja $q_2 \in (p, p^*)$ obtido no Lema 3.4. Então para cada $q \in (q_2, p^*)$, existe um número $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$ tal que, para todo $\lambda \geq \Lambda_2$, temos que $\overline{\beta}_q(u) \in \Omega_{2r}^+$ sempre que $u \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$ e $I_{\lambda,q}(u) \leq m_{q,r}$.*

Demonstração: Argumentando por contradição, supomos que o lema é falso. Então existe $q \in (q_2, p^*)$, uma sequência $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $u_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,q}$ tais que $\lambda_n \to \infty$,

$$I_{\lambda_n,q}(u_n) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \|u_n\|^p_{\lambda_n} \leq m_{q,r} \tag{3.24}$$

e $\overline{\beta}_q(u_n) \notin \Omega^+_{2r}$. Então as hipóteses do Lema 2.20 são satisfeitas para a sequência (u_n), de modo que existe $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u & \text{fracamente em } W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \\ u_n \to u & \text{em } L^s(\mathbb{R}^N),\ p \leq s < p^*, \\ u_n^+ \to u^+ & \text{em } L^s(\mathbb{R}^N),\ p \leq s < p^*. \end{array} \tag{3.25}$$

Como, para cada $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{N}_{\lambda_n,q}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) \leq \|u_n\|^p_{\lambda_n} = \int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^q.$$

Da expressão acima e de (3.25) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) \leq \int_{\mathbb{R}^N} (u^+)^q, \tag{3.26}$$

ou ainda, como $u \equiv 0$ em Ω^c,

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^p + |u|^p) \leq \int_{\Omega} (u^+)^q. \tag{3.27}$$

Pelo Lema 2.14, temos $\int_{\mathbb{R}^N} (u_n^+)^q = \|u_n\|^p_{\lambda_n} \geq r_q^p > 0$. De (3.25) segue que $\int_\Omega (u^+)^q \geq r_q^p > 0$. Consequentemente $u^+ \not\equiv 0$. Assim, tomando $t = \left(\frac{\|u\|^p}{|u^+|^q_q}\right)^{\frac{1}{q-p}}$, temos $t \in (0,1]$ e $tu \in \mathcal{M}_{q,\Omega}$. Logo, de (3.24) e de (3.25) temos

$$\begin{aligned} J_{q,\Omega}(tu) &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_\Omega (|\nabla (tu)|^p + |tu|^p) \\ &\leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + |u|^p) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + |u_n|^p) \end{aligned}$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^p + (\lambda_n a(x) + 1)|u_n|^p)$$

$$= \liminf_{n\to\infty} I_{\lambda_n,q}(u_n) \leq m_{q,r}.$$

Daí e do Lema 3.4 segue que $\beta_q(tu) \in \Omega_r^+$.

De (3.25), podemos assumir que, a menos de subsequência, (u_n) está por baixo de uma função $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e $u_n(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Disso e da definição de ξ, obtemos

$$|u_n(x)|^q |\xi(|x|)||x| \leq \begin{cases} |f(x)|^q R, & \text{se} \quad x \in B_R, \\ |f(x)|^q \dfrac{R}{|x|}|x|, & \text{se} \quad x \notin B_R \end{cases}$$

$$= |f(x)|^q R \in L^1(\mathbb{R}^N),$$

como também,

$$|u_n(x)|^q \xi(|x|)x \to |u(x)|^q \xi(|x|)x \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

Sendo $u \equiv 0$ em Ω^c e $\Omega \subset B_R$, pelo T.C.D.L., por (3.25) e pela definição de ξ vem que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\beta}_q(u_n) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q \xi(|x|)x\,dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q\,dx} = \frac{\int_\Omega |u|^q x\,dx}{\int_\Omega |u|^q dx} = \beta_q(u) = \beta_q(tu) \in \Omega_r^+.$$

Isso contradiz o fato de $\overline{\beta}_q(u_n) \notin \Omega_{2r}^+$ e conclui a demonstração do lema. □

Lema 3.6 $cat_\Omega(\Omega) = cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-)$.

Demonstração: Como $\Omega_r^- \subset \Omega_{2r}^+$ é compacto, a Proposição 1.12 *(iv)* nos garante que $cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-) < \infty$. Seja $k := cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-)$. Por definição, $\Omega_r^- \subset A_1 \cup \ldots \cup A_k$ com $A_i \subset \mathbb{R}^N$ fechado e contrátil em Ω_{2r}^+, para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como $A_i \cap \Omega_r^-$ é contrátil em Ω_{2r}^+ e Ω_r^- é fechado, podemos supor que $\Omega_r^- = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Sendo Ω_r^- e Ω homotopicamente equivalentes, existem funções contínuas $f : \Omega_r^- \to \Omega$ e $g : \Omega \to \Omega_r^-$ tais que $f \circ g \simeq Id_\Omega$, isto é, existe $H : [0,1] \times \Omega \to \Omega$ contínua tal que $H(0,x) = f(g(x))$ e $H(1,x) = x$ para todo $x \in \Omega$.

Nosso objetivo agora é estender f continuamente a Ω_{2r}^+. Pelo Teorema 1.25 (Dugundji) basta mostrar que Ω é um espaço afim do tipo m (conforme Definição 1.24). Para isso, seja X um espaço métrico qualquer. Para toda função contínua $F : X \to \Omega$, sejam $x \in X$ e $W \supset F(x)$ uma vizinhança de $F(x)$ dados arbitrariamente. Como $W, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ são abertos, existe $R_0 > 0$ tal que $B_{R_0}(F(x)) \subset W$ e $B_{R_0}(F(x)) \subset \Omega$. Seja $U = F^{-1}(B_{R_0}(F(x)))$. Como F é contínua, segue que $U \supset x$ é uma vizinhança de x tal que $F(U) \subset B_{R_0}(F(x)) \subset$

W. Sendo a bola $B_{R_0}(F(x))$ convexa, Ω é um espaço afim do tipo m. Daí, pelo Teorema 1.25, existe $\tilde{f} : \Omega_{2r}^+ \to \Omega$ contínua que estende $f : \Omega_r^- \to \Omega$.

Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, definimos $B_i = g^{-1}(A_i)$. Então $\Omega = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. Como g é contínua e A_i é fechado em Ω_{2r}^+, temos que B_i é fechado em Ω. Vamos mostrar que B_i é contrátil em Ω. Para isso, sendo A_i contrátil em Ω_{2r}^+, existe $\psi_i : [0,1] \times A_i \to \Omega_{2r}^+$ contínua tal que $\psi_i(0,x) = x$ e $\psi_i(1,x) = x_i$ para todo $x \in A_i$ e para algum $x_i \in \Omega_{2r}^+$. Defina $\theta_i : [0,1] \times B_i \to \Omega$ por

$$\theta_i(t,x) = \begin{cases} H(1-2t, x), & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\ \tilde{f}[\psi_i(2t-1, g(x))], & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Pelas considerações já feitas, θ_i está bem definida e vale

$$\theta_i(0,x) = H(1,x) = x \quad \text{para todo } x \in B_i$$

e

$$\theta_i(1,x) = \tilde{f}[\psi_i(1, g(x))] = \tilde{f}(x_i) \in \Omega \quad \text{para todo } x \in B_i.$$

Para $t = \dfrac{1}{2}$ e $x \in B_i$ temos

$$\theta_i\left(\frac{1}{2}, x\right) = H(0,x) = f(g(x)) = \tilde{f}(g(x)),$$

pois $g(x) \in \Omega_r^-$. Por outro lado,

$$\theta_i\left(\frac{1}{2}, x\right) = \tilde{f}[\psi_i(0, g(x))] = \tilde{f}(g(x)).$$

Logo θ_i é contínua mostrando que B_i é contrátil em Ω. Assim $cat_\Omega(\Omega) \leq k = cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-)$. Por outro lado, como $\Omega_r^- \subset \Omega_{2r}^+$ e Ω_{2r}^+ é homotopicamente equivalente a Ω, segue que

$$cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-) \leq cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_{2r}^+) = cat_\Omega(\Omega).$$

Isso conclui a demonstração lema. □

Lema 3.7 *Sejam q_2 obtido no Lema 3.5, $q \in (q_2, p^*)$ e $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$ satisfazendo a propriedade do enunciado do Lema 3.5. Então, para todo $\lambda \geq \Lambda_2$,*

$$cat_Y(Y) \geq cat_\Omega(\Omega).$$

onde $Y = I_{\lambda,q}^{m_{q,r}} = \{u \in \mathcal{N}_{\lambda,q} :\ I_{\lambda,q}(u) \le m_{q,r}\}$.

Demonstração: Seja $U \in \mathcal{M}_{q,r} = \left\{u \in W_0^{1,p}(B_r) \setminus \{0\} :\ \|u\|_{B_r}^p = |u|_{q,B_r}^q\right\}$ uma função radial positiva tal que $J_{q,B_r}(U) = m_{q,r}$. Vamos mostrar que $cat_Y(Y) \ge cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-)$. Para isso, dado $y \in \Omega_r^-$, definimos $U_y : B_r(y) \to \mathbb{R}$ por $U_y(x) = U(x-y)$. Se $cat_Y(Y) = +\infty$, a desigualdade é válida. Suponha que $cat_Y(Y) = k < +\infty$. Então existem conjuntos $A_1, \ldots, A_k \subset Y$ fechados e contráteis em Y tais que $Y = A_1 \cup \ldots \cup A_k$. Por definição de conjunto contrátil, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, existe $\psi_i : [0,1] \times A_i \to Y$ contínua tal que $\psi_i(0,u) = u$ e $\psi_i(1,u) = u_i$ para todo $u \in A_i$ e algum $u_i \in Y$. Definimos $\alpha : \Omega_r^- \to Y$ por $\alpha(y) = U_y$. Temos que α está bem definida. De fato, estendendo U_y como 0 em $\mathbb{R}^N \setminus B_r(y)$ e sendo $a \equiv 0$ em $\Omega \supset B_r(y)$, já que $y \in \Omega_r^-$, segue que

$$\|U_y\|_\lambda^p = \|U_y\|_{B_r(y)}^p = \|U\|_{B_r}^p, \tag{3.28}$$

onde na última igualdade usamos uma mudança de variável. Por outro lado, uma vez que $U \in \mathcal{M}_{q,\Omega}$,

$$\|U\|_{B_r}^p = |U|_{q,B_r}^q = |U_y|_{q,B_r(y)}^q = |U_y|_q^q. \tag{3.29}$$

De (3.28) e (3.29), $U_y \in \mathcal{N}_{\lambda,q}$. Além disso, usando novamente o Teorema da Mudança de Variáveis e o fato de $a \equiv 0$ em $\Omega \supset B_r$, obtemos

$$I_{\lambda,q}(U_y) = I_{\lambda,q}(U) = J_{q,B_r}(U) = m_{q,r}.$$

Logo $U_y \in Y$ e α está bem definida. Para $y \in \Omega_r^-$, uma vez que $\xi \equiv 1$ em $\overline{\Omega} \supset B_r(y)$, segue de (3.23) que

$$\begin{aligned}
\overline{\beta}_q(\alpha(y)) = \overline{\beta}_q(U_y) = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |U_y(x)|^q \xi(|x|) x\, dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |U_y(x)|^q dx} &= \frac{\int_{B_r(y)} |U(x-y)|^q 1 x\, dx}{\int_{B_r(y)} |U(x-y)|^q dx} \\
&= \frac{\int_{B_r} |U(z)|^q (z+y) dz}{\int_{B_r} |U(z)|^q dz} \\
&= \frac{\int_{B_r} |U(z)|^q z\, dz}{\int_{B_r} |U(z)|^q dz} + y \ = \ y,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

pois a integral a esquerda é nula, visto que U é radial. Agora, seja $B_i = \alpha^{-1}(A_i)$. Então $\Omega_r^- = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. Admitindo que α é contínua, temos que B_i é fechado em Ω_r^-, isto é, existe F_i fechado em $\mathbb{R}^N$ tal que $B_i = \Omega_r^- \cap F_i$. Como Ω_r^- é fechado em $\mathbb{R}^N$,

B_i é fechado em $\mathbb{R}^N$. Sendo $B_i = \Omega_{2r}^+ \cap B_i$, temos que B_i é fechado em Ω_{2r}^+. Vamos mostrar que B_i é contrátil em Ω_{2r}^+. Para tanto, considere $\theta_i : [0,1] \times B_i \to \Omega_{2r}^+$ dada por $\theta_i(t,y) = \overline{\beta}_q(\psi_i(t,\alpha(y)))$. Então, pelas considerações feitas acima e pelo Lema 3.5, para $\lambda \geq \Lambda_2$, θ_i está bem definida. Temos também que θ_i é contínua, visto que $\overline{\beta}_q$, ψ_i e α o são. De (3.30) e da definição de θ_i segue que

$$\theta_i(0,y) = \overline{\beta}_q(\psi_i(0,\alpha(y))) = \overline{\beta}_q(\alpha(y)) = y, \quad \text{para todo } y \in B_i$$

e

$$\theta_i(1,y) = \overline{\beta}_q(\psi_i(1,\alpha(y))) = \overline{\beta}_q(u_i), \quad \text{para todo } y \in B_i.$$

Logo B_i é contrátil em Ω_{2r}^+. Assim $cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-) \leq k = cat_Y(Y)$. Segue do Lema 3.6 que

$$cat_Y(Y) \geq \; cat_{\Omega_{2r}^+}(\Omega_r^-) = \; cat_\Omega(\Omega).$$

Para concluir a demonstração do lema, resta apenas mostrar que a função α é contínua. Para isso, seja $(y_n) \subset \Omega_r^-$ uma sequência tal que $y_n \to y \in \Omega_r^-$. Queremos que $\alpha(y_n) \to \alpha(y)$ em E_λ. Como $a \equiv 0$ em Ω e $U_{y_n}, U_y \equiv 0$ em Ω^c, temos que $\|\alpha(y_n) - \alpha(y)\|_\lambda = \|\alpha(y_n) - \alpha(y)\|$. Considere $(U_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que $U_k \to U$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quando $k \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U(\cdot - y_n) - U_{k_0}(\cdot - y_n)\| = \|U - U_{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.31}$$

e

$$\|U(\cdot - y) - U_{k_0}(\cdot - y)\| = \|U - U_{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.32}$$

Afirmamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_{k_0}(\cdot - y_n) - U_{k_0}(\cdot - y)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{sempre que } n \geq n_0. \tag{3.33}$$

Com efeito, considere $f_n(x) = U_{k_0}(x - y_n) - U_{k_0}(x - y)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Como supp U_{k_0} é compacto e $y_n \to y$, podemos supor $U_{k_0}(x - y_n) = 0$ e $U_{k_0}(x - y) = 0$ em $B_t^c(y)$ para algum $t > 0$ e $n \geq n_0$ suficientemente grande. Sendo U_{k_0} contínua, temos

$$|f_n(x)| \leq C \in L^1(B_t(y)),$$

para alguma constante $C > 0$. Como $f_n \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, segue do T.C.D.L.,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |U_{k_0}(x - y_n) - U_{k_0}(x - y)|^p = \int_{B_t(y)} |f_n(x)|^p \to 0.$$

De maneira análoga,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_{k_0}(x - y_n) - \nabla U_{k_0}(x - y)|^p \to 0,$$

observando que $U_{k_0} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e então $\nabla U_{k_0} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Isso mostra (3.33). Daí, de (3.31) e de (3.32), segue que

$$\begin{aligned} \|\alpha(y_n) - \alpha(y)\| = \|U(\cdot - y_n) - U(\cdot - y)\| \;&\leq\; \|U(\cdot - y_n) - U_{k_0}(\cdot - y_n)\| \\ &\quad + \|U_{k_0}(\cdot - y_n) - U_{k_0}(\cdot - y)\| \\ &\quad + \|U_{k_0}(\cdot - y) - U(\cdot - y)\| \;<\; \varepsilon, \end{aligned}$$

para $n \geq n_0$. Isso mostra a continuidade da função α. □

Demonstração do Teorema D: Seja q_2 dado pelo Lema 3.5 e considere $q_0 = q_2$. Dado $q \in (q_0, p^*)$, seja $\Lambda_2 = \Lambda_2(q)$ dado pelo Lema 3.5. Aplicando a Proposição 2.3 com $C_1 = m_{q,r}$, obtemos $\Lambda_0 = \Lambda_0(q)$ tal que $I_{\lambda,q}$ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, para todo $c \leq m_{q,r}$ e $\lambda \geq \Lambda_0$. Definimos $\Lambda = \Lambda(q) = \max\{\Lambda_0, \Lambda_2\}$. Temos que $I_{\lambda,q}$ restrito à $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ é limitado inferiormente. Pelo Lema 2.18, $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ é uma variedade de classe C^1. Para $\lambda > \Lambda$, pelo Lema 3.7 e pelo Teorema 1.13 com $X = E_\lambda$, $I = I_{\lambda,q}$, $M = \mathcal{N}_{\lambda,q}$, $d = m_{q,r}$ e $I^d = Y$, vemos que $I_{\lambda,q}$ restrito à $\mathcal{N}_{\lambda,q}$ tem pelo menos $cat_Y(Y) \geq cat_\Omega(\Omega)$ pontos críticos u_i tais que $I_{\lambda,q}(u_i) \leq m_{q,r}$. Pelo Lema 2.19, $I_{\lambda,q}$ possui pelo menos $cat_\Omega(\Omega)$ pontos críticos. Como na demonstração do Teorema A,

$$0 = \langle I'_{\lambda,q}(u_i), u_i^- \rangle = \|u_i^-\|_\lambda^p$$

e, portanto, $u_i = u_i^+ \geq 0$. Pelo Princípio do Máximo Forte, $u_i > 0$. Assim, obtemos pelo menos $cat_\Omega(\Omega)$ soluções positivas de $(S_{\lambda,q}^+)$, que também são soluções positivas de $(S_{\lambda,q})$. Isso conclui a demonstração do teorema. □

Referências Bibliográficas

[1] Alves, C.O. Existence of positive solutions for a problem with lack of compactness involving the p-Laplacian. **Nonlinear Anal.** 51, 1187-1206, 2002.

[2] Alves, C.O; Ding, Y.H. Multiplicity of positive solutions to a p-laplacian equation involving critical nonlinearity, **J. Math. Anal. Appl.** 279, 508-521, 2003.

[3] Ambrosetti, A; Malchiodi, A. **Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems**. Cambridge, University Press, 2007.

[4] Bartle, R.G. **The elements of integration and lebesgue measure.** John Wiley and Sons, New York, 1995.

[5] Bartsch, T; Wang, Z.Q. Multiple positive solutions for a nonlinear Schrödinger equation, **ZAMP** 51, 366-384, 2000.

[6] Benci, V; Cerami, G. The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems, **Arch. Rational Mech. Anal.** 114, 79-93, 1991.

[7] Benci, V; Cerami, G. Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology, **Cal. Var. Partial Differential Equations** 2, 29-48, 1994.

[8] Benci, V; Cerami, G; Passaseo, D. On the number of positive solutions of some nonlinear elliptic problems, Nonlinear Analysis, A tribute in honour of G. Prodi, **Quaderno Scuola Norm. Sup.**, Pisa, 93-107, 1991.

[9] Brézis, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Springer, New York, 2010.

[10] Brézis, H; Lieb, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, **Proc. Amer. Math. Soc.** 88, 486-490, 1983.

[11] Cerami, G; Passaseo, D. Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear elliptic problems in exterior domains with "rich" topology, **Nonlinear Anal.** 18, 109-119, 1992.

[12] do Ó, J. M. B. **Teoria de pontos críticos de Lusternik-Schnirelmann e aplicações as equações diferenciais parciais**, Minicurso do I EBED, Imecc Unicamp, 2003.

[13] dos Prazeres, D. P. **Multiplicidade de soluções para problemas elípticos semilineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev**, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2010.

[14] Dugundji, J. **Topology**, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[15] Folland, G. B. **Real analysis modern techniques and their applications**, John Wiley and Sons, 1999.

[16] Furtado, M. F. A relation between the domain topology and the number of minimal nodal solutions for a quasilinear elliptic problem, **Nonlinear Analysis** 62, 615-628, 2005.

[17] Furtado, M. F. Multiple minimal nodal solutions for a quasilinear equation with symmetric potential, **J. Math. Anal. Appl.** 304, 170-188, 2005.

[18] Furtado, M. F. **Multiplicidade de soluções nodais para problemas elípticos quasilineares**, Tese de doutorado, Unicamp, 2004.

[19] Gilbarg, D; Trundinger, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[20] Goulart, C. **Sistema de equações de Schrödinger não Lineares com Acoplamento**, Tese de Doutorado, UnB, 2011.

[21] Kavian, O. **Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problêmes elliptiques**, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[22] Lazzo, M; Solutions positives multiples pour une équation elliptique non linéaire avec léxposant critique de Sobolev, **C. R. Acad. Sci.**, Paris, 314, 61-64, 1992.

[23] Lima, E. L. **Curso de Análise**, vol. 2, 4ª ed., IMPA, 1995.

[24] Lima, E. L. **Variedades Diferenciáveis**, IMPA, 2010.

[25] Lindqvist, P. On the equation $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda |u|^{p-2}u = 0$. **Proceedings of the American Mathematical Society**, V. 109, n. 1, p. 157-164, 1990.

[26] Lions, P.L. The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, Ann. Ins. Henri Poincaré, **Analyse Non Linéaire 1**, 109-145 e 223-283, 1984.

[27] Lions, P.L. The concentration compactness principle in the calculus of variations. The limit case, **Rev. Mat. Iberoamericana** 1 145-201, 1985 e 2 45-121, 1985.

[28] Rey, O; A multiplicity result for a variational problem with lack of compactness, **Nonlinear Anal. 13**, 1241-1249, 1989.

[29] Schwartz, J. T; **Nonlinear functional analysis**, Gordon and Breach Science, New York, 1969.

[30] Silva, E.A.B; Soares, S.H.M. Quasilinear Dirichlet problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth, **Nonlinear Anal.** 43, 1-20, 2001.

[31] Smets, D. A concentration-compactenss lema with applications to singular eigenvalues problems, **J. Funct. Anal.** 167, 463-480, 1999.

[32] Struwe, M. **Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[33] Willem, M. **Minimax theorems**. Birkhäuser, Basel, 1996.