

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FÁBIO NASCIMENTO FAGUNDES

EFEITOS DAS CONDIÇÕES DE
CONTORNO DE NEUMANN NA
ELETRODINÂMICA ESCALAR

VITÓRIA
2008

FÁBIO NASCIMENTO FAGUNDES

**EFEITOS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
DE NEUMANN NA ELETRODINÂMICA
ESCALAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Orientador: Prof. Dr. José Alexandre Nogueira.

VITÓRIA
2008

FÁBIO NASCIMENTO FAGUNDES

**EFEITOS DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
DE NEUMANN NA ELETRODINÂMICA
ESCALAR**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Físicas.

Aprovada em 21 de Fevereiro de 2008

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Daniel Heber Theodoro Franco
Universidade Federal de Viçosa-MG

Prof. Dr. Humberto Belich Júnior
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer
Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática

Agradecimentos

A Deus, toda honra, toda glória e todo louvor...

Resumo

Nós consideramos os efeitos das condições de contorno de Neumann homogêneas na eletrodinâmica escalar com auto-interação. Nós encontramos que se o comprimento da dimensão finita é pequeno o bastante o campo escalar desenvolve massa, ainda que a quebra de simetria espontânea não seja induzida. Como um resultado o campo vetorial não desenvolve massa. Como um subproduto nós obtemos a energia de Casimir. Nós mostramos também que os resultados (a massa do campo escalar e a densidade de energia do vácuo) são invariante de “gauge”.

Abstract

We consider the effects of homogeneous Neumann boundary conditions in the scalar electrodynamics with self-interaction. We have found if the length of the finite region is small enough the scalar field develops mass, even though spontaneous symmetry breaking is not induced. As a result the vector field does not develop mass. As byproduct we have gained the Casimir energy. We also show that the physical results (mass of the scalar field and vacuum energy density) are gauge-invariant.

Sumário

1	Introdução	9
2	O Efeito Casimir	13
2.1	Revisão histórica	13
2.1.1	Introdução	13
2.1.2	O conceito de vácuo	15
2.1.3	Osciladores quânticos e a energia de ponto zero . . .	16
2.1.4	A quantização do campo eletromagnético e o efeito Casimir	17
2.1.5	A renormalização e o efeito Casimir	19
2.2	O cálculo canônico da energia de Casimir usando o método de corte	20
2.2.1	A energia de Casimir	20
2.2.2	O método de corte	26
2.3	Cálculo da energia de Casimir usando o método da função Zeta	29
3	Teoria de Gauge da Eletrodinâmica Escalar	37
3.1	Introdução	37
3.2	Campos eletromagnéticos e campos escalares complexos . .	39

	8
4 O potencial efetivo	53
4.1 Introdução	53
4.2 O potencial efetivo obtido por métodos funcionais	54
4.3 O potencial efetivo interpretado como densidade de energia	62
4.4 O Ghost de Faddeev-Popov	65
5 Mecanismo de Coleman - Weinberg	70
5.1 O termo de massa em uma lagrangiana	70
5.2 A quebra espontânea de simetria	75
5.3 O mecanismo de Coleman - Weinberg	78
5.3.1 O campo escalar real	79
5.3.2 Transmutação dimensional	82
6 Efeitos das Condições de Contorno de Neumann na Eletrodinâmica Escalar	92
6.1 Introdução	92
6.2 O potencial efetivo para a eletrodinâmica escalar	93
6.3 Conclusão	107
7 Conclusão	109
Referências bibliográficas	110

Capítulo 1

Introdução

É de grande conhecimento os avanços que têm sido feitos na identificação dos constituintes fundamentais da matéria e na compreensão das forças fundamentais pelas quais eles interagem. Entretanto, de menor conhecimento é o fato que os aspectos essenciais destas teorias da estrutura elementar da matéria e das forças fundamentais envolvam propriedades altamente não triviais do vácuo. Nas teorias atuais da estrutura da matéria, na escala de pequenas distâncias, várias propriedades do vácuo são de crucial importância. A visão clássica do vácuo é verdadeira na média. Sua relação com a visão quântica é análoga à relação entre a mecânica clássica e quântica, onde os valores médios dos observáveis quânticos obedecem às equações clássicas de movimento. Não existem partículas no vácuo quântico. O valor médio dos campos é usualmente nulo, porém o valor médio do quadrado dos campos não é nulo e exerce um efeito mensurável. A isto é dado o nome de flutuações do campo no vácuo. Não é difícil relacionar as flutuações com a densidade de energia do vácuo, e encontrar que essa não é nula, portanto sendo uma consequência das flutuações dos campos no vácuo.

É na abordagem da Teoria Quântica de Campos (TQC) que é realizado o estudo sobre as possíveis propriedades do vácuo. A TQC é a mais bem sucedida teoria que une em uma só estrutura conceitual os princípios da

mecânica quântica e da relatividade especial. A base desta teoria está no princípio de superposição dos estados quânticos, com a interpretação probabilística dos valores esperados. Nela as excitações dos campos são interpretadas como as partículas associadas a esses campos. A TQC é uma teoria de muitas partículas. Um campo é um sistema com infinitos graus de liberdade, que pode ser tratado como um conjunto infinito de osciladores harmônicos fictícios não acoplados, cada um tendo uma frequência própria de oscilação, a chamada frequência normal. A TQC é, então, um sistema de infinitos osciladores harmônicos simples quânticos, sendo suas excitações fundamentais interpretadas como as partículas associadas. Desta forma, o vácuo na TQC é o estado no qual os infinitos osciladores quânticos se encontram, todos eles, no estado fundamental. Mas, como bem sabemos a energia do estado fundamental de um oscilador harmônico quântico não é nula. Sendo a energia do vácuo a soma das energias dos estados fundamentais desses infinitos osciladores, ela é infinita. Essa energia infinita do vácuo é uma constante e uma vez que no espaço de Minkowski a energia é uma grandeza relativa e não absoluta, ela pode, em muitos aspectos, ser ignorada. Contudo, o vácuo quântico pode interagir com os campos, e essa interação pode produzir alterações em grandezas mensuráveis, como por exemplo: a massa, a carga e a constante de acoplamento. Infelizmente, essas alterações em geral são também infinitas. Esses infinitos que infestam a TQC constituem um dos principais problemas da TQC. O saneamento desse problema é realizado pelo processo chamado renormalização. Esse processo consiste em isolarmos as divergências através de um método qualquer de regularização e absorvê-las na redefinição dos parâmetros mensuráveis da teoria.

O efeito Casimir é uma das conseqüências mensuráveis mais notáveis das flutuações quânticas do vácuo, estando associado à soma das energias de ponto zero (ZPE). O efeito Casimir, em seu aspecto mais geral, é uma conseqüência das alterações causadas na energia do vácuo devido à presença

de fronteiras e campos externos. O efeito foi primeiramente predito pelo holandês H. B. Casimir [Casimir, H. G. B.; Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948)] em 1948 e dez anos depois confirmado experimentalmente pelo também M. J. Sparnaay [Sparnaay, M. J.; Physica 24, 751 (1958)]. Nos últimos anos, experimentos realizados [Lamoureux, S. K.; Phys. Ver. Lett. 28, 5 (1997)] [Mohideen, U. and Roy, A.; Phys. Ver. Lett. 81, 21 (1980)] têm confirmado o efeito Casimir com alto grau de precisão. Em seu trabalho original Casimir previu que devido às flutuações quânticas do campo eletromagnético, duas placas planas, paralelas, condutoras neutras (aterrada) se atrairiam com uma força dada por

$$F = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} A, \quad (1.1)$$

onde A é a área das placa e “ a ” a distância entre elas. Para placas de 1 cm^2 de área e separadas de $1 \text{ }\mu\text{m}$, a força de atração, por unidade de área, entre placas é de $0,013 \text{ dynas}$ ($1,3 \text{ mPa}$). Tradicionalmente o efeito Casimir é estudado trocando-se “ab initio” os efeitos idealizados das fronteiras por condições de contorno.

As simetrias desempenham papel essencial nas teorias físicas atuais. Na TQC sua importância é fundamental. No modelo atualmente aceito como padrão, a matéria é formada pelas partículas fundamentais que são excitações dos campos de matéria. Esses campos de matéria são campos fermiônico, portanto, as partículas fundamentais (quarks e léptons) que formam a matéria conhecida são férmions. Existe uma relação intrínseca entre spin e estática, sendo que férmions são partículas de spin semi-inteiro (spin-1/2) cujos campos obedecem a relações de anti-comutação. Já as interações entre os campos de matéria são devido aos campos de interação. Tais campos são bósons vetoriais que obedecem a relações de comutação, cujas excitações são partículas de spin inteiro (spin-1). No início da TQC os termos que representam as interações fundamentais eram introduzidos

“ad hoc”.

Capítulo 2

O Efeito Casimir

2.1 Revisão histórica

2.1.1 Introdução

A teoria quântica de campos é a mais bem sucedida teoria que funde em uma mesma estrutura conceitual a mecânica quântica e a relatividade restrita. Ela é largamente empregada em diversas áreas da física das altas energias, da mecânica estatística, da matéria condensada, etc. Na interpretação usual dessa teoria, as partículas elementares da natureza são excitações do vácuo quântico. Ela oferece vários exemplos que mostram que esse vácuo exerce um papel fundamental não somente na física de fenômenos macroscópicos, mas também na física de fenômenos microscópicos, sendo um desses fenômenos o Efeito Casimir [7].

Considerando duas placas quadradas com um centímetro de lado, metálicas, perfeitamente condutoras, eletricamente neutras (aterradas), paralelas entre si e separadas por uma distância da ordem de micrômetros, onde a força gravitacional é desprezível; o conjunto montado em uma câmara selada na qual um vácuo foi estabelecido, havendo disponível um medidor hipersensível de forças diminutas entre as placas. Nestas condições, espera-se que o ponteiro do medidor de forças não se mova, contudo, observa-se

uma força atrativa entre as placas. Quando a separação entre elas é de meio micrômetro a força equivale ao peso de uma massa de dois décimos de um miligrama.

Este é o Efeito Casimir, previsto teoricamente em 1948 pelo físico holandês Hendrik Brugt Gerhard Casimir [7] e comprovado experimentalmente dez anos depois pelo, também físico holandês, Marcus Sparnaay [45]. Mais recentemente, outros experimentos realizados por Lamoureaux, Mohideen e Roy confirmaram o Efeito Casimir com um alto grau de precisão [29,32].

A intrigante interrogação é: como duas placas eletricamente neutras podem exercer algum tipo de influência uma na outra?

Em meados de 1947, Casimir e seu colega Dirk Polder reconsideraram as chamadas interações dispersivas de Van der Waals e chegaram à conclusão de que em virtude da velocidade finita de propagação do campo eletromagnético, a energia de interação interatômica diminui com o inverso da sexta potência da distância entre os átomos quando estes estavam bem próximos (ordem de 10^{-6}) e com o inverso da sétima potência quando estão a grandes distâncias (ordem de 10^{-7}).

Ao conversar com Niels Bohr sobre suas idéias, Casimir recebeu a sugestão de considerar a energia de ponto zero do vácuo. Assim, de posse dessa informação, ele refez os cálculos recorrendo às chamadas oscilações quânticas do vácuo eletromagnético, onde obteve os mesmos resultados encontrados com seu colega Dirk Polder, apresentando esse trabalho em um colóquio na cidade de Paris em Abril de 1948. Um mês depois, Casimir publicou o artigo onde a força encontrada era atrativa e de intensidade

$$F = -A \frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}, \quad (2.1)$$

sendo “ A ” a área de cada placa, “ a ” a separação entre elas, “ \hbar ” a constante de Planck dividida por 2π e “ c ” a velocidade da luz no vácuo.

O mais notável no trabalho de Casimir, não é o fato de ele ter obtido

uma força atrativa entre dois objetos condutores e neutros, pois isso já era conhecido entre os que estudavam as forças de Van der Waals dispersivas, mas o fato de ele atribuir essa atração às *flutuações de vácuo quântico*.

2.1.2 O conceito de vácuo

Em geral, a idéia que associa-se ao vácuo (estado de mínima energia) é a de ausência absoluta de matéria. No entanto, na maioria das vezes não nos ocorre que essa concepção possa ser um tanto ingênua e nossa terminologia imprecisa. Os conceitos primitivos do vácuo clássico dividem-se basicamente em duas vertentes antigas de pensamento: a primeira defendida por vários filósofos da antiguidade, dentre os quais se encontravam: Demócrito (460-370 a.C.), Lucrécio (94-55 a.C.), Epícuro (341-270 a.C.) e Platão (428-347 a.C.), afirmava que o vácuo e o espaço vazio eram sinônimos e a segunda vertente defendida por: Parmênides de Eléia (515-450 a.C.), Melissos de Samos (350 a.C.), Zenon de Eléia (490 a.C.) e por Aristóteles (384-322 a.C.) afirmava que o vácuo não é o mesmo que o espaço vazio, e mais, que o vácuo era uma espécie de meio, um éter ou um “ar sutil”. Opondo-se à interpretação platônica, Aristóteles atribui propriedades dinâmicas ao vácuo, pois em sua visão, a velocidade de um corpo é inversamente proporcional à densidade do meio em que o corpo se move. Se a densidade do meio for nula (como no caso defendido por Platão), a velocidade do corpo é infinita, o que é repudiado pela razão humana.

Já no século XVII, houve uma explosão de experimentos físicos na tentativa de refutar a doutrina aristotélica que afirmava ser a existência do vácuo (como sinônimo do nada), uma impossibilidade física. Por volta do ano de 1657, Otto Von Guericke (1602-1686), filósofo natural e burgomestre (prefeito) de Magdeburgo (cidade alemã), demonstrou ser o vácuo uma região sem matéria. Através de um experimento ele puxou, usando duas parcelas de cavalos, dois hemisférios ocos de cobre, acoplados um ao outro.

A ausência de ar no interior permitia que a pressão atmosférica externa mantivesse os hemisférios fortemente unidos, a ponto das parselhas de cavalos não conseguirem separá-los, concluindo ele assim, a incoerência da concepção medieval aristotélica sobre a definição de vácuo.

O conceito de vácuo sofreu uma radical metamorfose a partir dos estudos de Max Planck (1858-1947) sobre a radiação de um corpo negro, um problema teórico que desencadeou os estudos sobre mecânica quântica. Com a mecânica quântica surgiu o conceito de energia de ponto zero, uma energia decorrente das flutuações quânticas que não podem ser eliminadas por nenhum processo físico. Elas permanecem mesmo em uma região do espaço na qual nenhuma forma de matéria ou radiação pode ser observada.

2.1.3 Osciladores quânticos e a energia de ponto zero

As vibrações exibidas pela natureza são um dos fenômenos físicos mais comuns e importantes. Mesmo em nível atômico elas estão presentes: as moléculas e os átomos vibram sem cessar, os núcleos atômicos vibram, os prótons e nêutrons no interior dos núcleos vibram, assim, não é de se admirar que o vácuo também seja capaz de “vibrar”.

Ao estudar um fenômeno natural, o físico procura sempre começar com um modelo simples e idealizado, que retenha suas características mais importantes, como é o caso do oscilador harmônico simples (OHS) para o estudo de vibrações. A energia do OHS é proporcional ao quadrado da amplitude de oscilação e a amplitude pode ter valores que variam continuamente de zero até um valor máximo a partir do qual a força da mola deixa de obedecer a Lei de Hooke. Assim, o OHS oscila com uma energia que pode ter qualquer valor acima de zero. É comum modelar-se sistemas microscópicos, como por exemplo, sistemas de átomos e moléculas, por OHS com um dado estado de equilíbrio e uma frequência “ ν ” associada ao sistema.

Ao contrário do que ocorre com OHS clássicos, a energia de um oscilador

na mecânica quântica só pode ter certos valores bem definidos, sem possibilidade de ocorrer valores intermediários. Diz-se que os valores permitidos formam um espectro discreto (ou quantizado) de energia. Os valores possíveis da energia do OHS quântico são dados por:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu , \quad (2.2)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, sendo “ h ” a constante de Planck.

Observa-se que o oscilador quântico nunca pode ser encontrado em um estado em que a energia seja nula, pois isso é incompatível com as leis da mecânica quântica. O nível de energia mais baixo do oscilador quântico é dado por:

$$E_0 = \frac{1}{2} h\nu , \quad (2.3)$$

que é diferente de zero. Além disso, o espectro de energia é discreto, ou seja, a energia do OHS quântico só pode assumir valores iguais ao mínimo mais um múltiplo de “ $h\nu$ ”. O Efeito Casimir é uma consequência do valor não nulo de E_0 (daí a forças de atração entre as placas, quadradas e paralelas, perfeitamente condutoras e eletricamente neutras), que por sua vez, pode ser visto como uma consequência do princípio de incerteza de Heisenberg.

2.1.4 A quantização do campo eletromagnético e o efeito Casimir

Entre os que formularam a teoria quântica do eletromagnetismo, por volta de 1926, encontram-se: Max Born (1882-1970), Werner Heisenberg (1901-1976) e Pascual Jordan (1902-1980). Em sua primeira abordagem sobre o assunto, eles desprezaram tanto a polarização como a presença de fontes, levando ao que se chama hoje de uma *teoria de campo livre*. Para tanto, usaram o procedimento de quantização canônica. Esta teoria prevê que o vácuo perfeito, sem nenhum campo eletromagnético ou qualquer tipo de

matéria, deve ser visto não como um espaço absolutamente vazio e inerte, mas como um espaço no qual pequenas e rápidas flutuações de campo eletromagnético ocorrem a todo momento e em toda parte. Em média as flutuações dão um campo eletromagnético nulo, por isso, diz-se que no vácuo perfeito não há campo eletromagnético. Entretanto, as quase imperceptíveis flutuações estão presentes.

Uma onda eletromagnética de frequência bem definida comporta-se como um OHS vibrando nessa frequência e em um nível de energia determinado pela sua intensidade. Por exemplo, dada uma onda eletromagnética de frequência “ ν ”, o seu n -ésimo nível de energia será

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu , \quad (2.4)$$

que na interpretação da teoria quântica de campos se diz que ela é formada por n fótons. Quando são retirados todos os fótons, a onda desaparece, mas resta a energia de ponto zero $\frac{1}{2}h\nu$. A soma das energias que correspondem a todas as frequências possíveis é chamada de energia do vácuo, que é dada pela soma divergente:

$$E_{vac} = \sum \frac{1}{2} h\nu . \quad (2.5)$$

Esta energia infinita do espaço infinito e vazio é destituída de significado físico. No entanto, considerando o campo eletromagnético confinado em alguma região do espaço, como por exemplo, dentro de uma cavidade condutora ou na região delimitada por duas placas condutoras paralelas, suas oscilações, inclusive as do ponto zero, devem satisfazer a certas condições de contorno (ou de fronteira). Assim, as frequências possíveis de oscilação formam um conjunto discreto. O Efeito Casimir resulta da alteração do espaço de frequências de vibração do campo eletromagnético, em razão da imposição da condições de contorno exigida. No caso do vácuo eletromagnético entre duas placas metálicas, a manifestação é uma atração entre as

placas. Mas dependendo das condições de contorno e da geometria dos corpos envolvidos, esta força pode ser repulsiva.

2.1.5 A renormalização e o efeito Casimir

Um exame do desenvolvimento da teoria quântica de campos, no período que vai de 1927 a 1971, evidencia o fato de que as técnicas de renormalização desempenharam um papel fundamental ao longo de todo o processo. Em particular, a renormalização reabilitou a eletrodinâmica quântica no final dos anos 40, e depois, também reabilitou a teoria quântica de campos como um todo e ajudou a consolidar as teorias de gauge no início dos anos 70. O sucesso da renormalização foi tal que ela passou gradualmente de mero dispositivo teórico *ad hoc*¹, à condição de critério para a construção e avaliação de teorias na física de campos. Um claro exemplo da importância das técnicas de renormalização para a física moderna, é o Efeito Casimir.

A condição imposta por Casimir para um par de placas paralelas perfeitamente condutoras e separada por uma pequena distância, é de que o valor do campo eletromagnético das flutuações do vácuo deve anular-se quando estas penetram nas placas, de modo a garantir que ele permaneça confinado entre elas. O resultado é uma modificação na energia do vácuo confinado em relação ao caso não confinado. Calculando diretamente a energia do vácuo entre as placas metálicas obtem-se, do mesmo modo que no caso do vácuo sem as placas metálicas, um valor infinito! O cálculo da diferença entre as energias do vácuo nas duas situações pode ser tratado com uma técnica matemática chamada *regularização* que permite contornar o problema da diferença entre duas quantidades infinitas. E por fim, o procedimento conhecido como *renormalização*, permite obter um resultado final finito e provido de significado físico.

A diferença das energias regularizadas, isto é, finitas, pode então ser in-

¹Termo em latim, traduzido normalmente como: “por com a mão” ou “introduzir forçadamente”.

interpretada como a energia necessária para introduzir as placas no vácuo. Do mesmo modo pelo qual a energia de interação entre duas cargas estáticas está associada uma força entre elas, a energia de interação entre as placas também está associada uma força, que nesse caso é atrativa e é dada de modo preciso por (2.1). Todas essas considerações levam a afirmar que a força de Casimir é uma manifestação macroscópica das propriedades microscópicas do vácuo quântico.

2.2 O cálculo canônico da energia de Casimir usando o método de corte

2.2.1 A energia de Casimir

A energia de Casimir é a alteração da energia do vácuo de um campo quântico quando este é submetido a condições de contorno. Se o espectro de energia do sistema é dado pelas frequências ω_n , onde $n \in \mathcal{A}$, sendo \mathcal{A} um conjunto de índices qualquer, a energia de Casimir [44] é dada como sendo

$$E_{Casimir} = \left[\sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2} \right]_{c.c.c.} - \left[\sum_n \frac{\hbar\omega_n}{2} \right]_{s.c.c.}, \quad (2.6)$$

onde *c.c.c.* na primeira somatória indica um sistema submetido a *condições de contorno* e *s.c.c.* na segunda somatória indica um sistema *sem condições de contorno*.

No entanto, a energia de Casimir, dada pela equação (2.6) não é matematicamente bem definida, pois se trata da diferença entre dois somatórios divergentes. Para dar sentido físico (observável) a essa quantidade, é necessário realizar o que costuma ser chamado de *renormalização*. A renormalização de uma quantidade é feita normalmente em três etapas:

i) A primeira é a *regularização*. Para regularizar uma quantidade mal definida Q , devemos definir uma nova quantidade $Q(\lambda)$, onde λ é um parâmetro livre. Dizemos que $Q(\lambda)$ é a regularização de Q se possuir as seguintes propriedades:

- a) $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} Q(\lambda) = Q$.
- b) $Q(\lambda)$ é bem definida quando $\lambda \neq \lambda_0$.

Nesse contexto, o parâmetro λ é chamado de *parâmetro de regularização*.

ii) A segunda etapa no processo de renormalização consiste em *subtrair* da expressão regularizada, que agora é bem definida, uma quantidade $Q_{esp}(\lambda)$ indicada pela própria teoria como sendo *espúria*, obtendo assim

$$Q(\lambda) - Q_{esp}(\lambda) .$$

iii) A terceira e última etapa, consiste em tomar o limite dessa diferença quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, isto é,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} [Q(\lambda) - Q_{esp}(\lambda)] .$$

Esse limite, que tem significado físico mensurável, é o que chamamos de *valor renormalizado* da grandeza Q , originalmente mal definida.

Aplicando essas três etapas da *renormalização* em (2.6), obtemos a energia renormalizada do vácuo sob condições de contorno, que é a energia de Casimir (renormalizada)

$$E_{Casimir}^{ren.} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \left\{ \left[\sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2} \right]_{c.c.c.}^{(\lambda)} - \left[\sum_n \frac{\hbar \omega_n}{2} \right]_{s.c.c.}^{(\lambda)} \right\} . \quad (2.7)$$

É claro que o processo de *renormalização* depende da *regularização* utilizada (mas não o resultado final), pois existem vários métodos de reg-

ularização, tais como: o método de corte nas frequências; o método da discretização do espaço, também conhecido como regularização na rede; o método da função zeta generalizada e o método da função de Green. Nessa seção, para calcularmos a energia de Casimir, utilizaremos o método do corte nas frequências.

Consideremos um campo escalar real e sem interação $\phi(x, t)$ em $(3 + 1)$ -dimensões. A densidade lagrangiana desse campo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \nabla \phi(x, t) \cdot \nabla \phi(x, t) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x, t) , \quad (2.8)$$

onde m é a massa da partícula escalar associada ao campo. Da equação de Euler-Lagrange, segue-se a equação do movimento clássica para o campo $\phi(x, t)$,

$$(\square + m^2)\phi = 0 , \quad (2.9)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = 0 , \quad (2.10)$$

onde $\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ é o operador *d'Alambertiano*.

Na ausência de condições de contorno, escrevemos a solução geral dessa equação como uma combinação linear de ondas planas,

$$\phi(x, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} [a_k e^{ik \cdot x - i\omega_k t} + a_k^* e^{-ik \cdot x + i\omega_k t}] , \quad (2.11)$$

sendo k o vetor de onda e $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$. Para garantir o carácter real do campo escalar, a_k^* é o complexo conjugado de a_k e ambos são as amplitudes das ondas planas.

O Momento canonicamente conjugado ao campo $\phi(x, t)$ é dado por

$$\begin{aligned}
\pi(x, t) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi(x, t))} \\
&= \partial^0 \phi(x, t) = \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \dot{\phi}(x, t) , \tag{2.12}
\end{aligned}$$

obtendo assim por meio de (2.11),

$$\pi(x, t) = (-i) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} [a_k e^{ik \cdot x - i\omega_k t} - a_k^* e^{-ik \cdot x + i\omega_k t}] . \tag{2.13}$$

Usando o procedimento da quantização canônica, transformamos o campo e o momento conjugado, respectivamente, em operadores,

$$\phi(x, t) \rightarrow \hat{\phi}(x, t) ,$$

e

$$\pi(x, t) \rightarrow \hat{\pi}(x, t) .$$

Postulando para eles as relações de Heisenberg para tempos iguais, chegamos em

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = i\delta(x - x') , \tag{2.14}$$

e

$$[\hat{\phi}(x, t), \hat{\phi}(x', t)] = [\hat{\pi}(x, t), \hat{\pi}(x', t)] = 0 . \tag{2.15}$$

A quantização canônica do campo escalar implica em transformar os coeficientes de Fourier de (2.11) e (2.13) em operadores hermitianos,

$$a_k \rightarrow \hat{a}_k ,$$

e

$$a_k^* \rightarrow \hat{a}_k^\dagger .$$

Assim, as relações de Heisenberg (2.14) e (2.15) se tornam

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(k - k') , \quad (2.16)$$

e

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 . \quad (2.17)$$

Da lagrangiana (2.8), realizando uma transformação de Legendre obtemos a hamiltoniana

$$H(x, t) = \pi(x, t) \dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L}(x, t) , \quad (2.18)$$

que depois da quantização, assume a forma

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3x \left[\hat{\pi}^2 + (\nabla \hat{\phi})^2 + m^2 \hat{\phi}^2 \right] , \quad (2.19)$$

Reescrevendo-a em termo dos operadores hermitianos \hat{a}_k e \hat{a}_k^\dagger , temos

$$\hat{H} = \int d^3k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \omega_k . \quad (2.20)$$

Assim, observamos que a quantização canônica de um campo escalar real livre, mostra que ele pode ser considerado como uma coleção formada por um número infinito de osciladores harmônicos quânticos independentes, uma vez que a hamiltoniana do campo é uma soma de hamiltonianas de osciladores harmônicos de diferentes frequências. Os operadores $\hat{a}_k(t)$ e $\hat{a}_k^\dagger(t)$, assim como $\hat{\phi}(x, t)$ e $\hat{\pi}(x, t)$, atuam sobre vetores que pertencem ao espaço vetorial complexo chamado *espaço de Fock*.

A imposição de condições de contorno no campo escalar afeta sua parte espacial e, assim, modifica os possíveis modos normais de vibração do campo e suas respectivas frequências. Os modos normais são dados por certas funções modais $F_k(x)$, com frequência ω_k , onde k assume agora apenas os valores ditados pelas condições de contorno. Logo, o campo

assume a forma

$$\hat{\phi}(x, t) = \sum_k \left[\hat{a}_k F_k e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger F_k^* e^{i\omega_k t} \right] , \quad (2.21)$$

que comparando com (2.11), observamos que, em geral, condições de contorno discretizam o espectro.

As funções modais $F_k(x)$ são determinadas resolvendo-se a equação de Helmholtz, associada com a equação de movimento (2.10),

$$\nabla^2 F_k(x) + k^2 F_k(x) = 0 . \quad (2.22)$$

e as condições de contorno.

Elas formam um conjunto completo e ortonormal, assim,

$$\int d^3x F_k^*(x) F_{k'}(x) = \delta_{kk'} . \quad (2.23)$$

As condições de contorno impostas, modificam o campo tornando a hamiltoniana (2.20) em

$$\hat{H} = \sum_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \omega_k , \quad (2.24)$$

onde a soma estende-se aos valores de k ditados por essas condições.

Observemos que no estado de vácuo nenhum modo normal está excitado, assim a energia é dada pelo termo

$$\frac{\omega_k}{2} ,$$

tanto na equação (2.20) onde não há condição de contorno, como na equação (2.24) onde há condições de contorno.

2.2.2 O método de corte

Consideremos, sem perda de generalidade, um campo escalar real $\hat{\phi}(x, t)$, não massivo, em (1+1)-dimensões espaço-temporais. A solução da equação de Helmholtz (2.22) unidimensional é dada por

$$F_k(x) = C e^{ikx} + C^* e^{-ikx} ,$$

ou ainda,

$$F_k(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) . \quad (2.25)$$

Supondo que as condições de contorno impostas à parte espacial do campo escalar sejam as de Neumann, tomadas em $x = 0$ e $x = a$, isto é,

$$\left. \frac{dF_k}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dF_k}{dx} \right|_{x=a} = 0 . \quad (2.26)$$

A solução dada por (2.25) reduz-se a

$$F_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) , \quad (2.27)$$

onde $n \in \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e as frequências normais são dadas por $\omega_n = |k_n| = \frac{n\pi}{a}$.

A energia do vácuo em unidades naturais, definida em (2.5), a ser regularizada é dada por²

$$E_0(a) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{n\pi}{a} . \quad (2.28)$$

A *regularização por corte* consiste na introdução de um fator no somatório que torne a soma convergente. Ela é assim chamada, em virtude do corte que esse fator faz na contribuição de parte do espectro das frequências.

²Note que $n = 0$ não contribui para ZPE no vácuo do campo não-massivo e sem interação.

Tomando esse fator como serdo

$$e^{-\lambda\omega_n},$$

onde λ é um número real positivo, e substituindo-o na equação (2.28), obtemos

$$\begin{aligned} E_0(a, \lambda) &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n\pi}{a} e^{-\frac{\lambda n\pi}{a}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-\frac{\lambda n\pi}{a}} \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Identificando esse somatório com uma progressão geométrica infinita de razão $e^{-\frac{\lambda\pi}{a}}$, temos

$$E_0(a, \lambda) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{e^{-\frac{\lambda\pi}{a}}}{1 - e^{-\frac{\lambda\pi}{a}}} \right]. \quad (2.30)$$

Usando os polinômios de Bernoulli $B_k(x)$, definido por [20]

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k \in \mathbb{N}-1} B_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad (2.31)$$

na expressão entre colchetes da equação (2.30), obtemos

$$\begin{aligned} E_0(a, \lambda) &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}-1} \frac{B_k(1)}{k!} \left(-\frac{\lambda\pi}{a} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{B_0(1)}{0!} \frac{a}{\lambda\pi} + \frac{B_1(1)}{1!} - \frac{B_2(1)}{2!} \frac{\lambda\pi}{a} \right) + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde $B_0(0) = 1$ e $B_k(1) = (-1)^k B_k(0)$ [1]. Fazendo a derivação em (2.32),

chegamos em

$$E_0(a, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{\pi}{24} \frac{1}{a} + \mathcal{O}(\lambda^2) . \quad (2.33)$$

Considerando a renormalização da energia do vácuo segundo a equação (2.7), definiremos dois universos unidimensionais finitos, onde: um é formado por uma cavidade unidimensional de comprimento L com uma partição que a subdivide em uma cavidade de comprimento a e outra de comprimento $L - a$ e o outro universo formado por uma segunda cavidade de comprimento L . A definição dada por (2.7), pode ser escrita na forma

$$E_0 = \lim_{\substack{L \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} [E_0(a, \lambda) + E_0(L - a, \lambda) - E_0(L, \lambda)] , \quad (2.34)$$

sendo

$$E_0(L - a, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{L - a}{\lambda^2} - \frac{\pi}{24} \frac{1}{L - a} + \mathcal{O}(\lambda^2) , \quad (2.35)$$

e

$$E_0(L, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{L}{\lambda^2} - \frac{\pi}{24} \frac{1}{L} + \mathcal{O}(\lambda^2) . \quad (2.36)$$

Substituindo as equações (2.35) e (2.36) em (2.34) e aplicando o limite, obtemos o resultado físico procurado

$$E_0(a) = -\frac{\pi}{24a} , \quad (2.37)$$

que é a energia de Casimir de um campo escalar real não massivo, com condições de contorno de Neumann em $(1 + 1)$ dim.

2.3 Cálculo da energia de Casimir usando o método da função Zeta

Nessa seção vamos calcular a energia de Casimir para um campo escalar livre não-massivo sob condições de contorno de Neumann homogêneas em $(3 + 1)$ dim. Diferente da seção anterior, empregaremos aqui um outro método de regularização chamado método da função Zeta.

Consideremos a lagrangiana \mathcal{L} para um campo escalar real não massivo $\phi(\vec{r}, t)$, dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu) = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \phi . \quad (2.38)$$

De acordo com a equação de movimento de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 , \quad (2.39)$$

o campo não massivo da lagrangiana (2.38), satisfaz a equação

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = 0 , \quad (2.40)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 . \quad (2.41)$$

Determinaremos a solução da equação (2.41), impondo que as derivadas normais do campo ϕ se anulem sobre duas superfícies planas infinitas, paralelas e separadas por uma pequena distância “ a ”. Considerando as superfícies perpendiculares ao eixo X , o campo ϕ deve satisfazer as condições de contorno

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 . \quad (2.42)$$

Usando o método das separação de variáveis, resolveremos a equação (2.41) supondo que a solução possa ser escrita como

$$\phi(\vec{r}, t) = \xi(\vec{r})\psi(t) , \quad (2.43)$$

de modo que a equação (2.41) fica

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\xi(\vec{r})\psi(t)] - \nabla^2[\xi(\vec{r})\psi(t)] = 0 , \quad (2.44)$$

isto é

$$\xi(\vec{r})\frac{d^2}{dt^2}[\psi(t)] - \nabla^2[\xi(\vec{r})]\psi(t) = 0 , \quad (2.45)$$

e dividindo ambos os lados da igualdade por $\frac{1}{\xi(\vec{r})\psi(t)}$, chegamos a

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{\xi} \nabla^2\xi . \quad (2.46)$$

Observemos que o lado esquerdo da equação (2.46) depende apenas da variável temporal e o lado direito, depende somente das variáveis espaciais. Como a equação deve ser satisfeita para todo \vec{r} e para todo t , então ambos os lados devem ser iguais a uma mesma constante, que denotaremos por $-p^2$. Assim, ficamos com duas equações diferenciais ordinária independentes

$$\frac{1}{\xi} \nabla^2\xi = -p^2 \quad (2.47)$$

e

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2\psi}{dt^2} = -p^2 . \quad (2.48)$$

A equação característica da EDO temporal (2.48), é dada por

$$k^2 + p^2 = 0 , \quad (2.49)$$

assim, a solução geral de (2.48) é

$$\psi(t) = A_t e^{ipt} + B_t e^{-ipt} , \quad (2.50)$$

sendo $p \in \Re$, para garantir soluções oscilatórias. Deste resultado, vemos que os valores das energias de ponto zero são

$$\omega = p . \quad (2.51)$$

Como as condições de contorno são de Neumann homogêneas

$$\psi(t) \frac{\partial}{\partial x} [\xi(\vec{r})] \Big|_{x=0} = \psi(t) \frac{\partial}{\partial x} [\xi(\vec{r})] \Big|_{x=a} = 0 , \quad (2.52)$$

podemos nos preocupar apenas com a parte espacial.

A equação (2.47) pode ser escrita como

$$\nabla^2 \xi + p^2 \xi = 0 , \quad (2.53)$$

que é a conhecida equação de *Helmholtz*.

Novamente aplicando o método da separação de variáveis

$$\xi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z) , \quad (2.54)$$

para a equação de Helmholtz acima, temos que

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -p^2 . \quad (2.55)$$

Resultando agora em três equações diferenciais ordinárias independentes

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -p_x^2, \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -p_y^2 \quad (2.57)$$

e

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -p_z^2, \quad (2.58)$$

onde $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$.

Assim, as condições de contorno (2.52) ficam

$$\frac{\partial}{\partial x} [X(x)Y(y)Z(z)] \Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} [X(x)Y(y)Z(z)] \Big|_{x=a} = 0, \quad (2.59)$$

ou ainda

$$Y(y)Z(z) \frac{d}{dx} [X(x)] \Big|_{x=0} = Y(y)Z(z) \frac{d}{dx} [X(x)] \Big|_{x=a} = 0, \quad (2.60)$$

portando,

$$\frac{d}{dx} [X(x)] \Big|_{x=0} = \frac{d}{dx} [X(x)] \Big|_{x=a} = 0. \quad (2.61)$$

A equação característica de (2.56) é

$$k^2 + p_x^2 = 0, \quad (2.62)$$

onde $p_x \in \Re$, para satisfazer as condições de contorno. Assim, a solução geral de (2.56) é dada por

$$X(x) = Ae^{ip_x x} + Be^{-ip_x x}. \quad (2.63)$$

Impondo a primeira condição de contorno $\frac{d}{dx} [X(x)] \Big|_{x=0} = 0$, vemos que os coeficientes são iguais, isto é, $A = B$, o que nos fornece

$$X(x) = 2A \cos(p_x x) . \quad (2.64)$$

Usando agora a segunda condição de contorno $\frac{d}{dx}[X(x)]|_{x=a} = 0$, obtemos

$$p_x = \left(\frac{n\pi}{a} \right) , \quad (2.65)$$

onde $n \in \mathcal{N}$, sendo $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Observemos que a componente p_x do momento, se torna discreta, ou seja, $p_x \rightarrow p_n$, em virtude das condições de contorno impostas. Assim, a soma das energias de ponto zero, para o campo $\phi(\vec{r}, t)$ sujeito às condições de contorno de Neumann homogêneas, é dada por

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left(p^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}-s} L^2 , \quad (2.66)$$

onde L^2 é a área das superfícies ($L \rightarrow \infty$).

Como vemos, a quantidade (2.66) é divergente e para manipularmos essa expressão, vamos empregar o método de regularização da função zeta.

A *função Zeta generalizada* associada ao operador \hat{H}_0 , é definida como

$$\zeta_{H_0}(s) = \sum_i \left(\frac{\omega_i}{\mu} \right)^{-s} , \quad \forall s \in \mathcal{C} , \quad (2.67)$$

onde os ω_i são os auto-valores do operador \hat{H}_0 . Para manter a função zeta adimensional para todo s , foi introduzido o parâmetro de escala μ .

Sabemos de [13,23,31], que a função Zeta generalizada associada a um operador real, elíptico e auto-adjunto \hat{A} qualquer, converge para $\Re(s) > \frac{d}{p}$, onde d é a dimensão da variedade espaço-temporal e p é a ordem do operador \hat{A} . Assim, em particular, a função zeta generalizada (2.67) converge para $\Re(s) > \frac{3}{2}$ e tem uma continuação analítica para uma função meromorfa com pólos somente em $s = \frac{3}{2}$ e $s = \frac{1}{2}$.

Usando os auto-valores anteriormente calculados, a equação (2.67) fica

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{p^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2}{\mu^2} \right]^{\frac{1}{2}-s} L^2 . \quad (2.68)$$

Assim, a soma da ZPE (2.66), é dada por

$$E_0^{cc} = \frac{\hbar\mu}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) \right] . \quad (2.69)$$

A integral da equação (2.68) pode ser calculada usando a relação [39]

$$\int_{-\infty}^{\infty} (k^2 + A^2)^{-s} d^m k = \pi^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma \left(s - \frac{m}{2} \right)}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{m}{2}-s} , \quad \text{para } A^2 > 0 , \quad (2.70)$$

obtendo-se

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)}{\Gamma \left(s - \frac{1}{2} \right)} \sum_{n=1}^{\infty} (n)^{3-2s} . \quad (2.71)$$

Da definição da função *Zeta de Riemann*

$$\zeta_R(s) = \sum_{N=1}^{\infty} (N)^{-s} , \quad \text{para } \Re(s) > 1 , \quad (2.72)$$

temos que

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^2}{4\pi} \left(\frac{\pi}{a\mu} \right)^{3-2s} \frac{\Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)}{\Gamma \left(s - \frac{1}{2} \right)} \zeta_R(2s - 3) . \quad (2.73)$$

Usando a propriedade de reflexão da função zeta de Riemann

$$\pi^{\frac{z}{2}} \Gamma \left(\frac{z}{2} \right) \zeta_R(z) = \pi^{\frac{z-1}{2}} \Gamma \left(\frac{1-z}{2} \right) \zeta_R(1-z) , \quad (2.74)$$

temos

$$\zeta_{H_0} \left(s - \frac{1}{2} \right) = \frac{L^2 \mu^{2s-1} a^{2s-3} \Gamma(2-s)}{4\pi^{\frac{3}{2}} \Gamma(s - \frac{1}{2})} \zeta_R(4-2s) . \quad (2.75)$$

Da fórmula da reflexão, obtivemos a continuação analítica necessária para calcularmos $\zeta_{H_0} \left(-\frac{1}{2} \right)$, que é dada por

$$\zeta_{H_0} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}} a^3 \mu} \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(-\frac{1}{2})} \zeta_R(4) . \quad (2.76)$$

Lembrando que

$$\Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) = -2\sqrt{\pi} ,$$

$$\Gamma(2) = 1 ,$$

e que

$$\zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90} ,$$

obtemos

$$\zeta \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{L^2 \pi^2}{720 a^3 \mu} . \quad (2.77)$$

Substituindo o resultado de (2.77) na equação (2.69), temos

$$E_0^{cc} = -\frac{\hbar \pi^2 L^2}{1440 a^3} . \quad (2.78)$$

A continuação analítica da função zeta nos fornece a prescrição necessária para calcularmos a energia de Casimir sem a necessidade de subtração de pólos. Assim, a energia de Casimir por unidade de área das superfícies, é dada por

$$E_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{1440a^3} . \quad (2.79)$$

A força entre as superfícies por unidade de área (pressão de Casimir) pode ser calculada como

$$F_{Casimir} = -\frac{\partial E_{Casimir}}{\partial a} , \quad (2.80)$$

logo,

$$F_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{480a^4} , \quad (2.81)$$

onde o sinal negativo indica que a força entre as placas é atrativa.

A força de Casimir calculada para o campo eletromagnético difere do valor encontrado acima, calculado para um campo escalar, de um fator 2 devido às duas polarizações do setor transversal do campo A_μ . Então, para encontrarmos a força de Casimir para o campo eletromagnético, basta multiplicar o resultado encontrado acima por 2. Assim, para duas placas, planas, paralelas e perfeitamente condutoras colocadas no vácuo do campo eletromagnético a força de Casimir é dada por

$$F_{Casimir} = -\frac{\hbar\pi^2}{240a^4} . \quad (2.82)$$

Capítulo 3

Teoria de Gauge da Eletrodinâmica Escalar

3.1 Introdução

A descrição atual da natureza, no seu nível mais fundamental, vale-se da hipótese da existência de quatro interações: a *forte*, caracterizada por uma constante de acoplamento, α_s , da ordem da unidade, responsável pelas forças entre prótons e neutrons; a *eletromagnética*, controlada pela constante de estrutura fina, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$, cem vezes mais fraca que a anterior; a *fraca*, de magnitude típica mil vezes menor que a eletromagnética; e a *gravitacional*, 10^{-34} vezes mais tênue que a fraca. Todas as interações são descritas por modelos que se baseiam na troca de partículas de *spin* ou helicidade inteiros (com ou sem massa) chamadas *bósons*, entre partículas de *spin* ou helicidade semi-inteiros (também com ou sem massa) chamadas *férmions*, dentro de um contexto teórico consistente com a Mecânica Quântica e a Relatividade Especial. A Gravitação resiste, até o momento, a uma descrição compatível com a Mecânica Quântica. Devido ao curtíssimo alcance das interações fortes e fracas (em geral, intranucleares), a maioria dos fenômenos que ocorrem desde a escala atômica até a ordem do tamanho do universo pode ser atualmente descrita pela Eletrodinâmica (distâncias

interatômicas) e pela Gravitação (distâncias desde metros até anos-luz ou mais). A incompatibilidade entre Gravitação e Mecânica Quântica não tem efeitos observacionais registrados até agora, dada a extrema pequenez das possíveis correções gravitacionais e fenômenos nos domínios atômico e sub-atômico. A Eletrodinâmica, contudo, não poderia descrever adequadamente estes domínios sem ser consistente com os princípios quânticos. Houve, pois, uma necessidade histórica de construir uma teoria para os fenômenos eletromagnéticos que obedecesse a esses requerimentos.

A teoria que emergiu deste contexto foi a *Eletrodinâmica Quântica*. As suas previsões têm o maior grau de concordância com os dados experimentais alcançados pela Física até hoje. Poderíamos citar, como exemplo, o cálculo do momento magnético anômalo do elétron, onde a previsão teórica ($1,00115965221 \pm 4$ no último dígito) concordando com o valor medido em nove casas decimais ($1,00115965246 \pm 19$ nos últimos dois dígitos). Feynman comparou a precisão desta medida com a que seria pretendida caso se desejasse medir a distância entre Los Angeles e Nova Iorque com o erro menor que a espessura de um fio de cabelo. A base sobre a qual se funda essa teoria é o casamento entre a Relatividade Especial e a Mecânica Quântica, obtido através da *Teoria Quântica de Campos*. Este é um formalismo que acomoda situações em que o número de partículas não permanece constante, sendo, portanto, compatível com a descrição de processos como a emissão ou absorção de fótons por átomos, ou a criação ou aniquilação de pares elétron-pósitrons.

As teorias de campos, em geral, fazem uso de objetos matemáticos chamados distribuições, ou funções generalizadas. Os campos quânticos são considerados como distribuições que tomam valores em operadores. Em geral, precisamos considerar situações em que aparecem produtos de campos no mesmo ponto, o que implica em considerar produtos de distribuições, os quais não estão definidos em geral. Esse fato poderia invalidar toda a estratégia básica das teorias quânticas de campos, se não houvesse uma

classe dessas teorias onde este problema pode ser contornado. Tais teorias são chamadas de *renormalizáveis*. A Eletrodinâmica Quântica foi a primeira teoria de campos realista que se mostrou renormalizável. Graças a este fato, ela se tornou o protótipo para a construção das teorias para as interações fracas e fortes. Isso se deu a partir da generalização do conceito de *simetria de calibre, ou de gauge*. Esse conceito está na origem da renormalizabilidade da Eletrodinâmica e foi o guia para a construção e interpretação das outras teorias fundamentais.

Neste capítulo, sob a abordagem da Eletrodinâmica Escalar, procuraremos mostrar de forma superficial a invariância das ações, que descrevem campos escalares complexos e campos eletromagnéticos, sob transformações de gauge globais e locais.

3.2 Campos eletromagnéticos e campos escalares complexos

A eletrodinâmica clássica é a terminologia dada ao estudo dos campos elétricos, magnéticos e interações causadas por distribuições de cargas e correntes elétricas. A análise de interação e comportamento destes campos é o objeto de estudo da eletrodinâmica escalar na qual iremos abordar nessa seção.

Para iniciar esse estudo, consideremos um campo escalar complexo ϕ com duas componentes reais ϕ_1 e ϕ_2 , tais que:

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \end{cases}, \quad (3.1)$$

e uma ação real dada por

$$S = \int \mathcal{L} d^4x , \quad (3.2)$$

com

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi . \quad (3.3)$$

Se considerarmos ϕ e ϕ^* como campos independentes, a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] = 0 , \quad (3.4)$$

gera duas equações de Klein-Gordon dadas por

$$\begin{cases} (\square + m^2)\phi = 0 \\ (\square + m^2)\phi^* = 0 \end{cases} . \quad (3.5)$$

A lagrangiana (3.3) é claramente invariante sob as transformações

$$\begin{cases} \phi \rightarrow e^{-i\Lambda} \phi \\ \phi^* \rightarrow e^{i\Lambda} \phi^* \end{cases} , \quad (3.6)$$

onde Λ é uma constante real. Esta transformação é conhecida como *transformação de gauge de primeira espécie* ou *transformação de gauge global*. Sua forma infinitesimal é

$$\begin{cases} \delta\phi = -i\Lambda\phi \\ \delta\phi^* = i\Lambda\phi^* \end{cases} , \quad (3.7)$$

e com isso,

$$\begin{cases} \delta(\partial_\mu\phi) = -i\Lambda\partial_\mu\phi \\ \delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda\partial_\mu\phi^* \end{cases}, \quad (3.8)$$

desde que a transformação (3.6) não envolva o espaço-tempo, ou seja, que ela seja puramente interna.

Do teorema de Noether, temos uma corrente conservada

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}(i\phi^*), \quad (3.9)$$

onde os índices internos de ϕ foram efetivamente somados sobre dadas contribuições distintas de ϕ e ϕ^* , de modo que, ao substituirmos (3.3) em (3.9) chegamos em

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*). \quad (3.10)$$

Assim, segue-se imediatamente de (3.5) que a corrente (3.10) tem um cancelamento quadridivergente, como esperado

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.11)$$

onde a correspondente quantidade conservada é dada por

$$\begin{aligned} Q &= \int J^0 dv \\ &= i \int \left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial\phi^*}{\partial t} \right) dv. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esta é a real quantidade que gostaríamos de identificar com a carga elétrica. Assim, observemos as características dessa quantidade:

a) é uma quantidade conservada, pois $\frac{dQ}{dt} = 0$;

- b) ela não faz mensão à “ e ”, a carga no próton;
- c) é uma quantidade *clássica* e não quântica, pois não contém a constante de Planck “ h ”;
- d) ela não é *integral* ou *quantizada*, ou seja, ela não corresponde a uma quantidade de carga elétrica real, que parece ser múltipla de uma quantidade básica;
- e) quando ϕ é real, $\phi = \phi^*$ implicando em $Q = 0$ e conseqüentemente não havendo quantidade conservada.

Para obtermos uma melhor visualização do problema em questão, podemos expressar a transformação de gauge (3.6) de uma forma geométrica. Para isto, primeiro substituiremos os campos escalares complexos (3.1) na lagrangiana (3.3), de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) , \quad (3.13)$$

e então, escreveremos

$$\vec{\phi} = \frac{\hat{i}\phi_1 + \hat{j}\phi_2}{\sqrt{2}} , \quad (3.14)$$

como um vetor no espaço bidimensional com base ortonormal de vetores \hat{i} e \hat{j} . Com isso, a lagrangiana (3.13) é agora descrita como

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\vec{\phi})(\partial^\mu\vec{\phi}) - m^2\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} . \quad (3.15)$$

Assim, a transformação (3.6) pode ser escrita

$$\begin{cases} \phi'_1 + i\phi'_2 = e^{-i\Lambda}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi'_1 - i\phi'_2 = e^{i\Lambda}(\phi_1 - i\phi_2) \end{cases} , \quad (3.16)$$

que é equivalente à

$$\begin{cases} \phi'_1 = \phi_1 \cos \Lambda + \phi_2 \sin \Lambda \\ \phi'_2 = -\phi_1 \sin \Lambda + \phi_2 \cos \Lambda \end{cases}, \quad (3.17)$$

Deste modo, (3.17) é claramente uma rotação no plano-(1, 2) do vetor $\vec{\phi}$ por um ângulo Λ , como mostra a (Figura 3.1).

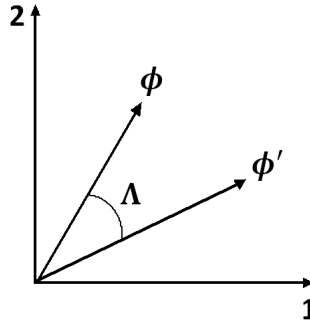


Figura 3.1: Uma rotação no espaço interno de campo $\hat{\phi}$.

Rotações em duas dimensões formam o grupo $SO(2)$. Por outro lado, desde que a transformação foi equivalentemente representada como $e^{i\Lambda}$, a qual é uma matriz unitária em uma dimensão

$$e^{i\Lambda}(e^{i\Lambda})^* = \mathbf{1}, \quad (3.18)$$

o grupo também envolvido é o $U(1)$. Deste modo, nós nos focaremos nas transformações de gauge que geram o grupo $SO(2) \sim U(1)$. Em nosso exemplo bidimensional, é fácil ver que estes grupos são isomorfor, bastando observar que cada elemento de $SO(2)$ é unicamente determinado por um ângulo θ , o ângulo de rotação no plano. O espaço deste grupo é então o espaço dos valores de θ . Assim, temos que identificar o ângulo θ com $\theta + 2\pi$, $\theta + 4\pi$, etc., para que estes correspondam à mesma rotação. Podemos concluir então que o espaço do grupo $SO(2)$ é um *círculo*, como mostra a (Figura 3.2). No entanto, o grupo $U(1)$ é o grupo de todos os

números da forma $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$; como $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, temos que o espaço do grupo $U(1)$ é também um *círculo*.

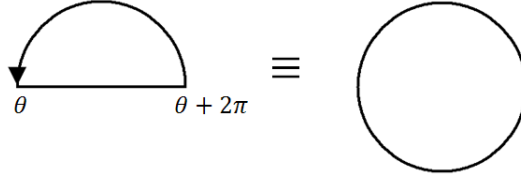


Figura 3.2: O espaço do grupo $SO(2)$ é um círculo.

De volta ao tema principal, nós identificamos uma quantidade conservada Q como sendo o resultado de uma invariância da ação sob as transformações de gauge (3.6) ou (3.17). Observamos ainda que se Λ for uma constante, esta transformação de gauge deve ser a mesma em todos os pontos do espaço-tempo, ou seja, ela é uma transformação de gauge *global*. Assim, quando executamos uma rotação em um certo ponto do espaço interno de $\vec{\phi}$ por um ângulo Λ , nós também devemos executar a mesma rotação em todos outros os pontos ao mesmo tempo. Acontece que, se tomarmos essa interpretação física de forma rigorosa, veremos que isto será impossível de se realizar, visto que essa hipótese contradiz um postulado da relatividade, de acordo com o qual deve haver um intervalo de tempo mínimo igual ao tempo de deslocamento da luz. Para contornar esse problema, basta simplesmente abandonar a exigência de Λ ser uma constante e a escrevermos como uma função arbitrária do espaço-tempo, $\Lambda(x^\mu)$. Nesse caso a transformação passa a ser chamada uma *transformação de gauge local*, visto que ela é claramente distinta ponto a ponto. Ela é também conhecida na literatura como *transformação de gauge de segunda espécie*.

Veremos agora que para $\Lambda \ll 1$,

$$\phi \rightarrow \phi - i\Lambda\phi , \quad (3.19)$$

então

$$\begin{cases} \delta\phi = -i\Lambda\phi \\ \partial_\mu\phi \rightarrow \partial_\mu\phi - i(\partial_\mu\Lambda)\phi - i\Lambda(\partial_\mu\phi) \end{cases}, \quad (3.20)$$

portanto

$$\delta(\partial_\mu\phi) = -i\lambda(\partial_\mu\phi) - i(\partial_\mu\Lambda)\phi, \quad (3.21)$$

e similarmente

$$\begin{cases} \delta\phi^* = i\Lambda\phi^* \\ \delta(\partial_\mu\phi^*) = i\Lambda(\partial_\mu\phi^*) + i(\partial_\mu\Lambda)\phi^* \end{cases}. \quad (3.22)$$

Comparando essas equações com (3.7) e (3.8), nós notamos a ocorrência de um termos extra $\partial_\mu\Lambda$ na transformação das derivadas dos campo. Por causa desse termo extra, comparando por exemplo com (3.20) e (3.21), nós dizemos que $\partial_\mu\phi$ não se transforma *covariantemente*, isto é, não da mesma maneira como o próprio ϕ . Além disso, nós agora vemos que este termo extra faz a própria ação não ser *globalmente invariante*. De fato, a variação da lagrangiana é dada por

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \delta[(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi^*)] - m^2\delta(\phi^*\phi) \\ &= [\delta(\partial_\mu\phi)]\partial^\mu\phi^* + (\partial_\mu\phi)[\delta(\partial^\mu\phi^*)] - m^2 \cdot 0 \\ &= [-i\Lambda(\partial_\mu\phi) - i(\partial_\mu\Lambda)\phi]\partial^\mu\phi^* + \partial_\mu\phi[i\Lambda(\partial^\mu\phi^*) + i(\partial^\mu\Lambda)\phi^*] \\ &= (\partial_\mu\Lambda)[-i\phi\partial^\mu\phi^* + i\phi^*\partial^\mu\phi] \\ &= (\partial_\mu\Lambda)J^\mu, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde J^μ é dada pela equação (3.10). Para restaurar a invariância sob a

transformação de gauge local, introduziremos um novo quadrivetor A_μ , o qual é acoplado diretamente à corrente J^μ gerando um termo extra em \mathcal{L} , dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= -eJ^\mu A_\mu \\ &= -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) A_\mu .\end{aligned}\tag{3.24}$$

A constante de acoplamento “ e ” é um número tal que o produto eA_μ tenha a mesma dimensão que $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Nós também exigiremos que sobre a transformação de gauge local,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda ,\tag{3.25}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}_1 &= -e(\delta J^\mu) A_\mu - eJ^\mu (\delta A_\mu) \\ &= -e(\delta J^\mu) A_\mu - J^\mu \partial_\mu \Lambda .\end{aligned}\tag{3.26}$$

Observemos que o último termo do lado direito de (3.26) cancela $\delta \mathcal{L}$ na equação (3.23), bastando apenas cancelar o primeiro termo do lado direito de (3.26). Dessa maneira

$$\begin{aligned}\delta J^\mu &= i\delta(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \\ &= 2\phi^* \phi \partial^\mu \Lambda .\end{aligned}\tag{3.27}$$

de modo que

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 = -2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi, \quad (3.28)$$

ou seja, a variação das lagrangianas ainda não é nula. Então, nós devemos acrescentar outro termo à \mathcal{L} , dado por

$$\mathcal{L}_2 = e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi, \quad (3.29)$$

onde, em virtude de (3.25), temos que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_2 &= 2e^2 A_\mu \delta A^\mu \phi^* \phi \\ &= 2eA_\mu(\partial^\mu\Lambda)\phi^*\phi, \end{aligned} \quad (3.30)$$

e conseqüentemente

$$\delta\mathcal{L} + \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 = 0. \quad (3.31)$$

A lagrangiana total $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ é agora invariante, pois foi introduzido um campo A_μ , o qual é acoplado à corrente J^μ do campo complexo ϕ . Porém, o campo A_μ presumidamente deve contribuir por si só à lagrangiana. Como $\mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ já é invariante, temos que acrescentar um terceiro termo \mathcal{L}_3 o qual é também invariante de gauge. Para construí-lo, definiremos o quadridimensional rotacional de A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.32)$$

É claro que $F_{\mu\nu}$ é por si só invariante sob a transformação de gauge (3.25). Assim, a lagrangiana escalar \mathcal{L}_3 é definida como

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

Logo, somando todas as lagrangianas chegamos em uma lagrangiana total dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{total} &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 \\
&= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) A_\mu + \\
&\quad + e^2 A_\mu A^\mu \phi^* \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \\
\mathcal{L}_{total} &= (\partial_\mu \phi + ie A_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^* - ie A^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (3.34)
\end{aligned}$$

Sabemos que $F_{\mu\nu}$ definido em (3.32) é o *tensor antisimétrico de campo eletromagnético*, cujas seis componentes são as três componentes do campo elétrico e as três componentes do campo magnético que podem ser representadas em uma matriz da forma

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Então, o que foi mostrado é que o campo eletromagnético surge *naturalmente* quando exigida a invariância da ação (3.2) sob a transformação de gauge de segunda espécie, isto é, sob as rotações locais (dependência em x) no espaço interno de campos complexos ϕ . O potencial de gauge A_μ acoplado à corrente J^μ com força de acoplamento “ e ”, é exatamente a carga do campo ϕ . Para detalharmos nossas conclusões, vamos dividir as observações em quatro pontos:

- 1) Comparando a lagrangiana (3.34) com (3.3), nós notamos que ∂_μ é substituída por $(\partial_\mu + ie A_\mu)$, que é conhecida como *derivada covariante*

$$D_\mu = (\partial_\mu + ieA_\mu) , \quad (3.36)$$

onde, ao contrário de $\partial_\mu\phi$, ela se transforma covariantemente sob a transformação de gauge, o que de fato segue-se imediatamente das equações (3.20), (3.21) e (3.25)

$$\begin{aligned} \delta(D_\mu\phi) &= \delta(\partial_\mu\phi) + ie(\delta A_\mu)\phi + ieA_\mu\delta\phi \\ &= -i\Lambda(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi) \\ &= -i\Lambda(D_\mu\phi) , \end{aligned} \quad (3.37)$$

a qual é a regra para transformações covariantes. A regra que substitui ∂_μ por $\partial_\mu + ieA_\mu$ em um campo eletromagnético é equivalente a um resultado já bem familiar na física clássica.

Assumindo $c = 1$, temos que

$$\begin{cases} \partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla}) \\ A_\mu = (\phi, -\vec{A}) \end{cases} , \quad (3.38)$$

então, a parte espacial da regra de substituição é

$$\vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} - ie\vec{A} . \quad (3.39)$$

E tomando $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, com $\hbar = 1$, a regra é dada por

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} . \quad (3.40)$$

Na presença do eletromagnetismo, o momento generalizado \vec{P} é definido como $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$, onde L é a lagrangiana. Assim, para uma partícula com

carga “ e ” ele é dado por

$$\vec{P} = \vec{p} + e\vec{A} = \gamma m \vec{v} + e\vec{A}, \quad (3.41)$$

e pode ser mostrado que a hamiltoniana de uma partícula de carga “ e ” interagindo com um campo eletromagnético é

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{P} - e\vec{A})^2 + e\phi. \quad (3.42)$$

Agora, está claro que ϕ descreve um campo de carga “ e ” e que ϕ^* , cuja derivada covariante é

$$D_\mu \phi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^*, \quad (3.43)$$

descreve um campo com carga “ $-e$ ”. Portanto, os campos ϕ_1 e ϕ_2 em (3.1) não são auto-estados da carga, e além disso, $D_\mu \phi^*$ é uma derivada covariante de ϕ^* , não porque nós temos a covariância da derivada de seu conjugado $D_\mu \phi$, mas sim porque ele se transforma da mesma forma que ϕ^* faz frente às transformações de gauge. O leitor pode facilmente verificar isso, seguindo os passos análogos aos conduzidos em (3.37).

- 2) Por causa das identidades das equações (3.32) e (3.35), nós estamos seguros de que o compensador *potencial vetor* introduzido em (3.24) é de fato o *potencial vetor eletromagnético* e, portanto, que as equações de Maxwell homogêneas são asseguradas pelo tensor de campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$. Além do mais, a transformação de gauge (3.25) onde $\Lambda = e\chi$, é idêntica à transformação

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi, \quad (3.44)$$

onde χ é uma função escalar arbitrária. Assim, chegamos em uma

nova interpretação para o campo elétrico: ele é o campo de gauge que deve ser introduzido para garantir a invariância sob a transformação de gauge local $U(1)$.

Vale a pena notar também que as equações de Maxwell homogêneas são obtidas de (3.34) por variação do A_μ . Com isso, a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right] = 0, \quad (3.45)$$

nos fornece

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{\mu\nu} &= -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + 2e^2 A^\mu |\phi|^2 \\ &= -ie(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*) \\ &= -e \mathcal{J}^\mu, \end{aligned} \quad (3.46)$$

onde

$$\mathcal{J}^\mu = i(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*), \quad (3.47)$$

é a versão covariante de J^μ em (3.10), de modo que

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{J}^\mu &= \partial_\mu [i(\phi^* D^\mu \phi - \phi D^\mu \phi^*)] \\ &= \partial_\mu \{ [\phi^* (\partial^\mu \phi + ieA^\mu \phi) - \phi (\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*)] \} \\ &= \partial_\mu [i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - e(\phi^* A^\mu \phi + \phi A^\mu \phi^*)], \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde devido a equação (3.11) e a antisimetria de $F_{\mu\nu}$ em (3.32), temos

$$\partial_\mu \mathcal{J}^\mu = 0 . \quad (3.49)$$

Assim, podemos concluir que é a corrente covariante \mathcal{J}^μ que é conservada quando o campo eletromagnético está presente e não a corrente J^μ .

- 3) De fato, é do conhecimento de todos que o campo eletromagnético é desprovido de massa, mas, vale a pena reenfatizarmos esse ponto. Com base no que já estudamos até então, um termo de massa em uma lagrangiana seria da forma

$$\mathcal{L}_M = M^2 A_\mu A^\mu , \quad (3.50)$$

e é fácil observar que este termo não é invariante sob as transformações de gauge (3.25). Conseqüentemente, entendemos que, a invariância de gauge requer que o campo de gauge seja não massivo, e além disso, a usual abordagem do campo eletromagnético, é relativística; impondo assim que o campo além de ser não massivo, se desloque na velocidade da luz.

- 4) A carga “ e ” se apresenta como uma constante de acoplamento nas derivadas covariantes (3.36) e (3.43). Realmente, da lagrangiana (3.34) nós vemos que o campo ϕ se acopla ao campo eletromagnético com força “ e ”. Isso traz uma luz sobre o papel dual da carga elétrica; ela é em ambos os casos uma quantidade conservada, tanto no caso original visto na equação (3.12), a qual agora temos que substituir J^0 por \mathcal{J}^0 , como também medindo a força de interação entre uma partícula e os campos elétrico e magnético.

Este aspecto dinâmico da carga elétrica, ou carga de qualquer outra natureza, é uma conseqüência direta do *princípio de gauge* e foi justamente isso que deu tal importância à contemporânea *física de partículas*.

Capítulo 4

O potencial efetivo

4.1 Introdução

Vimos no capítulo 2, que um dos métodos de se calcular a energia do vácuo é usando a ZPE. Um outro método também muito eficaz de se calcular essa energia, é usando o potencial efetivo. Como é mostrado nas referências [35, 36] estes métodos são equivalentes e a energia de Casimir renormalizada obtida por meio de ambos é idêntica.

O potencial efetivo é uma poderosa ferramenta na renormalização da massa, na renormalização da constante de acoplamento, na quebra espontânea de simetria, na determinação da energia de Casimir, etc [9, 44]. Ele é uma generalização quântica do potencial clássico, sendo que o vácuo quântico pode ser obtido do mínimo desse potencial. O potencial efetivo pode ser expresso como uma expansão em loop¹ (que coincide com uma expansão em potências de \hbar), de modo que ele é expresso pela soma do termo clássico mais as correções que representam o efeito da interação do campo com o vácuo quântico. Devido a sua interpretação como energia, o potencial efetivo deve necessariamente ser uma função real e convexa [39, 40].

A partir do chamado *funcional gerador das funções de Green*² $Z[J]$, sob

¹Normalmente traduzido como *expansão em laços*.

²Também conhecido como *amplitude de persistência do vácuo*.

a influência de fontes de campos externos $J(x)$, pode-se definir uma teoria quântica de campos. Esta abordagem usa o conceito de integrais de trajetória, que teve como seu precursor *Richard Philips Feynman* [17].

A solução da equação de Dyson-Schwinger é o funcional gerador das funções de Green, que pode ser escrito como uma expansão funcional das funções de Green de n -pontos. Através de uma transformação funcional de Legendre encontramos o funcional gerador das funções irreduzíveis de uma partícula (1-PI) ³, $\Gamma[\phi_c]$, que é, então, expandido em potências de \hbar . Tal funcional é chamado de *ação efetiva*, pois ele contém, além da ação clássica, todas as correções quânticas. Mas se expandirmos o funcional gerador (1-PI) em potências das derivadas do campo clássico $\phi_c(x)$ e calcularmos em um ϕ_c uniforme (independente de x^μ), obtemos o potencial efetivo que nos fornece o vácuo da teoria. Tal como a ação efetiva, o potencial efetivo contém, além do potencial clássico, todas as correções quânticas.

Vejam agora, como determinar o potencial efetivo.

4.2 O potencial efetivo obtido por métodos funcionais

Usando o formalismo de integrais de trajetórias⁴, pode-se obter o potencial efetivo por meio de métodos funcionais.

O funcional gerador das funções de Green conexas $W[J]$ é dado por

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} W[J] \right\} = \frac{\langle 0^+, 0^- \rangle_J}{\langle 0^+, 0^- \rangle}, \quad (4.1)$$

onde $\langle 0^+, 0^- \rangle_J$ é a amplitude de transição vácuo-vácuo na presença de uma fonte externa $J(x)$. $Z[J]$ é o funcional gerador das funções de Green conexas e desconexas.

³Diagramas de Feynman que não podem ser divididos em dois cortando-se apenas linhas internas.

⁴Dentre as muitas referências sobre este assunto, citamos apenas algumas: [2–4, 22, 24–26, 30, 33, 40–43].

No formalismo de integrais de trajetória, a expressão (4.1) é representada por

$$\exp \left\{ \frac{1}{\hbar} W[J] \right\} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \left[S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x) \right] \right\}, \quad (4.2)$$

onde

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) + V_{cl}(\phi(x)) \right\}, \quad (4.3)$$

é a ação clássica, \mathcal{N} é um fator de normalização e $\mathcal{D}\phi$ significa uma integração sobre o espaço de funções dos campos $\phi(x)$ de dimensão infinita, isto é, a medida de volume funcional.

O campo clássico $\phi_c(x)$ é definido como o valor esperado do vácuo na presença de uma fonte externa $J(x)$

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0^+ | \hat{\phi} | 0^- \rangle_J}{\langle 0^+, 0^- \rangle}. \quad (4.4)$$

Tomando o limite quanto $J \rightarrow 0$ na equação (4.4), nós obtemos o vácuo quântico, sendo que este pode ser diferente do vácuo clássico.

O funcional gerador das funções de Green irredutíveis de uma partícula (1-PI) é um funcional de $\phi_c(x)$, e não de $J(x)$. Ele pode ser obtido a partir de uma transformada funcional de Legendre como

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x), \quad (4.5)$$

de modo que

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \quad (4.6)$$

Quando $J(x) \rightarrow 0$, têm-se que $\phi_c(x)$ torna-se uma constante, devido à invariância translacional do vácuo, dada por $\langle \phi \rangle$, de modo que $\langle \phi \rangle$ é a solução da equação

$$\left. \frac{d\Gamma[\phi_c]}{d\phi_c} \right|_{\phi_c=\langle \phi \rangle} = 0 . \quad (4.7)$$

Observamos assim que o vácuo quântico $\langle \phi \rangle$ é ponto estacionário de Γ , o que sugere o nome *ação efetiva* para este funcional. Ainda podemos notar que, no limite quando $\hbar \rightarrow 0$, $\Gamma[\phi_c]$ torna-se a ação clássica.

A ação efetiva Γ gera as funções de Green (1-PI), também conhecidas como função vértice de n -pontos $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. Ela pode ser escrita em termos da seguinte expansão funcional

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n) . \quad (4.8)$$

Observemos que a expansão (4.8) é não local. Para darmos uma configuração “quase-local” a $\Gamma[\phi_c]$, basta expandir cada campo $\phi_c(x_i)$ para $i \neq 1$, em torno do ponto x_1 comum a cada integrando, obtendo assim

$$\begin{aligned} \phi_c(x_i) &= \phi_c(x_1) + (x_i - x_1)^\mu \partial_\mu \phi_c(x_1) + \\ &+ \frac{1}{2} (x_i - x_1)^\mu (x_i - x_1)^\nu \partial_\mu \partial_\nu \phi_c(x_1) + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

Integrando sobre $x_{i \neq 1}$ e colocando os termos de derivadas de ϕ_c em potências crescentes, podemos escrever a ação efetiva na forma

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x \left[-U + \frac{1}{2} A \partial_\mu \phi_c(x) \partial^\mu \phi_c(x) + \dots \right] , \quad (4.10)$$

onde os coeficientes U e A são funções de ϕ_c .

No caso em que o campo clássico é uniforme, isto é, $\phi_c(x) = \phi_c$ constante, todos os termos dentro do colchete na expansão (4.10) se anulam, exceto o primeiro, de modo que

$$\Gamma[\phi_c] = -\Omega U(\phi_c) = -\Omega V_{ef}(\phi_c) , \quad (4.11)$$

onde Ω é o volume do espaço-tempo euclidiano⁵. Desta forma a função⁶ $U(\phi_c)$ é a generalização quântica do potencial clássico e é denominada *potencial efetivo* V_{ef} .

Através do método do ponto de sela, podemos obter a expansão em “loop” do funcional $W[J]$ da equação (4.2) até primeira ordem em \hbar .

Definindo

$$S[\phi, J] = S[\phi] - \int d^4x J(x)\phi(x) , \quad (4.12)$$

o ponto de sela ϕ_0 é aquele em que $S[\phi, J]$ é estacionário, isto é,

$$\left. \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_0} = 0 . \quad (4.13)$$

Isto significa que $\phi_0(x)$ é uma função de x e também um funcional de $J(x)$.

Expandindo $S[\phi, J]$ em torno de ϕ_0 , obtemos

$$\begin{aligned} S[\phi, J] &= S[\phi_0, J] + \int d^4x [\phi(x) - \phi_0(x)] \left. \frac{\delta S[\phi, J]}{\delta \phi(x)} \right|_{\phi_0} + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) - \phi_0(x)] \times \\ &\times \left. \frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right|_{\phi_0} [\phi(y) - \phi_0(y)] + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

⁵Observe que a uniformidade de $\phi_c(x)$ implica na uniformidade de $J(x)$ e que para cada valor de J constante, existe um correspondente valor constante de ϕ_c .

⁶Note que $U(\phi_c)$ em (4.11) é uma função ordinária da variável ϕ_c .

Substituindo a condição (4.13) na equação (4.14), chegaremos em

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y [\phi(x) - \phi_0(x)] \times \\ \times \frac{\delta^2 S[\phi, J]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \Big|_{\phi_0} [\phi(y) - \phi_0(y)] + \dots \quad (4.15)$$

A derivação funcional de segunda ordem da ação S , determina o operador

$$m(x, y) = \frac{\delta^2 S[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \Big|_{\phi_0} = [-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_0)] \delta(x - y) . \quad (4.16)$$

Fazendo a mudança de variável $\eta(x) = \phi(x) - \phi_0(x)$, substituindo na equação (4.15) e efetuando a integração em y , teremos

$$S[\phi, J] = S[\phi_0, J] + \frac{1}{2} \int d^4x \eta(x) [-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_0)] \eta(x) + \dots \quad (4.17)$$

Substituindo a equação (4.15) em (4.2) e desprezando os termos⁷ de $\mathcal{O}(\hbar^2)$, obtemos

$$\exp \left\{ \frac{1}{\hbar} W[J] \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[\phi_0, J] \right\} \int (\mathcal{D}\eta) \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int d^4x \eta [-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_0)] \eta \right\} \quad (4.18)$$

Para resolver a integral gaussiana que aparece acima, vamos usar a fórmula tabelada

⁷Para mostrar que estes termos desprezados são da ordem de \hbar^2 , basta reescalarmos o campo ϕ como $\phi = \hbar^{\frac{1}{2}} \psi$.

$$\int (\mathcal{D}\eta) \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \int d^4x \eta(x) A \eta(x) \right\} = (\det A)^{-\frac{1}{2}} . \quad (4.19)$$

Assim, a equação (4.18) toma a forma

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{\hbar} W[J] \right\} &= \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} S[\phi_0, J] \right\} \times \\ &\times \left[\det[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_0)] \right]^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Agora, aplicando a função logarítmica em ambos os lados da igualdade (4.20), vemos que o funcional gerador das funções de Green conexas, terá a seguinte representação

$$W[J] = -S[\phi_0, J] - \frac{\hbar}{2} \ln[\det(A)] + \mathcal{O}(\hbar^2) , \quad (4.21)$$

sendo $A = -\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_0)$.

Para encontrarmos a expansão em “loop” da ação efetiva $\Gamma[\phi_c]$, basta substituir o resultado da equação (4.21) na transformada funcional de Legendre (4.5), de modo que

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c] &= -S[\phi_0, J] - \frac{\hbar}{2} \ln \left\{ \det[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_0)] \right\} + \\ &- \int d^4x J(x) \phi_c(x) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Substituindo também o resultado da equação (4.21) na equação do campo clássico (4.4), obtemos

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \mathcal{O}(\hbar) . \quad (4.23)$$

Esse resultado mostra que $\phi_c(x)$ é igual a $\phi_0(x)$ em $\mathcal{O}(\hbar^0)$, isto é, em ordem

clássica. Portanto, podemos escrever $\phi_c(x)$ da seguinte forma

$$\phi_c(x) = \phi_0(x) + \hbar\phi_1(x) + \mathcal{O}(\hbar^2) . \quad (4.24)$$

Desse modo, por ocasião da expansão (4.24), podemos relacionar $S[\phi_c]$ com $S[\phi_0]$ através de

$$S[\phi_c] = S[\phi_0 + \hbar\phi_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)] ,$$

ou seja,

$$S[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar \int d^4x \phi_1(x) \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi} \Big|_{\phi_0} + \mathcal{O}(\hbar^2) . \quad (4.25)$$

Usando o funcional (4.12) e a condição (4.13), obtemos $J(x) = \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi_0}$, assim

$$S[\phi_c] = S[\phi_0] + \hbar \int d^4x \phi_1(x) J(x) + \mathcal{O}(\hbar^2) . \quad (4.26)$$

Substituindo o resultado da equação (4.26) na ação efetiva (4.22), obtemos

$$\Gamma[\phi_c] = -s[\phi_c] - \frac{\hbar}{2} \ln \left\{ \det[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_c)] \right\} . \quad (4.27)$$

Tomando o limite quando $J \rightarrow 0$, concluímos que $\phi_c(x)$ torna-se uma constante ϕ_c e usando a equação (4.10), temos

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \left\{ \det[-\delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + V''(\phi_c)] \right\} . \quad (4.28)$$

Assim, usando a relação

$$\ln\{\det[m(x, y)]\} = tr\{\ln[m(x, y)]\} , \quad (4.29)$$

no resultado (4.28), temos

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln \left[k^2 + V''(\phi_c) \right] , \quad (4.30)$$

onde k é o quadri-momento.

Observemos que a integral da equação acima é divergente, assim, faz-se necessário um procedimento de regularização para isolar as divergências. Usando o procedimento de regularização da função Zeta generalizada, somos conduzidos a um resultado finito, sem a aparente necessidade de subtração de pólos ou adição de contra-termos. A própria continuação analítica realiza para reestabelecimento da teoria original, é a prescrição de renormalização que elimina os pólos [34].

Como vimos no capítulo 2, a função Zeta generalizada associada ao operador real, elíptico e auto-adjunto $M = \frac{m}{\mu^2}$, é definida a partir dos autovalores $\{\lambda_i\}$ de m através de

$$\zeta_M(s) = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{\mu^2} \right) \quad \forall s \in \mathcal{C} . \quad (4.31)$$

Em quatro dimensões, a função Zeta generalizada associada ao operador M de segunda ordem converge para $\Re(x) > 2$ e tem sua continuação analítica para uma função meromorfa de pólos somente em $s = 2$ e $s = 1$, logo, ela é regular em $s = 0$ bem como suas derivadas [13, 23, 31].

Usando a relação

$$\ln\{\det M\} = -\frac{d}{ds}[\zeta_M(0)] = -\zeta_m(0) \ln \mu^2 - \frac{d}{ds}[\zeta_m(0)] , \quad (4.32)$$

podemos expressar o potencial efetivo em $\mathcal{O}(\hbar)$, como

$$V_{ef}(\phi_c) = V_{cl}(\phi_c) - \frac{\hbar}{2\Omega} \left\{ \frac{d}{ds}[\zeta_m(0)] + \zeta_m(0) \ln \mu^2 \right\} . \quad (4.33)$$

Observemos que a expressão (4.33) é finita, mesmo sem ocorrer a subtração de pólos ou a adição de contra-termos, pois, como já havíamos comentado,

estamos fazendo uso do método de regularização da função Zeta generalizada. No entanto, é necessária uma renormalização finita, para que ocorra o ajuste dos parâmetros livres da teoria aos valores observados. Isso é feito através das condições de renormalização:

$$\left. \frac{d^2[V_{ef}]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = m_R^2 \quad (4.34)$$

e

$$\left. \frac{d^4[V_{ef}]}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = \lambda_R . \quad (4.35)$$

4.3 O potencial efetivo interpretado como densidade de energia

O potencial efetivo é definido como o valor esperado do operador hamiltoniano calculado no estado, que entre o conjunto de estados $\{\phi\}$, minimiza o valor esperado do operador hamiltoniano \hat{H} . Assim,

$$V_{EF} = \text{Min}_{\{\phi\}} \langle\phi|\hat{H}|\phi\rangle , \quad (4.36)$$

tal que ϕ_c , seja o valor esperado do operador de campo $\hat{\phi}$ calculado neste estado que minimiza a energia,

$$\phi_c = \langle\phi|\hat{\phi}|\phi\rangle . \quad (4.37)$$

É claro que o potencial efetivo assim definido tem a interpretação de densidade de energia e, portanto, é uma função real [6, 11].

Veremos agora que $V_{ef}(\phi_c)$ obtido da equação (4.11), é o potencial efetivo definido rigorosamente acima [42].

Seja \hat{H} o operador hamiltoniano de um sistema quântico. Podemos obter

o estado $|\phi_a\rangle$ que minimiza $\langle\phi_a|\hat{H}|\phi_a\rangle$ e sujeito ao vínculo $\langle\phi_a|\hat{A}|\phi_a\rangle = \bar{a}$, para algum operador \hat{A} hermitiano, introduzindo os multiplicadores de Lagrange E e J , de modo que

$$\delta\langle\phi_a|\hat{H} - J\hat{A} - E|\phi_a\rangle = 0 . \quad (4.38)$$

Isso implica em

$$(\hat{H} - J\hat{A} - E)|\phi_a\rangle = 0 . \quad (4.39)$$

Assim,

$$\hat{H}_J|\phi_a(J)\rangle = (\hat{H} - J\hat{A})|\phi_a\rangle = E(J)|\phi_a(J)\rangle , \quad (4.40)$$

sendo \hat{H}_J é a hamiltoniana perturbada pela fonte J , onde $|\phi_a(J)\rangle$ é autoestado de \hat{H}_J com autovalor $E(J)$. Notemos que o auto-estado $|\phi_a(J)\rangle$ significa que o estado $|\phi_a\rangle$ é função de J . Como \hat{H} não é função de J , temos que

$$\bar{a} = -\frac{\partial E(J)}{\partial J} , \quad (4.41)$$

e dessa forma,

$$\langle\phi_a(J)|\hat{H}|\phi_a(J)\rangle = E(J) - J\frac{\partial E(J)}{\partial J} . \quad (4.42)$$

Consideremos agora, que o estado de vácuo de um sistema quântico de campos, no interior de um volume V_{ol} , seja adiabaticamente perturbado pela presença de uma fonte uniforme⁸, que permanece por um intervalo de tempo τ . Assim, o estado de vácuo evolui adquirindo um fator de fase que permanece mesmo após a fonte ser removida. Logo,

⁸Isto é, uma fonte que não depende da variável x .

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} E(J) \tau \right\} . \quad (4.43)$$

Note que se não existisse a presença da fonte, os estados $|0^+\rangle$ e $|0^-\rangle$ seriam fisicamente indistinguíveis e, portanto,

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle = 1 , \quad (4.44)$$

para estados normalizados.

Como o resultado da equação (4.43) foi obtido no espaço-tempo de Minkowski, podemos realizar uma rotação de Wick [22, 41, 43], e chegarmos em

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \epsilon(J) \Omega \right\} . \quad (4.45)$$

Comparando o resultado encontrado acima com a equação do funcional gerador das funções de Green conexas (4.1), obtemos

$$W[J] = -\epsilon(J) \Omega . \quad (4.46)$$

Portanto, $W[J]$ é identificado com a energia na presença da fonte J .

O resultado da equação (4.47) mostra que a transformada funcional de Legendre (4.5), é a generalização quântica de campos da equação (4.42). Mostra também que o $V_{ef}(\phi_c)$ assim obtido, é o potencial efetivo $V_{EF}(\phi_c)$. Quando a fonte J é uniforme, $\phi_c(x) = \phi_c$ (constante). Assim, a equação (4.5) fica

$$V_{ef}(\phi_c) = \epsilon(J) + J \phi_c , \quad (4.47)$$

de modo que, $V_{ef}(\phi_c)$ é a *densidade de energia do sistema* independente da fonte.

4.4 O Ghost de Faddeev-Popov

O real poder do formalismo de integrais de trajetórias está no fato de nos permitir a livre escolha de qualquer gauge que desejarmos. Isso é impossível no formalismo canônico, onde o gauge já está bem fixado. Uma vez que no formalismo de integrais de trajetória a fixação do gauge é realizada pela introdução de funções delta na integral de trajetória, nós podemos mudar o gauge por simples substituição desses fatores. Esse formalismo foi introduzido por Faddeev-Popov [16].

Antes do método de Faddeev-Popov, a quantização das teorias de Yang-Mills não eram bem entendidas. Em 1962, Feynman mostrou que a simples quantização de teoria não preservava a unisidade. Para cancelar os indesejáveis termos não unitários, Feynman postulou a existência de um termo que não surge do procedimento de quantização padrão. Atualmente esse termo é conhecido como “Faddeev-Popov ghost term”.

Para iniciarmos esse estudo, nós primeiramente mostraremos que a integral de trajetória para uma teoria como a do eletromagnetismo de Maxwell é, a princípio, mal definida, por causa dos graus de liberdade de calibre (ou “gauge”). Sabemos também que, em virtude da integral de trajetória $\mathcal{D}A$ e a ação S serem ambas invariantes de gauge, isso significa que integrando funcionalmente sobre $\mathcal{D}A$, estaremos somando sobre os infinitos graus de liberdade da teoria. Uma vez que a teoria de Maxwell é invariante sob as transformações de gauge.

$$A_\mu^\Omega = A_\mu + \partial_\mu \Omega , \quad (4.48)$$

isso quer dizer que, integrando funcionalmente A_μ^Ω e sobre A_μ , temos incontáveis repetições no integrando. De fato,

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \longrightarrow \infty . \quad (4.49)$$

Fixando um \bar{A}_μ (na verdade um conjunto de A_μ que não estão relacionados por uma transformação de gauge), temos que

$$A_\mu = \bar{A}_\mu + \partial_\mu \Omega , \quad (4.50)$$

(Os A_μ pertencem a um outro conjunto obtido do primeiro por todas as possíveis transformações de gauge), ou seja, $A_\mu = A_\mu(\bar{A}_\mu, \Omega)$ (\bar{A}_μ e Ω são independentes), então

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \longrightarrow \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu e^{iS} \int \mathcal{D}\Omega . \quad (4.51)$$

A integração $\int \mathcal{D}\Omega$ é a causadora da divergência.

Note que $S(A_\mu) = S(\bar{A}_\mu)$, pois a transformação de gauge deixa \mathcal{L} invariante. Como quantidades físicas são invariantes de gauge, considerando \bar{A}_μ , isto é, um caminho, parece supérfluo considerar outros caminhos também, $A_\mu = \bar{A}_\mu + \partial_\mu \Omega$. A solução parece limitar-nos a um caminho, isto é, modificar a integral de forma que a integração seja feita sobre um A_μ . Entretanto, modificar a integral poderia também mudar a física. Assim, devemos quebrar a invariância de gauge, mas com muitos (infinitos) possíveis modos diferentes, o que pode ser pensado como manter a invariância de gauge, porém em um sentido diferente.

Vamos introduzir, então, em $\int \mathcal{D}\Omega$ um fator convergente,

$$\int \mathcal{D}\Omega \longrightarrow \int \mathcal{D}\Omega e^{-i \int \frac{F^2}{2\xi} dx} , \quad (4.52)$$

onde F depende dos campos A_μ e não é um invariante de gauge.

A integral agora converge, porém seu resultado depende da escolha de F , e nós queremos que seja independente. Uma maneira de se obter isto é tornar F função de Ω ou Ω função de F . Isso pode ser obtido com a introdução do jacobiano $\det \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega} \right)$, assim

$$\int \mathcal{D}\Omega \det\left(\frac{\partial F}{\partial \Omega}\right) e^{-i \int \frac{F^2}{2\xi} dx} \longrightarrow \int \mathcal{D}F e^{-i \int \frac{F^2}{2\xi} dx} , \quad (4.53)$$

que é uma integral sobre todos os possíveis F . Assim, o funcional gerador fica

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu \int \mathcal{D}\Omega e^{i \int (\mathcal{L} - \frac{F^2}{2\xi}) dx} \det\left(\frac{\partial F}{\partial \Omega}\right) . \quad (4.54)$$

Quando \mathcal{L} é independente de Ω (\mathcal{L} invariante), podemos escrever

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu e^{i \int \mathcal{L} dx} \int \mathcal{D}\Omega \det\left(\frac{\partial F}{\partial \Omega}\right) e^{-i \int \frac{F^2}{2\xi} dx} . \quad (4.55)$$

A expressão (4.55) ainda não é apropriada. Podemos melhorá-la escrevendo o jacobiano em uma forma mais adequada. Vamos supor que sob transformação de gauge F se transforme como

$$F \longrightarrow F + M\Omega , \quad (4.56)$$

onde M pode ser um operador contendo os campos A_μ e operadores diferenciais. É imediato que

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = M , \quad (4.57)$$

O determinante de M pode ser expresso como uma integral sobre os campos escalares de Grassmann $\bar{\eta}$ e η [43],

$$\det(M) = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{i \int \bar{\eta} M \eta dx} . \quad (4.58)$$

Substituindo a expressão (4.58) na equação (4.55) e trocando a rotação de \bar{A}_μ para A_μ , temos

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} e^{i (\int \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} F^2 - \bar{\eta} M \eta) dx} . \quad (4.59)$$

A lagrangiana original \mathcal{L} é trocada por uma nova lagrangiana, chamada efetiva

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FPG} , \quad (4.60)$$

na qual estão presentes os termos:

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} F^2 , \quad (4.61)$$

de fixação de gauge e

$$\mathcal{L}_{FPG} = -\bar{\eta} M \eta , \quad (4.62)$$

“Faddeev-Popov ghost”, sendo η o campo “ghost”. Note que o “ghost” é um campo escalar com estatística de férmion (por causa da álgebra de Grassmann).

No caso da eletrodinâmica quântica,

$$F = \partial^\mu A_\mu \quad (\text{no gauge de Lorentz}) , \quad (4.63)$$

e uma vez que $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Omega$, temos

$$\begin{aligned} F \longrightarrow F' &= \partial^\mu A'_\mu \\ &= \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \Omega \\ F \longrightarrow F' &= F + \partial^\mu \partial_\mu \Omega . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Da equação (4.64) obtemos que

$$M = \partial^\mu \partial_\mu , \quad (4.65)$$

para a eletrodinâmica de forma que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \bar{\eta}\partial^\mu\partial_\mu\eta. \quad (4.66)$$

É claro que não sendo os ghost de Faddeev-Popov acoplados a nada na eletrodinâmica, estes podem ser ignorados, ou mais propriamente dito, sua contribuição pode ser integrada e, portanto, não tem efeito físico.

Capítulo 5

Mecanismo de Coleman - Weinberg

5.1 O termo de massa em uma lagrangiana

O princípio de invariância e gauge local é uma ótima ferramenta para trabalhar as interações fortes e as interações eletromagnéticas. Ele praticamente fornece um “mecanismo” para determinar o acoplamento, uma vez que durante muitos anos, a construção da lagrangiana de interação \mathcal{L}_{int} foi feita puramente *ad hoc*. Além do mais, ele está em conformidade com o que G. 't Hooft e colaboradores provaram nos anos setenta [21], que teorias de gauge são automaticamente renormalizáveis.

Já a quebra espontânea de simetria de gauge, construída de forma independente por Weinberg e Salam, foi um novo e crucial ingrediente no modelo de unificação das interações fracas e as interações eletromagnéticas. Esta teoria propõe uma simetria entre as interações nuclear fraca e eletromagnética. Na teoria quântica de campos, estas interações são ambas decorrentes de simetrias de calibre local, tendo, portanto, um tratamento similar. Contudo, as distinções entre elas são claras e parecem revogar qualquer tentativa de unificá-las. Por exemplo, os bósons mediadores da interação fraca, W_+ , W_- e Z_0 , são massivos, ao passo que o mediador da interação eletromagnética, o fóton, é desprovido de massa. No entanto, segundo o modelo de Weinberg-Salan, originalmente os bósons mediadores

destas interações devem ser tratados equivalentemente, numa teoria de massa nula.

Assim, surgiu a seguinte questão: nós podemos tratar teorias de gauge, de maneira que estas acomodem campos massivos de gauge? A resposta é sim, mas o procedimento - explorando a quebra espontânea de simetria e o mecanismo de Higgs - é sutil. Assim, vale a pena começarmos a pensar cuidadosamente a respeito de como identificar um termo de massa em uma lagrangiana.

Supunhamos por exemplo, para um campo escalar ϕ , uma lagrangiana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + e^{-(\alpha\phi)^2}, \quad (5.1)$$

onde α é alguma constante real. Pergunta-se: onde está o termo de massa na lagrangiana (5.1)? À primeira vista não há nenhum sinal dele e poderíamos concluir que ϕ é um campo não massivo. Mas, esta conclusão está equivocada, pois ao expandirmos a função exponencial $e^{-(\alpha\phi)^2}$, a lagrangiana \mathcal{L} toma a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + 1 - \alpha^2\phi^2 + \frac{1}{2}\alpha^4\phi^4 - \frac{1}{6}\alpha^6\phi^6 + \dots \quad (5.2)$$

Analisando cada um dos termos da expansão, observamos que o número 1 é irrelevante, pois termos constantes em lagrangianas como \mathcal{L} não exercem influência alguma sobre as equações de campo. Mas, se analisarmos o segundo termo da expansão em (5.2), veremos que ele é exatamente o termo de massa da lagrangiana de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2, \quad (5.3)$$

com $\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$. Conseqüentemente, a lagrangiana (5.2) descreve uma partícula de massa

$$m = \frac{\sqrt{2\alpha\hbar}}{c}. \quad (5.4)$$

Os termos de ordens mais altas representam os termos de acoplamento descritos pelos diagramas na (Figura 5.1).

Não estamos supondo que isso seja uma teoria realista; estamos apenas discutindo um exemplo de como o termo de massa em uma lagrangiana pode apresentar-se disfarsadamente.

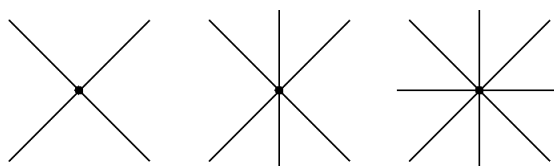


Figura 5.1: Diagramas que representam os termos de acoplamento na lagrangiana (5.2).

Para fazermos essa identificação, nós expandimos a lagrangiana \mathcal{L} , em potências de ϕ e escolhemos o termo proporcional a ϕ^2 (em geral, este termo é de segunda ordem nos campos: ϕ , ψ , A^μ etc).

Mas, há uma sutileza oculta nessa representação, que ilustraremos com a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4, \quad (5.5)$$

onde μ e λ são constantes reais. Observe que o segundo termo, nos lembra o termo de massa e o terceiro, o termo de interação. No entanto, ao compararmos com a lagrangiana de Klein-Gordon (5.3), vemos que o segundo termo está com o sinal trocado. Assim, se este é realmente um termo de massa, então “ m ” é imaginário; o que é um absurdo! Portanto, como devemos interpretar a lagrangiana (5.5)?

Para responder esta questão, temos que entender que o cálculo realizado por Feynman, é um procedimento perturbativo, no qual se inicia no estado fundamental (o vácuo) e trata os campos como flutuações sobre este estado.

Para lagrangianas do tipo (5.3), o estado fundamental - a configuração de campo para a energia mínima - sempre será o estado trivial, isto é, admite solução do tipo $\phi = 0$. O que não ocorre na lagrangiana (5.5), onde $\phi = 0$ não é solução para o estado fundamental.

Então, para determinarmos o real estado fundamental de (5.5), descreveremos a lagrangiana \mathcal{L} como a diferença entre o termo cinético $\mathcal{T} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ e o termo potencial \mathcal{U} , inspirado logicamente, pela lagrangiana clássica

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} , \quad (5.6)$$

Em seguida, determinamos o mínimo para o potencial \mathcal{U} , que nesse caso é dado por

$$\mathcal{U}(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2\phi^4 , \quad (5.7)$$

assim, o mínimo ocorre em

$$\phi = \pm\frac{\mu}{\lambda} , \quad (5.8)$$

conforme podemos ver no gráfico da (Figura 5.2), abaixo

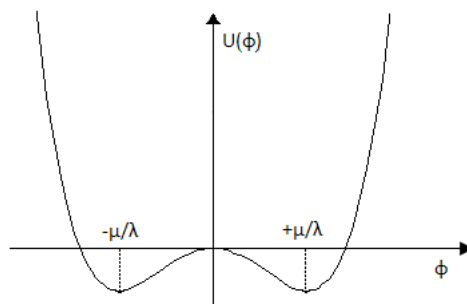


Figura 5.2: Gráfico da energia potencial $\mathcal{U}(\phi)$ na equação (5.7).

Para essa lagrangiana os cálculos de Feynman devem ser formulados em termos de uma nova variável de campo η , definida por

$$\eta \equiv \phi \pm \frac{\mu}{\lambda}, \quad (5.9)$$

ou de qualquer outra variável de campo desse mesmo estado fundamental. O novo campo η representa o desvio do campo ϕ com relação ao mínimo escolhido.

Reescrevendo a lagrangiana (5.5) em termos de η , ficamos com

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2 \pm \mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^2. \quad (5.10)$$

Agora, o segundo termo em (5.10) é um termo de massa, pois o sinal está em conformidade com o sinal do termo de massa da lagrangiana de Klein-Gordon (5.3). Assim, descobrimos que a massa da partícula é

$$m = \frac{\sqrt{2}\mu\hbar}{c}. \quad (5.11)$$

O terceiro e quarto termos representam os acoplamentos mostrados na (Figura 5.3)

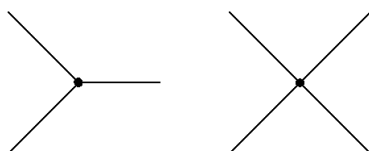


Figura 5.3: Diagramas que representam os termos de acoplamento na lagrangiana (5.10).

E finalmente, o último termo da lagrangiana (5.10) é uma constante irrelevante para a nossa análise.

É evidente que as lagrangianas (5.5) e (5.10) representam exatamente o mesmo sistema físico, pois foi feita apenas a mudança de variável (5.9). De fato, a primeira notação não é a mais adequada para os cálculos de Feynman, pois tecnicamente a série perturbativa em ϕ na lagrangiana (5.5) não é convergente, uma vez que a expansão é sobre um ponto instável.

Somente na segunda formulação, podemos ver a massa e os fatores de vértices de forma explícita.

Logo, concluímos que para identificar o termo de massa em uma lagrangiana, primeiro deve-se localizar o estado fundamental - a configuração de campo, na qual a energia potencial $\mathcal{U}(\phi)$ é mínima - e reexpressar a lagrangiana \mathcal{L} em função de uma nova variável de campo η (desvio), oriunda deste mínimo. Por fim, expandir em potências de η e obter a massa advinda do coeficiente do termo η^2 .

5.2 A quebra espontânea de simetria

O fenômeno de quebra espontânea de simetria vem sendo amplamente estudado nos últimos anos, uma vez que ele possui aplicações em diversas áreas do conhecimento científico, como a física das partículas elementares, a física da matéria condensada, a fisicoquímica, etc. Este fenômeno é também decisivamente importante no contexto da física teórica atual, onde as teorias mais fundamentais são associadas com princípios de simetria.

Uma determinada simetria pode ser quebrada pela ação de algum agente externo que atua diretamente sobre o sistema, ou, de outro modo, pode ser quebrada sem nenhuma intervenção externa, caso em que a simetria é dita ser espontaneamente quebrada, como mostra a (Figura 5.4) abaixo

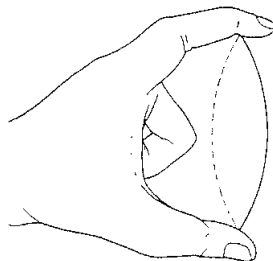


Figura 5.4: Quebra espontânea de simetria em uma tira plástica.

A idéia de simetria desempenha um importante papel para o reconhecimento de padrões na natureza. Em teoria quântica de campos uma simetria

tria é realizada quando a densidade lagrangiana \mathcal{L} (ou de uma forma geral, a ação S) que descreve o sistema é invariante sob uma transformação nas coordenadas ou nos campos. Para o caso de transformação nas coordenadas, a simetria é dita ser externa. Quando a transformação ocorre com os campos ela é chamada de simetria interna [40].

Existe uma classificação para os campos referente à maneira como eles se transformam frente ao grupo de Lorentz. O campo pode ser escalar, spinorial, vetorial etc. O tratamento mais simples é, sem dúvida, o do campo escalar real discutido na seção anterior, onde ele também é denotado aqui por ϕ . Este campo é associado a partículas de spin zero e sem nenhum tipo de carga. Em um espaço-tempo quadridimensional, o critério de renormalizabilidade exige que o acoplamento máximo seja do tipo ϕ^4 .

Para exemplificar essas idéias, supunhamos uma densidade lagrangiana tal que, se ela for invariante pela reflexão de ϕ , isto é, se ela possui a simetria interna discreta

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[-\phi] , \quad (5.12)$$

então a sua expressão formal é dada por

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{12} \beta^2 \phi^4 . \quad (5.13)$$

A constante de acoplamento $\lambda = 2\beta^2$ deve ser positiva para assegurar a estabilidade da teoria. Fazendo uso da seção anterior, podemos identificar o potencial clássico como

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{12} \beta^2 \phi^4 . \quad (5.14)$$

O estado de vácuo clássico pode ser obtido como o mínimo deste potencial. O sinal de m^2 em (5.14) caracteriza dois comportamentos distintos:

i) Se $m^2 \geq 0$, não há degenerescência e o estado de vácuo é bem definido

em $\phi = 0$. Nesse caso, as partículas são excitações do campo a partir deste vácuo e possuem massa m .

- ii) Se $m^2 < 0$, o mínimo é degenerado em $\phi = \pm\sqrt{3}\frac{m}{\beta}$ e o campo ϕ , nesse caso, não possui massa real, uma vez que o termo de massa aparece na densidade lagrangiana com o sinal “trocado”. A unicidade do vácuo exige a escolha de um mínimo específico e para qualquer um deles a simetria de reflexão $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ não é observada; fornecendo-nos assim um exemplo de quebra espontânea da simetria discreta.

A escolha de um estado de vácuo pode ser realizada definindo um novo campo η , tal que possua valor esperado do vácuo nulo

$$\eta(x) = \phi(x) \mp \sqrt{3}\frac{m}{\beta}, \quad (5.15)$$

de modo que

$$\langle 0|\eta(x)|0\rangle = 0. \quad (5.16)$$

De forma análoga à seção anterior, o novo campo η representa o desvio do campo ϕ com relação ao mínimo escolhido. A lagrangiana (5.13) pode ser escrita como função deste novo campo, de modo que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - m^2\eta^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{3}\beta m\eta^3 - \frac{1}{12}\beta^2\eta^4 + \text{Constante}. \quad (5.17)$$

Observemos que a lagrangiana (5.17) não é invariante pela reflexão $\eta \rightarrow \eta' = -\eta$. No entanto, o campo η possui massa igual $\sqrt{2}m$ e a mudança de variável (5.15), não interfere no carácter físico da lagrangiana, de modo que podemos dizer que a simetria está oculta, com a grande vantagem de se obter agora uma interpretação de partícula massiva. Em resumo, é o

sinal de m^2 que determina se o potencial apresenta ou não estados de vácuo degenerados e portanto se há ou não quebra espontânea de simetria.

5.3 O mecanismo de Coleman - Weinberg

Embora a quebra espontânea de simetria seja o “carro chefe” do modelo de Weinberg-Salan, seu ponto fraco está na arbitrariedade do potencial de Higgs. Este é um sério problema, pois muitos dos parâmetros físicos dependem crucialmente da forma precisa deste potencial.

A priori, seria interessante que o potencial de Higgs derivasse de princípios mais fundamentais e se possível com poucos parâmetros arbitrários.

Um interessante mecanismo que trata desta questão é o método de Coleman-Weinberg, onde o potencial de Higgs é induzido via correções radiativas, ao invés de ser inserido arbitrariamente. Nesta abordagem, o potencial efetivo, gerado pela soma de todos os infinitos em loop, pode induzir a quebra espontânea de simetria se as ordens dos parâmetros da teoria são tais que tornam termos adivindos das correções radiativas de ordem clássica.

O ideal é começarmos com uma teoria não massiva a “tree level” e induzir o surgimento de correções massivas na ação, oriundas das correções radiativas que devido a ordem dos parâmetros envolvidos (as constantes de acoplamento e e λ , no trabalho original de Coleman-Weinberg) se tornam de ordem clássica. Esta é a chamada *transmutação dimencional*, onde em uma teoria a princípio sem dimensão, trocamos uma de suas constantes de acoplamento adimensionais, por uma constante dimensional. Uma vez que a quebra espontânea de simetria é induzida por princípios fundamentais, sem a necessidade da introdução “ad hoc” de um potencial de Higgs, seria desejoso obter todas as massas através desta abordagem.

Iniciaremos estudando a teoria ϕ^4 . Embora essa teoria seja muito simples para nos fornecer um mecanismo realizável de quebra de simetria de gauge,

ela nos permite adquirir os princípios básicos envolvidos.

5.3.1 O campo escalar real

Nessa subseção iremos calcular o potencial efetivo na aproximação de um “loop”, isto é, até a ordem \hbar , para uma teoria de um campo escalar ϕ de massa nula com auto-interação $\lambda\phi^4$. Dai, analisaremos se as correções radiativas podem se tornar de ordem clássica e induzir a quebra espontânea de simetria da teoria.

A ação para esta teoria é dada por

$$S_E[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{\lambda \phi^4}{4!} \right]. \quad (5.18)$$

onde o sub-índice E indica espaço-tempo euclidiano. Note que a ação (5.18) é invariante sob transformações de paridade G , isto é, $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$.

O potencial clássico é dado por

$$V_{cl}(\phi) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (5.19)$$

É fácil ver que o mínimo para o potencial clássico ocorre em $\phi_0 = 0$.

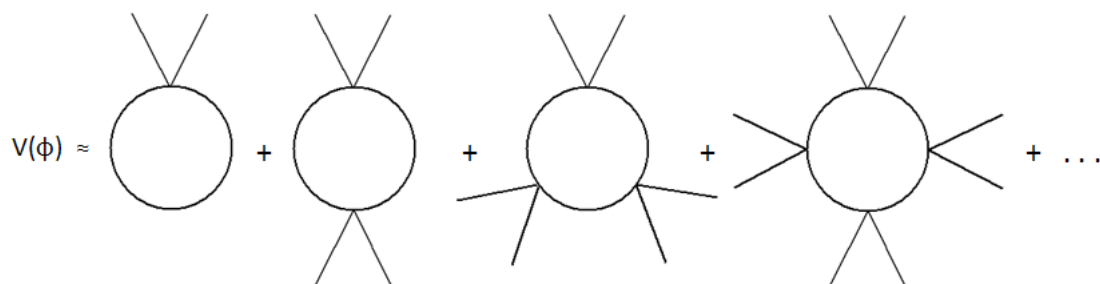


Figura 5.5: Soma sobre os gráficos de 1-loop com um número arbitrário de linhas externas ϕ gerando um potencial efetivo o qual pode induzir, sob certas circunstâncias, quebra espontânea de simetria.

Como mostrado no capítulo 4, o potencial efetivo até $\mathcal{O}(\hbar)$ pode ser obtido da equação (4.33), com

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4k \left(k^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_c^2 \right)^{-s}. \quad (5.20)$$

O potencial efetivo em $\mathcal{O}(\hbar)$, $V_{ef}^{(1)}$, assim obtido é a soma sobre uma série infinita de gráficos de 1-loop com um número arbitrário de vértices de ϕ^4 , como mostra a (Figura 5.5).

Usando a relação (2.70), a equação (5.20) fica

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{1}{(s-1)(s-2)} \left(\frac{\lambda}{2} \phi_c^2 \right)^{2-s}, \quad (5.21)$$

onde temos usado a propriedade da função gama,

$$\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1). \quad (5.22)$$

Facilmente determinamos que

$$\zeta_m(0) = \frac{\Omega}{128\pi^2} \lambda^2 \phi_c^2, \quad (5.23)$$

e

$$\frac{d}{ds}[\zeta_m(0)] = -\frac{\Omega}{128\pi^2} \lambda^2 \phi_c^4 \left[\ln \left(\frac{\lambda \phi_c^2}{2} \right) - \frac{3}{2} \right]. \quad (5.24)$$

O potencial efetivo fica então dado por

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda \phi_c^4}{4!} + \frac{\hbar}{256\pi^2} \lambda^2 \phi_c^4 \left[\ln \left(\frac{\lambda \phi_c^2}{2\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right]. \quad (5.25)$$

O potencial efetivo obtido acima, embora finito, ainda não é nosso resultado final, pois devemos ajustar o parâmetro λ ao seu valor renormalizado (observado). Para o caso de massa nula não existe uma escala de massa intrínseca e, portanto, podemos definir a constante de acoplamento em um ponto qualquer (flutuante) M , com dimensão de massa,

$$\left. \frac{d^4[V_{ef}]}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=M} = \lambda_R . \quad (5.26)$$

É importante enfatizar que M é completamente arbitrário, e diferentes escolhas para M conduziram a diferentes definições da constante de acoplamento, contudo qualquer escolha para M diferente de zero é tão boa quanto qualquer outra. A escolha de um M diferente de zero é para evitar a singularidade logarítmica infravermelha.

Da equação (5.25)

$$\lambda + \hbar \frac{\lambda^2}{64\pi^2} \left[6 \ln \left(\frac{\lambda M^2}{2\mu^2} \right) + 16 \right] = \lambda_R . \quad (5.27)$$

Em ordem $\mathcal{O}(\hbar)$ temos que $\lambda = \lambda_R$ e, portanto, em $\mathcal{O}(\hbar^2)$,

$$\ln \left(\frac{\lambda M^2}{2\mu^2} \right) = -\frac{8}{3} . \quad (5.28)$$

Agora substituindo os resultados anteriores na equação (5.25), podemos eliminar μ , assim

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda_R}{4!} \phi_c^4 + \frac{\hbar}{256\pi^2} \lambda_R^2 \phi_c^4 \left[\ln \left(\frac{\phi_c^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right] . \quad (5.29)$$

O mínimo ocorre em

$$\left. \frac{d[V_{ef}]}{d\phi_c} \right|_{\phi_c=\phi_0} = 0 , \quad (5.30)$$

o que nos fornece

$$\frac{\lambda_R}{2} \phi_0^3 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{\hbar \lambda_R}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi_0^2}{M^2} \right) - \frac{11}{6} \right] \right\} = 0 . \quad (5.31)$$

A equação (5.31) admite solução trivial se o termo entre chaves se alular. Porém, isto é impossível dentro da validade de nossa aproximação em um

loop, pois teríamos que igualar um termo de $\mathcal{O}(\lambda^0)$ a outro de $\mathcal{O}(\lambda)$, isto é, um de ordem $\mathcal{O}(\hbar^0)$ a outro de $\mathcal{O}(\hbar)$. Isto fica mais claro se escolhermos $M = \phi_c$ (uma vez que M é arbitrário) para obtermos a equação

$$\hbar \frac{11\lambda}{64} = 1 . \quad (5.32)$$

Assim, concluímos que o vácuo $\phi_0 = 0$ é único e não ocorre quebra espontânea de simetria.

A condição de renormalização da massa é obtida usando a equação (5.29) na equação (4.34),

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2[V_{ef}]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_0=0} &= M_R^2 , \\ 0 &= M_R^2 . \end{aligned} \quad (5.33)$$

O resultado (5.33) nos diz que a massa renormalizada (observada) do campo ϕ é nula. Portanto, a teoria descreve partículas de spin-0, sem carga e de massa nula.

5.3.2 Transmutação dimensional

Nessa subseção trataremos a eletrodinâmica escalar de massa nula, com campo escalar auto-interagindo. Como vimos anteriormente, a invariância de gauge local impõe a introdução de um campo de gauge bosônico vetorial A^μ e também fornece o acoplamento mínimo. Vimos também que a invariância de gauge não permite que o campo vetorial A^μ seja massivo.

Como Coleman-Weinberg [10] mostraram a renormalização dessa teoria tem conseqüências notáveis. Eles mostram que embora o valor esperado do vácuo ϕ_0 seja nulo classicamente, em sua versão renormalizada em 1-loop,

o valor esperado do vácuo pode se tornar arbitrário, portanto degenerado. Entretanto, a imposição da condição de massa para o campo escalar (isto é, o ajuste dos parâmetros da teoria a massa observada do campo escalar) determina um vácuo e como consequência a teoria tem sua simetria sob transformações de gauge local quebrada espontaneamente. A quebra da simetria, como no caso usual do mecanismo de Higgs, induz a ambas as partículas escalar e vetorial adquirirem massa dinâmica proporcional a ϕ_0 .

A indução da quebra espontânea de simetria somente é possível porque termos de origem nas correntes radiativas ($\mathcal{O}(\hbar)$) podem se tornar de ordem clássica e assim modificar o vácuo da teoria. O que possibilita isto agora é que, ao contrário do caso anterior de um campo escalar real, a invariância de gauge exige a existência de mais um parâmetro, a constante do acoplamento mínimo “ e ” (que é também a carga do campo escalar complexo), além da constante de acoplamento λ de auto-interação. Se λ é da ordem de e^4 , termos de ordem quântica ($\mathcal{O}(\hbar)$) tornam-se de ordem clássica, permitindo assim que a equação para o vácuo ϕ_0 tenha uma solução não-trivial. A solução não-trivial obriga o parâmetro λ ser função de e^4 , e portanto podendo ser eliminado. Isso não significa que o número de parâmetros livres da teoria tenha sido reduzido de dois, λ e “ e ”, para um único, “ e ”, pois o valor esperado do vácuo ϕ_0 adquire “status” de parâmetro livre da teoria. Desta forma a teoria que inicialmente tinha como parâmetros “ e ” e λ , passa a ter ainda dois “ e ” e ϕ_0 . Contudo, observe que os dois parâmetros iniciais “ e ” e λ são adimensionais, enquanto ϕ_0 tem dimensão de massa. Assim, algo notável ocorre, a teoria que inicialmente não tinha uma escala de massa intrínseca, passa agora a ter. Esse fenômeno é o que chamamos de *transmutação dimensional*.

É importante enfatizar que no caso de uma solução não-trivial o ponto de renormalização ou subtração ϕ_0 deixa de ser arbitrário, tomando o valor de um determinado ponto definido pela massa observada da partícula escalar

ou da partícula vetoria.

Como vimos anteriormente a lagrangiana da eletrodinâmica escalar de massa nula é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = & [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi][(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi^*] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \\ & - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \bar{\eta}\square\eta - \frac{\lambda}{4!}(\phi\phi^*)^2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde temos introduzido uma auto-interação do campo escalar, representada pelo último termo.

O campo complexo ϕ pode ser escrito em função de dois outros campos reais independentes ϕ_1 e ϕ_2 como

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2). \quad (5.35)$$

Usando a equação (5.35), a lagrangiana (5.34) fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 + \\ & -\frac{1}{2}e^2 A^\mu A_\mu(\phi_1^2 + \phi_2^2) - eA^\mu(\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1) + \\ & -\frac{\lambda}{4!}(\phi_1^4 + 2\phi_1^2\phi_2^2 + \phi_2^4) + \bar{\eta}\square\eta. \end{aligned} \quad (5.36)$$

A escrita da lagrangiana (5.36) pode ser simplificada usando índices internos para os campos,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_E = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}e^2 A^\mu A_\mu\phi_a\phi_a + \\
& -e\epsilon_{ab}A^\mu\phi_a\partial_\mu\phi_b - \frac{\lambda}{4!}(\phi_a\phi_a)^2 + \bar{\eta}\square\eta, \tag{5.37}
\end{aligned}$$

onde $a, b = 1, 2$ e $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$ é o tensor completamente antisimétrico.

A ação,

$$S_E[\phi_a, A^\mu, \bar{\eta}, \eta] = \int d^4x \mathcal{L}, \tag{5.38}$$

expandida em torno dos mínimos, constantes dos campos, fica dada por [26],

$$\begin{aligned}
S_E[\phi_a, A^\mu, \bar{\eta}, \eta] = & S_E[\bar{\phi}_a, 0, 0, 0] - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_a(x) \Delta_{ab}(x, y) \phi_b(y) + \\
& -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu D_{\mu\nu}(x, y) A^\nu(y) + \\
& - \int d^4x d^4y A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \phi_a(y) + \\
& + \int d^4x \bar{\eta}(x) \square \eta(x) + \\
& + (\text{Termos cúbicos e quadráticos nos campos}), \tag{5.39}
\end{aligned}$$

onde

$$\Delta_{ab}(x, y) = \left[\frac{\lambda}{6} (2\bar{\phi}_a\bar{\phi}_b + \bar{\phi}^2\delta_{ab}) - \square\delta_{ab} \right] \delta(x - y), \tag{5.40}$$

$$D_{\mu\nu}(x, y) = \left[e^2\bar{\phi}^2\delta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial_\mu\partial_\nu - \square\delta_{\mu\nu} \right] \delta(x - y), \tag{5.41}$$

$$C_{\mu a}(x, y) = [-e\epsilon_{ab}\bar{\phi}_b\partial_\mu]\delta(x - y) . \quad (5.42)$$

O funcional gerador das funções de Green conexas e desconexas

$$Z_E[J] = e^{\frac{1}{\hbar}W_E[J]} , \quad (5.43)$$

é dado por

$$\begin{aligned} Z_E[J_a] &= e^{-\frac{1}{\hbar}S_0[\bar{\phi}_a, J_a]} \int D\bar{\eta} D\eta DA^\mu D\phi_a \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi_a(x) \Delta_{ab}(x, y) \phi_b(y) + \right. \\ &\quad -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu D_{\mu\nu}(x, y) A^\nu(y) + \\ &\quad - \int d^4x d^4y A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \phi_a(y) + \\ &\quad \left. + \int d^4x \bar{\eta}(x) \square \eta(x) \right\} , \quad (5.44) \end{aligned}$$

onde temos desprezado os demais termos, pois estamos interessados em calcular o potencial efetivo até $\mathcal{O}(\hbar)$.

Uma vez que o expoente é quadrático nos campos, as integrais são facilmente calculadas. Realizando inicialmente a integral¹ em $D\phi_a$,

$$\begin{aligned} &\int D\phi_a \exp \left\{ \int d^4x d^4y \left[-\frac{1}{2} \phi_a(x) \Delta_{ab}(x, y) \phi_b(y) - A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \phi_a(y) \right] \right\} \propto \\ &\propto [\det(\Delta_{ab})]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^\mu(x) C_{\mu a}(x, y) \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b}(x, y) A^\nu(y) \right\} , \quad (5.45) \end{aligned}$$

¹Note que esta integral é uma generalização da integral de Fresnel [?].

Agora realizando a integração em DA^μ ,

$$\begin{aligned} & \int DA^\mu \exp \left\{ -\frac{1}{2} \times \right. \\ & \times \int d^4x d^4y A^\mu(x) [D_{\mu\nu}(x, y) - C_{\mu a}(x, y) \Delta_{ab}^{-1}(x, y) C_{\nu b}(x, y)] A^\nu(y) \left. \right\} \propto \\ & \propto [\det(D_{\mu\nu} - C_{\mu a} \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b})]^{-\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Por fim, realizemos as integrais em $D\bar{\eta} D\eta$ (lembrando que $\bar{\eta}$ e η são campos de Grassmann),

$$\int D\bar{\eta} D\eta \exp \left\{ \int d^4x \bar{\eta}(x) \square \eta(x) \right\} = \det(-\square). \quad (5.47)$$

Assim, obtemos

$$Z_E[J_a] = e^{-\frac{1}{\hbar} S_0[\bar{\phi}_a, J_a]} [\det(\Delta_{ab})]^{-\frac{1}{2}} [\det(D_{\mu\nu} - C_{\mu a} \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b})]^{-\frac{1}{2}} \det(-\square) . \quad (5.48)$$

Da equação (5.48) obtemos facilmente o potencial efetivo em $\mathcal{O}(\hbar)$ como

$$V_{ef}^{(1)}(\phi_c) = -\frac{\hbar}{\Omega} \ln \left\{ [\det(\Delta_{ab})]^{-\frac{1}{2}} [\det(D_{\mu\nu} - C_{\mu a} \Delta_{ab}^{-1} C_{\nu b})]^{-\frac{1}{2}} \det(-\square) \right\} . \quad (5.49)$$

Realizando uma transformação para o espaço dos momentos nós encontramos [46]

$$\begin{aligned}
V_{ef}^{(1)}(\phi_c) &= \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \left[\det \left(k^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_c^2 \right) \right] + \frac{3\hbar}{2\Omega} \ln[\det(k^2 + e^2 \phi_c^2)] + \\
&+ \frac{\hbar}{2\Omega} \ln[\det(k^2 + M_+^2 \phi_c^2)] + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln[\det(k^2 + M_-^2 \phi_c^2)] + \\
&- 2 \frac{\hbar}{2\Omega} \ln[\det(k^2)] , \tag{5.50}
\end{aligned}$$

onde

$$M_{\pm}^2 = \frac{\lambda}{12} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{144} - \frac{\xi \lambda e^2}{6}} . \tag{5.51}$$

Do resultado anterior já vimos que

$$\ln[\det(k^2 + B^2)] = \frac{\Omega B^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{B^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] , \tag{5.52}$$

então,

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi_c) &= \frac{\lambda \phi_c^4}{4!} + \frac{\hbar \lambda^2 \phi_c^4}{256\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\lambda \phi_c^2}{2\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] + \frac{3\hbar e^4 \phi_c^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{e^2 \phi_c^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] + \\
&+ \frac{\hbar M_+^4 \phi_c^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M_+^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] + \frac{\hbar M_-^4 \phi_c^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M_-^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] , \tag{5.53}
\end{aligned}$$

O segundo e os últimos dois termos são de $\mathcal{O}(\lambda^2)$, portanto podem ser desprezados. Assim,

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda \phi_c^4}{4!} + \frac{3\hbar e^4 \phi_c^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{e^2 \phi_c^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] . \tag{5.54}$$

A condição de renormalização da constante de acoplamento implica que

$$\left. \frac{d^4[V_{ef}]}{d\phi_c^4} \right|_M = \lambda_R . \quad (5.55)$$

Derivando o potencial efetivo (5.54), obtemos

$$\lambda + \frac{9\hbar e^4}{8\pi^2} \left[\ln \left(\frac{e^2 M^4}{\mu^2} \right) - \frac{8}{3} \right] . \quad (5.56)$$

Para a ordem $\mathcal{O}(\hbar^0)$ temos $\lambda = \lambda_R$ e

$$\ln \left(\frac{e^2 M^4}{\mu^2} \right) = -\frac{8}{3} . \quad (5.57)$$

Usando a equação (5.57) para eliminar o parâmetro de massa μ do potencial efetivo, temos

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{\lambda \phi_c^4}{4!} + \frac{3\hbar e^4 \phi_c^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi_c^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right] . \quad (5.58)$$

A condição de mínimo é dada por

$$\left. \frac{d[V_{ef}]}{d\phi_c} \right|_{\phi_0} = 0 , \quad (5.59)$$

$$\frac{\phi_0^3}{6} \left\{ \lambda + \frac{3\hbar e^4}{16\pi^2} \left[6 \ln \left(\frac{\phi_0^2}{M^2} \right) - 22 \right] \right\} = 0 . \quad (5.60)$$

A equação (5.60) somente admitirá solução não-trivial se

$$\lambda + \frac{3\hbar e^4}{16\pi^2} \left[6 \ln \left(\frac{\phi_0^2}{M^2} \right) - 22 \right] = 0 . \quad (5.61)$$

Como M é arbitrário, podemos escolher $M = \phi_0$, então

$$\lambda = \frac{33\hbar e^4}{8\pi^2} . \quad (5.62)$$

O resultado (5.62) mostra que somente existirá solução não-trivial se λ for da ordem de e^4 .

Considerando, então, λ da ordem e^4 , tal que, a equação (5.62) seja satisfeita, podemos usá-la para eliminar λ na expressão do potencial efetivo. Assim, não esquecendo da escolha $M = \phi_0$, temos

$$V_{ef}(\phi_c) = \frac{3\hbar e^4 \phi_c^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi_c^2}{\phi_0^2} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (5.63)$$

É claro que $V_{ef}(\phi_c)$ dado pela equação (5.63) acima possui um mínimo em ϕ_0 . Contudo, é importante enfatizar que ϕ_0 é arbitrário, podendo assumir qualquer valor portanto, o vácuo é degenerado. Ainda, a eliminação de λ , isto é, escrevendo-se λ em função de “ e ”, eliminamos aparentemente um parâmetro da teoria. Entretanto, como podemos observar existe a introdução de um novo parâmetro ϕ_0 com dimensão de massa. Assim, a teoria que inicialmente não tinha uma escala de massa, passa a ter. Isto é o que chamamos de *transmutação dimensional*.

A condição de normalização da massa,

$$\left. \frac{d^2[V_{ef}]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_0} = M_\phi^2, \quad (5.64)$$

nos fornece

$$M_\phi^2 = \frac{3\hbar e^4}{8\pi^2} \phi_0^2. \quad (5.65)$$

O resultado (5.65) tem conseqüências notáveis.

- i)* Primeiramente, vemos que o campo escalar somente terá massa nula se $\phi_0 = 0$. Entretanto, esta solução não é ponto de mínimo, isto é, não representa uma solução de vácuo estável, portanto, não é um estado de vácuo fisicamente aceitável. Daí concluímos que o campo escalar é

necessariamente massivo. Mas, como ϕ_0 é diferente de zero, o campo vetorial também adquire massa devido ao termo

$$\frac{1}{2}e^2\phi^2 A_\mu A^\mu , \quad (5.66)$$

na lagrangiana (5.37). Sendo a massa do campo vetorial dada por

$$M_A = e^2\phi_0^2 , \quad (5.67)$$

ii) Em segundo lugar, como havíamos dito anteriormente ϕ_0 é arbitrário e, portanto o vácuo é degenerado. Porém, a condição (5.65), com M_ϕ devendo ser diferente de zero, determina um valor para o vácuo ϕ_0 , e desta forma quebra a simetria da teoria. Isto é fácil ver se redefinirmos o campo de forma que o vácuo seja nulo,

$$\phi' = \phi - \phi_0 . \quad (5.68)$$

Capítulo 6

Efeitos das Condições de Contorno de Neumann na Eletrodinâmica Escalar

6.1 Introdução

Como vimos no capítulo anterior Coleman e Weinberg mostraram que correções radiativas podem induzir quebra espontânea de simetria na eletrodinâmica escalar se a constante de acoplamento “ λ ” é da ordem de e^4 [10]. Como consequência o campo escalar, originalmente a *tree level*¹ de massa nula, desenvolve massa e o campo vetorial também desenvolve massa pelo mecanismo tradicional, devido à solução de vácuo do campo escalar não nulo.

Neste trabalho nós consideramos os efeitos causados quando os campos escalar ϕ e vetorial A_μ são obrigados a satisfazerem condições de contorno de Neumann homogêneas sobre duas superfícies planas, paralelas separadas por uma pequena distância “ a ”. Uma vez que as condições de contorno permitem soluções de campo constante, a técnica do potencial efetivo pode ser empregada para encontrarmos o vácuo da teoria.

Na determinação do potencial efetivo, nós usamos a técnica de regularização da função zeta generalizada. Assim, observamos que existe um compri-

¹Aproximação semiclássica.

mento crítico para o qual a quebra espontânea de simetria induzida pelas correções radiativas não ocorre e desta forma, o fenômeno de transmutação dimensional, conseqüentemente, também não ocorre.

Embora a solução de vácuo seja nula, o campo escalar ϕ desenvolve massa, mas o campo vetorial A_μ não.

6.2 O potencial efetivo para a eletrodinâmica escalar

Como já vimos a lagrangiana para a eletrodinâmica escalar é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E = & -\frac{1}{2}(\partial\phi_a)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}e^2 A^\mu A_\mu \phi_a \phi_a + \\ & -e\epsilon_{ab}\phi_a A^\mu \partial_\mu \phi_b - \frac{\lambda}{4!}(\phi_a \phi_a)^2 + \bar{\eta}\square\eta, \end{aligned} \quad (6.1)$$

Vamos impor que o campo ϕ satisfaça condições de contorno de Neumann homogêneas, sobre duas superfícies planas infinitas e paralelas, separadas por uma pequena distância “ a ”. Como tais condições permitem soluções de campo constante, nós usaremos o método do potencial efetivo em primeira ordem, para encontrar o vácuo $\langle\phi\rangle$ da teoria.

O potencial efetivo em 1-loop da lagrangeana (6.1), com os campos satisfazendo as condições de contorno impostas, é dado por²

²Nós usaremos \hbar para marcar as correções quânticas, mas em geral consideraremos $\hbar = c = 1$.

$$\begin{aligned}
V_{ef}^{(1)} = & \frac{1}{2\Omega} \hbar \ln \left\{ \det \left[k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + \frac{\lambda\phi_c^2}{2} \right] \right\} + \\
& + \frac{3}{2\Omega} \hbar \ln \left\{ \det \left[k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + e^2\phi_c^2 \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{2\Omega} \hbar \ln \left\{ \det \left[k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + M_+^2\phi_c^2 \right] \right\} + \\
& + \frac{1}{2\Omega} \hbar \ln \left\{ \det \left[k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + M_-^2\phi_c^2 \right] \right\} + \\
& - 2 \frac{1}{2\Omega} \hbar \ln \left\{ \det \left[k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} \right] \right\} , \tag{6.2}
\end{aligned}$$

onde $\phi_c^2 = \phi_{1c}^2 + \phi_{2c}^2$ é o campo clássico; $\lambda = 2\beta^2$; $M_{\pm}^2 = \frac{\beta^2}{6} \pm \sqrt{\frac{\beta^4}{36} - \frac{\xi}{3}\beta^2 e^2}$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e Ω é o volume do espaço-tempo quadridimensional.

Definimos a função zeta como

$$\zeta_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} \left[k^2 + \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + v^2 \right]^{-s} , \tag{6.3}$$

onde v^2 representa os termos quadráticos de ϕ_c em (6.2). Para $v^2 > 0$, a integral acima pode ser calculada com o uso da relação

$$\int_{+\infty}^{-\infty} [x^2 + A^2]^{-s} d^k x = \frac{\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma(s - \frac{k}{2})}{\Gamma(s)} (A^2)^{\frac{k}{2} - s} , \tag{6.4}$$

onde A^2 é uma constante positiva.

Assim, tomando $A^2 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + v^2$ e $k = 3$, teremos

$$\zeta_m(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega}{(2\pi)^3 a} \frac{\pi^{\frac{3}{2}} \Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right)^{\frac{3}{2} - s} ,$$

ou ainda,

$$\zeta_m(s) = \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right)^{\frac{3}{2}-s}. \quad (6.5)$$

Destacando o termo $n = 0$ do restante da soma, ficamos com

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) &= \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \\ &+ \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right)^{\frac{3}{2}-s}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde, reescrevendo essa equação chegamos em

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) &= \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \\ &+ \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + \frac{a^2v^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}-s}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para desenvolvermos o somatório da última parcela de (6.7), vamos utilizar a continuação analítica para a função de Epstein-Hurwitz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [n^2 + B^2]^{-p} &= -\frac{1}{2}B^{-2p} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2B^{2p-1}\Gamma(p)} \times \\ &\times \left[\Gamma\left(p - \frac{1}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{p-\frac{1}{2}}(2\pi nB)}{(n\pi B)^{\frac{1}{2}-p}} \right], \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada de ordem ν .

Fazendo $B = \frac{av}{\pi}$ e $p = s - \frac{3}{2}$ no somatório da equação (6.7), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 + \frac{a^2 v^2}{\pi^2} \right)^{\frac{3}{2}-s} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{av}{\pi} \right)^{3-2s} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{av}{\pi} \right)^{2s-4} \Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)} \Gamma(s-2) + \\ &+ \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2 \left(\frac{av}{\pi} \right)^{2s-4} \Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)} \left[4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}} \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Substituindo o somatório (6.9) na função zeta (6.7), chegamos em

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) &= \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3-2s} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{av}{\pi} \right)^{3-2s} \right] + \\ &+ \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3-2s} \left[\frac{\pi^{2s-\frac{7}{2}}}{2(av)^{2s-4} \Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)} \Gamma(s-2) \right] + \\ &+ \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{3-2s} \times \\ &\times \left[\frac{\pi^{2s-\frac{7}{2}}}{2(av)^{2s-4} \Gamma \left(s - \frac{3}{2} \right)} 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}} \right], \end{aligned} \quad (6.10)$$

usando a propriedade da função gama $\Gamma(s) = (s-1)(s-2)\Gamma(s-2)$, teremos

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) &= \frac{\Omega}{8\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} - \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \\ &+ \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{\Gamma(s-2)}{(s-1)(s-2)\Gamma(s-2)} v^{4-2s} + \\ &+ \frac{\Omega}{4\pi^2} \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Assim, a função zeta generalizada torna-se

$$\begin{aligned} \zeta_m(s) = & \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} + \frac{\Omega}{16\pi^2} \frac{v^{4-2s}}{(s-1)(s-2)} + \\ & + \frac{\Omega}{4\pi^2} \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}} . \end{aligned} \quad (6.12)$$

Derivando a equação (6.12) e lembrando que $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d[\zeta_m(s)]}{ds} = & \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \left\{ -2 \frac{\Gamma(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} v^{3-2s} \ln v \right\} + \\ & + \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \left\{ v^{3-2s} \left[\frac{\Gamma'(s - \frac{3}{2})}{\Gamma(s)} - \Gamma\left(s - \frac{3}{2}\right) \frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right] \right\} + \\ & + \frac{\Omega}{16\pi^2} \left\{ \frac{-2}{(s-1)(s-2)} v^{4-2s} \ln v \right\} + \\ & + \frac{\Omega}{16\pi^2} \left\{ v^{4-2s} \left[\frac{-1}{(s-1)(s-2)^2} - \frac{1}{(s-1)^2(s-2)} \right] \right\} + \\ & + \frac{\Omega}{4\pi^2} \left\{ \left[-2 \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \ln v - v^{4-2s} \frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}} \right\} + \\ & + \frac{\Omega}{4\pi^2} \left\{ \frac{v^{4-2s}}{\Gamma(s)} \frac{d}{ds} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_{s-2}(2nav)}{(nav)^{2-s}} \right] \right\} . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Como sabemos,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\psi(s)}{\Gamma(s)} \right] = -1 , \quad (6.14)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s) = +\infty, \quad (6.15)$$

e

$$K_\nu(x) = K_{-\nu}(x). \quad (6.16)$$

Substituindo (6.14), (6.15) e (6.16) em (6.12), vemos que

$$\zeta_m(0) = \frac{\Omega}{32\pi^2} v^4. \quad (6.17)$$

Substituindo (6.14), (6.15) e (6.16) em (6.13), teremos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d[\zeta_m(s)]}{ds} \right|_{s=0} &= \frac{\Omega}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} v^3 \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{\Omega}{16\pi^2} v^4 \left(\frac{3}{4} - \ln v\right) + \\ &+ \frac{\Omega}{4\pi^2} v^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Assim, substituindo (6.17) e (6.18) em (??), obtemos

$$\begin{aligned} \ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] &= -\frac{\Omega v^3}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{\Omega v^4}{16\pi^2} \frac{3}{4} + \frac{\Omega v^4}{16\pi^2} \ln v + \\ &- \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} - \frac{\Omega v^4}{32\pi^2} \ln \mu^2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] &= -\frac{\Omega v^3}{16\pi^{\frac{3}{2}}a} \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} + \\ &+ \frac{\Omega v^4}{32\pi^2} \left[2 \ln v - \ln \mu^2 - \frac{3}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Como $\Gamma(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3}\pi^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} \ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] &= -\frac{\Omega v^3}{12\pi a} + \frac{\Omega v^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{v^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] \\ &\quad - \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

No terceiro termo da equação (6.21), vamos tomar um número inteiro $m \geq 0$, de modo que

$$\begin{cases} 2mav < 1 \\ 2(m+1)av \geq 1 \end{cases}. \quad (6.22)$$

Desta forma, o somatório da equação (6.21) pode ser reescrito como

$$\frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} = \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} + \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2}. \quad (6.23)$$

A função de Bessel modificada de segunda espécie é decrescente em relação ao seu argumento [1, 5]. Assim, no segundo termo do lado direito da equação (6.23), podemos considerar apenas o primeiro elemento do somatório nessa série. Dessa forma

$$\frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} \cong \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \frac{K_2[2(m+1)av]}{[(m+1)av]^2}, \quad (6.24)$$

como $2(m+1)av \geq 1$, temos

$$\frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \frac{K_2[2(m+1)av]}{[(m+1)av]^2} \cong \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \frac{K_2(1)}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\Omega v^4}{\pi^2} K_2(1). \quad (6.25)$$

Observemos agora o primeiro termo do lado direito da equação (6.23). O

argumento da função de Bessel modificada de segunda ordem, $(2nav)$, é menor que 1, logo, podemos usar a expansão [1, 5]

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu K_\nu(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\nu-1} (-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^{2i} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(i+1)} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+2i}}{\Gamma(i+1)\Gamma(\nu+i+1)} \times \\ &\times \left[\psi(i+1) + \psi(\nu+i+1) - 2 \ln\left(\frac{x}{2}\right) \right], \quad (6.26) \end{aligned}$$

válida para todo $\nu > 0$.

Assim, tomando $\nu = 2$ e $x = 2nav$ na expansão (6.26), obtemos

$$\begin{aligned} (nav)^2 K_2(2nav) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 (-1)^i (nav)^{2i} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(i+1)} + \\ &+ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^2 (nav)^{4+2i}}{\Gamma(i+1)\Gamma(i+3)} \times \\ &\times [\psi(i+1) + \psi(i+3) - 2 \ln(nav)], \quad (6.27) \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} (nav)^2 K_2(2nav) &= \frac{1}{2} \left[1 - (nav)^2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(2)} \right] + \\ &+ \frac{(nav)^4}{\Gamma(1)\Gamma(2)} [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] + \dots, \quad (6.28) \end{aligned}$$

como $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(3) = 2$, temos

$$K_2(2nav) = \frac{1}{2(nav)^2} - \frac{1}{2} + \frac{(nav)^2}{2} [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] + \dots, \quad (6.29)$$

que substituindo no primeiro termo do lado direito da equação(6.23), dará

$$\begin{aligned} \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} &= \frac{\Omega v^4}{8\pi^2} \sum_{n=1}^m [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] + \\ &+ \frac{\Omega}{8\pi^2 a^4} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} - \frac{\Omega v^2}{8\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} + \\ &+ \mathcal{O}(a^2 v^6). \end{aligned} \quad (6.30)$$

De modo que, ao substituirmos os resultados encontrados em (6.25) e (6.30), no somatório (6.23), teremos

$$\begin{aligned} \frac{\Omega v^4}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_2(2nav)}{(nav)^2} &= \frac{\Omega v^4}{\pi^2} K_2(1) + \frac{\Omega}{8\pi^2 a^4} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} - \frac{\Omega v^2}{8\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{\Omega v^4}{8\pi^2} \sum_{n=1}^m [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] + \\ &+ \mathcal{O}(a^2 v^6). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Assim, substituindo (6.31) em (6.21), ficamos com

$$\begin{aligned}
\ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] &= \frac{\Omega v^4}{32 \pi^2} \left[\ln \left(\frac{v^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\Omega v^3}{12 \pi a} + \\
&+ \frac{\Omega v^2}{8 \pi^2 a^2} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} - \frac{\Omega}{8 \pi^2 a^4} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} + \\
&- \frac{\Omega v^4}{8 \pi^2} \sum_{n=1}^m [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] + \\
&- \frac{\Omega v^4}{\pi^2} K_2(1) + \mathcal{O}(a^2 v^6) . \tag{6.32}
\end{aligned}$$

Se “ av ” for muito pequeno (isto é, m é muito grande), podemos trocar as somatórias por funções Zeta de Riemann, assim,

$$\begin{aligned}
\ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] &= \frac{\Omega v^4}{32 \pi^2} \left[\ln \left(\frac{v^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] - \frac{\Omega v^3}{12 \pi a} + \\
&+ \frac{\Omega v^2}{8 \pi^2 a^2} \zeta_R(2) - \frac{\Omega}{8 \pi^2 a^4} \zeta_R(4) + \\
&- \frac{\Omega v^4}{8 \pi^2} \sum_{n=1}^m [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] + \\
&- \frac{\Omega v^4}{\pi^2} K_2(1) + \mathcal{O}(a^2 v^6) . \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Sendo $\zeta_R(2) = \frac{\pi^2}{6}$ e $\zeta_R(4) = \frac{\pi^4}{90}$, temos que

$$\begin{aligned}
\ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] &= \frac{\Omega v^4}{32 \pi^2} \left[\ln \left(\frac{v^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right] (av)^0 + \\
&\quad - \frac{\Omega v^4 K_2(1)}{\pi^2} (av)^0 \\
&\quad - \frac{\Omega v^4}{8 \pi^2} \sum_{n=1}^m [\psi(1) + \psi(3) - 2 \ln(nav)] (av)^0 + \\
&\quad - \frac{\Omega v^4}{12 \pi} (av)^{-1} - \frac{\Omega \pi^2 v^4}{720} (av)^{-4} + \\
&\quad + \frac{\Omega v^4}{48} (av)^{-2} + v^4 \mathcal{O}(a^2 v^2) . \tag{6.34}
\end{aligned}$$

Como $av \ll 1$, então os três primeiros termos e o último termo de (6.34) não podem se tornar de ordem clássica e portanto serão desprezados. Assim

$$\ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] = -\frac{\Omega v^3}{12 \pi a} - \frac{\Omega \pi^2}{720 a^4} + \frac{\Omega v^2}{48 a^2} . \tag{6.35}$$

Logo, a expansão em primeira ordem usando o resultado (6.35), é dada por

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi) &= V_d(\phi) + \frac{\hbar}{2\Omega} \ln \left[\det \left(k^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + v^2 \right) \right] \\
&= \frac{\lambda \phi^4}{4!} + \left\{ -\frac{\hbar v^3}{24 \pi a} - \frac{\hbar \phi^2}{1440 a^4} + \frac{\hbar v^2}{96 a^2} \right\} , \tag{6.36}
\end{aligned}$$

de modo que v^2 assume cada um dos termos quadráticos de ϕ_c em (6.2).

Assim, tomando $\lambda = 2\beta^2$, teremos

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi_c) = & \frac{\beta^2 \phi_c^4}{12} + \left\{ -\frac{\hbar \beta^3 \phi_c^3}{24\pi a} - \frac{\hbar \pi^2}{1440a^4} + \frac{\hbar \beta^2 \phi_c^2}{96a^2} \right\} + \\
& + 3 \left\{ -\frac{\hbar e^3 \phi_c^3}{24\pi a} - \frac{\hbar \pi^2}{1440a^4} + \frac{\hbar e^2 \phi_c^2}{96a^2} \right\} + \\
& + \left\{ -\frac{\hbar M_+^3 \phi_c^3}{24\pi a} - \frac{\hbar \pi^2}{1440a^4} + \frac{\hbar M_+^2 \phi_c^2}{96a^2} \right\} \\
& + \left\{ -\frac{\hbar M_-^3 \phi_c^3}{24\pi a} - \frac{\hbar \pi^2}{1440a^4} + \frac{\hbar M_-^2 \phi_c^2}{96a^2} \right\} + \\
& - 2 \left\{ -\frac{\hbar \pi^2}{1440a^4} \right\} , \tag{6.37}
\end{aligned}$$

onde lembramos que $M_{\pm}^2 = \frac{\beta^2}{6} \pm \sqrt{\frac{\beta^4}{36} - \frac{\xi}{3}\beta^2 e^2}$.

Renormalizando a expressão acima teremos

$$\begin{aligned}
V_{ef}(\phi_c) = & -\frac{\hbar \pi^2}{360a^4} + \frac{\hbar}{96a^2}(\beta^2 + 3e^2 + M_+^2 + M_-^2)\phi_c^2 + \\
& -\frac{\hbar}{24\pi a}(\beta^2 + 3e^2 + M_+^2 + M_-^2)\phi_c^3 + \frac{\beta^2}{12}\phi_c^4 . \tag{6.38}
\end{aligned}$$

Calculando a derivada primeira de $V_{ef}(\phi_c)$, observamos que o mínimo ocorre em $\phi_c = \langle \phi \rangle$, ou seja,

$$\left. \frac{d[V_{ef}]}{d\phi_c} \right|_{\phi_c = \langle \phi \rangle} = 0 , \tag{6.39}$$

assim,

$$\langle \phi \rangle \left[\frac{\hbar}{48a^2}(\beta^2 + 3e^2 + M_+^2 + M_-^2) + \right. \\ \left. - \frac{\hbar}{8\pi a^2}(\beta^2 + 3e^2 + M_+^2 + M_-^2)\langle \phi \rangle + \frac{\beta^2}{3}\langle \phi \rangle^2 \right] = 0. \quad (6.40)$$

A solução não trivial da equação (6.40) existirá, se a soma dos termos entre colchetes for nula. No entanto, não existe uma ordem para “ a ” (com respeito às ordens de β e/ou de e), tal que permita uma solução não trivial. Desse modo, o mínimo do potencial efetivo V_{ef} é satisfeito para

$$\langle \phi \rangle = 0. \quad (6.41)$$

O resultado (6.41) mostra-nos que o vácuo é não degenerado, portanto, não temos ocorrência de quebra espontânea de simetria. Como a quebra de simetria não ocorre, o campo vetorial A_μ não desenvolve massa através do mecanismo tradicional.

Embora o potencial efetivo dado pela equação (6.38) seja finito, este não é o resultado final, pois sua constante de acoplamento é um parâmetro arbitrário. Então, nós devemos ajustá-la para uma constante de acoplamento renormalizada usando a condição renormalização

$$\left. \frac{d^4[V_{ef}]}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=M} = 0, \quad (6.42)$$

onde M é um ponto de renormalização flutuante arbitrário, para obter $\lambda = \lambda_R$.

Calculando a derivada segunda do potencial efetivo V_{ef} no ponto de mínimo encontrado em (6.41), teremos

$$\left. \frac{d^2[V_{ef}]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=\langle \phi \rangle=0} = \frac{\hbar}{48a^2}(\beta^2 + 3e^2 + M_+^2 + M_-^2), \quad (6.43)$$

onde $M_{\pm}^2 = \frac{\beta^2}{6} \pm \sqrt{\frac{\beta^4}{36} - \frac{\xi}{3}\beta^2 e^2}$.

Como $M_+^2 + M_-^2 = \frac{\beta^2}{3}$, temos que a massa renormalizada do campo escalar é dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2[V_{ef}]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle=0} &= \frac{\hbar}{48a^2} \left(\frac{4}{3}\beta_R^2 + 3e^2 \right) \\ &= \frac{\hbar\beta_R^2}{36a^2} + \frac{\hbar e^2}{16a^2} = m_\phi^2. \end{aligned} \quad (6.44)$$

A equação (6.44) mostra que a “ a ” é da ordem β e/ou “ e ”, então a massa do campo escalar será de ordem clássica, isto é, da ordem de \hbar^0 . Este resultado está de acordo com nossa hipótese inicial, de que $a\beta\phi_c \ll 1$.

Se “ a ” é de ordem mais baixa que a ordem de β e de e ($a > \beta$ e $a > e$), então, o resultado (6.44) estará totalmente fora do alcance de validade esperado por nossas aproximações. Isto implica que existe uma escala típica de comprimento, dada pelo comprimento “ a ”. Nessa escala de comprimento, a teoria da eletrodinâmica escalar não massiva com auto-interação, transforma-se em uma teoria massiva devido ao efeito das condições de contorno de Neumann.

É importante notar que se “ a ” é pequeno o bastante a teoria se tornará massiva em $\mathcal{O}(\hbar^0)$. Isso acontece porque β , “ e ” e “ a ” são parâmetros independentes. Assim, o termo de massa encontrado, pode ser da ordem de \hbar^0 , apesar do resultado ser em 1-loop (tem origem nas correções radiativas). Como a massa renormalizada m_ϕ^2 é da ordem de \hbar^0 , não podemos subtraí-la introduzindo contra-termos massivos de ordem de \hbar .

Nós enfatizamos que se “ a ” é suficientemente pequeno, observa-se que a quebra espontânea de simetria não ocorre, mesmo se λ for da ordem de e^4 .

Conseqüentemente, o campo vetorial de gauge A_μ não desenvolve massa através do mecanismo tradicional.

A densidade de energia do vácuo é dada pelo mínimo do potencial efetivo,

$$\epsilon_{vacuo} = V_{ef}(\phi_c = \langle \phi \rangle) = V_{ef}(0) . \quad (6.45)$$

Substituindo a equação (6.38) em (6.45) obtemos

$$\epsilon_{vacuo} = -\frac{\hbar\pi^2}{360a^4} . \quad (6.46)$$

O resultado encontrado acima é quatro vezes o valor da densidade de energia do vácuo para um campo escalar real, o que está de acordo com o esperado.

Observe que os resultados encontrados em (6.44) e em (6.46) são invariantes de gauge. Isto era esperado, pois os resultados físicos devem ser independentes da escolha do gauge.

6.3 Conclusão

Nesse capítulo nós estudamos a eletrodinâmica escalar satisfazendo as condições de contorno de Neumann homogênea sobre duas superfícies planas paralelas separadas por uma pequena distância “ a ”. Nós mostramos que se “ a ” é suficientemente pequeno, isto é, “ a^2 ” é da ordem de λ , a quebra espontânea de simetria não ocorre.

Nós também vimos que se “ a ” é suficientemente pequeno, a quebra espontânea de simetria não ocorre, mesmo que λ seja da orde de e^4 . Como um resultado disso, o campo vetorial de gauge A_μ não desenvolve massa decorrente do mecanismo tradicional. Entretanto, o campo escalar desenvolve massa, ainda que as correções radiativas não induzam a quebra espontânea de simetria.

Observamos que nossos resultados são invariantes de gauge, isto é, a massa do campo escalar e a densidade de energia do vácuo são independentes da escolha do gauge, como nós esperávamos.

Capítulo 7

Conclusão

Assim, podemos concluir que...

Referências bibliográficas

Referências Bibliográficas

- [1] Arfken, G. B. and Weber, H. J.; *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, San Diego, 1995), 4th Ed..
- [2] Ashok Das; *FIELD THEORY a path integral approach* (World Scientific Publishigs Company, Singapore, 1993).
- [3] Belvedere, L. V.; *Teoria Quântica de Campos I*, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, Notas de Aula (1997).
- [4] Brown, L. S.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [5] Butkov, E.; *Física Matemática* (Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, 1978).
- [6] Cahill, K.; Phys. Rev. **D52**(8), 4704 (1995).
- [7] Casimir, H. G. B.; Proc. K. Ned. Akad. Wet. 51, 793 (1948).
- [8] Chodos, A., Jaffe, R. L., Johnson, K., Thorn, C. B. and Weisskopf, V. F.; Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [9] Cougo-Pinto, M. V., Farina, C. e Tort, A. C.; Rev. Bras. Ens. Fis. **22**(1), 122 (2000).
- [10] Coleman, S. and Weinberg, E.; Phys. Rev **D7**, p.1888, (1973).
- [11] Curtright, T. L and Thorn, C. B.; J. Math. Phys. **25**(3), 541 (1984).

- [12] Denardo, G. and Spallucci, E.; Nucl. Phys. **B169**, 514 (1980).
- [13] Elizalde, E., Odentsov, S. D., Romeo, A., Bytsenko, A. A., Zerbini, S.; *Zeta regularization techniques with applications*. Singapore, World Scientific (1994).
- [14] Elizalde, E., Kirsten, K., Gonola, G., Vanzo, L. and Zerbini, S.; Proceeding: *7th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, Jul 1994, California.
- [15] Elizalde, E. and Kirsten, K.; J. Math, Phys. **35**(3), 1260 (1994).
- [16] Faddeev, L. D. and Popov, V. N.; Phys. Lett. **25B**, 29 (1967).
- [17] Feynman, R. P. and Hibbs, A. R.; *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965).
- [18] Frampton, P. H.; *Gauge Field Theories* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC, Menlo Park, California, 1987).
- [19] Ford L. H. and T. Yoshimura, Phys. Lett. **A70**, 89 (1979).
- [20] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M.; *Tables of Integrals, Series and Products*, 5th edition, (Academic Press, New York, 1994).
- [21] G. 't Hooft, *Nucl.Phys.* **B33**, 173 (1971), **B35**, 167 (1971), Reprinted in C. H. Lai, ed. (Singapore: World Scientific, 1981).
- [22] Greiner, W. and Reinhardt, J.; *Field Quantization* (Springer-Verlag, Berlin, 1996).
- [23] Hawking, S. W.; Commun, math. Phys., **55**, 133 (1977).
- [24] Huang, K.; *Quarks Leptons & Gauge Fields* (Word Scientific Publishing Company, Singapore, 1982).
- [25] Iliopoulos, J., Itzykson, C. and Martin, A.; Rev. Mod. Phys., **47**, 165 (1975).

- [26] Jackiw, R.; Phys. Rev., **D 9**(6), 1686 (1974).
- [27] Kaku M., *QUANTUM FIELD THEORY, a modern introduction* (Oxford University Press, New York, 1993).
- [28] G. Kane, *Modern Elementary Particles Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1993).
- [29] Lamoureux, S. K.; Phys. Rev. Lett. **28**, 5 (1997).
- [30] Lee, S. Y and Sciacaluga, A. M.; Nucl. Phys. **B96**, 435 (1975).
- [31] Magnus, W., Oberhettinger, F. and Triconi, F. G.; edited by A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions, (H. Bateman Manuscript Project, California Institute of Technology)* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1953) Vol. II, p. 9 and 23.
- [32] Mohideen, U. and Roy, A.; Phys. Rev. Lett. **81**, 21 (1998).
- [33] Narlikar, J. V. and Padmanabhan, T.; *Gravity, Gauge Theories and Quantum Cosmology* (D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986).
- [34] Nogueira, J. A. e Maia Jr, A.; Rev. Bras. Ens. Fís. **24**(3), 306 (2002).
- [35] Nogueira, J. A. and Maia Jr, A.; Phys. Rev. Lett. **B 358**, 56 (1995).
- [36] Nogueira, J. A. and Maia Jr, A.; Phys. Rev. Lett. **B 394**, 371 (1997).
- [37] Nogueira, J. A. and Barbieri, P. L., Braz. J. Phys. **32** (3), 798 (2002).
- [38] Nussenzevig, M.; *Integrais de Trajetória*, curso ministrado na I Escola de Verão de Partículas e Campos, 1981.
- [39] Pereira, F. L.; *Condições de Contorno de Neumann Homogêneas como Restauradora da Simetria*, Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Físicas do CCE da UFES, Vitória-ES (2005).

- [40] Possa, D., Pereira, F. e Nogueira, J. A.; Res. Bras. Ens. Fís. (2005).
- [41] Ramond, P.; *FIELD THEORY A Modern Primer* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Massachusetts, 1981).
- [42] Rivers, R. J.; *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).
- [43] Ryder, L. H.; *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).
- [44] Sobrinho, J.J.P. e Tort, A.C.; Rev. Bras. Ens. Fis. **23**(4), 401 (2001).
- [45] Sparnaay, M. J.; *Physica* 24, 751 (1958).
- [46] Toms D. J., Phys. Rev. **D21**(10), 2805 (1980), Phys. Lett. **77A**(5), 303 (1980).
- [47] “Gravitation and electricity.” In: O’RAIFEARTAIGH, L. (ed.). *The dawning of gauge theory*. Princeton, Princeton University Press, 1997a, p. 24-37.
- [48] T. Yoshimura, Phys. Lett. **A72**, 391 (1979).