

**ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS ESCALARES NÃO-
HOMOGÊNEOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO (MEC)**

WAGNER DALVI SANTOLIN

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VITÓRIA, MARÇO DE 2006

**ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS ESCALARES NÃO-
HOMOGÊNEOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO**

WAGNER DALVI SANTOLIN

**Dissertação submetida ao Corpo Docente do
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Mecânica da Universidade Federal do Espírito
Santo como requisito parcial para a obtenção do
grau de Mestre em Engenharia Mecânica na área
de concentração em Mecânica dos Sólidos.**

ORIENTAÇÃO: PROF. DR. CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO

VITÓRIA, MARÇO DE 2006

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

S237a Santolin, Wagner Dalvi, 1978-
Análise dinâmica de problemas escalares não homogêneos através do método dos elementos de contorno (mec) / Wagner Dalvi Santolin. – 2006.
136 f. : il.

Orientador: Carlos Loeffler Friedrich Neto.

Co-Orientador: Markcilei Lima Dan.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Análise numérica. 3. Dinâmica dos corpos rígidos. 4. Programação (Computadores). I. Friedrich Neto, Carlos Loeffler. II. Dan, Markcilei Lima. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ANÁLISE DINÂMICA DE PROBLEMAS
ESCALARES NÃO-HOMOGÊNEOS ATRAVÉS DO MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

WAGNER DALVI SANTOLIN

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Prof. M.Sc. Marcilei Lima Dan – Co-orientador
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Prof. PhD. Webe João Mansur
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ

Prof. Dr. Luiz Paulo da Silva Barra
Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, área de concentração Mecânica dos Sólidos.

Vitória, março de 2006

**Dedico este trabalho aos meus Pais,
Osmar e Penha, à minha irmã e
à minha esposa Vivian, que
estiveram sempre presentes,
incentivando-me na
realização deste sonho.**

AGRADECIMENTOS

Ao fomento a pesquisa através de bolsa de iniciação científica e de mestrado oferecidas pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) durante a minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto pela infatigável e impecável orientação, pela sua amizade e serenidade ao passar seus conhecimentos e experiências, visto que, foram de grande valia para o meu crescimento profissional e pessoal.

Ao meu Co-Orientador Prof. M.Sc. Markcilei Dan, que em seus lampejos de iluminação, identificou com muita perspicácia a origem de diversas dificuldades, propondo soluções para o problema, e, assim, evitando horas de investigação adicionais.

Aos Professores Fernando Menandro, Walnório Ferreira e todos os outros professores, especialmente Luis Paulo Barra, que foi o primeiro a notar o meu apreço pela investigação científica.

A todos os colegas, hoje amigos, do Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica e Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, dentre eles, Allan Jardim, Luciano Campos, Rosental Girelli, Marcelo Veronez, Fabrício Stange, Márcio José da Silva e tantos outros que mesmo não percebendo, contribuíram positivamente na conclusão deste trabalho.

Ao fundamental apoio de todas as famílias Santolin, Dalvi e Costa, envolvidas em meu relacionamento cotidiano, pilares para a minha sólida formação.

Agradeço principalmente a Deus por me guiar ao trilhar uma trajetória rumo ao desconhecido, “o futuro”, que, através da ciência, pode ser inovado de forma a melhorar a vida de todos.

RESUMO

Uma das maiores limitações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) encontra-se na modelagem de problemas cujo meio contínuo é não-homogêneo. Nestes casos, tradicionalmente emprega-se o recurso da divisão do domínio em sub-regiões para se proceder à modelagem numérica, recurso este de relativa onerosidade. No presente trabalho, propõe-se uma alternativa a este procedimento tradicional, adaptando-se a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade. Tal formulação é capaz de tratar a heterogeneidade de modo especial e conduzir o equacionamento integral do modelo matemático e sua conseqüente discretização exclusivamente em termos de valores de contorno, sem necessidade de sub-regiões.

Uma das mais promissoras aplicações dos modelos não homogêneos na atualidade é a análise sísmica para prospecção de petróleo. Nestes casos, se faz necessário modelar também o fenômeno da propagação de ondas, casos estes complexos e de difícil simulação numérica. Para implementar a ação dinâmica, empregou-se aqui a técnica da Dupla Reciprocidade tradicional, pela sua simplicidade. A discretização temporal foi feita através de um esquema incremental com amortecimento fictício, visando diminuir a ação dos altos modos de vibração, normalmente embutidos na resposta transiente e mal representados no modelo numérico.

Exemplos de simulação estática e dinâmica são apresentados, e seus resultados são comparados com soluções analíticas disponíveis, visando à correta aferição da eficiência da formulação na obtenção de resultados numéricos. Para o caso dinâmico, uma solução analítica de razoável complexidade foi gerada exclusivamente com esta finalidade. Efeitos do refinamento da malha, do valor do incremento do tempo e da taxa de variação das propriedades constituintes do meio foram alguns dos fatores avaliados pelas simulações numéricas realizadas.

ABSTRACT

One of the biggest limitations of the Boundary Element Method (BEM) consists in modeling non-homogeneous problems. To minimize the onerous task to make models using the sub-regions technique, the Quasi-Dual Reciprocity formulation was adapted to simulate these cases. Such formulation is able to deal with heterogeneities by a special way ceding to lead the integral formulation of the mathematical model and its consequent discretization exclusively in terms of boundary values, without necessity of sub-regions.

One of the most promising applications of the non-homogeneous models in the present time is the seismic analysis for prospection of oil. In these cases if it also makes necessary to represent the wave propagation phenomena, cases these, very cumbersome and complex. It is very common the numerical simulation of dynamic problems implies in badly accuracy to represent high vibration modes. This fact can distort the numerical reply sufficiently and the use of an incremental time step scheme with fictitious damping is usually requested, to avoid the tax of waste of the numerical response.

Thus, this work has the objective to analyze the performance of the formularization cited in non-homogeneous problems, in which admits dynamic processes. While the Quasi-Dual formulation is used to model the material properties, the traditional Dual Reciprocity technique also is here employed, with the purpose of modeling the dynamic action.

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA III.1 – PROPRIEDADES DE ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 58

TABELA VI.1 - INFLUÊNCIA DOS PONTOS INTERNOS NO ERRO MÉDIO DAS DIVERSAS MALHAS..... 112

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA II.1 – ETAPAS DA MODELAGEM CIENTÍFICA, NA BUSCA DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS FÍSICOS ATRAVÉS DA MATEMÁTICA	26
FIGURA II.2 - REPRESENTAÇÃO DOS FLUXOS NUM DOMÍNIO NÃO HOMOGÊNEO	38
FIGURA II.3 – REPRESENTAÇÃO DA LEI DE FOURIER	39
FIGURA II.4 – PARÂMETROS EM UMA BARRA AXIALMENTE SOLICITADA	40
FIGURA II.5 – DINÂMICA DOS DESLOCAMENTOS EM UMA BARRA HOMOGÊNEA ALONGADA DE U_0	44
FIGURA III.1 – CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO EM UMA BARRA ENGASTADA NUMA EXTREMIDADE E DESLOCADA ,REPENTINAMENTE, NA OUTRA.....	48
FIGURA III.2 – CONVENÇÃO DE SINAIS PARA O DESLOCAMENTO	63
FIGURA III.3 – COMPARAÇÃO ENTRE A SÉRIE E \bar{u} COM A ESTIMATIVA DE ERRO.....	64
FIGURA III.4 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO DESLOCAMENTO DA PARTÍCULA DA SEÇÃO MEDIANA DA BARRA HETEROGÊNEA	64
FIGURA III.5 – DESLOCAMENTO DA PARTÍCULA DA SEÇÃO MEDIANA DA COM T VARIANDO DE 1 À 200 s.....	65
FIGURA III.6 - DESLOCAMENTO DA PARTÍCULA DA SEÇÃO MEDIANA DA COM T VARIANDO DE 200 À 400 s.....	65
FIGURA III.7 – DETALHE DO GRÁFICO DE DESLOCAMENTO EM $x = 2.5$ DEPOIS DE DECORRIDO 150 S.	66

FIGURA III.8 - DETALHE DO GRÁFICO DE DESLOCAMENTO EM $x = 2.5$ DEPOIS DE DECORRIDO 1.000 s.....	66
FIGURA III.9 - DETALHE DO GRÁFICO DE DESLOCAMENTO EM $x = 2.5$ DEPOIS DE DECORRIDO 15.000 s.....	67
FIGURA III.10 – DESLOCAMENTO DAS PARTÍCULAS EM TODO DOMÍNIO NA IDA DA ONDA NO PRIMEIRO PERÍODO.....	68
FIGURA III.11– DESLOCAMENTO DAS PARTÍCULAS EM TODO DOMÍNIO DURANTE O RETORNO DA ONDA NO PRIMEIRO PERÍODO APÓS REFLETIDA NA EXTREMIDADE ENGASTADA	69
FIGURA III.12 – NO RETORNO DA ONDA REFLETIDA NO ENGASTE, AS PARTÍCULA POR ONDE JÁ PASSOU POSSUI UM DESLOCAMENTO NEGATIVO.....	69
FIGURA III.13 – VARIAÇÃO DA DEFORMAÇÃO DA SEÇÃO MEDIANA DA BARRA NO TEMPO.....	70
FIGURA III.14 – DIFERENÇA DA ENVOLTÓRIA ANTES E DEPOIS DA ONDA PASSAR PELA SEÇÃO MEDIANA	71
FIGURA III.15 – DISTORÇÃO DO GRÁFICO DE DEFORMAÇÃO AO PASSAR DO TEMPO.....	71
FIGURA III.16 – ENVOLTÓRIA DE DEFORMAÇÃO NO DOMÍNIO QUANDO $t = 0.25$ s.....	72
FIGURA III.17 - ENVOLTÓRIA DE DEFORMAÇÃO NO DOMÍNIO QUANDO $t = 0.75$ s.	73
FIGURA III.18 - ENVOLTÓRIA DE DEFORMAÇÃO NO DOMÍNIO QUANDO $t = 1.25$ s.	73
FIGURA III.19 - ENVOLTÓRIA DE DEFORMAÇÃO NO DOMÍNIO QUANDO $t = 100$ s.	74
FIGURA III.20 - ONDA DE DESLOCAMENTOS EM UMA BARRA HETEROGÊNEA ALONGADA DE U_0	75
FIGURA III.21 – ENCURTAMENTO DAS SEÇÕES DEVIDO A REFLEXÕES ORIGINADAS A PARTIR DAS REFLEXÕES PRINCIPAIS QUANDO A ONDA PRINCIPAL PROPAGA-SE NO SENTIDO DE IMPEDÂNCIA DECRESCENTE.....	77

FIGURA III.22 - ALONGAMENTO DAS SEÇÕES DEVIDO A REFLEXÕES ORIGINADAS A PARTIR DAS REFLEXÕES PRINCIPAIS QUANDO A ONDA PRINCIPAL PROPAGA-SE NO SENTIDO DE IMPEDÂNCIA DECRESCENTE.....	78
FIGURA III.23 – GRÁFICO DOS DESLOCAMENTOS DO PONTO P.....	79
FIGURA IV.1 - CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DO PROBLEMA FUNDAMENTAL CORRELATO....	86
FIGURA IV.2 - CARACTERIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM CONTORNO ANGULOSO.....	87
FIGURA IV.3 - ELEMENTO DE CONTORNO CONSTANTE	88
FIGURA IV.4 - CONTORNO DISCRETIZADO EM ELEMENTOS DE CONTORNO CONSTANTE.....	89
FIGURA IV.5 - DOMÍNIO NÃO-HOMOGÊNEO	91
FIGURA V.1 – FLUXOGRAMA DAS SUB-ROTINAS DENTRO DO CÓDIGO FORTRAN.....	107
FIGURA VI.1 - CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DA BARRA NÃO-HOMOGÊNEA	109
FIGURA VI.2 – MALHA COM 8, 16, 32, 64 E 128 ELEMENTOS.....	110
FIGURA VI.3 – MALHAS DE 128 E.C., COM 01 E 03 P.I.....	110
FIGURA VI.4 - ERRO MÉDIO PERCENTUAL DOS VALORES DE DESLOCAMENTO AO LONGO DO COMPRIMENTO.....	111
FIGURA VI.5 - GRÁFICO DA INFLUÊNCIA DOS PONTOS INTERNOS NO ERRO MÉDIO.....	112
FIGURA VI.6 - COMPORTAMENTO DO ERRO COM A VARIAÇÃO DA CONSTANTE M.....	113
FIGURA VI.7 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA	114
FIGURA VI.8 - ERRO PERCENTUAL NOS VALORES DE FLUXO DE CALOR BIDIMENSIONAL	115
FIGURA VI.9 - ERRO MÉDIO PERCENTUAL COM A VARIAÇÃO DAS CONSTANTES A E B.....	116
FIGURA VI.10 - ERRO MÉDIO PERCENTUAL COM O REFINAMENTO DA MALHA	117

FIGURA VI.11 – ERRO MÉDIO PERCENTUAL COM VARIAÇÃO DA CONSTANTE A.....	118
FIGURA VI.12 - ERRO MÉDIO PERCENTUAL COM O REFINAMENTO DA MALHA	119
FIGURA VI.13 - CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E GEOMÉTRICAS DA BARRA HOMOGÊNEA.....	121
FIGURA VI.14 –MALHAS DE 4, 8, 16 E 64 E.C., REPRESENTANDO COM RETÂNGULOS VAZIOS OS PONTOS GEOMÉTRICOS E COM OS CÍRCULOS CHEIOS OS PONTOS FUNCIONAIS.	122
FIGURA VI.15 – CONVERGÊNCIA DO MÉTODO COM O REFINAMENTO DA MALHA DE 04 PARA 08 E.C., E MELHOR APROXIMAÇÃO DEVIDO A INTRODUÇÃO DE UM PONTO INTERNO NO CENTRO GEOMÉTRICO DA BARRA.	123
FIGURA VI.16 – COM UM MELHOR REFINAMENTO DA MALHA A QUASE SUPERPOSIÇÃO DAS CURVAS E O INÍCIO DO ACHATAMENTO HORIZONTAL.	124
FIGURA VI.17 – COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO APROXIMADA COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA AO REFINAR A MALHA E DIMINUIR O INTERVALO DE TEMPO PARA ANÁLISE.....	125
FIGURA VI.18 – COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO DA ANALÍTICA COM A APROXIMADA AO INCLUIR UM PONTO INTERNO NO CENTRO GEOMÉTRICO DA BARRA.....	126

SUMÁRIO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - COMENTÁRIOS INICIAIS	18
I.2 - OBJETIVO DO TRABALHO	20
I.3 - METODOLOGIA DE PESQUISA	21
I.4 - MEIOS E RECURSOS	23

CAPÍTULO II

MODELAGEM MATEMÁTICA

II.1 - O PROBLEMA FÍSICO	25
II.1.1 - GRUPOS DE MATERIAIS	27

II.1.2 - INFLUÊNCIA DINÂMICA.....	29
II.2 - O PROBLEMA MATEMÁTICO	31
II.3 - EQUAÇÃO DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADA	32
II.4 - ALGUNS CASOS PARTICULARES IMPORTANTES	33
II.5 - MODELO ESTÁTICO PARA MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS	36
II.5.1 - MODELO GERADO A PARTIR DA EQUAÇÃO DE CAMPO.....	36
II.5.2 - MODELO GERADO A PARTIR DE PRINCÍPIOS FÍSICOS.....	37
II.6 - MODELO DINÂMICO PARA OS MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS	41
II.6.1 - AVALIAÇÃO DA DINÂMICA EM MATERIAIS HOMOGÊNEOS.....	42
II.6.2 - AVALIAÇÃO DA DINÂMICA EM MATERIAIS HETEROGÊNEOS.....	45

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM PROBLEMA HETEROGÊNEO

III.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA.....	47
III.2 - USO DA TÉCNICA DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	50
III.3 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESPACIAL	52
III.4 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL TEMPORAL.....	56
III.4.1 - DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE TEMPORAL (F_N) ATRAVÉS DAS	

<i>PROPRIEDADES DE ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS..</i>	58
III.5 - SOLUÇÃO FINAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL	61
III.6 - SIMULAÇÃO E ANÁLISE FÍSICA DA SOLUÇÃO OBTIDA.....	62
<i>III.6.1 - ESTUDO DOS DESLOCAMENTOS DA SEÇÃO MEDIANA</i>	64
<i>III.6.2 - ESTUDO DO DESLOCAMENTO DE TODOS OS PONTOS DO DOMÍNIO NUM DETERMINADO INSTANTE DO TEMPO</i>	67
<i>III.6.3 - ESTUDO DA DEFORMAÇÃO OCORRIDA NA SEÇÃO MEDIANA DA BARRA </i>	70
<i>III.6.4 - ESTUDO DA DEFORMAÇÃO OCORRIDA EM TODO O DOMÍNIO DA BARRA.....</i>	72
III.7 - ANALOGIA DA ONDA NA BARRA HETEROGÊNEA ALONGADA	74

CAPÍTULO IV

MÉTODOS NUMÉRICOS

IV.1 - APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS.....	80
IV.2 - PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS.....	81
IV.3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	83
<i>IV.3.1 - FORMULAÇÃO INTEGRAL.....</i>	84
<i>IV.3.2 - A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL.....</i>	85
<i>IV.3.3 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA.....</i>	87

IV.4 - TRATAMENTO TRADICIONAL DOS DOMÍNIOS HETEROGÊNEOS	90
---------------------------------------------------------------	----

CAPÍTULO V

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO AOS PROBLEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS

V.1 - FORMULAÇÃO INTEGRAL GERAL	92
V.2 - TRATAMENTO DO PROBLEMA ESTACIONÁRIO	94
V.3 - APLICAÇÃO DA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE	96
V.4 - OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES NA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE	97
V.5 - TRATAMENTO DO PROBLEMA DINÂMICO	98
V.6 - OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES NA DUPLA RECIPROCIDADE	99
V.7 - PONTOS INTERNOS DE INTERPOLAÇÃO OU PÓLOS.....	101
V.8 - FORMULAÇÃO NUMÉRICA	102
V.9 - AVANÇO NO TEMPO	103
V.10 - ESTRUTURA DO MODELO COMPUTACIONAL EM CÓDIGO FORTRAN	105

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS NUMÉRICOS

VI.1 - RESULTADOS DE PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS	108
<i>VI.1.1 - BARRA CARREGADA UNIAXIALMENTE.....</i>	<i>108</i>
<i>VI.1.2 - DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL- 1</i>	<i>114</i>
<i>VI.1.3 - DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL- 2</i>	<i>116</i>
<i>VI.1.4 - DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL- 3</i>	<i>118</i>
VI.2 - RESULTADOS DO PROBLEMA DINÂMICO.....	120
<i>VI.2.1 - ANÁLISE DE PROBLEMAS HOMOGÊNEOS.....</i>	<i>121</i>
<i>VI.2.2 - ANÁLISE DE PROBLEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS.....</i>	<i>124</i>

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	132
----------------------------------	-----

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - COMENTÁRIOS INICIAIS

Esta dissertação é mais uma contribuição discente realizada dentro da linha de pesquisa que envolve aplicações dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) em engenharia, pertinente a área de Sistemas Mecânicos do PPGEM/UFES, linha esta que vem sendo desenvolvida há vários anos e que já resultou na divulgação de vários artigos técnicos e dissertações de mestrado. Assim como muitos dos trabalhos que precederam a este, há uma continuidade no esforço de pesquisa desta dissertação. Entretanto, cabe destacar dois trabalhos anteriores, que serviram de base a esta dissertação.

Primeiramente, uma pesquisa de iniciação científica sobre a utilização da Técnica da Quase-Dupla Reciprocidade em meios não-homogêneos, de autoria de Pereira sob a orientação de Loeffler [1, 2]. Este trabalho realizou as primeiras simulações de casos uni e bidimensionais. Embora já estivesse bastante adiantado, o citado trabalho ainda não estava concluído. A finalização das simulações estáticas, que definiriam a consistência da formulação, acabou

também por fazer parte do conteúdo preliminar desta dissertação, já que, o prosseguimento para simulação de casos dinâmicos dependeria deste.

O segundo trabalho consistiu de dissertação de mestrado feito por Castillo [3], com o título de “Análise Comparativa do Desempenho dos Esquemas Incrementais de Avanço no Tempo com o MEC”. Nesta pesquisa o autor expõe os resultados de sua análise do comportamento de alguns esquemas incrementais de avanço no tempo, requeridos na formulação com Dupla Reciprocidade. Destaques especiais são dados à questão do amortecimento fictício, presente em muitos dos esquemas, e aos limites da faixa de valor do incremento de tempo, impostos pela formulação.

De certa maneira, a presente dissertação mescla os esforços desses dois citados trabalhos anteriores, mas apresenta ainda uma originalidade, que é o emprego simultâneo da formulação com Dupla Reciprocidade e da formulação com Quase-Dupla Reciprocidade. Isto significa a aplicação duplicada de procedimentos de interpolação decorrentes do uso de funções auxiliares, que demandam cuidado extremo na simulação numérica por força da perda de precisão, especialmente diante das peculiaridades e sensibilidade dos processos de modelagem dinâmica.

Inegavelmente esta pesquisa tem relação com os diversos trabalhos já desenvolvidos empregando a formulação com Dupla Reciprocidade, devida a Nardini e Brebbia [4], e a recente formulação com Quase-Dupla Reciprocidade, originada da pesquisa de Loeffler e Mansur [5]. Esta última formulação, aplicada primordialmente em casos difusivos-advectivos, pode ser adaptada ao exame da mecânica dos meios contínuos heterogêneos com relativa facilidade. Boa parte da bibliografia associada a este trabalho, bem como os aspectos históricos que compõem as formulações do MEC aqui empregadas, podem ser colhidas na referência [5] e também em Loeffler et al [6] e Massaro e Loeffler [7], e não serão aqui repetidas neste texto.

Há de se destacar, também, a complexidade do fenômeno da propagação de ondas, que no caso em questão, trás consigo uma série de particularidades inerentes à mudança de

propriedades do meio físico, discutidas oportunamente, junto da qual se alojam problemas relacionados à modelagem numérica, ou seja, efeitos não físicos ligados a discretização espacial e temporal.

Assim como nos trabalhos precedentes, os problemas aqui examinados pertencem a uma classe na qual o campo físico é escalar, ou seja, aqueles nos quais a variável básica ou primal é um tensor de ordem zero, podendo ser representado exclusivamente por um número indicativo de sua intensidade, como a temperatura, por exemplo. Na realidade, existem várias classes de problemas de campo escalar, governados por equações matemáticas bem conhecidas como: Equação de Laplace, Poisson, Helmholtz etc. Loeffler e Pereira, em outros trabalhos [8,9,10], estudaram e simularam problemas fisicamente associados à torção uniforme em barras prismáticas, condução e convecção forçada de calor em dutos, tração uniforme em barras axialmente solicitadas e ainda a deflexão em membranas elásticas planas.

I.2 - OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho consiste na utilização da formulação da Quase-Dupla Reciprocidade do Método dos Elementos de Contorno na modelagem de problemas escalares bidimensionais no qual o meio físico contínuo não é homogêneo, considerando ainda o comportamento dinâmico do sistema.

O fenômeno da propagação de ondas foi modelado naturalmente pelo equilíbrio instantâneo entre as forças de inércia, as forças elásticas e a solicitação externa. A formulação com Dupla Reciprocidade foi empregada para tratar matematicamente os termos de inércia, enquanto a derivada segunda com relação ao tempo foi discretizada e resolvida através de um esquema incremental de integração direta.

Aproveitando-se da experiência colhida em trabalhos anteriores, esta dissertação também

objetivou explorar caminhos para aplicações importantes do MEC envolvendo meios não homogêneos. Neste contexto destaca-se a engenharia de Petróleo, pois o problema geotécnico de identificação de hidrocarbonetos inclui atualmente a avaliação do comportamento das camadas geológicas diante de solicitações dinâmicas, caso típico de problema de propagação de ondas em meios contínuos não-homogêneos.

I.3 - METODOLOGIA DE PESQUISA

Como a modelagem dinâmica é bastante complexa e, de acordo com a abordagem escolhida, que se desenvolve a partir de um modelo estático preliminar, foi feita uma revisão detalhada de todo o material relacionado a esta parte. A partir dos trabalhos citados, renovadas simulações foram implementadas computacionalmente, intentando construir uma sólida base sobre a capacidade da formulação para, somente então, partir para investigações e aplicações no domínio da dinâmica. Desta forma, obedeceu-se aos cânones da metodologia científica, investigando o tema por partes e examinando-se criteriosamente as questões que ainda não eram bem conhecidas.

A precisão dos resultados obtidos pela formulação proposta, que nos casos dinâmicos inclui o acoplamento da formulação Quase-Dupla Reciprocidade com a Dupla Reciprocidade tradicional, foi aferida através da solução de exemplos-teste nos quais soluções analíticas disponíveis são consideradas como referência.

No caso estático, verificou-se o desempenho do método comparando os resultados numéricos obtidos na simulação de problemas de referência, os quais possuem solução analítica disponível, usando como critério o erro médio percentual dos valores nodais envolvidos na discretização. Foram feitos testes apurando os efeitos do refinamento da malha na convergência dos resultados numéricos para as soluções analíticas. Também foram efetuadas experiências numéricas alterando-se o gradiente de rigidez do meio heterogêneo e verificando

a capacidade da formulação em representar com precisão a variação das propriedades em todo o domínio.

No caso dinâmico, diante da ausência de soluções analíticas na literatura especializada, foi gerada especialmente para esta dissertação, a solução de um problema dinâmico no qual uma barra de rigidez variável é sujeita a uma solicitação externa súbita. Nesse caso, escolhe-se um elemento no contorno, colocado de forma estratégica, para comparar sua resposta dinâmica com a solução analítica ao longo do tempo.

No presente trabalho, embora o modelo numérico e o código computacional gerados também sejam válidos para os casos dinâmicos bidimensionais, foi feita exclusivamente a simulação dinâmica de um problema fisicamente unidimensional. Normalmente, os casos bidimensionais requerem maior esforço numérico, demandam mais tempo de processamento computacional e apresentam uma precisão inferior. Assim, a solução satisfatória desses problemas avaliaria de modo mais efetivo as potencialidades da formulação proposta. No entanto, requereriam também a obtenção de uma outra solução analítica de referência, comumente mais elaborada, para validação de resultados o que inviabilizou a utilização de tais problemas.

Por falta de tempo hábil, não foi possível utilizar um outro método numérico eficaz para validação de resultados, como o Método dos Elementos Finitos ou Método dos Volumes Finitos, por exemplo. O uso destes métodos permitiria inclusive avaliar o desempenho da formulação na solução de um caso bidimensional dinâmico. Reconhece-se, entretanto, o grande interesse desse tipo de comparação, que serve também como alternativa de validação dentro do contexto da metodologia científica.

Um atenuante para a simulação exclusiva de um problema dinâmico unidimensional provém das aplicações objetivadas com essa pesquisa. Os problemas físicos que envolvem a dinâmica de meios não-homogêneos são, em sua grande maioria, problemas vetoriais e não simplesmente escalares. Considerando a equação escalar da onda, apenas o problema da propagação unidimensional tem valor prático, porque os problemas referentes a identificação de hidrocarbonetos através de análise sísmica usam a modelagem escalar apenas como uma

pré-análise, já que, a hipótese de que as ondas têm uma frente plana e trafegam quase que longitudinalmente, rigorosamente, não verdadeira. Assim, apenas o modelo de ondas unidimensionais efetivamente é empregado em termos práticos, com caráter preliminar. A modelagem vetorial, a partir das equações da Elastodinâmica, que caracterizaria de modo mais preciso o processo de propagação de ondas, foge ao escopo desta dissertação, ficando como sugestão para futuros trabalhos.

Por sua vez, os transientes térmicos em meios heterogêneos, que poderiam ser aqui tratados por serem problemas escalares, são governados por uma equação temporalmente mais simples, envolvendo a derivada primeira da variável primal, no caso a temperatura, com relação ao tempo, tais problemas, não foram examinados devido à prioridade em examinar a dinâmica dos meios não-homogêneos com suas implicações dentro dos interesses da indústria de petróleo.

I.4 - MEIOS E RECURSOS

Os programas computacionais utilizados para simulação foram adaptados de códigos acadêmicos anteriormente empregados em outros trabalhos, ou então foram gerados especificamente para a realização do presente trabalho. Não foram empregados programas comerciais, a não ser na realização de pequenas tarefas auxiliares, como a realização de gráficos.

Mais detalhadamente, o trabalho foi desenvolvido computacionalmente empregando um código computacional gerado em linguagem FORTRAN, concebido inicialmente para modelagem de problemas difusivos-advectivos, através de uma formulação denominada de Quase-Dupla Reciprocidade do Método dos Elementos de Contorno. Este programa, no trabalho de iniciação científica já citada, foi adaptado para poder representar e processar problemas de campo escalar não-homogêneos e nesta dissertação a parcela dinâmica foi

introduzida de acordo com a formulação da Dupla Reciprocidade.

Os problemas difusivos-advectivos são similares aos problemas de meios não homogêneos, de modo que se requereu apenas a adaptação de uma sub-rotina e a criação de outra para a inclusão das características de heterogeneidade do meio, a qual foi imposta elemento a elemento de contorno discretizado. Ainda foi necessária a inserção de uma sub-rotina com o intuito de gerar a matriz responsável pela parcela transiente e uma sub-rotina para fazer o avanço no tempo. O ambiente computacional empregado foi um microcomputador de processador ATHLON 1.7GHz com 356 MB de memória RAM, rodando o sistema operacional Windows XP com o compilador Fortran do PowerStation 4.0.

CAPÍTULO II

MODELAGEM MATEMÁTICA

II.1 - O PROBLEMA FÍSICO

A engenharia usa hipóteses simplificadoras em seus modelos físicos e matemáticos para poder viabilizá-los em seus propósitos práticos. Com o organograma mostrado na Figura II.1, visualiza-se o caminho a ser percorrido neste trabalho, conforme os cânones da ciência.

A tarefa inicial consiste em idealizar o objeto real em estudo, de acordo com preceitos já fundamentados ou que se pretende fundamentar para a área do conhecimento em questão. Ao definir o tipo de fenômeno e as hipóteses acerca do seu comportamento, se engloba o campo de atividade sensível a ser desenvolvido. Nesta primeira fase, o objeto de análise enquadra-se de acordo com a área de conhecimento científico que se deseja investigar, chamando-se sua representação intelectual por modelos físico, químico, econômico etc.

Há duas vertentes principais na análise do modelo físico: a experimental e a matemática. Em algumas disciplinas, a metodologia observacional é aplicada, como na Astronomia.

O modelo matemático se apresenta em termos de equações diferenciais integrais ou

inequações, acompanhadas dos respectivos valores iniciais e de contorno que particularizam o problema.

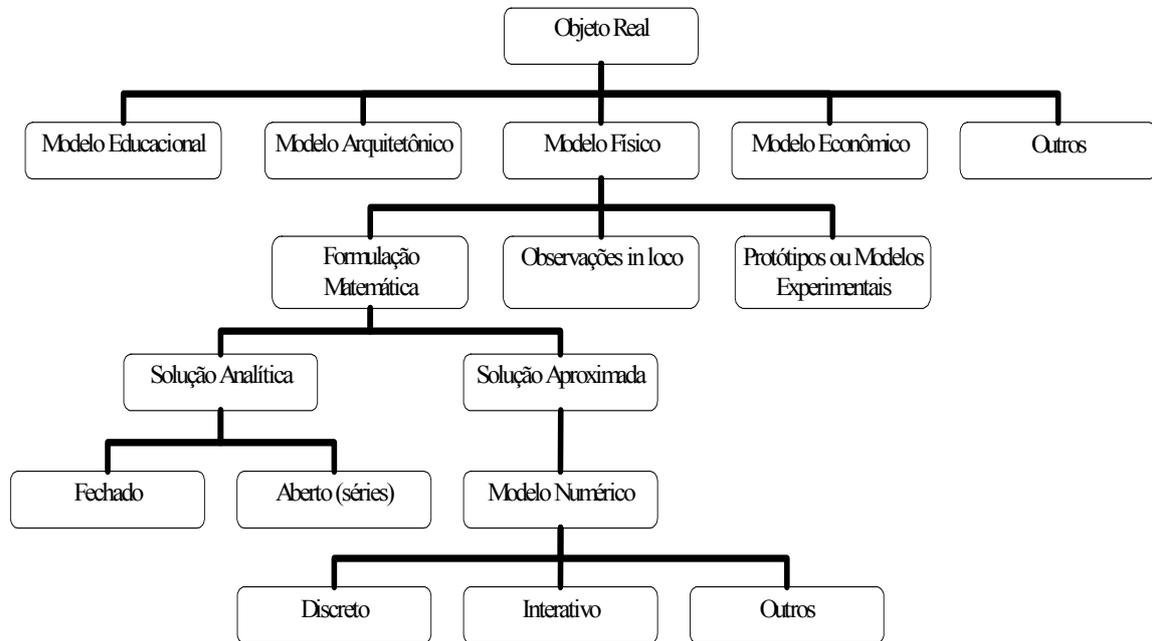


Figura II.1 – Etapas da modelagem científica, na busca de soluções para problemas físicos através da matemática

Quando é realizada a análise experimental, deve ser detalhada toda a técnica utilizada para medir o fenômeno, usando artifícios que possibilitem obter valores de medidas usuais capazes de traduzir a situação real do objeto estudado.

Na linha da matemática, dependendo da complexidade das equações, a solução analítica pode não existir no estágio atual do desenvolvimento científico, tornando-se necessária à utilização de técnicas aproximadas para tratar o problema. A maior parte destas técnicas fundamenta-se no conceito de discretização e caracterizam uma nova fase do modelo, usualmente chamado de modelo numérico. Esta última abordagem será tratada com maiores detalhes para o caso específico estudado neste trabalho.

II.1.1 - GRUPOS DE MATERIAIS

Já no que se refere ao comportamento mecânico dos materiais constitutivos, é bastante comum encontrar considerações simplificadoras que admitem as propriedades termomecânicas da maior parte dos materiais como sendo homogêneas ao longo de toda a extensão de um corpo. Essa consideração é adequada e aproximadamente verdadeira para muitos materiais, onde a não-homogeneidade se situa num nível microscópico. É o caso dos aços e outros materiais metálicos: numa escala mais ampla é perfeitamente plausível considerar sua constituição e suas propriedades físicas como homogêneas. Naturalmente, existem exceções nesse elenco de materiais com ampla aplicação na engenharia.

O primeiro grupo consiste daqueles nos quais a interferência por processo de soldagem se faz presente. São casos muito comuns e que precisam ser adequadamente examinados. O processo de soldagem altera significativamente a microestrutura do material fazendo com que a hipótese de homogeneidade seja imprecisa. É muito comum se examinar componentes de máquinas, estruturas e equipamentos nos quais existem peças com partes soldadas de modo que o domínio seja setorialmente não-homogêneo. Neste caso, os métodos mais modernos de análise termomecânica em engenharia – os métodos numéricos que serão apresentados a seguir – tratam facilmente estes casos através da inserção das diferentes propriedades em cada setor.

Um segundo grupo consiste dos materiais compósitos. Atualmente uma boa parte dos materiais de engenharia modernos, de arrojada aplicação industrial, são materiais compósitos, isto é, materiais constituídos de um conjunto de fases diferenciáveis numa qualquer escala dimensional. Estes, são constituídos por materiais compostos que possuem diferentes propriedades térmicas, mecânicas e orientações geométricas, levando a existência de heterogeneidade material numa escala dimensional qualquer. A possibilidade de mesclar materiais não metálicos de propriedades térmicas mais adequadas, fazem com que o número de exemplos práticos tenha crescido e se tornado bastante comum, como na indústria aeronáutica onde a leveza destes materiais são importantes. Naturalmente, é preciso ter um bom controle do projeto, de modo a associar adequadamente a orientação das direções

principais de resistência mecânica com as direções de solicitação. No entanto, a classe dos materiais compósitos, em função das dimensões reduzidas das faixas de cada diferente material, se enquadra como materiais homogêneos não isotrópicos.

Outros materiais representativos desta classe são, por exemplo, ossos, madeira, e os materiais com gradação de propriedades funcionais (FGM's). Esta última categoria tem sido objeto de grandes incentivos e investimento em pesquisa, particularmente da NASA e de outras grandes empresas que lidam com empreendimentos arrojados. Os materiais funcionais podem combinar adequadamente as propriedades térmicas e mecânicas ao longo de sua extensão, permitindo ainda a obtenção de uma melhor ponderação entre peso e outras propriedades. Os ônibus espaciais, que trafegam a grandes velocidades, particularmente no seu reingresso na atmosfera terrestre, estão sendo projetados usando materiais funcionais. O próximo grande desafio consiste em fabricá-lo de modo comercialmente viável, embora existam outros problemas a serem compreendidos mais adequadamente, como o seu comportamento não-linear. A metodologia apresentada neste trabalho também se ajusta adequadamente ao modelo requerido pelos materiais funcionais.

Um terceiro grupo compõe-se de materiais tipicamente não homogêneos, seja em nível microestrutural, seja no plano da análise macroscópica. É o caso dos solos. O estudo das fundações de edifícios e estruturas em geral não dispensa o emprego de modelos que considerem a não-homogeneidade do meio contínuo. Critérios especiais para avaliar a resistência do solo sob os diferentes tipos de solicitação mecânica são utilizados há muitas décadas, compondo uma disciplina específica obrigatória nos cursos de engenharia civil, que é a Mecânica dos Solos. Não é demais ressaltar a importância dos problemas de fundações em edificações, pois estas podem englobar a análise de uma simples habitação popular até uma usina termonuclear.

II.1.2 - INFLUÊNCIA DINÂMICA

O problema dinâmico diferencia-se do estático fundamentalmente em dois aspectos. A primeira diferença é a alteração no tempo de alguma variável do problema, o que torna a descrição do problema bem mais complexa em relação ao problema estático. A segunda diferença consiste que, no problema dinâmico, os esforços internos da estrutura terão que equilibrar não apenas as forças externas aplicadas, mas também a força de inércia resultante da aceleração da própria estrutura [11].

Em geral, se a força de inércia representa uma parcela significativa da carga equilibrada pela força elástica interna da estrutura, a característica dinâmica do problema deve ser considerada na solução. Por outro lado, se o movimento é suficientemente lento e a força inércia é muito pequena, a análise para qualquer instante pode ser feita através dos procedimentos característicos da estática, apesar do carregamento e da resposta variarem rigorosamente no tempo [12]. Isto pode ser feito, na prática, no projeto de estruturas de muitas edificações e máquinas nas quais o carregamento possua as características quase-estáticas mencionadas e os materiais empregados garantam suficiente rigidez e amortecimento intrínseco. A maior parte dos projetos de engenharia civil e mesmo da engenharia mecânica, são baseados em premissas de quase-estaticidade. Todavia, muitos casos importantes, que tem ganhado destaque por conta das necessidades arrojadas da engenharia atual, não podem prescindir de um tratamento rigorosamente dinâmico.

A área de Mecânica dos Solos possui uma importante vertente, de maior complexidade, que diz respeito à análise sísmica. Muitas regiões sofrem constantemente a ação de terremotos. As análises dos sismos e dos seus efeitos sobre as estruturas, solos ou vias de comunicação, representam grandes desafios devido à complexidade dos fenômenos associados aos mecanismos de geração sísmica e de propagação de ondas em meios heterogêneos. No entanto, os avanços de conhecimento na última década, bem como a experiência recolhida junto dos grandes sismos que ocorreram recentemente, permitiram reduzir a vulnerabilidade sísmica e, simultaneamente, definir soluções técnicas mais arrojadas e mais econômicas.

Sabe-se, desde a muito tempo, que a resposta sísmica de determinado local é condicionada pelas condições geológicas e geotécnicas das formações superficiais existentes no local. Apesar das cidades estarem praticamente toda sobre uma mesma formação geológica, as diferenças de espessura, assim como o nível freático e outros parâmetros físicos, podem modificar a sua resposta sísmica. Por outro lado, é possível prever, do ponto de vista teórico, a resposta sísmica da cidade utilizando uma modelagem matemática adequada. Para tal, torna-se necessário conhecer os vários parâmetros físicos associados às camadas geológicas e, em particular, a velocidade de propagação das ondas S e P, tanto no interior das camadas mais profundas, como nas camadas superficiais. Em muitos casos, as formações geológicas superficiais encontram-se cobertas por depósitos superficiais espessos (aterros e depósitos de vertente), pelo que também é muito importante determinar as características geotécnicas destes depósitos [13].

A caracterização sísmica do meio físico pode fazer-se através da propagação das ondas sísmicas. Essa propagação traduz-se na sollicitação dos materiais a tensões dinâmicas que resultam em deformação dos mesmos. Nesse sentido as constantes elásticas dos materiais estão ligadas às velocidades de propagação das ondas compressionais (P) e de corte (S). Costuma-se admitir a razão das velocidades das ondas S e P depender exclusivamente do coeficiente de Poisson e que a velocidade das ondas S é uma função do módulo dinâmico de corte e da densidade [14].

Aproveitando o conhecimento técnico e científico nesta área, uma outra aplicação similar tem ganhado enorme importância dentro da engenharia moderna: a modelagem geotécnica com vistas à prospecção de petróleo. Os princípios mecânicos empregados na análise sísmica podem ser completamente aproveitados na identificação de lençóis de petróleo, usando métodos matemáticos que ofereçam uma expectativa de resposta dinâmica sensível à sua presença. Em linhas gerais, são feitas experiências de campo nas quais se colhem respostas às excitações provenientes de explosões controladas. Fazendo simulações numéricas correlatas, pode-se inferir a existência de lençóis petrolíferos pela diferença de resultados entre as experiências numéricas e de campo. Esta é uma das mais modernas áreas na engenharia atual. Naturalmente que em se tratando do emprego de métodos numéricos, é preciso haver uma boa representação matemática tanto da dinâmica do problema quanto da parte de discretização da

heterogeneidade do meio físico, no que se ocupa o presente trabalho.

II.2 - O PROBLEMA MATEMÁTICO

No contexto atual da engenharia moderna, cujos problemas são cada vez mais complexos, se faz necessário empregar técnicas de solução mais adequadas ao ritmo acelerado de trabalho das empresas que disputam competitivamente o mercado, sem dispensar os requisitos de qualidade e segurança necessários a todos os projetos. Assim, é preciso dispor de técnicas e recursos cada vez mais eficientes e sofisticados. A modelagem matemática é hoje a mais importante opção da engenharia para dar celeridade aos projetos e evitar testes e experiências de campo ou de laboratório que seriam extremamente custosas e lentas.

Os problemas nos quais o meio constitutivo é heterogêneo são destes casos nos quais é preciso dispor de ferramentas computacionais que viabilizem a sua solução nas condições em que o carregamento e a geometria envolvida não sejam simples. Nesta condição, usualmente o modelo matemático resultaria em equações diferenciais parciais extremamente complexas, sem solução disponível por qualquer método analítico.

Assim, nos casos dinâmicos das investigações na área de prospecção de petróleo e sismologia, a obtenção da solução do problema seria impraticável sem os recursos de métodos matemáticos aproximados que empregam o computador para processamento de dados.

O Método dos Elementos de Contorno é uma dessas técnicas modernas de solução de problemas físicos que podem ser representados por modelos matemáticos. A escolha do Método dos Elementos de Contorno, conforme já foi exposto, se prende ao fato deste trabalho estar vinculado a uma linha de pesquisa já estruturada no programa de Pós Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da UFES. Algumas justificativas sobre a escolha deste método e maiores comentários sobre as características das demais técnicas numéricas em geral são feitos posteriormente.

II.3 - EQUAÇÃO DE CAMPO ESCALAR GENERALIZADA

Em termos matemáticos, o modelo abordado envolve uma grandeza escalar como variável básica do problema e pode ser considerado como um caso particular de um equacionamento mais geral, pertinente à chamada Teoria de Campo Escalar [15].

É interessante apresentar o contexto desta teoria, no qual se inserem alguns problemas interessantes para a Engenharia. Assim sendo, dentro deste enfoque, a Equação de Campo Escalar Generalizada se expressa em termos diferenciais através da forma:

$$\nabla \cdot (K \nabla u) = \lambda^n D^n (u) + p \quad (\text{II.1})$$

Onde ∇ é o operador nabla, K é um diádico, u é a variável básica ou primal, também chamada comumente de potencial, λ^n são escalares e D é o operador das derivadas com relação ao tempo de ordem n . No lado direito da equação anterior, p é uma função conhecida, enquanto o operador D soma-se em n com λ , definindo o tipo de problema dependente do tempo que se deseja considerar, ou seja:

$$\lambda^n D^n (u) = \lambda^0 u + \lambda^1 \partial (u) / \partial t + \lambda^2 \partial^2 (u) / \partial t^2 \quad (\text{II.2})$$

Assim, as derivadas temporais do potencial para os casos dados pela Equação de Difusão, Equação da Onda e Equação de Klein-Gordon, entre outras, podem ser facilmente contabilizadas no modelo.

Quanto às derivadas espaciais, o caso bidimensional mais completo consiste da dependência do diádico K com o potencial. Nesse caso, chega-se à estrutura diferencial típica do problema difusivo não-linear.

Para o caso de materiais não homogêneos, as propriedades constitutivas dependem das variáveis espaciais, e neste caso pode-se escrever que:

$$\nabla \cdot (K \nabla u) = \partial [K_{11} \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_1 + \partial [K_{12} \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_1 + \partial [K_{21} \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_2 + \partial [K_{22} \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_2 \quad (\text{II.3})$$

II.4 - ALGUNS CASOS PARTICULARES IMPORTANTES

Particularizando-se a equação (II.3), considere-se que K_{12} e K_{21} sejam nulos, ou seja, o material não é homogêneo, mas é ortotrópico. Assim:

$$\nabla \cdot (K \nabla u) = \partial [K_{11} \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_1 + \partial [K_{22} \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_2 \quad (\text{II.4})$$

No caso de isotropia local, tem-se $K_{11} = K_{22} = K(x_1, x_2)$. Nesta situação pode-se definir:

$$L1(u) = \partial [K(x_1, x_2) \partial(u) / \partial x_1] / \partial x_1 + \partial [K(x_1, x_2) \partial(u) / \partial x_2] / \partial x_2 \quad (\text{II.5})$$

Um outro operador que pode ser obtido a partir da expressão geral que retrata fisicamente, com boa precisão, um problema de transmissão de calor por condução e convecção em meio isotrópico. Neste caso, consideram-se as seguintes hipóteses junto a equação (II.3):

$$K_{12} = -K_{21} \quad (\text{II.6})$$

$$K_{11} = K_{22} = K \quad (\text{II.7})$$

$$K = \text{constante (meio homogêneo)} \quad (\text{II.8})$$

Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (K \nabla u) &= K \left[\frac{\partial^2 (u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (u)}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial K_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial (u)}{\partial x_2} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x_2} \frac{\partial (u)}{\partial x_1} = \\ &= K \left[\frac{\partial^2 (u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (u)}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial K_{21}}{\partial x_1} \frac{\partial (u)}{\partial x_2} + \frac{\partial K_{21}}{\partial x_2} \frac{\partial (u)}{\partial x_1}\end{aligned}\quad (\text{II.9})$$

Admitindo-se que:

$$\frac{\partial K_{12}}{\partial x_2} = +V_{x_1} = -\frac{\partial K_{21}}{\partial x_2} \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{\partial K_{21}}{\partial x_1} = V_{x_2} = -\frac{\partial K_{12}}{\partial x_1} \quad (\text{II.11})$$

onde V_{x_1} e V_{x_2} são componentes do vetor velocidade \mathbf{v} de escoamento nas direções x_1 e x_2 , respectivamente. Assim, chega-se ao operador desejado:

$$L2(u) = K \left[\frac{\partial^2 (u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (u)}{\partial x_2^2} \right] - V_{x_1} \left[\frac{\partial (u)}{\partial x_1} \right] - V_{x_2} \left[\frac{\partial (u)}{\partial x_2} \right] \quad (\text{II.12})$$

Constata-se que o modelo proposto guarda obediência à condição de incompressibilidade:

$$\frac{\partial V_{x_1}}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_{x_2}}{\partial x_2} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Não é difícil perceber que existe uma relação entre $L1(u)$ e $L2(u)$, desde que se faça uma associação dos coeficientes da equação (II.5) com o campo de velocidades dado pelas equações (II.6) e (II.7), na seguinte forma:

$$\frac{\partial K}{\partial x_1} = -V_{x_1} \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{\partial K}{\partial x_2} = -V_{x_2} \quad (\text{II.15})$$

A equivalência citada mostra a similaridade entre os problemas de difusão-advecção e com problemas isotrópicos heterogêneos.

Outros modelos interessantes e que fazem parte do objetivo do presente projeto são dedutíveis a partir da equação geral, segundo a mesma metodologia, apenas obedecendo a outras

simplificações. Considere o caso em que ocorre difusão em regime estacionário num meio contínuo ortotrópico. As propriedades físicas constitutivas são constantes ao longo das direções coordenadas, mas são distintas entre si, ou seja:

$$K_{12} = K_{21} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$K_{11} \neq K_{22} \quad (\text{II.17})$$

Neste caso, o operador diferencial fica:

$$L3(u) = K_{11} \partial^2 (u) / \partial x_1^2 + K_{22} \partial^2 (u) / \partial x_2^2 \quad (\text{II.18})$$

Nos casos homogêneos em que há isotropia, o operador precedente simplifica-se ainda mais, resultando em:

$$L4(u) = K \left[\partial^2 (u) / \partial x_1^2 + \partial^2 (u) / \partial x_2^2 \right] \quad (\text{II.19})$$

A consideração de um termo independente p significa fisicamente a presença das denominadas ações de domínio, tais como fontes, sorvedouros, campos gravitacionais etc. Considere a equação de governo posta na forma:

$$L4(u) = p \quad (\text{II.20})$$

Esta última expressão é conhecida como Equação de Poisson, de ampla aplicação na área de eletromagnetismo e mecânica em geral. No caso mais simples abordado pela Teoria de Campo Escalar, conhecido como Equação de Laplace, a função p é nula.

II.5 - MODELO ESTÁTICO PARA MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS

II.5.1 - MODELO GERADO A PARTIR DA EQUAÇÃO DE CAMPO

Neste trabalho interessa o caso exposto anteriormente no qual um meio contínuo isotrópico possui propriedades heterogêneas com relação as variáveis espaciais, ou seja, o modelo matemático é representado pelo operador $L1(u)=0$. Tal modelo, é repetido aqui por conveniência:

$$\partial \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial (u)}{\partial x_1} \right] / \partial x_1 + \partial \left[K(x_1, x_2) \frac{\partial (u)}{\partial x_2} \right] / \partial x_2 = 0 \quad (\text{II.21})$$

Considere Ω um domínio espacial bidimensional no qual um ponto X qualquer tem sua posição dada por $X=X(x_1, x_2)$ com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Adotando a notação indicial einsteniana, pode-se escrever a equação (II.5) de modo conciso, na forma:

$$[K(X)u(X)_{,i}]_{,i} = 0 \quad (\text{II.22})$$

Ressalta-se que a função escalar u genericamente pode representar deslocamento, temperatura ou qualquer propriedade física similar. Normalmente, princípios de equilíbrio, balanço de energia ou compatibilidade estão envolvidos na dedução da equação anterior, mesmo quando se consideram fenômenos físicos distintos.

Para que a modelagem matemática seja bem posta, é necessário prescrever condições de fronteira compatíveis com a ordem da equação. Assim, os problemas examinados são constituídos de um domínio $\Omega(X)$, onde X representa as variáveis espaciais do campo, delimitado este por um contorno $\Gamma(X)$, sujeito a condições específicas para cada problema em particular.

Para problemas estacionários, essas condições de contorno são dadas por:

$$u(X) = \bar{u} \text{ para } X \in \Gamma_u \text{ (condição essencial)} \quad (\text{II.23})$$

$$K(X)u(X)_{,i}n(X)_i = \bar{q} \text{ para } X \in \Gamma_q \text{ (condição natural)} \quad (\text{II.24})$$

Nas equações, de modo geral, $\Gamma_u(X)$ é a parte do contorno pertencente a $\Gamma(X)$ onde são prescritas condições de contorno essenciais (também chamadas de condições de Dirichlet ou do primeiro tipo) que envolvem diretamente o potencial u ; de forma complementar, $\Gamma_q(X)$ representa as regiões da fronteira onde são conhecidas as condições de contorno naturais (também conhecidas como condições de Newman ou do segundo tipo) arrolando derivadas do potencial com relação a normal ao contorno. Nestas equações $\Gamma_u(X)$ e $\Gamma_q(X)$ representam as fronteiras do meio contínuo e $n(X)_i$ representa o vetor normal unitário em um ponto qualquer destas. Nos problemas de Mecânica dos Sólidos, q adquire o significado de tensão aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode ser interpretado como um fluxo imposto de energia difusiva.

II.5.2 - MODELO GERADO A PARTIR DE PRINCÍPIOS FÍSICOS

Neste item é apresentada a dedução da expressão (II.21) a partir de considerações físicas, ou seja, agora o equacionamento desejado não é obtido com base em simplificações de um modelo matemático geral. Agora se considera o comportamento de uma grandeza física genérica num meio contínuo bidimensional, segundo princípios de balanço e conservação de massa e energia.

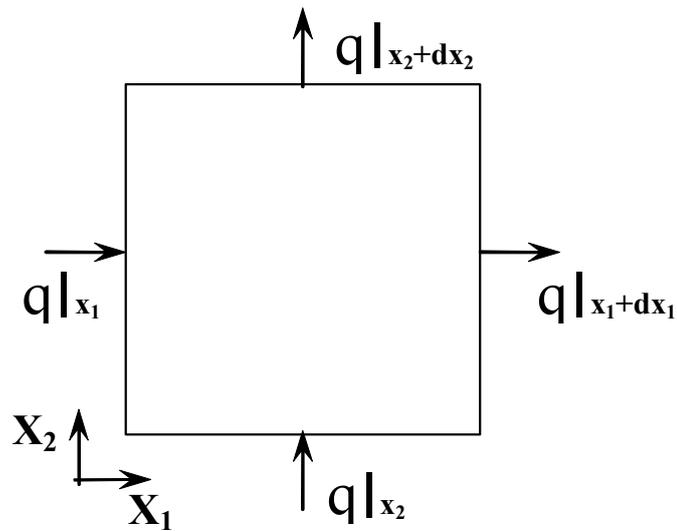


Figura II.2 - Representação dos fluxos num domínio não homogêneo

De acordo com a Figura II.2, faz-se o balanço de energia:

$$q|_{x_1} dx_2 + q|_{x_2} dx_1 + q|_f dx_1 dx_2 = q|_{x_1+dx_1} dx_2 + q|_{x_2+dx_2} dx_1 \quad (\text{II.25})$$

Agrupando melhor a equação (II.25), obtém-se:

$$\left[q|_{x_1+dx_1} - q|_{x_1} \right] dx_2 + \left[q|_{x_2+dx_2} - q|_{x_2} \right] dx_1 = q|_f dx_1 dx_2 \quad (\text{II.26})$$

Cabe ressaltar que a grandeza q , presente em todo o equacionamento exposto no item anterior, representa uma grandeza que pode ser energia térmica, massa, deformação ou qualquer outra que obedeça a uma lei de formação fisicamente conhecida. Por exemplo, no caso de um problema de condução de calor, q representaria o fluxo de calor difusivo, dado pela Lei de Fourier, ou seja:

$$q_n = -K \frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{II.27})$$

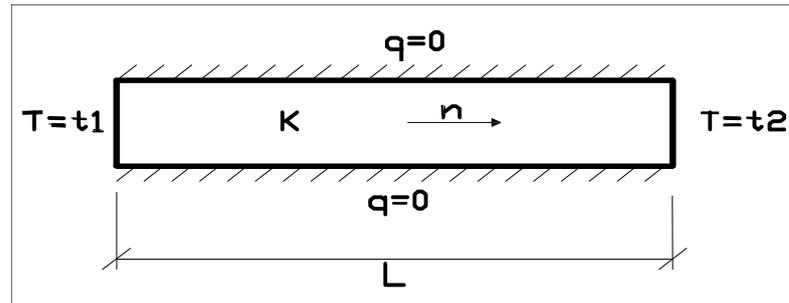


Figura II.3 – Representação da Lei de Fourier

Nesta última equação K representa a condutividade térmica do material, t seria a temperatura e n a direção na qual se examina o fluxo de calor por unidade de área, que nestes casos se direciona do valor de maior temperatura para o de menor, justificando o sinal negativo. No caso da percolação ou escoamento em meios porosos, o fluxo é governado pela Lei de Darcy, que descreve o fluxo em termos de um gradiente do potencial de altura de fluido aplicado à superfície porosa ϕ . Assim, tem-se:

$$q_n = -K \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (\text{II.28})$$

A difusão de uma substância num meio fluido é dada por uma lei semelhante, denominada Lei de Fick, onde a concentração c do constituinte representa o potencial. O fluxo de massa do constituinte por unidade de área é proporcional ao gradiente da concentração:

$$q_n = -D \frac{\partial c}{\partial n} \quad (\text{II.29})$$

Onde D é a constante de proporcionalidade.

Também nos problemas de barras axialmente solicitadas existe relação similar:

$$q_n = -E \frac{\partial u}{\partial n} \quad (\text{II.30})$$

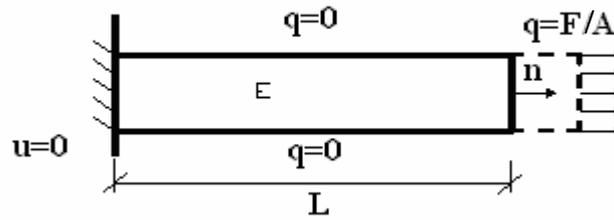


Figura II.4 – Parâmetros em uma barra axialmente solicitada

Nesta última equação \$E\$ é o módulo de elasticidade longitudinal enquanto \$u\$ representa o deslocamento axial. O significado de \$q\$ é o de tensão normal associada. Nos problemas de geotecnia, a maior parte dos modelos de propagação de onda admite um estado de tensão unidimensional, sob a hipótese de que, a uma certa distância do ponto de excitação, as ondas são planas.

Relações similares às leis de Fourier, Darcy, Fick etc., também existem nos problemas de cisalhamento em fluidos e nos problemas de torção em barras prismáticas de seção qualquer, submetidas à torção uniforme [16].

Aplicando série de Taylor linearizada para qualificar os diferenciais dos fluxos que aparecem na equação (II.26) tem-se, na direção \$x_1\$, por exemplo:

$$\left[q|_{x_1+dx_1} - q|_{x_1} \right] = d q|_{x_1} = \frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 \tag{II.31}$$

Na direção \$x_2\$ o mesmo pode ser feito:

$$\left[q|_{x_2+dx_2} - q|_{x_2} \right] = d q|_{x_2} = \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 \tag{II.32}$$

Substituindo as equações anteriores na expressão (II.26) tem-se:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] dx_2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_2 \right] dx_1 = q|_f dx_1 dx_2 \tag{II.33}$$

Cancelando os diferenciais comuns, chega-se finalmente a:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \left(K \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right] = q|_f \quad (\text{II.34})$$

II.6 - MODELO DINÂMICO PARA OS MEIOS CONTÍNUOS HETEROGÊNEOS

O equacionamento anteriormente feito para os modelos estacionários a partir da Equação de Campo Escalar Generalizada é realizado, agora, com parcela dinâmica de aceleração do lado direito da equação (II.21), considerando $\lambda^0 = \lambda^1 = 0$ e $\lambda^2 = \rho$, onde ρ é a massa específica por unidade de comprimento. Assim sendo, tem-se:

$$\partial \left[K(x_1, x_2) \partial(u) / \partial x_1 \right] / \partial x_1 + \partial \left[K(x_1, x_2) \partial(u) / \partial x_2 \right] / \partial x_2 = 1/\rho \left(\partial^2 u / \partial t^2 \right) \quad (\text{II.35})$$

E, em notação indicial a equação anterior fica:

$$[K(X)u(X)_{,i}]_{,i} = \rho \ddot{u}(t) \quad (\text{II.36})$$

Esta equação é a principal motivação desta dissertação, envolvendo o estudo do comportamento espacial de materiais não-homogêneos ao longo do tempo. Embora a equação de campo seja geral, nesse caso o fenômeno físico associado é o deslocamento e sua derivada primeira, relacionada a deformação específica. A equação será desenvolvida para um caso particular unidimensional onde se pretende obter uma solução analítica para fins de validação dos resultados da solução aproximada. Para isto, no Capítulo III tratará exclusivamente da obtenção da solução analítica.

Para o melhor entendimento do comportamento dinâmico do modelo heterogêneo, é essencial discutir primeiramente o fenômeno dinâmico considerando o meio homogêneo.

II.6.1 - AVALIAÇÃO DA DINÂMICA EM MATERIAIS HOMOGÊNEOS

A formulação é a mesma enunciada na equação (II.36); todavia, a propriedade do material K não é dependente das variáveis espaciais, degenerando-se em uma constante e simplificando o problema. Considerando também a isotropia, resulta a conhecida Equação da Onda [14]:

$$u(X)_{,ii} = \frac{1}{c^2} \ddot{u}(t) \quad (\text{II.37})$$

Na qual c é a velocidade de propagação da onda no meio elástico. Naturalmente, esta última propriedade é dependente apenas das propriedades físicas do material e é dada pela seguinte expressão:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{II.38})$$

Onde E é módulo de elasticidade longitudinal que equivale a K em equações anteriores, e ρ é a massa específica do material, neste caso, constante.

Portanto, para o material homogêneo a velocidade de propagação c permanecerá constante ao longo da barra, uma vez que, tanto E como ρ , interdependentes, são constantes.

Ao analisar o processo dinâmico em uma barra unidimensional engastada numa extremidade e livre na outra, com um súbito alongamento prescrito nesta, o entendimento das principais características do problema dinâmico fica evidente. Percebe-se que a onda causada pelo deslocamento prescrito é similar à onda originada pelo pulso produzido por um pacote discreto de energia, semelhante ao que ocorre em uma corda quando se aplica um único pulso.

Fisicamente, um deslocamento aplicado instantaneamente representaria um rompimento da barra. No entanto, a formulação matemática possui coerência e representa corretamente o fenômeno. Portanto, como a finalidade essencial deste trabalho é verificar a precisão da

formulação e se neste caso particular for obtido uma boa precisão, provavelmente, para os casos mais simples, a formulação conseguirá ser mais precisa ainda.

A Figura II.5 simula o fenômeno de propagação de ondas para este caso, e o gráfico de deslocamento longitudinal para a partícula “P” na parte central da barra é mostrado ao lado.

Um correto detalhamento das fases é importante para entender toda seqüência do movimento no decorrer do tempo [17].

No instante em que o deslocamento é aplicado, Figura II.5 (b), a seção próxima à extremidade livre absorve sozinha e bruscamente todo deslocamento imposto através de uma deformação ($\varepsilon = U_0 / L$). A dinâmica do problema cria uma onda, que tem a função de transportar a energia necessária à movimentação das partículas. Esta onda se propagará ao longo da barra com velocidade finita c em direção à extremidade engastada. A onda transporta conjuntamente a tensão, deformação e deslocamento. As duas primeiras são relacionadas através da conhecida equação estudada na disciplina de Resistência dos Materiais de alguns cursos de engenharia:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (\text{II.39})$$

Onde σ é a tensão, ε a deformação e E o módulo de elasticidade do material.

Como já foi dito, essas grandezas não são transmitidas instantaneamente ao outro lado da barra, devido à inércia das partículas de massa. O deslocamento U_0 imposto à extremidade livre da barra no instante $t = 0$ altera o comprimento da barra para $L+U_0$, que assim permanecerá imutável durante todo o processo.

No estágio (c), observa-se o deslocamento sendo transmitido para as seções adjacentes integralmente, não havendo, portanto, qualquer tipo de perda de energia, uma vez que a E.D.P. utilizada não contém nenhum termo referente à dissipação de energia. A onda neste caso, representa saltos das partículas de um ponto a outro em função de uma quantidade de energia aplicada. Nota-se que após a passagem da onda, mesmo deslocadas, as partículas permanecem estáticas.

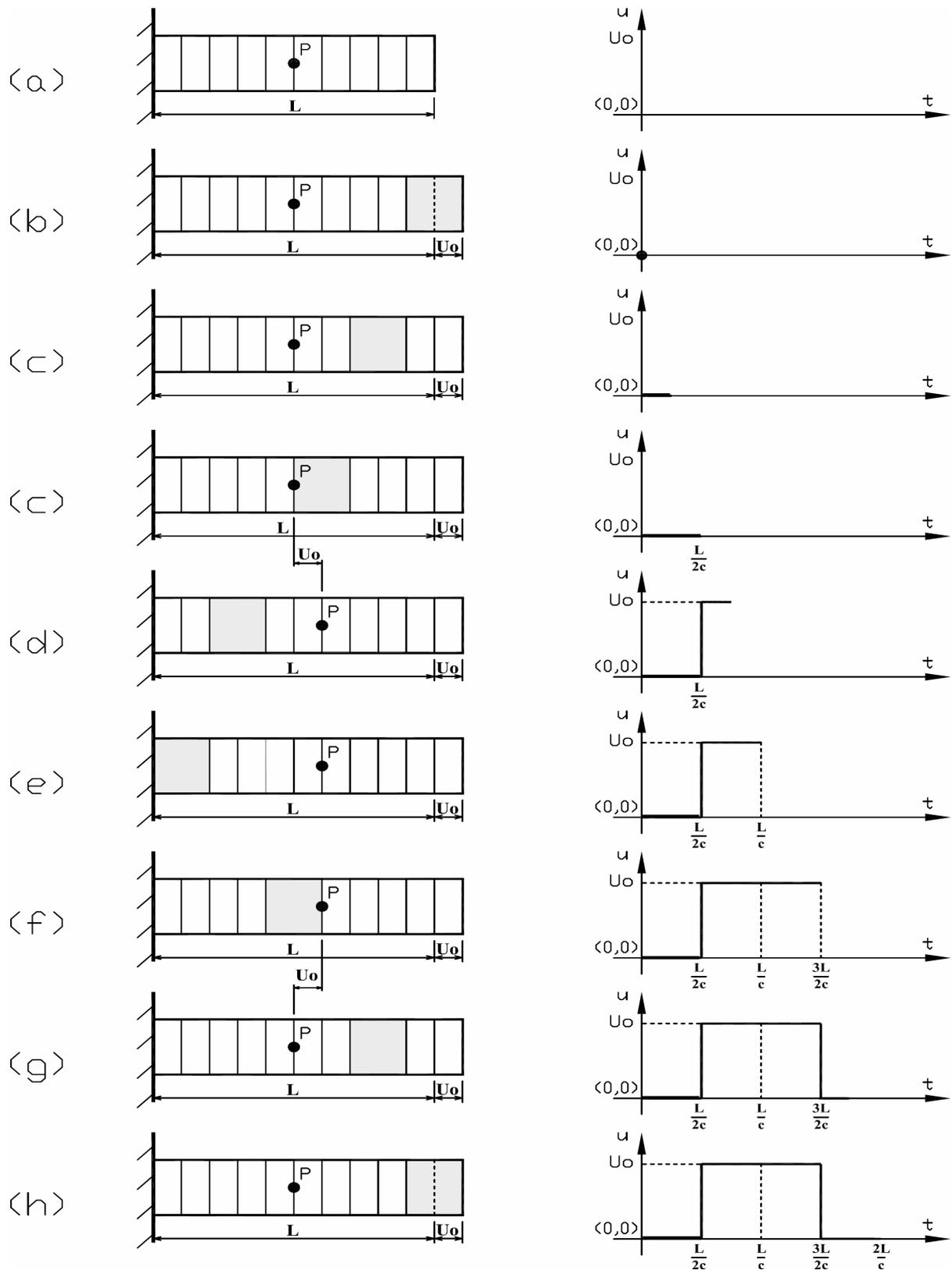


Figura II.5 – Dinâmica dos deslocamentos em uma barra homogênea alongada de U_0 .

Em (d), a onda atinge o ponto “P” situado em $L/2$, que se desloca para a direita de U_0 . Com o avanço da frente de onda todas as seções onde a onda já passou ficam deslocadas de U_0 na direção do extremo livre, sem qualquer movimento em seu maciço. O material posterior à frente de onda também permanece completamente imóvel ou sem carregamento nem deslocamento.

No estágio (e), a onda chega a extremidade fixa e será refletida como outra onda trativa que agora deslocará do ponto “P” para a esquerda Figura II.5 (f), fazendo-o voltar a sua posição original. Visualizando o gráfico de deslocamento em função do tempo conjuntamente com a viagem da onda na barra o fenômeno pode ser bem entendido.

O período completo termina quando a onda retorna a extremidade livre, estágio (h), tomando a barra a mesma configuração inicial, quando o ciclo começou no estágio (b).

O problema da aplicação de deslocamento na extremidade livre é semelhante ao caso em que um pulso ou pacote de energia é aplicado subitamente. Este, difere substancialmente do problema onde a condição de contorno na extremidade livre é uma tensão aplicada constantemente, pois neste último caso, admite-se um modelo onde energia é transmitida continuamente, isto é, a extremidade livre onde atua a tensão emite ininterruptamente pacotes de energia que irão se sobrepor com pacotes já em trânsito.

II.6.2 - AVALIAÇÃO DA DINÂMICA EM MATERIAIS HETEROGÊNEOS

A equação a ser usada é a mesma do item anterior, contudo, a propriedade do material K não é independente das variáveis espaciais, como na situação homogênea, sendo a equação idêntica a equação (II.36) e, está, é repetida aqui por conveniência:

$$[K(X)u(X)]_{,i} = \rho \ddot{u}(t) \quad (\text{II.40})$$

A dinâmica deste problema, se torna mais complexa e difícil de se entender em relação aos problemas anteriores, aqui são encontradas algumas dificuldades de interpretação, peculiares à dinâmica em materiais não homogêneos.

Ao trabalhar com materiais não homogêneos e tentar retratar o fenômeno de propagação de ondas, é preciso considerar que a onda sofre contínua reflexão, que pode ser fisicamente creditada à variação de propriedades do corpo. Sabe-se que a variação do módulo de elasticidade, da massa específica ou da área da seção transversal da barra pode interferir substancialmente no processo de propagação de ondas. No entanto, a velocidade de propagação da onda, varia apenas nos casos em que as propriedades do material se modificam.

Os detalhes referentes a este assunto merecem um capítulo especial onde será obtida a solução analítica de um determinado problema partindo da equação diferencial. Uma análise dos resultados será realizada através dos gráficos encontrados, podendo, desta maneira, propor uma analogia similar a realizada na Figura II.5.

CAPÍTULO III

SOLUÇÃO ANALÍTICA DE UM PROBLEMA HETEROGÊNEO

III.1 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Este capítulo mostra a resolução da equação analítica de um problema dinâmico unidimensional isotrópico, no qual o módulo de elasticidade varia ao longo do domínio. Este problema, fisicamente correspondente a uma barra de módulo de elasticidade variável, é representado matematicamente por uma equação diferencial parcial com coeficiente variáveis, cuja variável básica representa o deslocamento [18]. As variáveis independentes são a coordenada espacial e tempo. A ausência de equações dessa natureza na bibliografia procurada requereu o desenvolvimento específico desta solução nesta dissertação de mestrado. A solução é relativamente complexa e despendeu um tempo apreciável de trabalho. No entanto, as informações teóricas obtidas durante a simulação computacional foram recompensadoras. O trabalho matemático igualmente foi elucidativo, exigindo conhecimentos de vários tópicos da matemática avançada. Sua obtenção poderá facilitar outros pesquisadores na busca de soluções analíticas de referência.

Neste problema a variável u representa o deslocamento e a variável q a tensão atuante na direção normal ao contorno, está última, nada mais é do que a derivada de u em relação a

variável espacial.

Neste ponto, são cabíveis alguns comentários sobre o modelo matemático considerado e os problemas físicos de barras. O modelo examinado considera somente a propagação de ondas longitudinais. Isto implica na admissão de um estado uniaxial de tensões, que se afasta significativamente do que ocorre nos problemas reais quando a diferença entre o comprimento e a largura não é tão expressiva. Esta discrepância entre a realidade e o modelo unidimensional pode também ser agravada em situações onde as variações da rigidez são bruscas. Todavia, havendo variações suaves das propriedades físicas, em termos práticos é usual desprezar os efeitos bidimensionais existentes.

Conforme mencionado, o problema em questão é espacialmente unidimensional. Visando particularizá-lo para obtenção de uma solução específica, as condições de contorno são tais que a barra está engastada em uma extremidade e submetida a ação de um deslocamento prescrito u_0 , aplicado subitamente e que não muda com o tempo, conforme pode ser visualizado na Figura III.1.

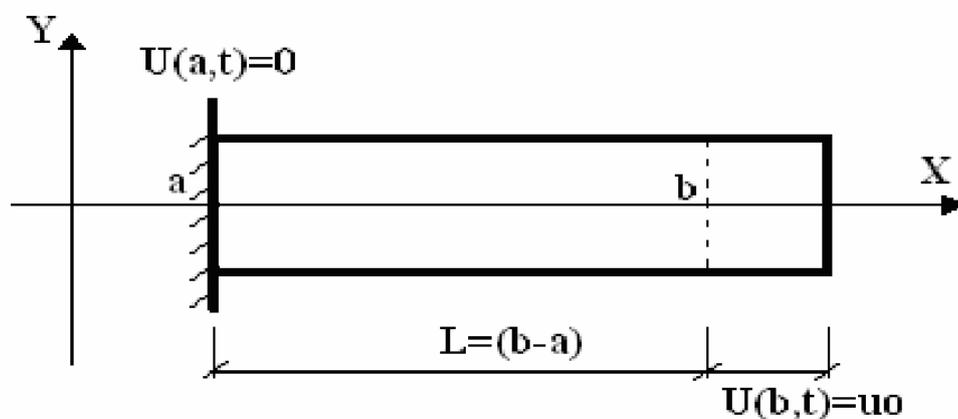


Figura III.1 – Características geométricas e condições de contorno em uma barra engastada numa extremidade e deslocada ,repentinamente, na outra

As condições de contorno já comentadas e mostradas na figura acima, são aqui repetidas para simplificar o seu uso mais adiante:

$$U(a, t) = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$U(b, t) = u_o \quad (\text{III.2})$$

Sabe-se que num problema dependente do tempo, é necessário estabelecer as condições iniciais do problema. Devido ao seu caráter dinâmico, a prescrição de deslocamentos e velocidades no instante inicial em todo o domínio X é exigida, conforme mostrado a seguir:

$$\dot{U}(X, 0) = 0 \quad (\text{III.3})$$

$$U(X, 0) = 0 \quad (\text{III.4})$$

A equação diferencial parcial (II.40) é agora simplificada, de forma tal que o módulo de elasticidade E correspondente à propriedade K do material mencionada anteriormente no capítulo II, seja igual a:

$$E(x)u'' + E'(x)u' = \rho\ddot{u} \quad (\text{III.5})$$

Onde ρ é a densidade volumétrica do material.

Como o caso tratado é heterogêneo, o módulo de elasticidade deve depender das variáveis espaciais. Portanto, a dependência assumida aqui, para a obtenção da solução analítica, será quadrática, na forma:

$$E(x) = \frac{E_o x^2}{a^2} \quad (\text{III.6})$$

Agora, com a substituição de (III.6) em (III.5) tem-se:

$$x^2 u'' + 2xu' = \frac{a^2 \rho \ddot{u}}{E_o} \quad (\text{III.7})$$

Para se obter a função u da equação acima não existe muitas técnicas possíveis de serem empregadas, aqui, será usada a técnica de separação de variáveis.

III.2 - USO DA TÉCNICA DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

O artifício usado na resolução consiste em supor a possibilidade de separação das variáveis espaciais e temporais em funções distintas e independentes, de modo que possam ser trabalhadas através da série de Fourier. Então:

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (\text{III.8})$$

O índice n deve ser entendido apenas como um índice de controle do somatório e não deve ser confundido com a notação indicial Einsteniana.

Considerando que $\bar{u}(x)$ deve atender sozinho a condição de contorno não homogênea, visto que, a outra parcela da equação (III.8) deverá ter condições apenas homogêneas, assim, calcula-se $\bar{u}(x)$ substituindo-o na equação diferencial (III.7):

$$x^2 \bar{u}'' + 2x\bar{u}' = 0 \quad (\text{III.9})$$

É importante notar que o lado direito da equação é nulo porque $\bar{u}(x)$ é independente do tempo e por isso não possui derivadas temporais.

Fazendo, então, a substituição de variáveis como se mostra:

$$\bar{u}'(x) = w(x) \quad (\text{III.10})$$

Pode-se calcular w , substituindo (III.10) em (III.9) :

$$x^2 w' + 2xw = 0 \rightarrow w' + \frac{2}{x} w = 0$$

$$\frac{dw}{dx} = -2 \frac{w}{x}$$

$$\int \frac{dw}{w} = -2 \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln(w) = -2 \ln(x) + c = -2 \ln(x) + \ln(D) = \ln\left(\frac{D}{x^2}\right)$$

$$w = \frac{D}{x^2} \quad (\text{III.11})$$

Com a igualdade existente entre a equação (III.11) e (III.10), não é difícil perceber o procedimento a ser realizado:

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{D}{x^2} \rightarrow \int d\bar{u} = D \int \frac{dx}{x^2} \rightarrow \bar{u} = -\frac{D}{x} + F$$

Obtém-se desta maneira a função procurada:

$$\bar{u}(x) = F - \frac{D}{x} \quad (\text{III.12})$$

Resta, no entanto, encontrar as constantes F e D. Assim, a primeira condição de contorno dada pela equação (III.1) gera uma relação entre as constantes exposta abaixo:

$$\bar{u}(x=a) = F - \frac{D}{a} = 0$$

$$F = \frac{D}{a} \quad (\text{III.13})$$

De posse desta última relação e com a segunda condição de contorno (III.2), tem-se:

$$\bar{u}(x=b) = u_o \rightarrow u_o = \frac{D}{a} - \frac{D}{b} = D \left(\frac{b-a}{ab} \right)$$

$$D = \frac{u_o ab}{b-a} \quad (\text{III.14})$$

Definidas as constantes, volta-se a equação (III.12) para encontrar a função $\bar{u}(x)$:

$$\bar{u}(x) = \frac{u_o ab}{a(b-a)} - \frac{u_o ab}{x(b-a)}$$

De forma compacta:

$$\bar{u}(x) = \frac{u_o ab}{(b-a)} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right] \quad (\text{III.15})$$

Agora é preciso encontrar $X_n(x)$ $T_n(t)$ a partir da forma proposta na expressão (III.8), através da substituição desta na equação (III.7), tem-se:

$$x^2 X_n''(x) \cdot T_n(t) + 2x X_n'(x) \cdot T_n(t) = \frac{\alpha^2 \rho}{E_o} X_n(x) \cdot \ddot{T}_n(t)$$

$$x^2 \frac{X_n''(x)}{X_n(x)} + 2x \frac{X_n'(x)}{X_n(x)} = C \frac{\ddot{T}_n(t)}{T_n(t)} = -\alpha_n^2 \quad (\text{III.16})$$

Para evitar a solução trivial α^2 deve ser precedido do sinal negativo. Quando α^2 for positivo ou nulo constata-se a solução trivial.

A equação diferencial parcial deverá ser separada em uma equação diferencial ordinária espacial e outra temporal, tal como é mostrado abaixo:

$$x^2 X_n''(x) + 2x X_n'(x) + \alpha^2 X_n(x) = 0 \quad (\text{III.17})$$

$$K \ddot{T}_n + \alpha^2 T_n(t) = 0 \quad (\text{III.18})$$

III.3 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL ESPACIAL

Trabalhando primeiramente a equação espacial fazendo a substituição da variável x por:

$$x = e^w \rightarrow w = \ln x$$

$$X'_n = \frac{dX_n}{dx} = \frac{dX_n}{dw} \frac{dw}{dx} = \frac{dX_n}{dw} \frac{1}{x}$$

$$X''_n = \frac{dX'_n}{dx} = \frac{dX'_n}{dw} \frac{dw}{dx} = \frac{dX'_n}{dw} \frac{1}{x}$$

$$\frac{dX'_n}{dw} = \frac{d}{dw} \left(\frac{dX_n}{dx} \right) = \frac{d}{dw} \left(\frac{dX_n}{dw} \frac{1}{x} \right) = \frac{d^2 X_n}{dw^2} \frac{1}{x} + \frac{dX_n}{dw} \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\frac{d}{dw} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dw} \left(\frac{1}{e^w} \right) = -e^{-w} = -\frac{1}{x}$$

$$X'_n = \frac{dX_n}{dw} \frac{1}{x}$$

$$X''_n = \left[\frac{d^2 X_n}{dw^2} \frac{1}{x} - \frac{dX_n}{dw} \frac{1}{x} \right] \frac{1}{x} = \left[\frac{d^2 X_n}{dw^2} - \frac{dX_n}{dw} \right] \frac{1}{x^2}$$

(III.19)

Considerando (III.19) em (III.17) pode-se ver que:

$$x^2 \left[\frac{d^2 X_n}{dw^2} - \frac{dX_n}{dw} \right] \frac{1}{x^2} + 2x \frac{1}{x} \frac{dX_n}{dw} + \alpha_n^2 X_n = 0$$

$$\frac{d^2 X_n}{dw^2} + \frac{dX_n}{dw} + \alpha_n^2 X_n = 0$$

(III.20)

Sendo a equação característica correspondente:

$$\lambda_n^2 + \lambda_n + \alpha_n^2 = 0$$

Cujo resultado, matematicamente associado aos autovalores do problema, é:

$$\lambda_{n,1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha_n^2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - 4\alpha_n^2}{4}}$$

Da equação característica conclui-se que a parte real é:

$$p1 = -\frac{1}{2} \quad (\text{III.21})$$

E, a virtual é:

$$q_n i = \sqrt{\frac{1-4\alpha_n^2}{4}} = \sqrt{(-1)(\alpha_n^2 - 1/4)} = \sqrt{-1} \sqrt{\alpha_n^2 - 1/4}$$

$$q_n i = \sqrt{\alpha_n^2 - 1/4} \cdot i \quad (\text{III.22})$$

Mais uma vez, a necessidade de soluções não triviais requer que esses autovalores sejam complexos. Nesse caso, a solução geral para $X_n(w)$ é apontada abaixo:

$$X_n(w) = e^{p1 \cdot w} [C1_n \text{sen}(q_n w) + C2_n \cos(q_n w)]$$

Retornando à variável x , os autovetores ficam:

$$X_n(x) = x^{p1} [C1_n \text{sen}(q_n \ln x) + C2_n \cos(q_n \ln x)] \quad (\text{III.23})$$

Em poder da expressão (III.8) e das condições de contorno homogêneas, tem-se na extremidade engastada a seguinte igualdade:

$$u(a, t) = \bar{u}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = 0$$

Já que a condição é independente do tempo, a igualdade é verdadeira para qualquer $T_n(t)$:

$$0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) = 0$$

Portanto:

$$X_n(a) = a^{-1/2} [C1_n \text{sen}(q_n \ln a) + C2_n \cos(q_n \ln a)] = 0$$

$$C2_n \cos(q_n \ln a) = -C1_n \text{sen}(q_n \ln a)$$

logo:

$$C2_n = -C1_n \tan(q_n \ln a) \quad (\text{III.24})$$

Deve-se observar que quando $x = b$ a condição é heterogênea, mas, como $\bar{u}(x)$ atende a esta condição sozinho não será necessário acatá-la aqui. Considerando, então, a condição de contorno homogênea, tem-se:

$$\begin{aligned} X_n(b) &= b^{-1/2} [C1_n \text{sen}(q_n \ln b) - C1_n \tan(q_n \ln a) \cos(q_n \ln b)] = 0 \\ C1_n [\text{sen}(q_n \ln b) - \tan(q_n \ln a) \cos(q_n \ln b)] &= 0 \rightarrow \text{sen}(q_n \ln b) - \tan(q_n \ln a) \cos(q_n \ln b) = 0 \\ \tan(q_n \ln b) - \tan(q_n \ln a) &= 0 \rightarrow \text{sen}(q_n \ln b - q_n \ln a) = 0 \end{aligned}$$

A igualdade só é verdadeira quando:

$$\begin{aligned} q_n \ln b - q_n \ln a &= n\pi \\ q_n &= \frac{n\pi}{\ln(b/a)} \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

Ao comparar (III.25) com (III.23), se observa a relação exposta a seguir:

$$\begin{aligned} q_n = \frac{n\pi}{\ln(b/a)} = \sqrt{\alpha_n^2 - 1/4} \rightarrow \frac{n^2 \pi^2}{[\ln(b/a)]^2} &= \alpha_n^2 - 1/4 \\ \alpha_n^2 &= \frac{n^2 \pi^2}{[\ln(b/a)]^2} + \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

A equação (III.23) fica determinada ao nela se substituir as equações (III.25), (III.24) e (III.22), como se pode constatar:

$$X_n(x) = C1_n x^{-1/2} \left\{ \text{sen} \left[\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \ln x \right] - \cos \left[\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \ln x \right] \tan \left[\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \ln a \right] \right\} \quad (\text{III.27})$$

III.4 - RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL TEMPORAL

Já que toda a parte espacial da solução proposta fica determinada, resta somente encontrar a solução da parcela temporal referente a $T_n(t)$ na equação (III.18) mostrada abaixo:

$$K\ddot{T}_n(t) + \alpha^2 T_n = 0$$

A equação característica desta equação deve ser solucionada:

$$\left(\lambda_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{K} \right) e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{K} = 0$$

$$\lambda_n^2 = -\frac{\alpha_n^2}{K}$$

Logo, a parte real é nula sendo identificada por:

$$p_2 = 0 \tag{III.28}$$

E, a parte imaginária são determinadas:

$$\lambda_n = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_n^2}{K}} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_n^2}{K}} \cdot i = g_n i \tag{III.29}$$

Com a substituição de (III.26) em (III.29), g_n é estabelecido:

$$g_n = \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \right)^2 + 0,25 \right) E_o}{\rho a^2}} \tag{III.30}$$

E a solução geral para a equação característica (III.29) fica:

$$T_n(t) = t^{p^2} [D1_n \cos(g_n t) + D2_n \text{sen}(g_n t)]$$

Mas, de acordo com a expressão (III.28), tem-se:

$$T_n(t) = D1_n \cos(g_n t) + D2_n \text{sen}(g_n t) \quad (\text{III.31})$$

Para se aceitar a equação anterior, esta terá de atender as condições iniciais no contexto da solução proposta por (III.8), seguindo a mesma técnica anteriormente usada para tratar a parcela espacial. Assim sendo:

$$\dot{u}(x, 0) = 0 \rightarrow \dot{T}_n(0) = -D1_n g_n \text{sen}(g_n 0) + D2_n g_n \cos(g_n 0) = 0$$

$$0 + D2_n g_n \rightarrow D2_n = 0$$

$$T_n(t) = D1_n \cos g_n t \quad (\text{III.32})$$

Com a segunda condição inicial (III.4), tem-se:

$$u(x, 0) = \bar{u}(x) + \sum_n X_n(x) \cdot T_n(0) = 0$$

$$-\bar{u}(x) = \sum_n X_n(x) \cdot T_n(0) \quad (\text{III.33})$$

Ao substituir (III.15), (III.27) e (III.32) em (III.33), e ainda convencionando que:

$$F_n = C1_n \cdot D1_n$$

Chega-se a:

$$\frac{u_o ab}{b-a} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{-1/2} [\text{sen}(q_n \ln x) - \cos(q_n \ln x) \tan(q_n \ln a)] \cos(g_n 0) \quad (\text{III.34})$$

Para melhor visualização, a solução geral neste ponto está na forma:

$$u(x,t) = \frac{u_o ab}{b-a} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right] + x^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left[\text{sen}(q_n \ln x) - \cos(q_n \ln x) \tan(q_n \ln a) \right] \cos(g_n t) \quad (\text{III.35})$$

III.4.1 - DETERMINAÇÃO DO COEFICIENTE TEMPORAL (F_N) ATRAVÉS DAS PROPRIEDADES DE ORTOGONALIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A determinação de F_n é fundamental, e só será possível graças às propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas expostas na tabela III.1 a seguir [15]:

Tabela III.1 – Propriedades de Ortogonalidade das Funções Trigonômicas

Para m ≠ n, num intervalo de ½(meio) período	
$\int_{\gamma}^{\gamma+h} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{h}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{h}\right) dx = 0$	$\int_{\gamma}^{\gamma+h} \cos\left(\frac{n\pi x}{h}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi x}{h}\right) dx = 0$
Para m = n, num intervalo de ½(meio) período	
$\int_{\gamma}^{\gamma+h} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{h}\right) dx = \frac{h}{2}$	$\int_{\gamma}^{\gamma+h} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{h}\right) dx = \frac{h}{2}$
$\int_{\gamma}^{\gamma+h} \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{h}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{h}\right) dx = 0$	

No entanto, o lado direito da equação (III.34) consiste de um somatório de funções em senos e co-senos. Então, tal equação será resolvida multiplicando os dois lados da mesma por:

$$\left[\text{sen}(q_m \ln(x)) / (x^{-1/2} \cdot x) \right]$$

E integrando em ambos os lados, conforme é mostrado a seguir:

$$\int_a^b \frac{u_o ab}{b-a} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right] \frac{\text{sen}(q_m \ln x)}{x^{-1/2} x} dx =$$

$$= \int_a^b \left\{ \frac{\text{sen}(q_m \ln x)}{x^{-1/2} x} \sum_{n=1}^{\infty} F_n [\text{sen}(q_n \ln x) - \cos(q_n \ln x) \tan(q_n \ln a)] \right\} dx \quad (\text{III.36})$$

Agora, fazendo uma substituição de variáveis como se segue:

$$u = \ln(x) \quad \rightarrow \quad x = e^u, \quad \rightarrow \quad dx = e^u du \quad (\text{III.37})$$

Tem-se:

$$\frac{u_o ab}{b-a} \int_{\ln a}^{\ln b} \left[\frac{1}{e^u} - \frac{1}{a} \right] \frac{\text{sen}(q_m u)}{e^{-u/2} \cdot e^u} e^u du =$$

$$= \int_{\ln a}^{\ln b} \left\{ \frac{\text{sen}(q_m u)}{e^u} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot [\text{sen}(q_n u) - \cos(q_n u) \tan(q_n \ln a)] \right\} e^u du \quad (\text{III.38})$$

Para que se possa usar as propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas deve-se, primeiro, identificar se os limite de integração acima são coerentes com os da Tabela III.1. Esta coerência é visualizada abaixo:

$$h = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad e \quad y = \ln a$$

Resolvendo o lado direito da equação (III.38) e sabendo que se calcula uma resposta para meio período, tem-se:

$$\int_{\ln a}^{\ln b} \left\{ F_n \left[\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} u\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} u\right) \tan\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \ln a\right) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} u\right) \right\} du$$

$$= F_n \left[\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right) - 0 \right] = \frac{1}{2} \cdot F_n \cdot \ln(b/a)$$

Para um período completo, simplesmente multiplica-se o resultado por dois. Assim, o lado direito da equação (III.38) fica sendo igual a:

$$F_n \cdot \ln(b/a) \tag{III.39}$$

Ao se resolver o lado esquerdo da equação (III.38), percebe-se que as funções trigonométricas não estão isoladas neste lado da igualdade, como no caso precedente. Portanto, será impossível a simples duplicação do resultado conseguido em meio período. Para se obter um período completo, pode-se modificar o limite inferior de integração, da seguinte forma:

$$h = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$y = \ln a - \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{a^2}{b}\right)$$

Com esta conveniente modificação, consegue-se a solução para um período completo como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{u_o ab}{b-a} \int_{\ln(a^2/b)}^{\ln b} \left[\frac{1}{e^{u/2}} - \frac{e^{u/2}}{a} \right] \text{sen}(q_n u) du &= \frac{u_o ab}{b-a} \left[\int_{\ln(a^2/b)}^{\ln b} e^{-u/2} \text{sen}(q_n u) du - \int_{\ln(a^2/b)}^{\ln b} \frac{e^{u/2}}{a} \text{sen}(q_n u) du \right] = \\ &= \frac{u_o ab}{b-a} \cdot \frac{1}{0,25 + q_n^2} \left[-e^{-u/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n u)}{2} + q_n \cos(q_n u) \right) - \frac{e^{u/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n u)}{2} - q_n \cos(q_n u) \right) \right]_{\ln(a^2/b)}^{\ln b} = \\ &= \frac{u_o ab}{b-a} \left(\frac{1}{0,25 + q_n^2} \right) \left\{ \left[-b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} + q_n \cos(q_n \ln b) \right) - \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} - q_n \cos(q_n \ln b) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. - \left[-\frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln(a^2/b))}{2} + q_n \cos(q_n \ln(a^2/b)) \right) - b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln(a^2/b))}{2} - q_n \cos(q_n \ln(a^2/b)) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Tendo para a equação (III.38) tanto o lado direito como o esquerdo, divide-se estes por $\ln(b/a)$, e chega-se a constante F_n :

$$\begin{aligned}
F_n &= \frac{u_o ab}{b-a} \cdot \frac{1}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{0,25 + q_n^2} \cdot \\
&\cdot \left[-b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} + q_n \cos(q_n \ln b) \right) - \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} - q_n \cos(q_n \ln b) \right) \right] + \\
&+ \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln \frac{a^2}{b})}{2} + q_n \cos \left(q_n \ln \frac{a^2}{b} \right) \right) + b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln \frac{a^2}{b})}{2} - q_n \cos \left(q_n \ln \frac{a^2}{b} \right) \right) \Big] \quad (\text{III.40})
\end{aligned}$$

III.5 - SOLUÇÃO FINAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL

Finalmente, substituindo (III.40) em (III.35), obtém-se a solução completa:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{u_o ab}{b-a} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right] + \frac{u_o ab}{b-a} \cdot \frac{x^{-1/2}}{\ln(b/a)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0,25 + q_n^2} \cdot \left[-b^{-1/2} \cdot \right. \\
&\left. \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} + q_n \cos(q_n \ln b) \right) - \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} - q_n \cos(q_n \ln b) \right) \right] + \\
&+ \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln \frac{a^2}{b})}{2} + q_n \cos \left(q_n \ln \frac{a^2}{b} \right) \right) + b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln \frac{a^2}{b})}{2} - q_n \cos \left(q_n \ln \frac{a^2}{b} \right) \right) \Big] \quad (\text{III.41}) \\
&\cdot \left[\text{sen}(q_n \ln x) - \cos(q_n \ln x) \tan(q_n \ln a) \right] \cdot \cos(g_n t)
\end{aligned}$$

Onde q_n e g_n são dados respectivamente pela equação (III.25) e (III.30), repetidos aqui por conveniência.

$$q_n = \frac{n\pi}{\ln(b/a)}$$

$$g_n = \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{n\pi}{\ln(b/a)} \right)^2 + 0,25 \right) E_o}{\rho a^2}}$$

É importante determinar a derivada do deslocamento $u(x,t)$ em relação a variável espacial. Esta importância está na possibilidade de poder entender com maior facilidade o comportamento da deformação e conseqüentemente da tensão através da relação entre estas dada por (II.39), visualizada abaixo:

$$\sigma(x,t) = E \cdot \frac{du}{dx} \quad (\text{III.42})$$

Onde a deformação é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{du(x,t)}{dX} = & \frac{u_o ab}{x^2 (b-a)} + \frac{u_o ab}{b-a} \cdot \frac{x^{-3/2}}{\ln(b/a)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{0,25 + q_n^2} \cdot \left[-b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} + \right. \right. \\ & + q_n \cos(q_n \ln b) \left. \right) - \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln b)}{2} - q_n \cos(q_n \ln b) \right) + \\ & + \frac{b^{1/2}}{a} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln \frac{a^2}{b})}{2} + q_n \cos \left(q_n \ln \frac{a^2}{b} \right) \right) + b^{-1/2} \left(\frac{\text{sen}(q_n \ln \frac{a^2}{b})}{2} - q_n \cos \left(q_n \ln \frac{a^2}{b} \right) \right) \left. \right] \\ & \cdot \left[q_n \cos(q_n \ln x) - \frac{\text{sen}(q_n \ln x)}{2} + \left(q_n \text{sen}(q_n \ln x) + \frac{\cos(q_n \ln x)}{2} \right) \tan(q_n \ln a) \right] \cos(g_n t) \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

III.6 - SIMULAÇÃO E ANÁLISE FÍSICA DA SOLUÇÃO OBTIDA

Neste item busca-se compreender o comportamento da resposta dinâmica nas condições de heterogeneidade material. Para simplificar, o coeficiente E_o do módulo de elasticidade longitudinal e a massa específica serão adotados como a unidade, fisicamente, fictícios:

$$\begin{aligned} E_o &= 1,0 Pa \\ \rho &= 1,0 Kg / m^3 \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Conforme equacionado, as coordenadas inicial e final são necessariamente diferentes de zero, porque isso indeterminaria a solução. Logo, faz-se:

$$\begin{aligned} a &= 2,0 m \\ b &= 3,0 m \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

O deslocamento imposto na extremidade livre será:

$$u_o = 1,0 m \quad (\text{III.46})$$

A seção onde será analisado o deslocamento, por conveniência é:

$$x = 2,5 m \quad (\text{III.47})$$

A convenção de sinais para o deslocamento é mostrado na Figura III.2:

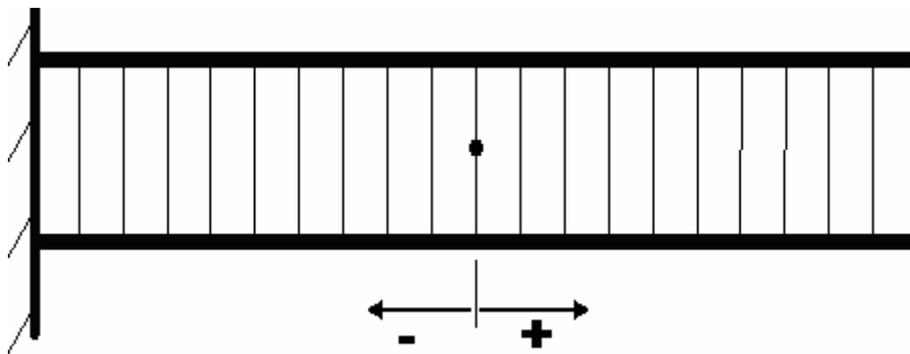


Figura III.2 – Convenção de sinais para o deslocamento

Como a solução da E.D.P. está exposta na forma aberta, isto é, expressa em termos de somatório, a solução final será processada e plotada com a ajuda de dois softwares comerciais o Microsoft Excel 2002 e o MathCAD 11 Enterprise Edition. Cabe ressaltar que para que a visualização dos gráficos fosse a mais realista possível, foi necessário plotar pontos muito próximos uns dos outros, permitindo esse procedimento captar pequenas oscilações das funções senos e co-senos.

Antes de prosseguir é imprescindível fazer um teste de convergência da série usada para se ter o grau de erro decorrente da quantidade de termos empregados. De acordo com a equação (III.33) o resultado da série deve ser igual a $-\bar{u}$, equação (III.15). Tendo isto em mente, plota-se o gráfico de comparação.

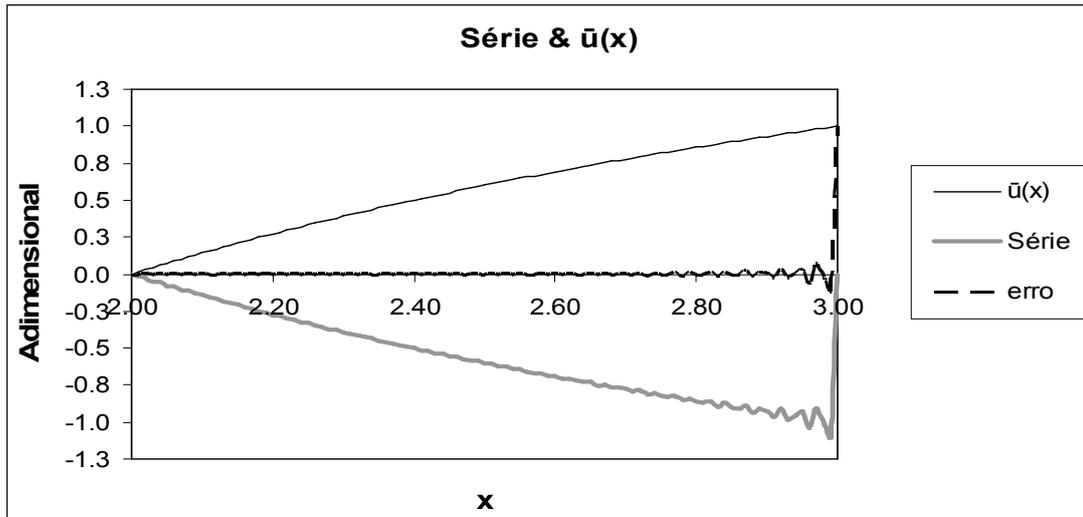


Figura III.3 – Comparação entre a série e \bar{u} com a estimativa de erro

III.6.1 - ESTUDO DOS DESLOCAMENTOS DA SEÇÃO MEDIANA

Com os valores acima definidos, o somatório variando de $n = 1$ até 1.000 e com um intervalo de tempo de 0,01s tem-se o gráfico de deslocamentos em função do tempo da partícula situada na seção mediana da barra heterogênea:

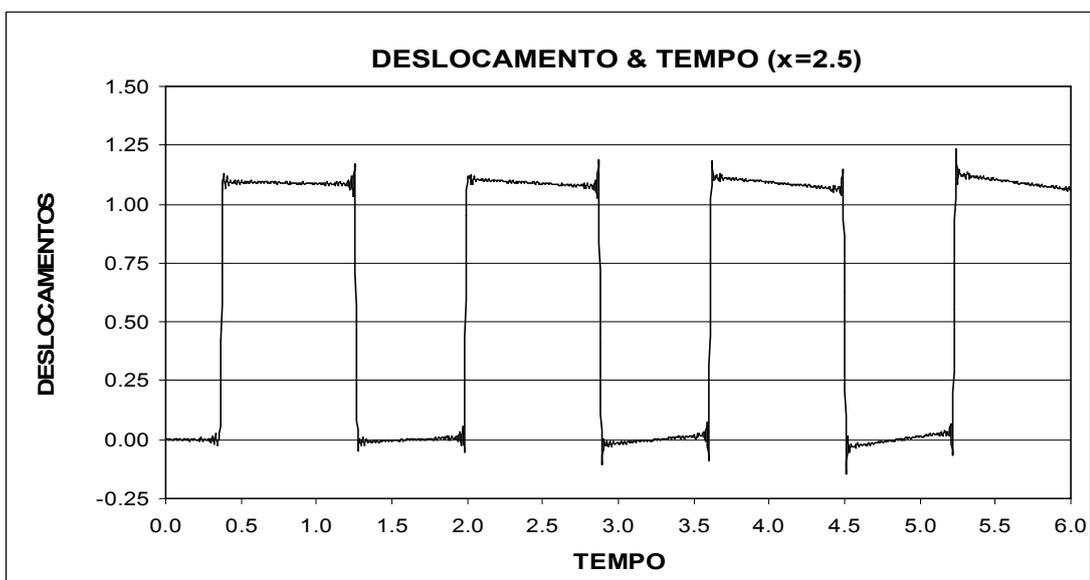


Figura III.4 – Solução analítica do deslocamento da partícula da seção mediana da barra heterogênea

Estendendo o intervalo do tempo de 0s a 200s e posteriormente de 200s à 400s observa-se, consecutivamente, na Figura III.5 e Figura III.6 a evolução do deslocamento da partícula .

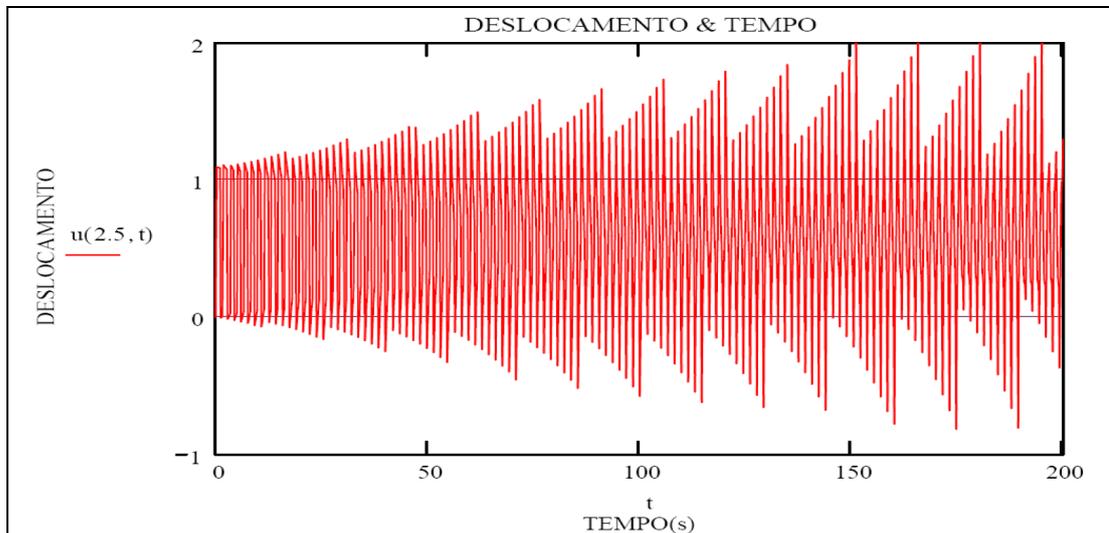


Figura III.5 – Deslocamento da partícula da seção mediana da com t variando de 1 à 200 s.

No gráfico da Figura III.5 percebe-se que de 09 em 09 períodos há uma queda brusca da amplitude, demonstrando uma periodicidade do fenômeno.

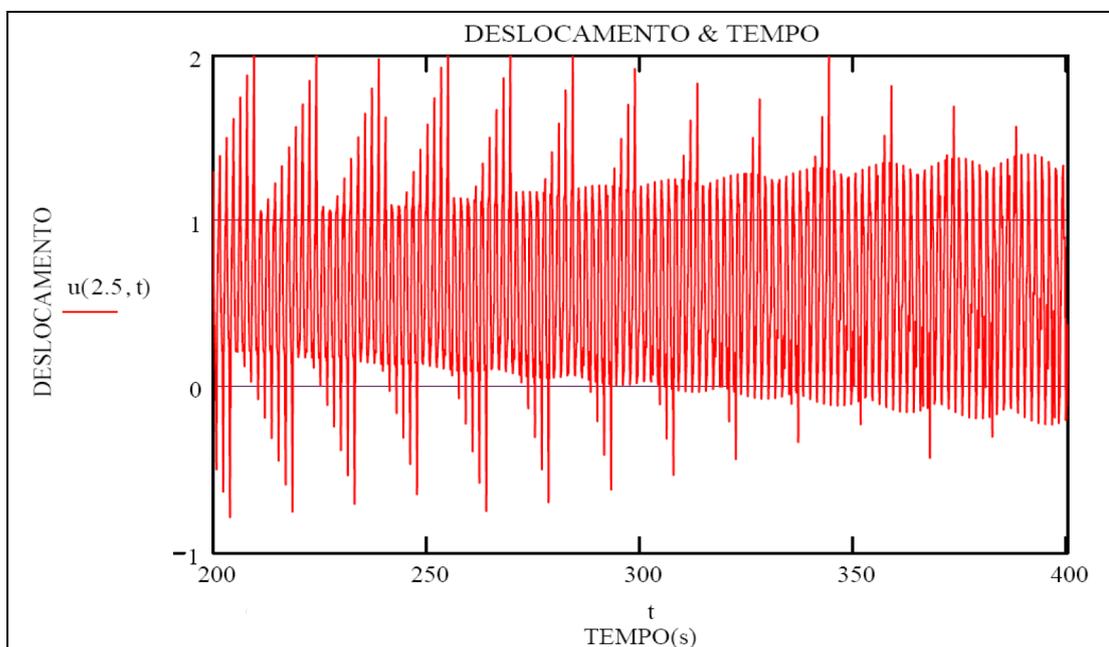


Figura III.6 - Deslocamento da partícula da seção mediana da com t variando de 200 à 400 s.

Já com o gráfico da Figura III.6 pode-se notar que a amplitude do deslocamento não cresce indefinidamente, mas, aumentará sua curvatura a cada 09 períodos, conseqüentemente sua amplitude diminuirá devido a maior quantidade de energia dispersada.

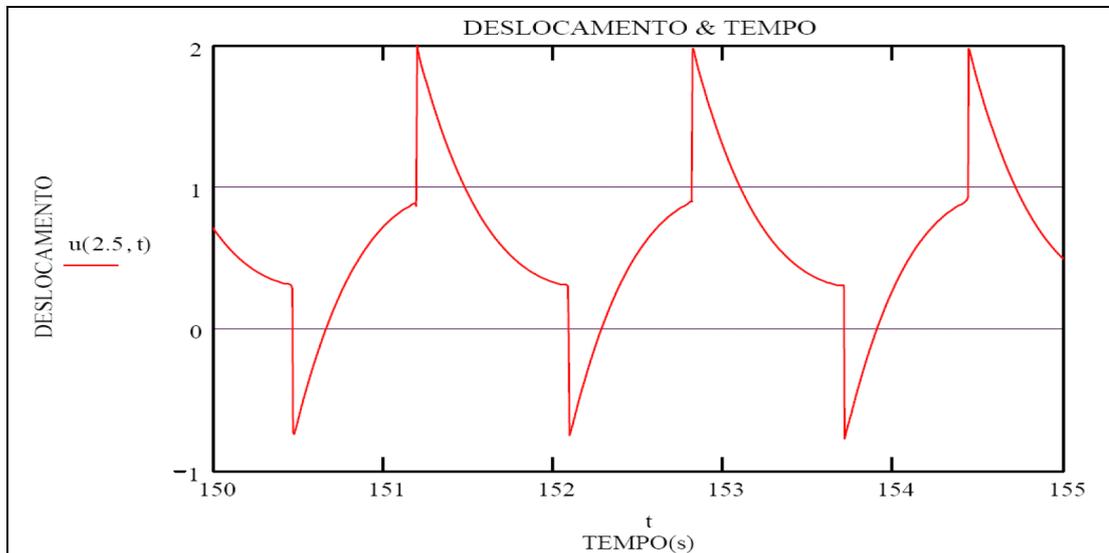


Figura III.7 – Detalhe do gráfico de deslocamento em $x = 2.5$ depois de decorrido 150 s.

O patamar, antes “linear”, apresenta-se agora em uma “forma parabólica”, isto pode ser devido aos mais altos módulos de vibração que estão atuando com maior intensidade e devido a maior dispersão da energia.

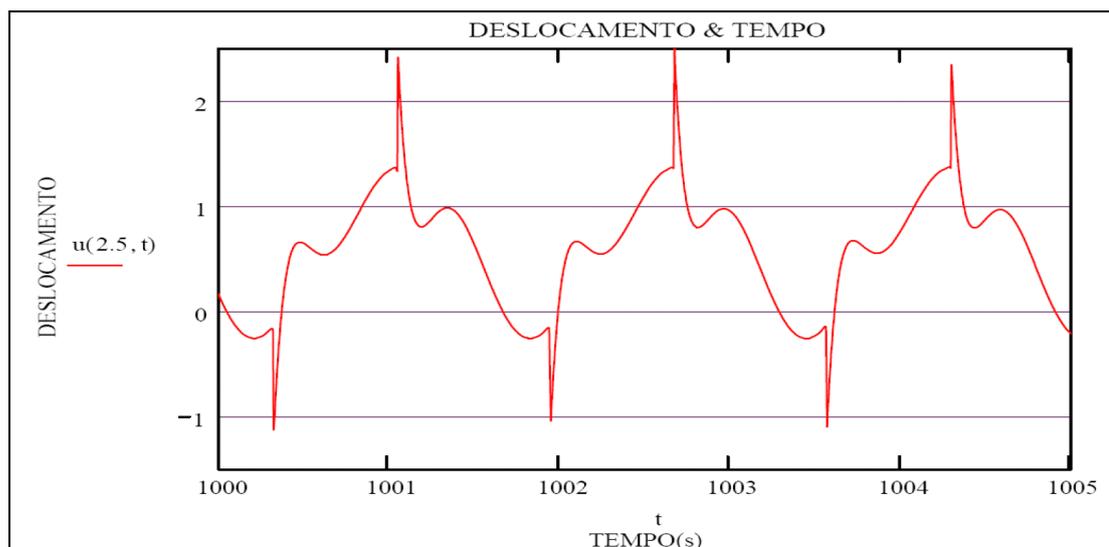


Figura III.8 - Detalhe do gráfico de deslocamento em $x = 2.5$ depois de decorrido 1.000 s.

Depois de decorrido 1000 s, a maior dispersão da energia pode ser identificada nas curvas anteriormente “parabólicas (2º grau)”, e que agora, assumem uma “forma polinomial de maior grau”. Deve-se lembrar, que as referidas curvas são geradas por funções em senos e co-senos não tendo relação com polinômios, palavra usada acima no sentido pejorativo.

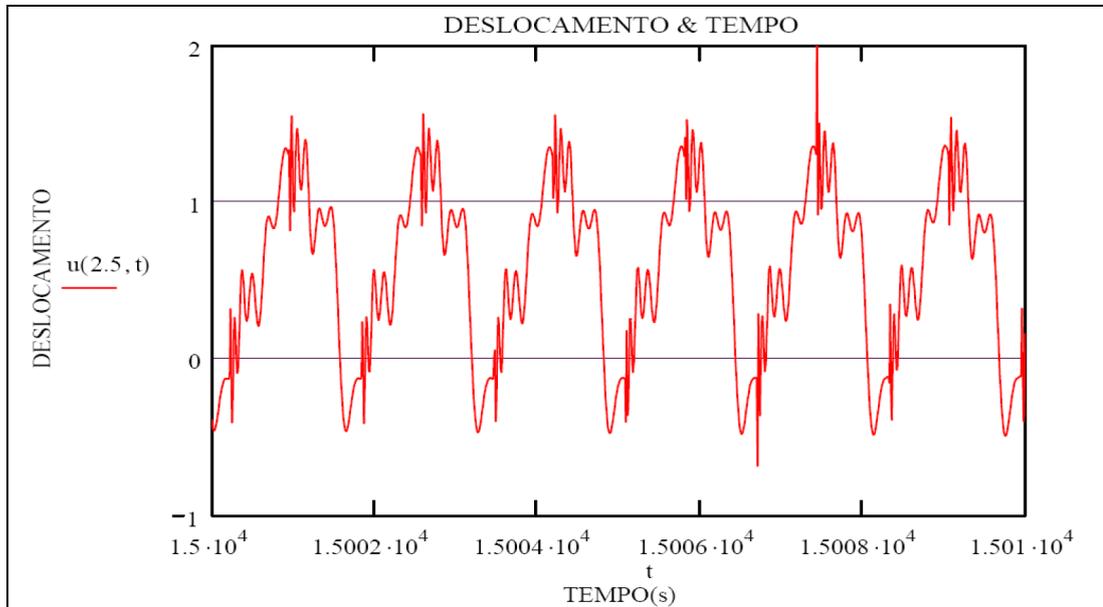


Figura III.9 - Detalhe do gráfico de deslocamento em $x = 2.5$ depois de decorrido 15.000 s.

Neste último a perturbação se tornou mais complexa ainda, no entanto, a periodicidade do fenômeno se mantém.

III.6.2 - ESTUDO DO DESLOCAMENTO DE TODOS OS PONTOS DO DOMÍNIO NUM DETERMINADO INSTANTE DO TEMPO

Há um outro gráfico que foi julgado interessante para se entender melhor o movimento das partículas durante o processo oscilatório. Baseou-se em fixar a variável tempo e fazer variar a coordenada espacial. Então, nos instantes iniciais, a propagação da onda pode ser percebida desde seu ponto de partida até a extremidade engastada:

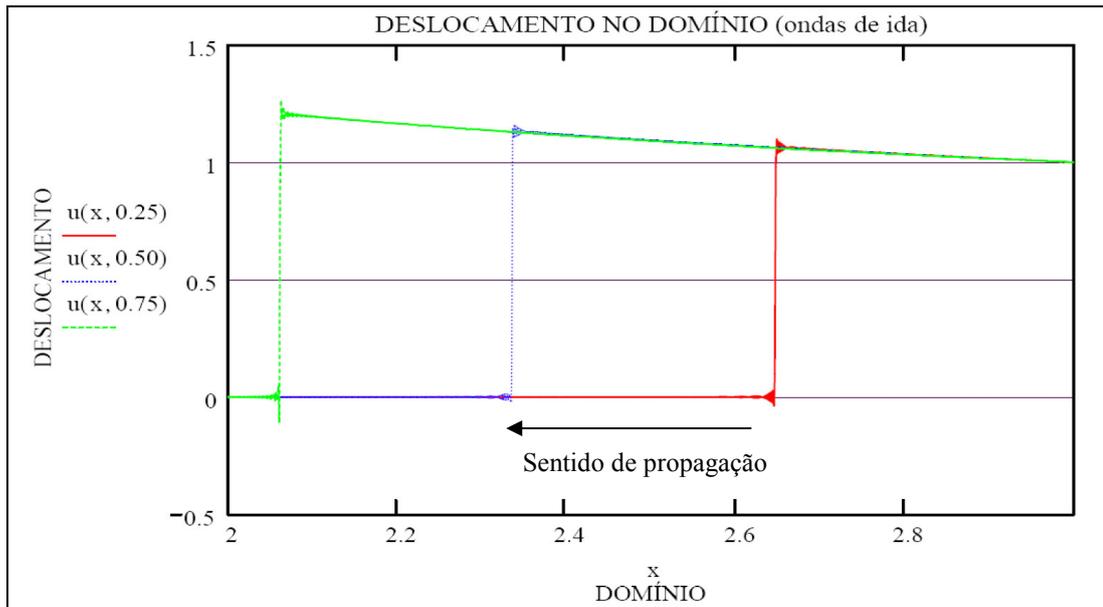


Figura III.10 – Deslocamento das partículas em todo domínio na ida da onda no primeiro período

Ao se verificar a posição da onda a 0,25s e a 0,5s é percebido que o espaço percorrido nos primeiros 0,25s foi maior, significando uma maior velocidade da onda durante este primeiro percurso devido a maior rigidez existente neste trecho, como era de se esperar.

Vê-se claramente que à jusante da onda não houve qualquer perturbação, permanecendo todas as partículas estáticas, exceto por uma pequena região onde se percebe uma oscilação decorrente do uso de poucos termos na série numérica. A frente de onda também deveria estar verticalizada, o que não ocorre igualmente por conta do truncamento. Nota-se que embora o deslocamento imposto na extremidade tenha sido igual a u_0 , os deslocamentos dos pontos mais próximos da extremidade engastada crescem em amplitude, por efeito da redução de rigidez da barra.

Depois de refletida no engaste, a onda começa sua viagem de volta produzindo retornos das partículas além da sua posição inicial ($t = 0$). Isto, pode ser notado no gráfico da Figura III.4, onde a partícula em estudo apresenta um deslocamento negativo. O processo, entretanto, envolve diversos fenômenos interessantes, que serão discutidos a seguir no item III.7.

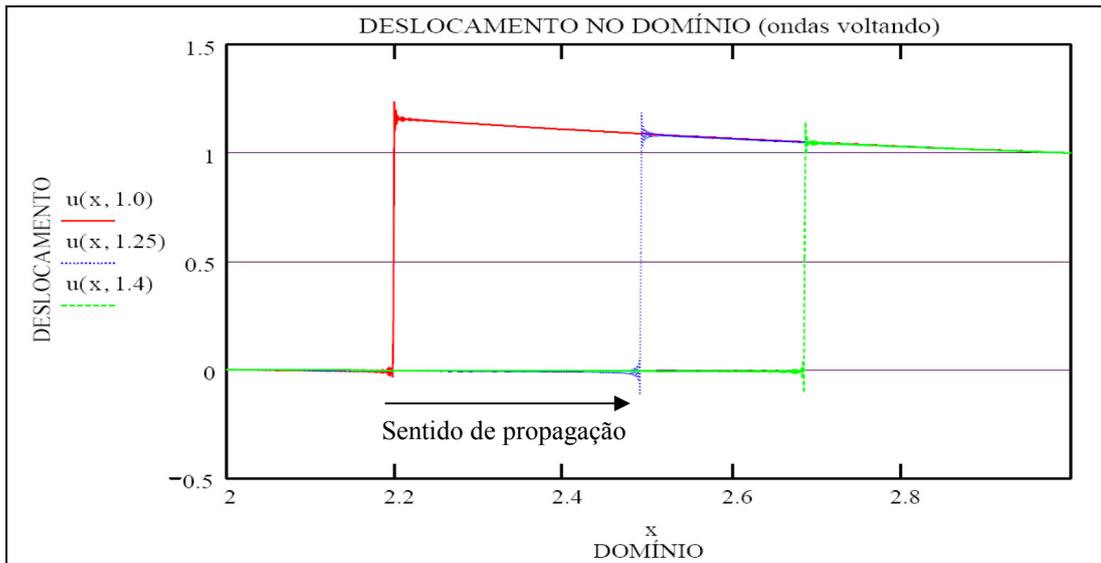


Figura III.11– Deslocamento das partículas em todo domínio durante o retorno da onda no primeiro período após refletida na extremidade engastada

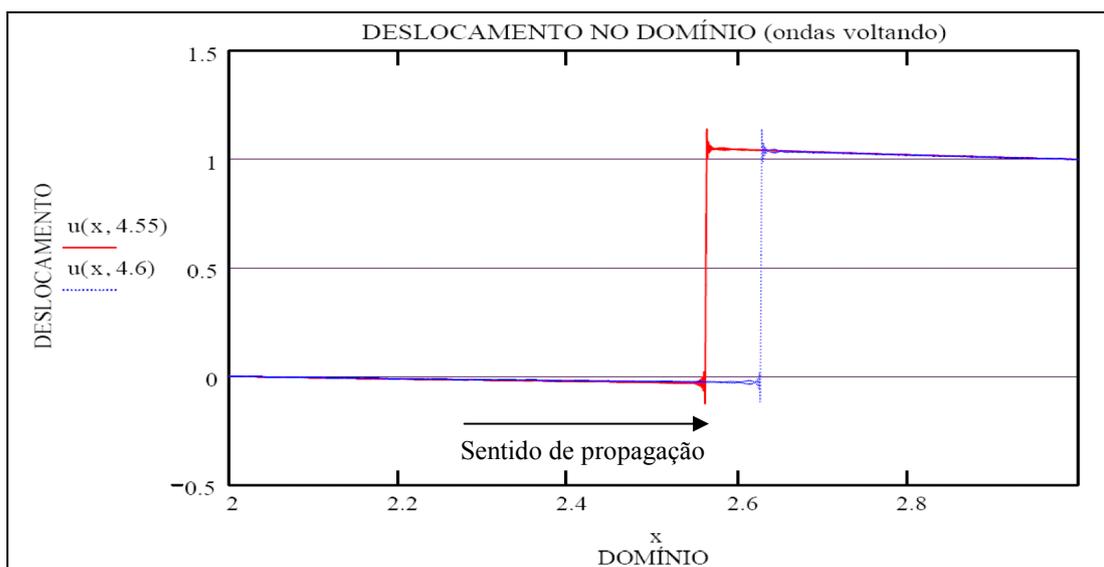


Figura III.12 – No retorno da onda refletida no engaste, as partícula por onde já passou possui um deslocamento negativo

Nos gráficos do primeiro período o deslocamento negativo das partículas estava confundido com erro numérico, mas, nos ciclos seguintes, estes deslocamentos foram ampliados sendo mais perceptíveis. Como elas não estão imóveis os deslocamentos destas partículas vão para zero no final do ciclo.

III.6.3 - ESTUDO DA DEFORMAÇÃO OCORRIDA NA SEÇÃO MEDIANA DA BARRA

Da mesma maneira como foi feito com o problema da barra homogênea alongada subitamente, é oportuno examinar o comportamento do caso heterogêneo analisando a deformação sofrida pela seção central e reta da barra com o trânsito da onda.

Para o gráfico de deformação ser concebido 100 termos da série numérica foram utilizados. Muitos termos da série apenas preenchem o gráfico, não alterando sua forma característica, devido a isto, não foi necessário mais termos que implicaria em tempo computacional.

O grande salto para o correto entendimento do fenômeno se dá quando é realizada uma análise conjunta do gráfico de deslocamento com o gráfico de deformação ao longo do tempo que pode ser observado na Figura III.13:

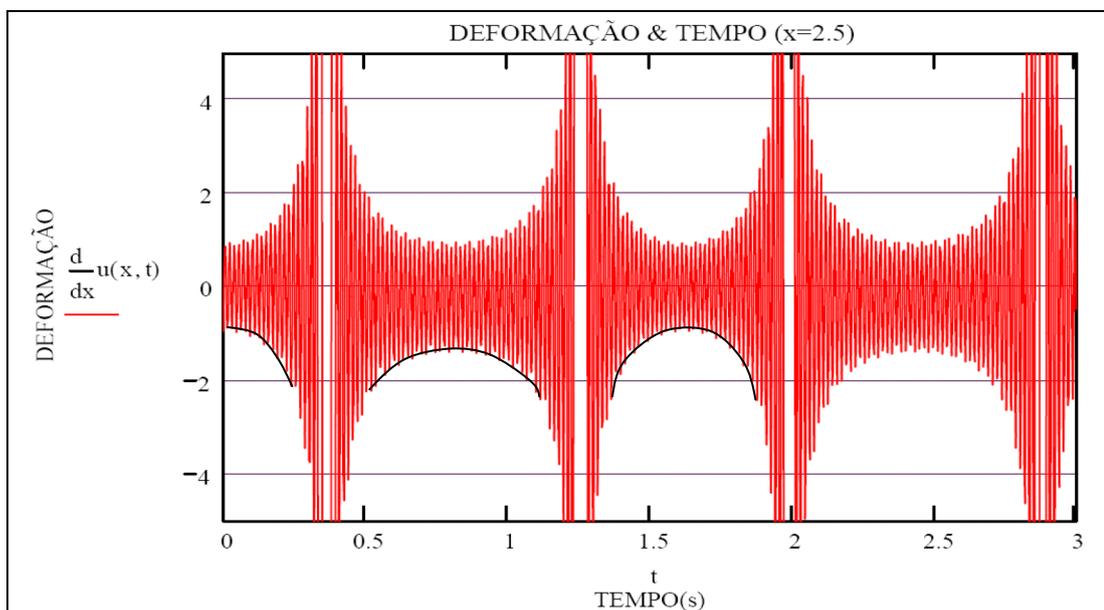


Figura III.13 – Variação da deformação da seção mediana da barra no tempo

Deve se ter em mente quando se analisa o gráfico de deformações que onde há deformação positiva a seção é alongada, e, na ocorrência de deformação negativa, a seção encurta.

O gráfico de deformação é muito sensível com maiores oscilações que o gráfico de deslocamento. O seu resultado deve ser interpretado sobre uma ótica de envoltória. Portanto, observando o gráfico da Figura III.13, após a onda passar pela partícula central, observa-se que a envoltória inferior em destaque entre $t = 0.5$ até 1.0 s está mais negativa que a do período entre $t = 0$ até $t = 0.25$ s. Nas figuras abaixo, isto pode ser visto em detalhe.

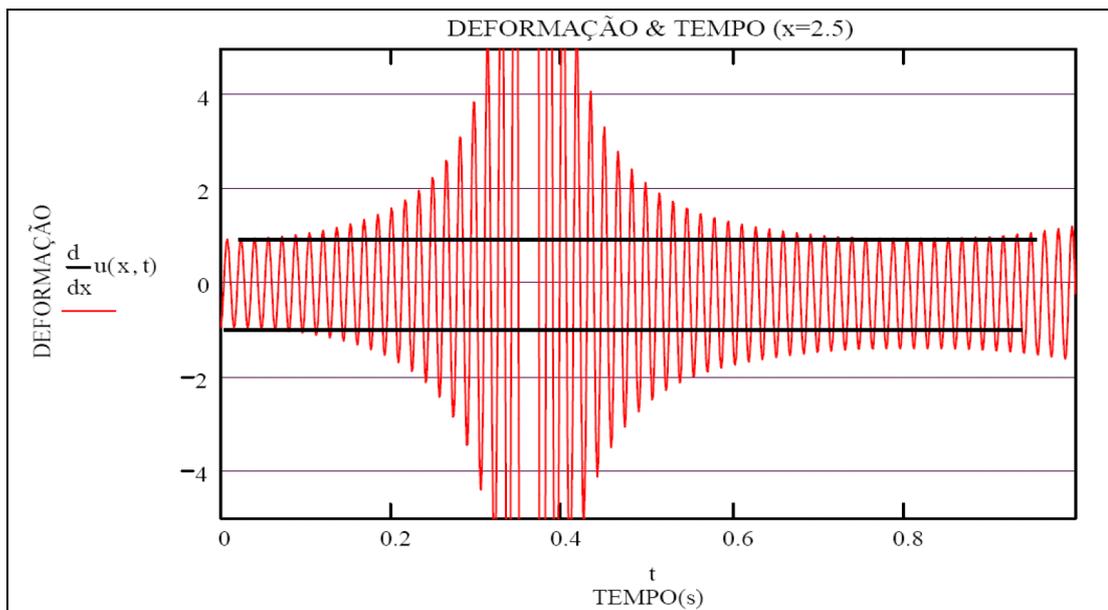


Figura III.14 – Diferença da envoltória antes e depois da onda passar pela seção mediana

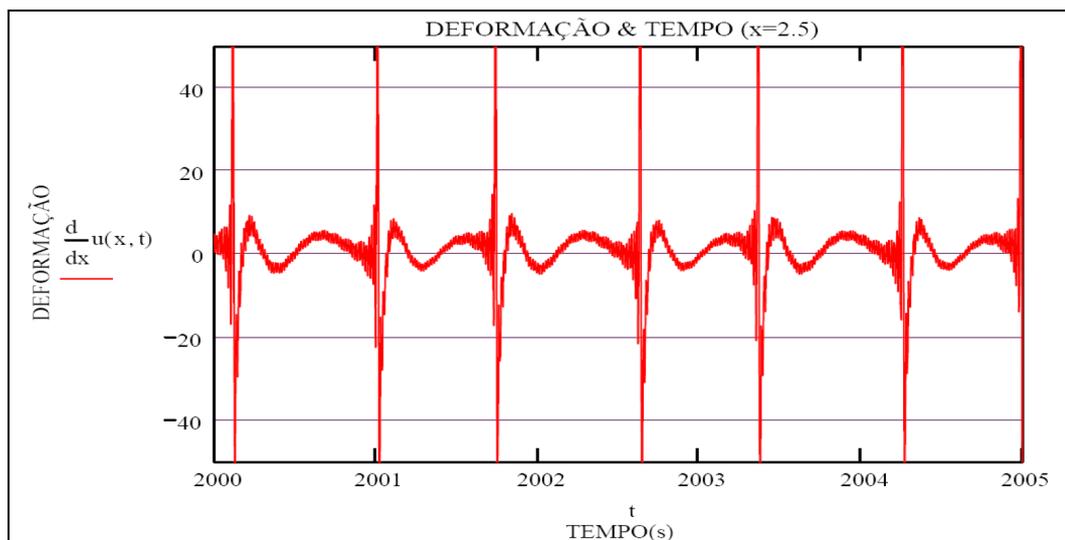


Figura III.15 – Distorção do gráfico de deformação ao passar do tempo.

Na figura acima a escala vertical foi diminuída para se observar com menos detalhes o gráfico. O comportamento da deformação da seção mediana após 2000 s não se manteve com as mesmas características iniciais.

III.6.4 - ESTUDO DA DEFORMAÇÃO OCORRIDA EM TODO O DOMÍNIO DA BARRA

No estudo do deslocamento foi realizada uma análise simultânea em todo o domínio da barra, então, através da série, será montado um gráfico para a deformação. Assim, a envoltória de deformação ao longo de toda a barra nos instantes fixos do tempo é visualizada abaixo:

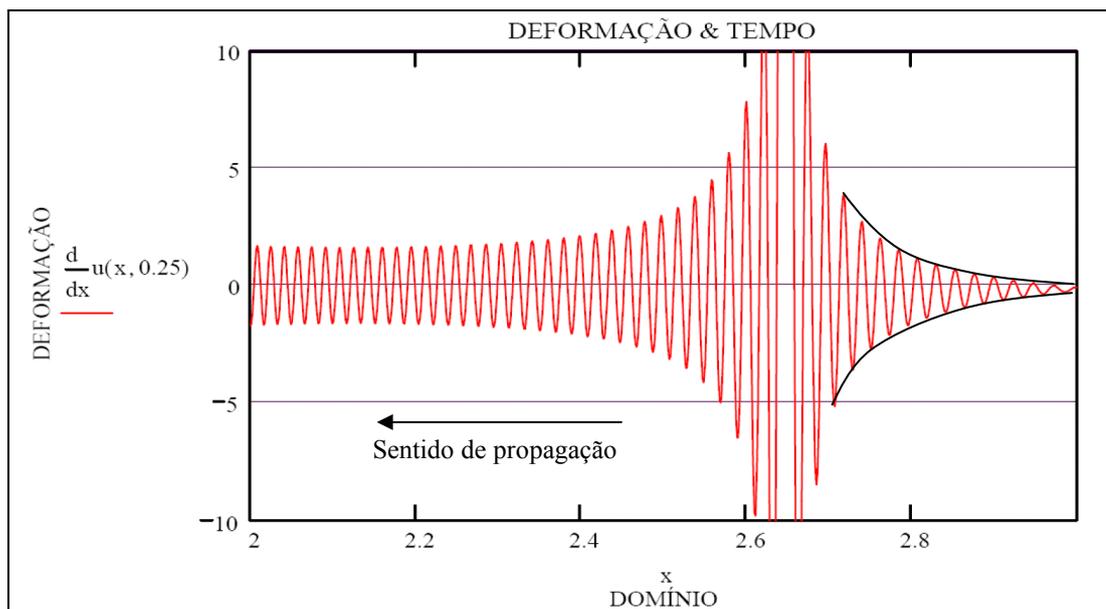


Figura III.16 – Envoltória de deformação no domínio quando $t = 0.25$ s.

Na Figura III.16, não há deformação nas seções onde a onda ainda não passou, pois a envoltória está equidistante do eixo de deformação nula, indicando erros provenientes do truncamento da série. Já nas seções a montante a envoltória está mais para a parte negativa. O mesmo ocorre na figura abaixo que representa o instante em que a onda atinge o engaste.

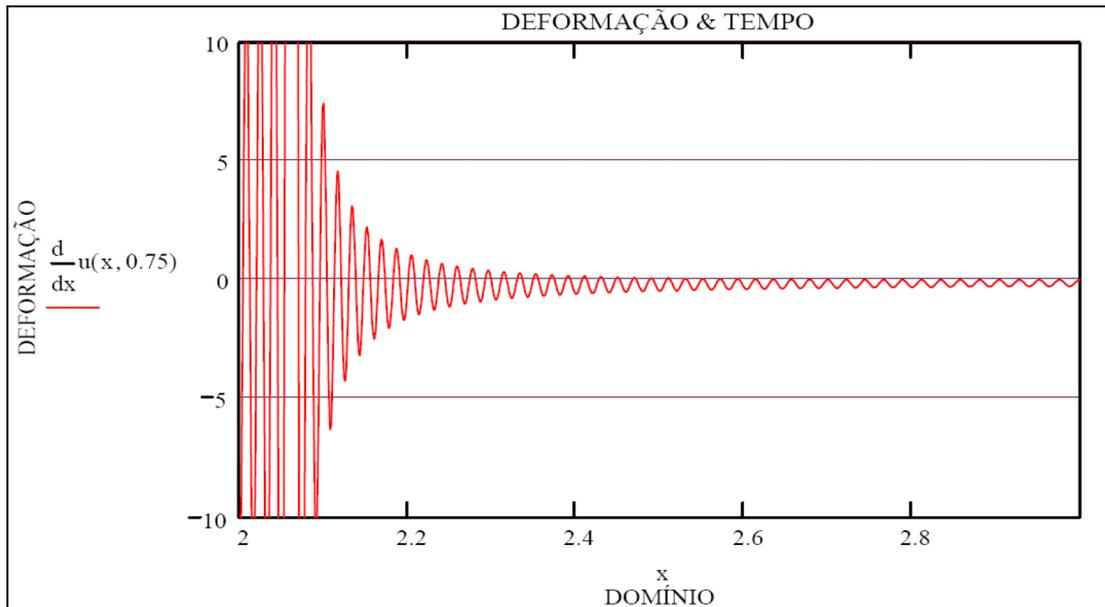


Figura III.17 - Envoltória de deformação no domínio quando $t = 0.75$ s.

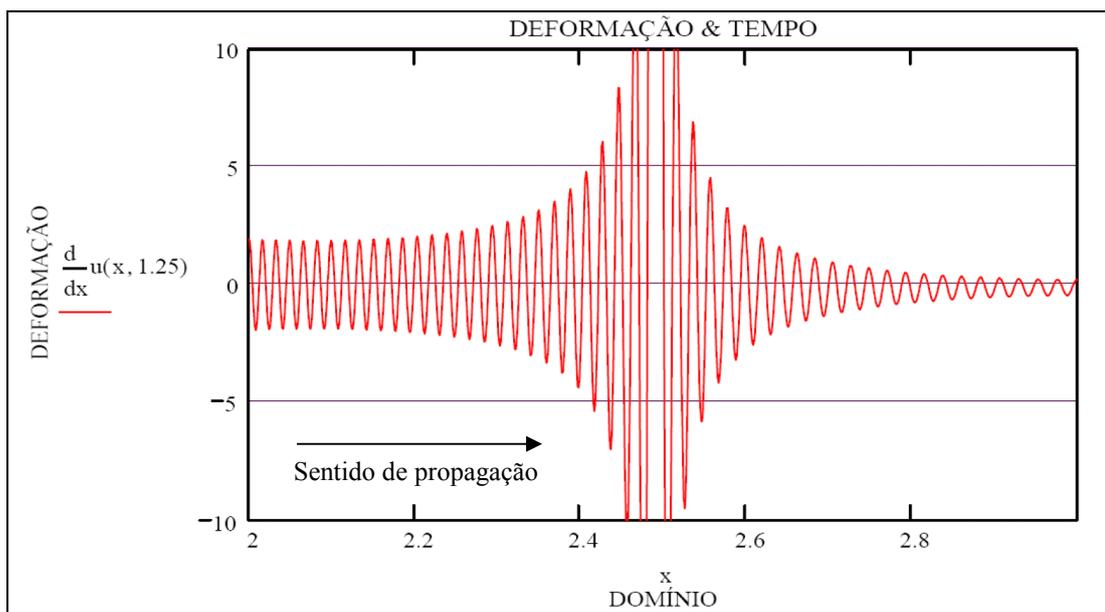


Figura III.18 - Envoltória de deformação no domínio quando $t = 1.25$ s.

Comparando o gráfico anterior com o da Figura III.17, nota-se que a envoltória existente entre $x = 2.8$ e $x = 3.0$ teve uma pequena variação para acima da linha de deformação nula ocasionado por um alívio de tensão na região.

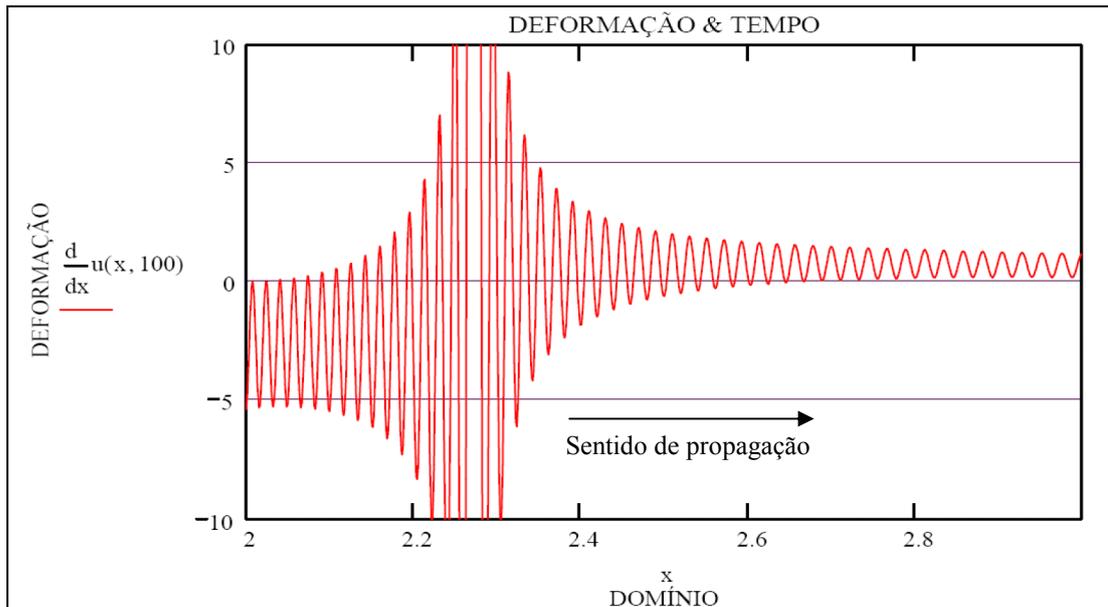


Figura III.19 - Envoltória de deformação no domínio quando $t = 100$ s.

Já com o tempo em torno de 100 s, as principais características do gráfico ficam mais perceptíveis. Neste instante, em que a onda foi refletida no engaste e se propaga na direção da extremidade livre, as deformações demonstradas pela envoltória são negativas a montante e positivas a jusante da frente de onda.

III.7 - ANALOGIA DA ONDA NA BARRA HETEROGÊNEA ALONGADA

O ciclo começa quando, repentinamente, a extremidade livre da barra é alongada de u_0 . Uma onda, carregando uma determinada quantidade de energia associada ao deslocamento inicial imposto, inicia sua propagação conforme ilustra a Figura III.20 (a) e (b).

A mesma energia aplicada vai deformar mais as seções intermediárias da barra, pois a rigidez é menor. A onda também se propaga mais devagar, à medida que avança em direção à extremidade engastada.

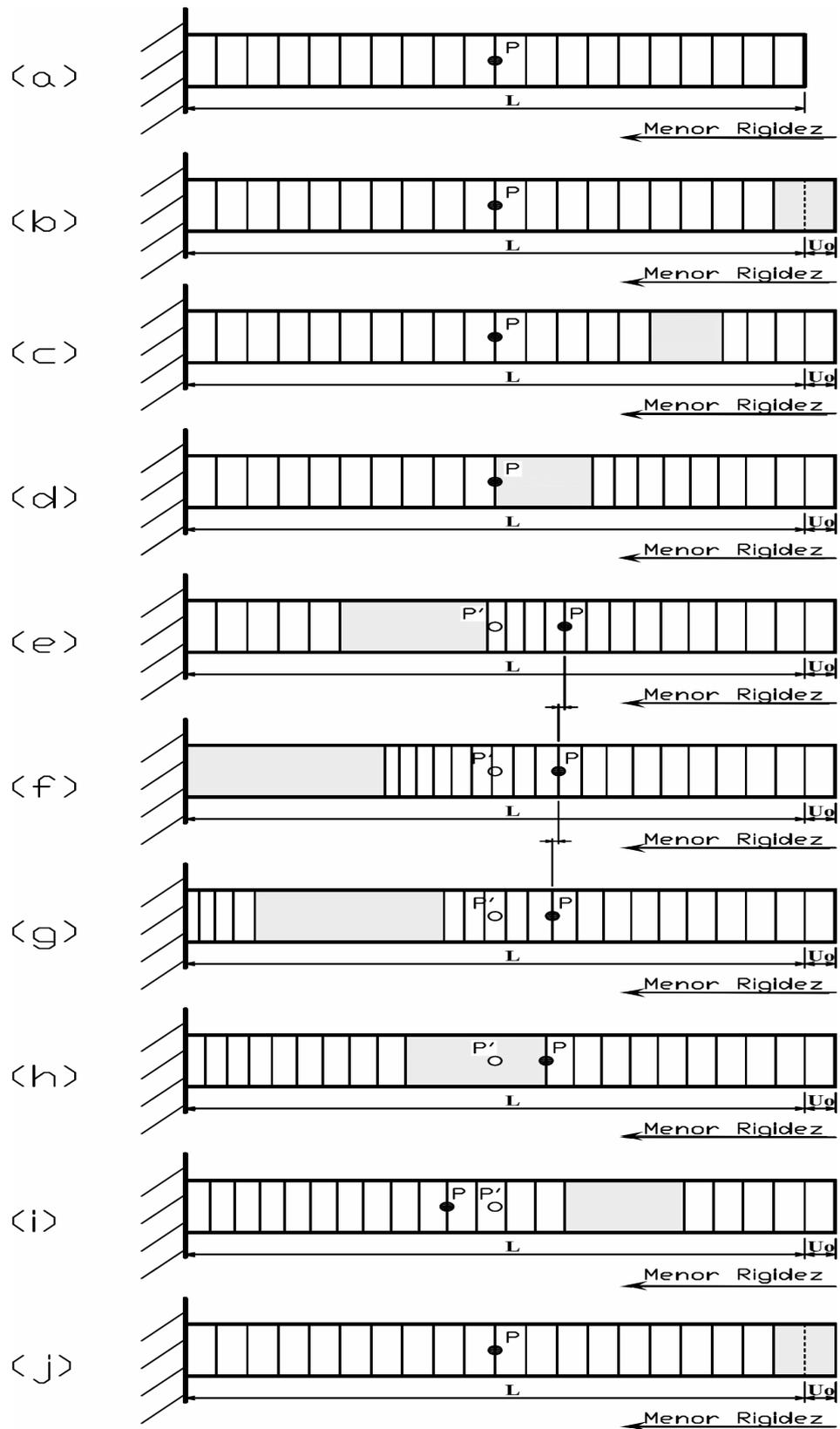


Figura III.20 - Onda de deslocamentos em uma barra heterogênea alongada de U_0

Como o valor do deslocamento total da barra é restrito, os espaçamentos cada vez maiores deverão ser compensados por uma redução ou contração do espaçamento das seções anteriores, Figura III.20 (c). Em outras palavras, a maior expansão vai gerar ondas de retorno, produto da reflexão pelo meio ser diferente. As ondas de retorno vão pressionar o espaço entre as seções anteriores à sua passagem, reduzindo os deslocamentos com o tempo.

Devido à menor rigidez, a onda ao atingir o ponto P, Figura III.20 (d), provoca um deslocamento maior que o inicialmente aplicado na extremidade livre, ao custo do encurtamento das seções anteriores, como já exposto acima. Entretanto, devido à reflexão, as seções mais próximas da frente de onda contraem-se com mais intensidade do que as seções mais distantes, também por conta da sua maior flexibilidade. Isso explica porque o deslocamento do ponto central da barra não apresenta patamares horizontais (vide Figura III.4) e sim uma suave inclinação com o tempo. Em cada ciclo, por causa da alteração da impedância do meio, discutida a seguir, a contínua reflexão das ondas vai agravar ainda mais esse fenômeno.

A impedância é definida nos estudos da física ondulatória como o produto da massa específica pela velocidade de propagação da onda. Está associada à resistência ou dificuldade do meio à passagem da onda, de modo que no caso da barra examinada, a onda primária trafega em um meio de impedância decrescente. O meio menos rígido gera ondas de retorno de caráter compressivo, mas de menor energia, causando os efeitos de encurtamento citados [19].

Os maiores deslocamentos experimentados pelas seções menos rígidas pode ser vista como um acúmulo, durante um intervalo maior de tempo, dos pacotes de energia que a frente de onda e suas contínuas reflexões carregam. Este raciocínio pode ser respaldado pelo fato de que tanto a onda de ida como a refletida, propagam-se mais lentamente em regiões onde a rigidez é menor, ficando, portanto, mais tempo nesta região. Após a passagem da onda principal, os deslocamentos de maior intensidade experimentados pelas seções de menor rigidez dão lugar aos efeitos de compressão produzidos pela reflexão, que reduzem sua amplitude (vide Figura III.10 e Figura III.11):

A onda continua avançando, viajando ainda mais devagar e aumentando mais ainda os

deslocamentos das seções seguintes, ao custo do encurtamento apenas das seções onde já passou.

Até esta fase do ciclo, a frente de onda gerou reflexões que produzem encurtamento das seções (envoltória de deformação negativa, vide Figura III.16 e a Figura III.17), estas reflexões por se propagarem no sentido de impedância crescente, são novamente refletidas dando origem a novos efeitos de encurtamento, mas, de menor intensidade, já que, cada reflexão representa uma diminuição da energia presente na onda que a deu origem. Representado a intensidade da onda através dos vetores de tamanhos diferentes e o sinal representando o tipo de deformação experimentado pela seção cria-se a Figura III.21:

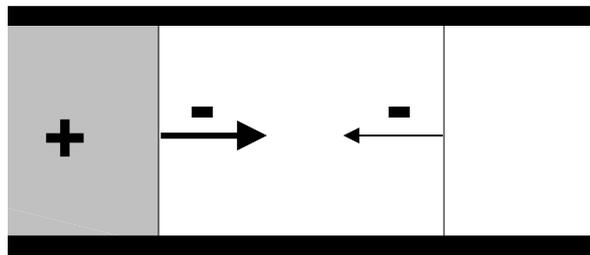


Figura III.21 – Encurtamento das seções devido a reflexões originadas a partir das reflexões principais quando a onda principal propaga-se no sentido de impedância decrescente.

Observe o fenômeno ocorrido na seção que contém o ponto P na passagem do estágio (e) para o (f) da Figura III.20. Houve um retorno do ponto e um alargamento da seção na qual se encontra. Explica-se este através da consideração que a deformação da seção só se mantém enquanto há tensão não nula sobre esta, em outras palavras, deve haver ondas transitando na seção e que não se anulem pelo princípio da superposição, para assegurar a existência de deformação à mesma. Portanto, os pacotes de energia, vindos da frente de onda, vão perdendo parte de sua energia devido à emissão de pequenos outros pacotes de energia, então, ao atingir as seções mais distantes, deformarão menos estas seções, mas, não apenas por sua menor quantidade de energia, como também, pela maior rigidez existente nestas seções.

No estágio (g), a onda inicia o seu retorno depois de refletida na extremidade engastada. Neste ponto ela já está mais curta que no estágio (f). A onda agora se propaga no sentido da rigidez crescente; conseqüentemente, sua velocidade também se amplia. Lembrando-se que as

mesmas considerações feitas acima para as reflexões são válidas aqui, só que agora, atuam no sentido contrário. Há um outro comentário interessante a fazer. O ponto P (deslocado) continua a se deslocar em direção ao ponto P' (inicial), contribuição decorrente não apenas das reflexões visualizadas na Figura III.22, mas da menor deformação causada pela frente de onda nas seções.

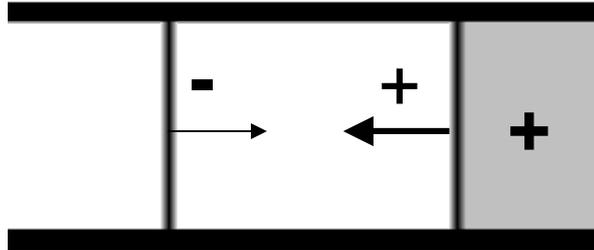


Figura III.22 - Alongamento das seções devido a reflexões originadas a partir das reflexões principais quando a onda principal propaga-se no sentido de impedância decrescente.

Na Figura III.20 (h), quando a onda passar pela seção que contém o ponto P terá feito com que ele se aproxime mais da posição original P'. Em (i), P está vizinho a P' (inicial) e, finalmente, os dois pontos estão coincidentes no final do ciclo ilustrado pela Figura III.20 (j). O processo se repetirá, pois a onda será novamente refletida e dará início a um novo ciclo.

Para que o fenômeno seja entendido por completo, uma ilustração do gráfico mostrado na Figura III.4, com um certo exagero, se faz necessária:

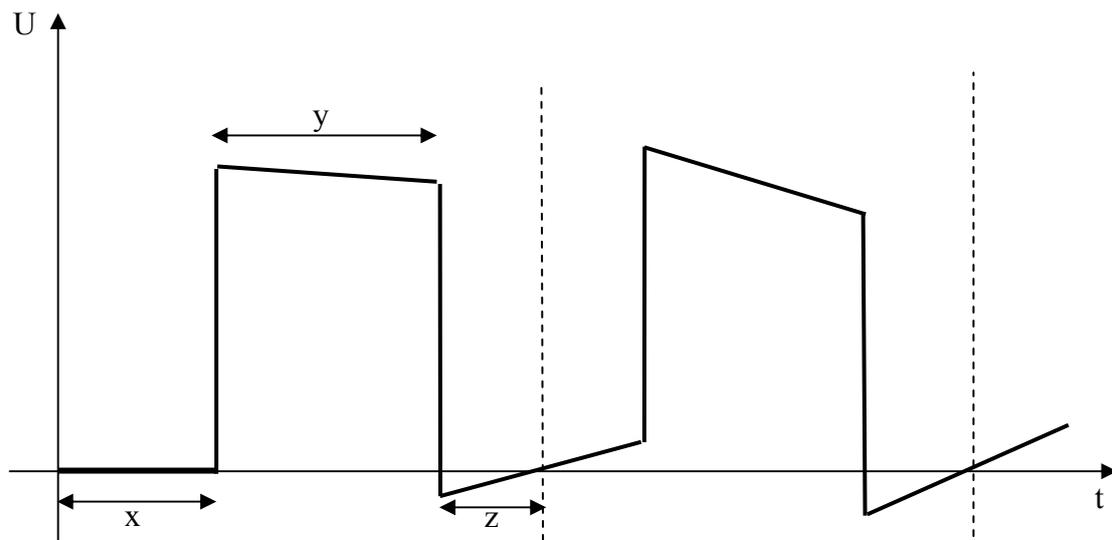


Figura III.23 – Gráfico dos deslocamentos do ponto P

Cabe destacar que o comportamento apresentado foi ratificado por simulações realizadas pelo professor Markcilei Lima Dan, usando 10.000 termos na série expressa pela equação (III.41) usando o processador MATLAB. Na Figura III.23 se vê os dois primeiros ciclos determinados pelas linhas verticais pontilhadas, cujas formas são diferentes devido as diferentes inclinações dos patamares das curvas, menor no ciclo inicial e maior no segundo. Constata-se que os efeitos da reflexão devem se acumular de ciclo para ciclo no processo de propagação da onda, distorcendo o perfil de deslocamento do ponto central.

Apreciando o gráfico destaca-se que o intervalo de tempo dado por y é menor do que o dobro do intervalo de tempo representado por x , uma vez que a onda percorre sempre mais lentamente a primeira metade da barra do que a segunda.

CAPÍTULO IV

MÉTODOS NUMÉRICOS

IV.1 - APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Mesmo nos seus períodos mais remotos, a engenharia nunca dispensou o auxílio da matemática, principalmente da sua primeira disciplina, a Geometria, seja no detalhamento de esboços e desenhos das construções como também no sentido de se efetuar pequenos cálculos para detalhamento. No entanto, a grande ferramenta do engenheiro era a experiência obtida com a realização de testes com protótipos ou a realização anterior de empreendimentos similares. No entanto, em função do alto custo de confecção de alguns protótipos e do desenvolvimento de outros ramos da matemática, esse panorama mudou radicalmente nas últimas décadas. Cada vez mais se procura projetar equipamentos, edificações e máquinas a partir de modelos analíticos construídos com rigor matemático.

Em função da sofisticação das demandas da sociedade moderna, as fórmulas e equações simples que representavam os problemas do passado e serviam de apoio aos projetos de engenharia, cederam lugar às equações diferenciais parciais, algumas mesmo não lineares, ou então, a sistemas de equações diferenciais ordinárias de grande complexidade. O tratamento matemático que se empregava com vistas a resolver estas equações para obtenção de uma

solução analítica ou fechada, teve que ser revisto, porque poucas eram aquelas que conseguiam ser devidamente solucionadas.

Por volta de 1940 surgiu uma ferramenta que revolucionou todos os segmentos da engenharia, assim como também muitas disciplinas científicas: o computador. Através desta sofisticada máquina de processamento de operações, algumas técnicas matemáticas que estavam estagnadas por ausência de recursos que as viabilizassem puderam ser implementadas. Uma destas técnicas é a discretização, talvez, a mais importante delas. Muitos métodos numéricos modernos são fundamentados nesta idéia. Consiste basicamente de uma aproximação do domínio contínuo por um conjunto discreto ou finito de pontos que o representem consistentemente. Em termos matemáticos, a discretização acarreta a substituição de uma equação diferencial por um conjunto de equações algébricas, de fácil implementação e resolução pelos computadores modernos. Ou seja, graças aos modernos computadores, os métodos numéricos ou computacionais, como passaram a ser conhecidos, atualmente tornaram-se viáveis, confiáveis e amplamente difundidos.

IV.2 - PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS

Os principais métodos numéricos disponíveis atualmente são baseados na discretização, isto é, na substituição de um domínio contínuo das variáveis por um conjunto finito de pontos representativos do mesmo. Esta representatividade é fundamentada em conceitos matemáticos e sua consistência pode ser constatada pela concordância entre os resultados numéricos e os resultados analíticos (em problemas nos quais esta última solução é disponível) ou, então, para certos métodos, por uma formal demonstração matemática envolvendo a idéia de convergência. Conforme foi mencionado, pode-se constatar que o resultado da aplicação das técnicas de discretização consiste na transformação dos operadores diferenciais por operadores algébricos, fáceis de se resolver computacionalmente.

Dentre as técnicas mais importantes na atualidade pode-se citar o Método das Diferenças

Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Os três primeiros são conhecidos como técnicas de domínio, pois a discretização se processa em todo o domínio; mas a última é uma técnica de contorno, pois somente a discretização das fronteiras é necessária.

O MDF é o pioneiro dessas técnicas discretas e cuja idéia é a mais simples, constituindo-se de uma substituição direta dos operadores diferenciais por aproximações em série de Taylor.

O MEF é fundamentado em princípios variacionais e têm atualmente especial importância, devido a sua enorme difusão e receptividade no meio acadêmico e industrial [20]. É, sem dúvida, a ferramenta numérica mais empregada e desenvolvida que se dispõe atualmente.

O MVF é um método relativamente recente, que aproveita e aprimora a idéia original das diferenças finitas, e introduz uma compatibilidade que fisicamente corresponde a um balanço de fluxo ou equilíbrio de forças, tornando-o mais preciso que seu antecessor. Por isso ganha espaço gradativamente, em particular na área de termociências.

Já o MEC destaca-se graças a uma série de características vantajosas, como a redução de uma dimensão na representação do problema, simplificação na entrada de dados, adequação de regiões infinitas, melhor captação de concentração de esforços, etc.

A escolha de um método numérico é sempre um ponto discutível, pois são muitas as questões aí envolvidas e a pesquisa em torno deles está longe de cessar. Embora não seja o mais popular, o MEC vem se firmando como uma técnica vantajosa e de considerável precisão. Baseando-se em diferentes princípios matemáticos, seja pela teoria das equações integrais ou por formulação de resíduos ponderados, numerosas simulações já ratificaram o alcance do método e sua supremacia em importantes classes de problemas.

O fato é que graças a esses métodos, atualmente é comum a simulação computacional de problemas dinâmicos, tridimensionais, não-lineares, envolvendo condições de contorno gerais. Algo completamente inacessível à engenharia de cinquenta anos atrás.

Neste trabalho será empregado o MEC para simulação computacional dos problemas, mas qualquer outra das técnicas citadas poderia ser utilizada com o mesmo propósito.

IV.3 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Os fundamentos do Método dos Elementos de Contorno encontram-se na Teoria das Equações Integrais [21], tópico este pertinente as disciplinas de Física, Matemática e Cálculo Avançado. Neste contexto, além de temas mais comuns como os Teoremas de Divergência e de Stokes, também são estudadas as identidades de Green e as funções de Green, que inspiraram técnicas bastante comuns na Mecânica dos Sólidos, como o método dos coeficientes de influência no cálculo de estruturas reticuladas.

A dedução da formulação integral do MEC pode ser feita naturalmente empregando-se os princípios da teoria citada, que operacionalmente resulta no emprego da técnica de integração por partes juntamente com a aplicação do Teorema da Divergência. Existe uma segunda maneira de deduzir o método: utilizando-se uma sentença de resíduos ponderados. Esta última forma é também metodologicamente poderosa e está ligada ao emprego de técnicas numéricas de solução. Conceitualmente se fundamenta na idéia de ortogonalização entre a solução aproximada e seus resíduos [22].

A primeira abordagem emprega recursos operacionais que facilitam a aplicação das formulações com reciprocidade e, por isso, foi aqui escolhida. Daí também resultam as Identidades de Green, anteriormente mencionadas.

A equação integral final, usualmente denominada de forma inversa, é escrita exclusivamente em termos de valores de contorno, conforme se objetiva em qualquer aplicação com o MEC. Doravante será exposto de modo bem geral este procedimento. Maiores detalhes podem ser colhidos na dissertação de mestrado de Dan [23].

IV.3.1 - FORMULAÇÃO INTEGRAL

Considere um operador similar aos apresentados no item II.4, homogêneo, de segunda ordem, linear e adjunto, expresso por $L5(u)$. Multiplicando-se este operador por uma função auxiliar $u^*(\xi, X)$ e integrando-os todos no domínio, tem-se:

$$\int_{\Omega} L5(u) u^* d\Omega = 0 \quad (IV.1)$$

A função auxiliar $u^*(\xi, X)$, cuja expressão matemática será detalhadamente apresentada mais à frente, forma um conjunto de funções linearmente independente para diferentes valores de ξ tomados no espaço bidimensional X . Possui também propriedades de continuidade que garantem a integrabilidade da equação (IV.1), ou seja, a integral em apreço é definida e não divergente.

Aplicando-se duas vezes o procedimento da integração por partes, tem-se:

$$\int_{\Omega} L5(u) u^* d\Omega = \int_{\Omega} LA5(u^*) u d\Omega + \int_{\Gamma} [G(u)S(u^*) - G(u^*)S(u)] d\Gamma \quad (IV.2)$$

Na equação anterior $LA5$ é o operador adjunto associado a $L5$, enquanto G e S são formas genéricas dos operadores diferenciais, devido a aplicação das integrações por partes. As integrações na fronteira surgem naturalmente da aplicação do Teorema de Divergência. Para se eliminar a integral de domínio que resta na equação anterior, consideram-se as peculiaridades do problema fundamental, que serve de base para a geração do MEC. Este problema é discutido detalhadamente a seguir.

IV.3.2 - A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

O bom desempenho numérico do Método dos Elementos de Contorno pode ser devidamente creditado às propriedades da função $u^*(\xi, X)$, empregada anteriormente como função auxiliar no núcleo da equação (IV.2) [24,25]. Ao contrário de outros métodos, que empregam polinômios e outras funções não estreitamente vinculadas com a solução do problema que se quer resolver, o MEC emprega uma função relacionada ao problema em questão. Assim, a função $u^*(\xi, X)$ é a solução de um problema escalar correlato, cujo domínio é infinito e no qual existe uma fonte ou ação externa unitária singular, aplicada num ponto ξ do domínio X . Naturalmente, este problema correlato vai depender do tipo de problema que se deseja resolver, e sua solução pode ser relativamente simples, como no caso da difusão estacionária, ou pode ser bastante complicada, como nas situações dependentes do tempo. Brebbia e Walker [21] apresentam algumas soluções fundamentais para problemas escalares. Neste trabalho, que aborda o problema dinâmico em materiais não homogêneos pela formulação com Quase-Dupla Reciprocidade [26], a solução fundamental se expressa através de uma Equação de Poisson, no qual o termo independente é representado por uma função Delta de Dirac, conforme apresentado a seguir:

$$L A_5(u^*) = u^*_{,ii} = -\Delta(\xi, X) \quad (IV.3)$$

Conforme ilustrado na Figura IV.1, a ação externa se constitui de uma carga ou fonte concentrada, de valor unitário, aplicada em um ponto ξ situado em um meio infinito.

Sabe-se que a Distribuição Delta de Dirac apresenta a seguinte propriedade, caso o ponto ξ pertença ao domínio Ω :

$$\int_{\Omega} f(X) \Delta(\xi, X) d\Omega = f(\xi) \quad (IV.4)$$

Deste modo, o posicionamento de ξ é importante para se determinar precisamente a sentença integral final do método, que genericamente pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} L5(u)u^*d\Omega = -c(\xi)u(\xi; X) + \int_{\Gamma} [G(u)S(u^*) - G(u^*)S(u)]d\Gamma \quad (IV.5)$$

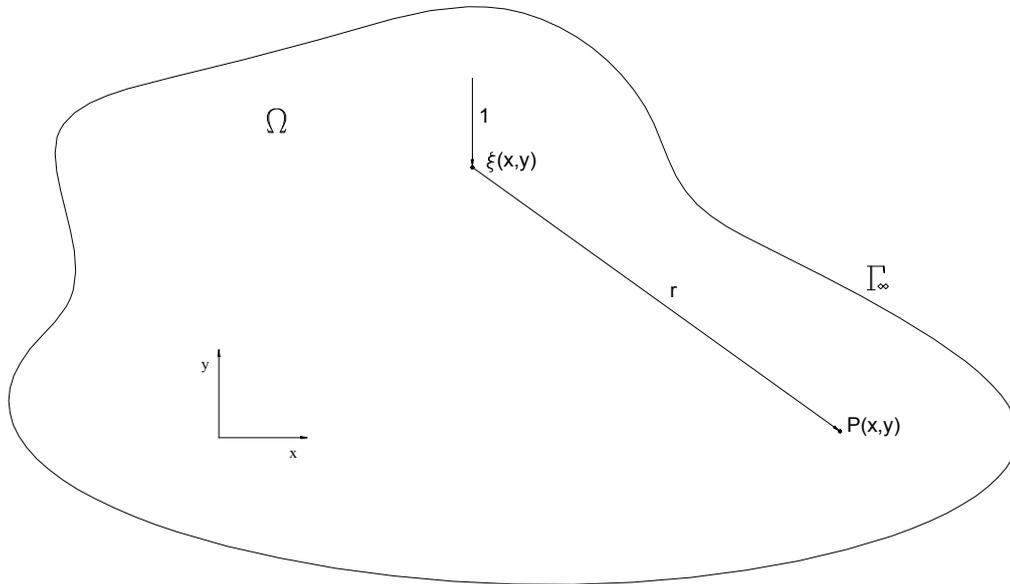


Figura IV.1 - Caracterização geométrica do problema fundamental correlato

Na equação (IV.5), $c(\xi)$ é um fator que aparece para destacar que o valor da sentença integral depende da localização do ponto ξ com relação a X . É muito comum com o MEC considerar-se o ponto ξ , usualmente denominado de ponto fonte, situar-se sobre o contorno ou mesmo fora dele. Pode ser demonstrado que $c(\xi)$ pode assumir os valores 1, 0.5 e zero, conforme o ponto ξ esteja localizado no interior do domínio, sobre um contorno suave ou fora do domínio Ω respectivamente. Para maiores esclarecimentos, vide as referências já citadas, como Brebbia [22], Brebbia e Walker [21], que tratam esta questão com o devido formalismo matemático.

Casos em que o contorno é anguloso não são aqui considerados, mas para problemas bidimensionais tem-se [24]:

$$c(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (IV.6)$$

O coeficiente α corresponde ao ângulo entre duas normais adjacentes ao ponto anguloso,

conforme mostra a Figura IV.2 a seguir.

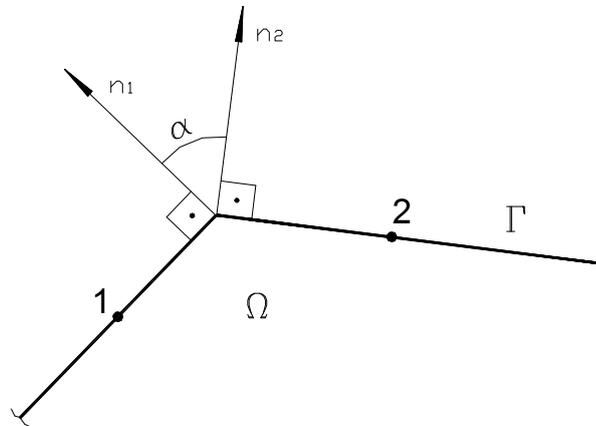


Figura IV.2 - Caracterização geométrica de um contorno anguloso

A equação integral inversa arrola valores genericamente apresentados como $S(u)$ e $G(u)$, que envolvem a derivada com relação a direção normal da solução fundamental $u^*(\xi, X)$ e do potencial $u(X)$. Os valores explícitos de $u^*(\xi, X)$ e sua derivada normal, para os problemas aqui tratados, são apresentados a seguir:

$$u^*(\xi, X) = \left(\frac{-1}{2\pi} \right) \ln[r(\xi, X)] \quad (\text{IV.7})$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = -(1/2\pi)(1/r(\xi; X))(\partial r / \partial n) \quad (\text{IV.8})$$

IV.3.3 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Para as simulações realizadas neste trabalho, foram utilizados elementos de contorno constantes no processo de discretização. Será apresentado agora, de maneira bastante sucinta, o procedimento geral de discretização do contorno considerando tal tipo de elemento.

O elemento de contorno constante apresenta-se como o mais fácil de implementar, mas nem por isso inadequado nas análises realizadas junto aos problemas de campo escalar. Diversos trabalhos têm mostrado a eficiência satisfatória deste tipo de elemento, não obstante a sua simplicidade [27]. Tendo em vista principalmente o desenvolvimento qualitativo de novas formulações, os elementos constantes facilitam a implementação computacional sem alterar a consistência da metodologia testada.

No MEC, depois de obtida a formulação integral equação (IV.5), o próximo passo para a resolução de um problema é a discretização do contorno. Devido ao fato de o MEC trabalhar com uma equação integral na forma inversa, que é equivalente a uma sentença de resíduos ponderados onde se minimizam os erros cometidos na possível desobediência das condições de contorno essenciais e naturais, pode-se utilizar uma função constante para a aproximação da função potencial [22]. Isto permite que se possam utilizar elementos constantes para a discretização do contorno, sem necessidade de satisfazer a continuidade da função potencial e de sua derivada entre os elementos de contorno. A Figura IV.3 apresenta o esquema de um elemento de contorno com interpolação constante e geometria linear.

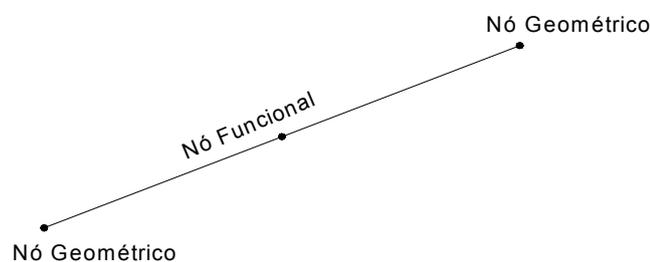


Figura IV.3 - Elemento de contorno constante

Denominam-se de nós geométricos aqueles que são responsáveis pela conectividade geométrica dos mesmos, enquanto são chamados de nós funcionais os que representam o valor da propriedade, função potencial ou sua derivada, no ponto.

A Figura IV.4 representa uma fronteira típica de um domínio bidimensional, discretizado em elementos de contorno constantes:

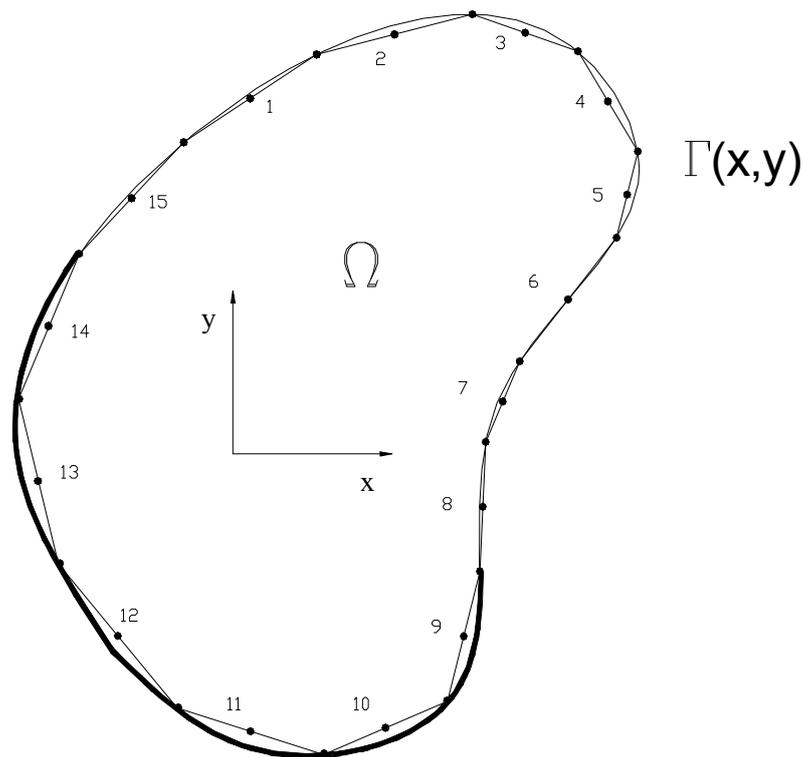


Figura IV.4 - Contorno discretizado em elementos de contorno constante

Percebe-se que o uso de elementos retilíneos promove um erro imediato na representação da fronteira, que deve ser minimizado com o refinamento da malha. Um outro tipo de erro envolve a representação das variáveis do problema, que são tomadas constantes ao longo do elemento. O refinamento também reduz a imprecisão cometida pelo uso desta interpolação constante, mas o emprego de elementos de ordem superior é o procedimento mais efetivo em casos dinâmicos onde o material é heterogêneo.

Considerando que Γ^k representa o elemento de contorno de número k , e n o número total de elementos de contorno da malha em questão, o processo de discretização do contorno resulta em:

$$\Gamma(X) \cong \sum_{k=1}^n \Gamma^k \quad (\text{IV.9})$$

As funções que aparecem nos integrandos podem ser realizadas, especialmente através de

técnicas numéricas como a quadratura de Gauss, a mais usada com o Método dos Elementos de Contorno.

Fazendo coincidir a quantidade e a localização dos pontos fonte ξ com os nós funcionais, pode-se gerar um sistema de equações algébricas de n equações e n incógnitas. Com a aplicação das respectivas condições de contorno, faz-se uma transposição dos valores incógnitos junto a uma matriz de coeficientes, enquanto os valores prescritos formam um vetor de termos independentes, que pode ser implementado e resolvido computacionalmente. Nos casos estacionários, esse sistema, usualmente expresso em termos matriciais fica:

$$A \cdot x = f \quad (IV.10)$$

Nos casos dependentes do tempo, empregando-se a formulação com Dupla Reciprocidade, um sistema similar ao mostrado na equação anterior é resolvido incrementalmente, por um esquema de integração direta.

IV.4 - TRATAMENTO TRADICIONAL DOS DOMÍNIOS HETEROGÊNEOS

Uma das maiores limitações do Método dos Elementos de Contorno (MEC) encontra-se na modelagem de problemas cujo meio contínuo é não-homogêneo, casos estes muito comuns nas áreas de Geotecnia e Mecânica dos Solos. Nas situações em que a heterogeneidade é setorialmente localizada, o uso de sub-regiões consiste no recurso mais eficiente e utilizado.

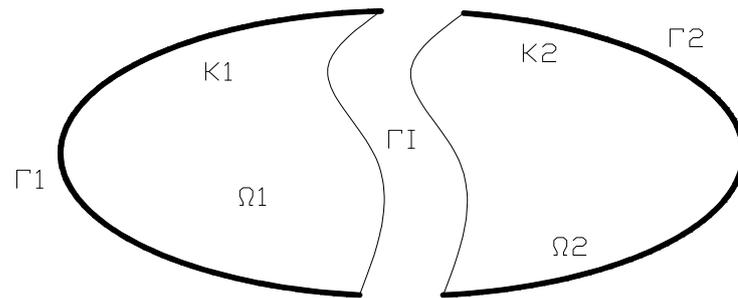


Figura IV.5 - Domínio não-homogêneo

Em certas situações, entretanto, esta estratégia é insatisfatória, podendo tornar-se onerosa e inadequada. Infelizmente, não há outras abordagens diferentes desta no acervo de recursos com Elementos de Contorno, o que resulta quase sempre na escolha de métodos de domínio, como o Método dos Elementos Finitos ou o Método das Diferenças Finitas para tratar esta categoria de problemas. Como será visto a seguir, utilizando-se a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade as características básicas da abordagem via MEC são mantidas. A variação das propriedades ao longo das direções coordenadas, descritas por funções conhecidas, é introduzida junto a cada elemento de contorno. Nenhuma restrição é imposta pela formulação quanto ao seu tipo ou ordem, garantindo assim a generalidade do processo.

CAPÍTULO V

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO AOS PROBLEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS

V.1 - FORMULAÇÃO INTEGRAL GERAL

Neste capítulo é apresentada a formulação integral do Método dos Elementos de Contorno para o caso bidimensional dinâmico considerando meios não homogêneos. Como são empregadas de modo independente duas formulações diferentes para simular o comportamento dinâmico e a não homogeneidade do meio, a dedução do caso estático é apresentada durante o decorrer da dedução do problema geral.

É válido repetir que vigora a consideração de um meio contínuo não-homogêneo e estacionário, no qual $d\Omega$ representa uma superfície infinitesimal em que as variáveis bidimensionais são expressas por $X = X(x_1, x_2)$, descrevendo sua posição com relação a um sistema de coordenadas cartesianas. Neste caso, a equação de governo (II.36), repetida aqui, admite o equilíbrio e a compatibilidade de uma função escalar u , que genericamente pode representar deslocamento, temperatura ou qualquer propriedade física similar:

$$[K(X)u(X)]_{,i} J_{,i} = \rho \ddot{u}(t) \quad (\text{V.1})$$

Na equação acima, $K(X)$ é uma função que representa a propriedade constitutiva do meio contínuo, dependente da posição ao longo do domínio bidimensional. As condições de contorno essenciais e naturais são definidas a seguir.

Para $X \in \Gamma_u$ (condição essencial):

$$u(X) = \bar{u} \quad (\text{V.2})$$

Para $X \in \Gamma_q$ (condição natural):

$$u(X)_{,i} n(X)_i = \bar{q} \quad (\text{V.3})$$

Nas equações (V.2) e (V.3), $\Gamma_u(X)$ e $\Gamma_q(X)$ representam as fronteiras do meio contínuo e $n_i(X)$ expressa o vetor normal unitário em um ponto qualquer destas. Nos problemas de Mecânica dos Sólidos, q adquire o significado de deformação normal aplicada no contorno, enquanto nos casos de transferência de calor pode ser interpretado como uma taxa conhecida de energia difusiva.

O ponto de partida para a abordagem pelo MEC [21,22] consiste do estabelecimento da equação de governo (V.1) numa forma integral, usando a solução fundamental $u^*(\xi, X)$ como função auxiliar, resultando na seguinte expressão, onde foram omitidos os argumentos por simplicidade:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \rho \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega \quad (\text{V.4})$$

V.2 - TRATAMENTO DO PROBLEMA ESTACIONÁRIO

Trabalhando apenas o lado esquerdo da equação, aplica-se o esquema de integração por partes podendo reescrevê-la da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (Ku_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (V.5)$$

O Teorema da Divergência transforma a primeira integral de domínio numa integral de contorno:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Ku_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (V.6)$$

Usando a definição expressa na equação (V.3), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Omega} Ku_{,i} u^*_{,i} d\Omega \quad (V.7)$$

Aplicando mais uma vez a integração por partes junto à integral de domínio que restou, tem-se:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Omega} (Kuu^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u(Ku^*_{,i})_{,i} d\Omega \quad (V.8)$$

Com o Teorema da Divergência aplicado na primeira integral de domínio, fica:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u(Ku^*_{,i})_{,i} d\Omega \quad (V.9)$$

Desenvolvendo a derivada do núcleo da última integral de domínio, a equação (V.9) obtém-se:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuu^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} uKu^*_{,ii} d\Omega \quad (V.10)$$

Considera-se uma solução fundamental tradicional associada a um problema governado pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto fonte ξ de um domínio espacial infinito, ou seja:

$$u^*_{,ii}(\xi; X) = -\Delta(\xi; X) \quad (\text{V.11})$$

Cuja solução é dada por:

$$u^*(\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad (\text{V.12})$$

E, que por conveniência é estratégico se definir:

$$q^*(\xi) = u^*_{,i}(\xi; X)n_i \quad (\text{V.13})$$

Nas equações precedentes, r é a distância entre o ponto fonte ξ e um ponto genérico X do domínio, chamado ponto campo.

Substituindo a equação (V.11) na última parcela do lado direito da equação (V.10), e utilizando a definição (V.13), tem-se:

$$\int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uK_{,i} u^*_{,i} d\Omega - c(\xi)u(\xi)K(\xi) \quad (\text{V.14})$$

A constante $c(\xi)$ refere-se as possibilidades do ponto fonte situar-se no interior ou fora do domínio Ω , assim como no próprio contorno Γ , o que resulta em valores distintos, conforme pode ser obtido na literatura especializada [24].

A única integral de domínio restante será transformada numa integral de contorno através do procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade.

V.3 - APLICAÇÃO DA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE

O procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade é uma estratégia similar àquela criada por Nardini e Brebbia [4], mas direciona-se ao tratamento de termos integrais que possuam uma derivada espacial de primeira ordem. A Quase-Dupla Reciprocidade aproxima o núcleo da integral de domínio da equação (V.14) através da seguinte sentença:

$$b_i = uK_{,i} \cong \alpha_p^j \psi_{p,i}^j = \alpha_p^j \eta_{pi}^j \quad (V.15)$$

A forma diádica das funções auxiliares ψ e η utilizadas, deve-se a aspectos operacionais, cujos detalhes podem ser colhidos na referência [5]. Substituindo-se a equação (V.15) na integral de domínio da equação (V.14), tem-se:

$$\int_{\Omega} uK_{,i} u_{,i}^* d\Omega \cong \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i}^* d\Omega \quad (V.16)$$

Uma vez mais, usando integração por partes:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} (\psi_{p,i}^j u_{,i}^*)_{,i} d\Omega - \alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,ii}^j u^* d\Omega \quad (V.17)$$

Aplicando o Teorema da Divergência e usando a mesma solução fundamental é possível reescrever a equação anterior na forma:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \psi_{p,i}^j u_{,i}^* d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_{p,i}^j u_{,i}^* n_i d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi) \psi_p^j(\xi) \quad (V.18)$$

A expressão completa referente ao lado esquerdo da equação (V.4) fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Ku_{,i})_{,i} u^* d\Omega &= \int_{\Gamma} Kqu^* d\Gamma - \int_{\Gamma} Kuq^* d\Gamma + \\ &- c(\xi)u(\xi)K(\xi) + \alpha_p^j \int_{\Gamma} \psi_p^j q^* d\Gamma + \alpha_p^j c(\xi)\psi_p^j(\xi) \end{aligned} \quad (V.19)$$

V.4 - OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES NA QUASE-DUPLA RECIPROCIDADE

A técnica da Quase Dupla Reciprocidade requer a interpolação das componentes do campo vetorial dado pela função $u_{K,i}$ conforme a equação abaixo:

$$v_i \theta \cong \alpha_p^j \eta_{p,i}^j = \alpha_p^j \Psi_{p,i}^j \quad (V.20)$$

O conjunto de funções utilizado para interpolar o campo vetorial se mostra mais restrito do que na técnica da Dupla Reciprocidade tradicional (que será discutida mais à frente), pois esta interpola uma grandeza escalar. O fato de se interpolar um vetor exige um número igual a $2n$ de funções interpolantes, sendo n o número de elementos de contorno utilizados na malha. Gera-se, então, como será visto mais à frente, uma matriz de ordem $2n \times 2n$, fato que restringe o uso de algumas funções que podem provocar singularidade da matriz, pois que esta necessita ser invertida. Os índices p que aparecem subscritos na equação (V.21) são para designar a necessidade de um número dobrado de funções interpolantes. Um conjunto de funções proposto por Loeffler e Mansur [5] é dado por:

$$\eta_{p,i}^j = 3r_i r_p + r^3 \delta_{ip} \quad (V.21)$$

Onde:

$$r_i = (X_i - X_i^j) \quad (V.22)$$

e;

$$r_p = (X_p - X_p^j) \quad (V.23)$$

Nas equações anteriores, $r(X^j, X)$ caracteriza a distância euclidiana entre os pontos de interpolação X^j e os pontos X . Deduz-se que r_i e r_p são as componentes de r nas direções i e p , respectivamente.

De acordo com a equação (V.21), pode ser demonstrado que:

$$\Psi_p^j = r^3 \Gamma_p \quad (V.24)$$

V.5 - TRATAMENTO DO PROBLEMA DINÂMICO

Para operacionalizar o emprego do Método dos Elementos de Contorno na parcela dinâmica existente do lado direito da equação (V.4), usa-se a técnica da Dupla Reciprocidade tradicional. Aproxima-se, então, o núcleo da integral de domínio através da seguinte sentença:

$$\ddot{u} = \ddot{\beta}^j F^j = \ddot{\beta}^j \phi^j_{,ii} \quad (V.25)$$

Na equação anterior, F é um conjunto de funções auxiliares e ϕ representa as primitivas de F. Assim sendo, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \ddot{\beta}^j \int_{\Omega} \phi^j_{,ii} u^* d\Omega \quad (V.26)$$

A aplicação, também, do esquema de integração por partes no lado direito da equação (V.26) permite reescrevê-la como:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \ddot{\beta}^j \left[\int_{\Omega} (\phi^j_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \phi^j_{,i} u^*_{,i} d\Omega \right] \quad (V.27)$$

A aplicação do Teorema da Divergência transforma a primeira integral de domínio numa integral de contorno, na forma:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \ddot{\beta}^j \left[\int_{\Gamma} \phi^j_{,i} n_i u^* d\Gamma - \int_{\Omega} \phi^j_{,i} u^*_{,i} d\Omega \right] \quad (V.28)$$

Aplicando, novamente, a integração por partes na equação (V.28) e fazendo:

$$z^J = \phi^J_{,i} n_i \quad (\text{V.29})$$

tem-se:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \ddot{\beta}^J \left[\int_{\Gamma} z^J u^* d\Gamma - \int_{\Omega} (\phi^J u^*_{,i})_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \phi^J u^*_{,ii} d\Omega \right] \quad (\text{V.30})$$

Empregando o Teorema da Divergência uma vez mais, na primeira integral de domínio da equação anterior, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \ddot{\beta}^J \left[\int_{\Gamma} z^J u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi^J u^*_{,i} n_{,i} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi^J u^*_{,ii} d\Omega \right] \quad (\text{V.31})$$

Substituindo a equação (V.11) na última parcela do lado direito da equação (V.31) e utilizando a definição (V.13), tem-se:

$$\rho \int_{\Omega} \ddot{u} u^* d\Omega = \rho \ddot{\beta}^J \left[\int_{\Gamma} (z^J u^* - \phi^J q^* d\Gamma) - c(\xi) \phi^J(\xi) \right] \quad (\text{V.32})$$

V.6 - OBTENÇÃO DAS FUNÇÕES AUXILIARES NA DUPLA RECIPROCIDADE

Antes de avançar com o tratamento matemático da equação de governo, é imprescindível analisar as novas funções ϕ e z introduzidas para possibilitar a formulação matemática apresentada anteriormente. Entende-se a inclusão destas novas funções como uma estratégia matemática utilizada para eliminar a integração de domínio, pois logo após a discretização espacial, a equação de governo será expressa, outra vez, em termos das variáveis originais, porém envolvendo somente integrais de contorno. Não se opondo a essa utilização momentânea, uma etapa importante reside na escolha das funções F^j e o cálculo das suas primitivas ϕ^j e z^j . Em princípio, o emprego destas funções não sofre nenhuma restrição para

os problemas com domínios finitos. Todavia, é sabido que as funções F^j servem para interpolar os valores do potencial ou das ações de domínio em todo o sistema, com base nos pontos onde estas grandezas são conhecidas.

Assim, um aspecto importante surge com referência à representatividade das funções escolhidas. Funções bem simples e flexíveis devem ser preferidas, pois aquelas com elevado decaimento ou crescimento, singularidades ou complexidade não serão adequadas. Todo um estudo sobre o significado analítico e geométrico destas funções, bem como os testes baseados na experiência para avaliação da precisão de várias delas, podem ser encontrados na literatura [27,28].

Uma interessante opção para estas funções é aquela que determina a distância euclidiana entre dois pontos. Assim sendo:

$$F^j(X) = r(A^j, X) \quad (\text{V.33})$$

Onde X representa pontos do domínio e A^j pontos arbitrários em relação aos quais as funções F^j são referenciadas. Com o estabelecimento da equação (V.33), as primitivas de ϕ^j podem ser calculadas:

$$\phi^j_{,ii} = r(A^j, X) \quad (\text{V.34})$$

Referenciando-a em coordenadas polares, com a origem em A^j , esta equação passa a ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 \phi^j(X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^j(X)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi^j(X)}{\partial \theta^2} = r \quad (\text{V.35})$$

Como ϕ^j é independente de θ , a expressão fica:

$$\frac{\partial^2 \phi^j(X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi^j(X)}{\partial r} = r \quad (\text{V.36})$$

Trabalhando a equação diferencial anterior, pode-se obter uma solução particular conforme

mostrada:

$$\phi^j = \frac{r^3}{9} \quad (\text{V.37})$$

Desta maneira as funções z^j será:

$$z^j = \frac{r^2}{3} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{V.38})$$

V.7 - PONTOS INTERNOS DE INTERPOLAÇÃO OU PÓLOS

No método dos elementos de Contorno o cálculo das variáveis em pontos internos ao domínio é feito após a resolução da equação matricial do problema, empregando-se os valores nodais já encontrados. Entretanto, na formulação com Dupla reciprocidade obtém-se uma melhor precisão na interpolação dada pela equação (V.25) se forem incluídas parcelas adicionais em seu somatório, nas quais as funções auxiliares sejam determinadas também em pontos internos. A necessidade destes pontos pode ser compreendida tendo em vista que o emprego do Teorema da Divergência em núcleos de integrais que contém funções auxiliares não garante boa precisão. Em outras palavras: sem os pólos, representa-se o comportamento no interior do domínio apenas com base em valores de contorno obtidos por interpolação.

Em problemas com ações de domínio, os pólos podem ser adicionados sem introduzir incógnitas no sistema; já nos casos dinâmicos, precisam ser incluídos no sistema matricial como incógnitas e serem resolvidos simultaneamente com os pontos nodais do contorno [29].

Já a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade não requer o emprego de pólos, porque o conjunto de parcelas das funções de interpolação é expressa em termos de derivadas espaciais (vide equação (V.15)).

V.8 - FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Nesse passo efetua-se a divisão do contorno $\Gamma(x)$ em elementos discretos, em cada um dos quais as variáveis do problema são aproximadas, ou seja, são consideradas constantes, lineares ou quadráticas. Neste trabalho, considera-se apenas a formulação para elementos constantes. Assim, a etapa de discretização espacial e temporal com a aproximação das variáveis físicas serão realizadas através dos procedimentos típicos e bem conhecidos do MEC, que resultam no seguinte sistema matricial:

$$GKq - HKu + [H\Psi]\alpha = [Gz - H\phi]\ddot{\beta} \quad (V.39)$$

Descondensando o sistema matricial acima em matrizes e vetores de forma aberta para melhor visualização, segue-se:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & \dots & G_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & \dots & H_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{m1} & \dots & K_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & \dots & H_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \dots & \Psi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{m1} & \dots & \Psi_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{m1} & \dots & G_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} H_{11} & \dots & H_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & \dots & H_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_m \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_m & \dots & \beta_m \end{pmatrix}$$

É possível eliminar os vetores $\ddot{\beta}$ e na equação anterior através das seguintes substituições:

$$\alpha = [\eta]^{-1} K_d u \quad (V.40)$$

$$\ddot{\beta} = F^{-1} \ddot{u} \quad (V.41)$$

Sendo K_d uma matriz composta pelos valores das derivadas da rigidez da matriz K . Desta forma, pode-se escrever:

$$[Gq - Hu]K + H\Psi\eta^{-1}K_d u = [Gz - H\phi]F^{-1}\ddot{u} \quad (\text{V.42})$$

E, ainda, pode-se fazer:

$$B = H\Psi\eta^{-1}K_d \quad (\text{V.43})$$

$$M = [Gz - H\phi]F^{-1} \quad (\text{V.44})$$

$$G_k = GK \quad e \quad H_k = HK \quad (\text{V.45})$$

Obtendo, desta forma, com a substituição de (V.43), (V.44) e (V.45) em (V.42) um sistema matricial de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo que pode ser escrita, utilizando a notação matricial, da seguinte maneira:

$$[H_k - B]u - G_k q = -M\ddot{u} \quad (\text{V.46})$$

A equação (V.46) é uma equação matricial algébrica apenas no que se refere às variáveis espaciais. É necessário realizar um procedimento de discretização também com relação à variável tempo. Neste caso, existem vários procedimentos que possuem diversas particularidades. No presente trabalho, o tratamento da derivada temporal será feito por processos de incrementos de integração direta ou métodos de integração passo a passo.

V.9 - AVANÇO NO TEMPO

Na análise transiente de sistemas dinâmicos, no domínio do tempo, basicamente duas metodologias podem ser adotadas para a solução numérica do sistema de equações de equilíbrio resultante da discretização.

No caso de sistemas dinâmicos com um número reduzido de graus de liberdade, uma estratégia apropriada de solução seria, por exemplo, avaliar as frequências e os modos

naturais de vibração do sistema não amortecido associado. Calcular-se-ia então a resposta de cada modo natural ao forçamento utilizando, por exemplo, a integral de Duhamel [30] e, finalmente, obtém-se a solução do sistema através da superposição modal. Esta estratégia, conhecida como análise modal ou método da superposição, é especialmente atrativa quando as soluções podem ser representadas por um número reduzido de modos naturais, como aquelas resultantes de carregamentos externos periódicos em baixas frequências.

No entanto, para os casos de carregamentos a altas frequências ou problemas onde o desacoplamento é impossível ou muito difícil, como em muitos problemas não-lineares, a análise deve ser desenvolvida através da solução do movimento acoplado por meio de técnicas de integração direta, qualquer que seja o número de graus de liberdade do sistema.

No caso onde é possível utilizar as duas técnicas, a decisão para uso de uma ou outra técnica de solução depende essencialmente de dois fatores: o custo relativo entre o uso de integração temporal direta e o da superposição modal, e as características de eficiência numérica dos operadores de integração a serem implementados em cada procedimento.

É importante notar que enquanto na análise modal busca-se uma transformação de coordenadas nas quais as equações do movimento sejam mais facilmente integráveis, nos métodos diretos trabalha-se com as equações originais do problema, que são integradas via algoritmos numéricos de avanço passo a passo.

A concepção dos algoritmos incrementais baseia-se no próprio caráter de uma equação de evolução, para a qual, garantidas as condições de existência e unicidade da solução, esta é obtida pelo conhecimento das condições iniciais. Em outros termos, o que se busca na construção de algoritmos de integração passo a passo é definir uma relação de recorrência adequada, que permita, a partir dos valores conhecidos num instante ($t = t_n$), determinar os valores das variáveis dependentes no instante seguinte ($t = t_{n+1}$).

Na utilização destes esquemas de integração direta junto a uma formulação do MEC com Dupla Reciprocidade, apresentada anteriormente, os resultados relatados na literatura [31,32] mostram que aqueles esquemas que possuem amortecimento fictício são os mais apropriados.

Neste trabalho, para realizar o avanço no tempo lança-se mão do Esquema Houbolt [30], sendo este um algoritmo implícito e incondicionalmente estável, tanto para o Método de Elementos Finitos como para o Método de Elementos de Contorno. As aproximações das acelerações, obtida através de uma interpolação cúbica de Lagrange no instante $(n-2) \Delta t$ até $(n+1) \Delta t$ é dada por:

$$\ddot{u}_{n+1} = \frac{1}{\Delta t^2} [2u_{n+1} - 5u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}] \quad (\text{V.47})$$

Substituindo a equação (V.47) na equação (V.46) e fazendo:

$$MA = [H_k - B] \quad (\text{V.48})$$

Pode-se, então, realizando algumas manipulações algébricas, chegar finalmente a:

$$\begin{aligned} [2M + \Delta t^2 MA] u_{n+1} - \Delta t^2 G_k q_{n+1} &= \\ &= 5M u_n - 4M u_{n-1} + M u_{n-2} \end{aligned} \quad (\text{V.49})$$

A equação anterior é resolvida passo a passo, de acordo com procedimento incremental usualmente utilizado nos problemas de dinâmica estrutural.

V.10 - ESTRUTURA DO MODELO COMPUTACIONAL EM CÓDIGO FORTRAN

O programa foi desenvolvido basicamente para a realização de testes. Sua estrutura de matrizes e vetores utiliza a dupla precisão, isto é, o uso de dezesseis bytes no armazenamento dos números. Também, com armazenamento em matrizes, a ocupação da memória livre disponível cresce quadraticamente com o aumento do número de elementos. No entanto, isto tende a facilitar o procedimento de implementações futuras, pois, desta forma, cria-se uma estrutura mais simplificada que as estruturas de outros métodos de armazenamento. Porém,

esta facilidade ocasiona o uso dispendioso de memória quando se tenta resolver problemas com um grande número de elementos de contorno. Tal inconveniente pode ser sanado em trabalhos futuros envolvendo este código, uma vez que o modelo numérico apresente a consistência esperada.

O código Fortran está subdividido em sub-rotinas cada qual desempenhando um papel fundamental no programa desenvolvido. A Figura V.1 refere-se ao fluxograma existente na chamada sub-rotinas. Neste trabalho houve alteração das sub-rotinas INPUT, FMAT e NARD. As rotinas incluídas foram NARD 2 e AVANÇO.

Descrevem-se abaixo, sucintamente, as principais características e tarefas realizadas por cada sub-rotina:

PRINCIPAL: Define os pontos e pesos de Guass e chama outras rotinas.

INPUT: Faz a leitura de dados no arquivo de entrada.

FMAT: Forma o sistema de equações.

INTE: Obtém os elementos fora da diagonal.

PREP: Prepara e calcula os coeficientes da quadratura e faz a transformada de Telles.

Mínimo: Calcula a distância mínima e define o ponto de singularidade.

GOLDEN: Golden section search in one dimension (Numerical Recipes - P. 393").

R_LINHA: Cálculo de R_LINHA (TELLES 1987).

CALC_COEF: Cálculo dos coeficientes A,B,C,D.

INLO: Obtém os elementos da diagonal.

NARD: Procedimento da Quase-Dupla Reciprocidade, esta monta as matrizes convectivas.

NARD 2: Procedimento da Dupla Reciprocidade, esta monta as matrizes dinâmicas.

MINV: Inverte a matriz através do procedimento padrão de Gauss-Jordan.

SLNPD: Resolve o sistema de equações lineares pelo método da eliminação de Gauss.

INTER: Calcula os valores de U nos pontos internos e reordena o resultado.

AVANÇO: Faz o avanço no tempo segundo o esquema Houbolt.

A indicação numérica na figura abaixo representa a ordem de chamada das sub-rotinas.

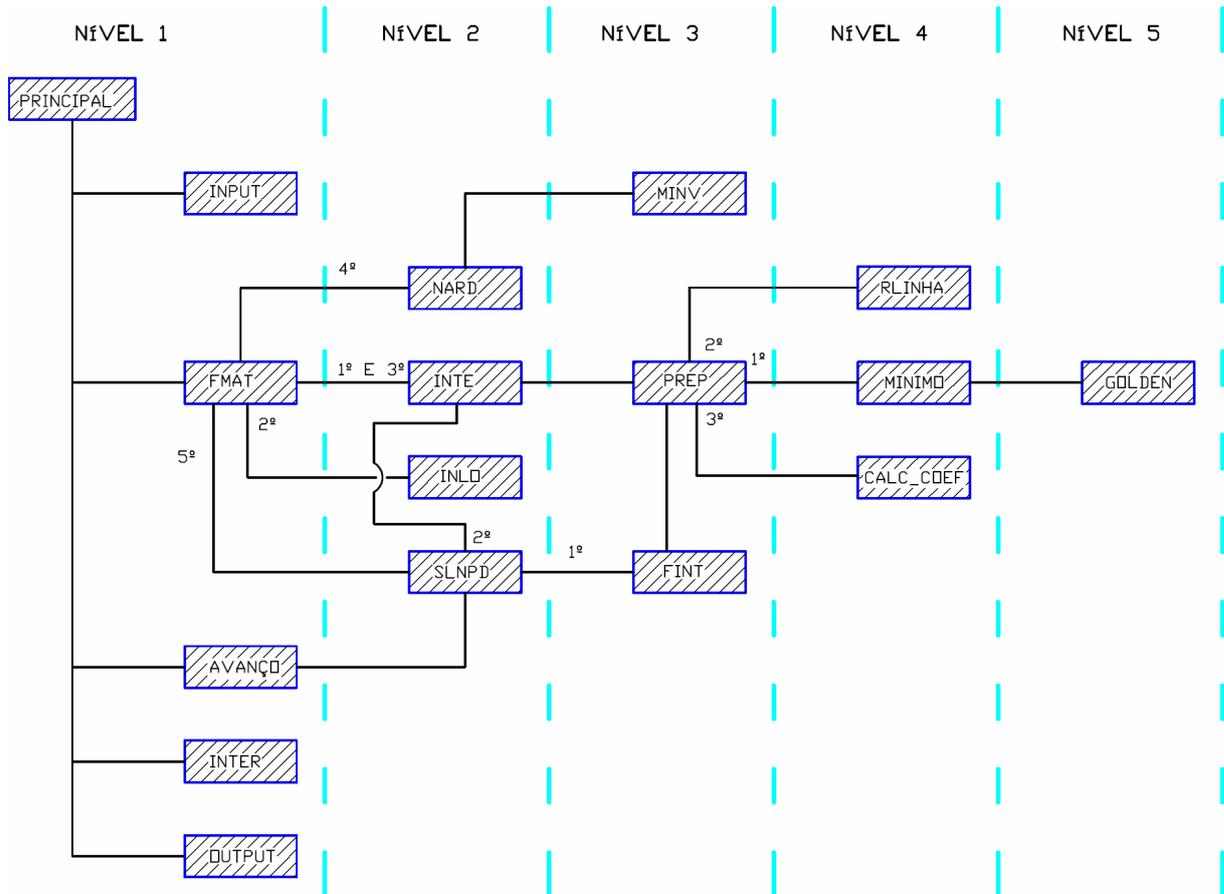


Figura V.1 – Fluxograma das sub-rotinas dentro do código Fortran

As particularidades do código são demasiadamente extensas e complexas, resultados de inúmeros trabalhos publicados e de códigos que geraram sub-rotinas já consagradas em outros projetos. Portanto, os detalhes referentes ao programa, não serão comentados neste trabalho, que pretende apenas tratar o quão próximo da solução analítica o método empregado pode chegar em problemas de natureza heterogênea envolvendo procedimentos dinâmicos.

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS NUMÉRICOS

VI.1 - RESULTADOS DE PROBLEMAS ESTACIONÁRIOS

É importante salientar que os resultados a serem observados abaixo, neste subtítulo, foram publicados anteriormente em trabalhos, de outros autores, citados nas referências. Estes testes foram de grande valia para calibrar o programa desenvolvido, pois a análise dinâmica somente poderia ser implantada a partir de um modelo estático consistente. Todavia, vale ressaltar, que os exemplos resolvidos anteriormente foram refeitos e os resultados aqui alcançados tiveram melhor êxito que os estudados em publicações anteriores, por conta de maior precisão computacional.

VI.1.1 - BARRA CARREGADA UNIAXIALMENTE

Considere uma barra de seção constante fixa numa extremidade e tracionada na outra,

constituída de um material cujo módulo de elasticidade longitudinal varia ao longo do comprimento da mesma, de acordo com a seguinte função:

$$E(x) = E_0 + E_0 \frac{mx}{L} = E_0 \left(\frac{L + mx}{L} \right) \quad (\text{VI.1})$$

Na equação (VI.1) m é um parâmetro de controle de rigidez. As demais grandezas podem ser compreendidas com base na Figura VI.1, mostrada a seguir, que ilustra as características físicas e geométricas do problema em questão.

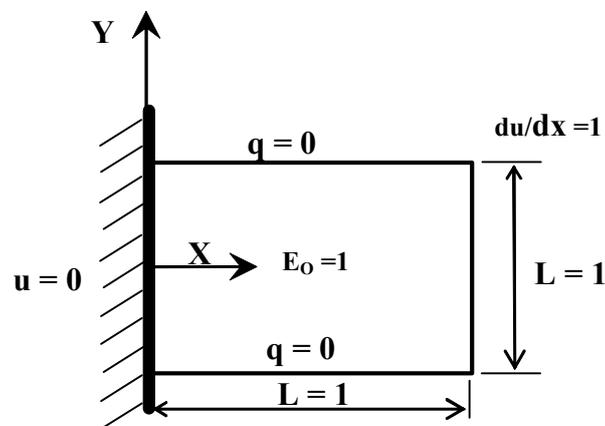


Figura VI.1 - Características Físicas e Geométricas da barra não-homogênea

A função que descreve os deslocamentos da barra ao longo do seu comprimento é expressa por [9]:

$$u(x) = \frac{\varepsilon_0 L (1+m)}{m} \left[\ln \left(\frac{L+mx}{L} \right) \right] \quad (\text{VI.2})$$

A simulação numérica do problema é feita através de modelos discretos, nos quais o contorno da barra é substituído por elementos de contorno retilíneos constantes. Inicialmente foi escolhido o valor da constante m igual a unidade e daí então realizada uma bateria de testes usando malhas com diversas quantidades de elementos de contorno (e.c.). Para o contorno foram utilizadas malhas com 08, 16, 32, 64 e 128 e.c., de forma que se possa verificar a convergência do método com o refinamento. A Figura VI.2 representa as malhas utilizadas.

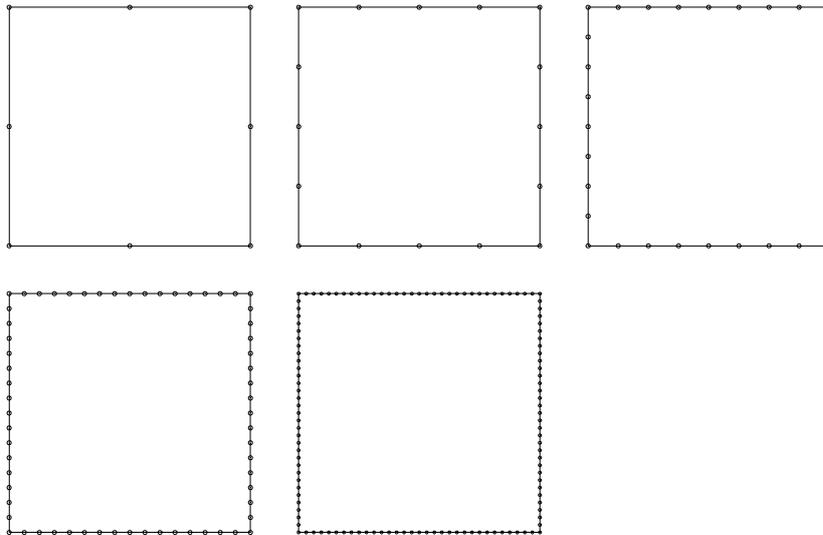


Figura VI.2 – Malha com 8, 16, 32, 64 e 128 elementos

Para as malhas em questão resolve-se o problema utilizando 0, 01 e 03 pontos internos interpolantes (p.i.). A Figura VI.3 a seguir, exemplifica as malhas com 128 e.c. com 01 e 03 p.i.

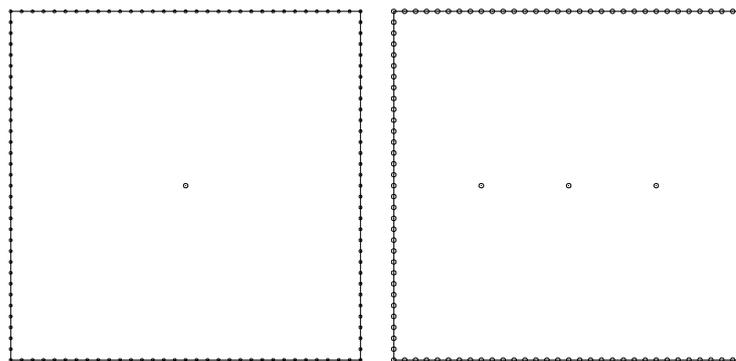


Figura VI.3 – Malhas de 128 e.c., com 01 e 03 p.i.

O gráfico da Figura VI.4 mostra a curva de erro médio percentual para o cálculo do deslocamento nos pontos nodais situados ao longo da coordenada x em função da quantidade de pontos nodais ou elementos de contorno empregados.

Lembrando que a curvatura visualizada no gráfico depende das escalas verticais e horizontais juntamente com o tipo de linha que interliga os pontos, neste caso uma linha suavizada.

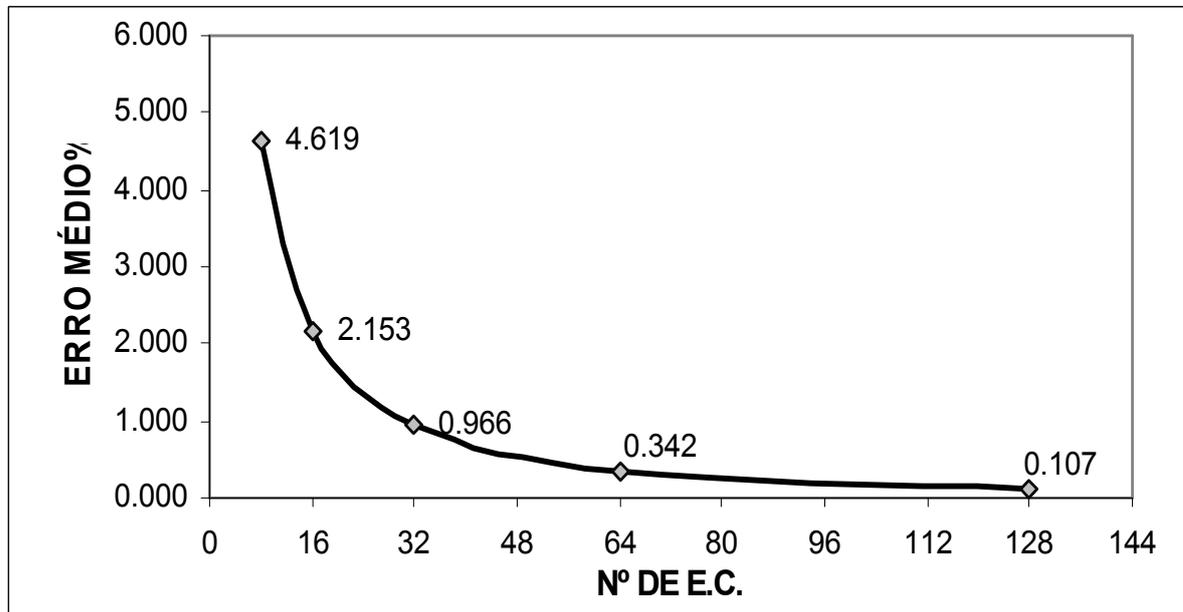


Figura VI.4 - Erro médio percentual dos valores de deslocamento ao longo do comprimento

Com a apresentação da figura acima, é possível identificar os bons resultados alcançados com o refinamento da malha. O erro médio obtido a partir da malha de 32 e.c. é de menos de 1%.

Na formulação da Dupla Reciprocidade tradicional é muito comum introduzir-se os pontos internos interpolantes (pólos) para melhorar a representação das propriedades físicas no interior do domínio e conseqüentemente melhorar a precisão das simulações. No caso da Quase-Dupla Reciprocidade, este recurso não é necessário, como se pode observar pela precisão obtida, nem mesmo é eficaz para aprimorá-la. Na Figura VI.5 apresentam-se os resultados do erro médio percentual no caso da introdução de diferentes quantidades de pontos interpolantes nas diversas malhas utilizadas para as simulações computacionais.

Tabela VI.1 - Influência dos Pontos Internos no erro médio das diversas malhas.

Nº E.C.	ERRO MÉDIO COM 00 PONTOS INTERNOS(%)	ERRO MÉDIO COM 01 PI (%)	ERRO MÉDIO COM 03 PI (%)
8	4.619	4.380	4.437
16	2.153	2.154	2.097
32	0.966	0.966	0.945
64	0.342	0.342	0.339
128	0.107	0.108	0.107

Com os dados da tabela acima se pode visualizar um gráfico na forma de barras:

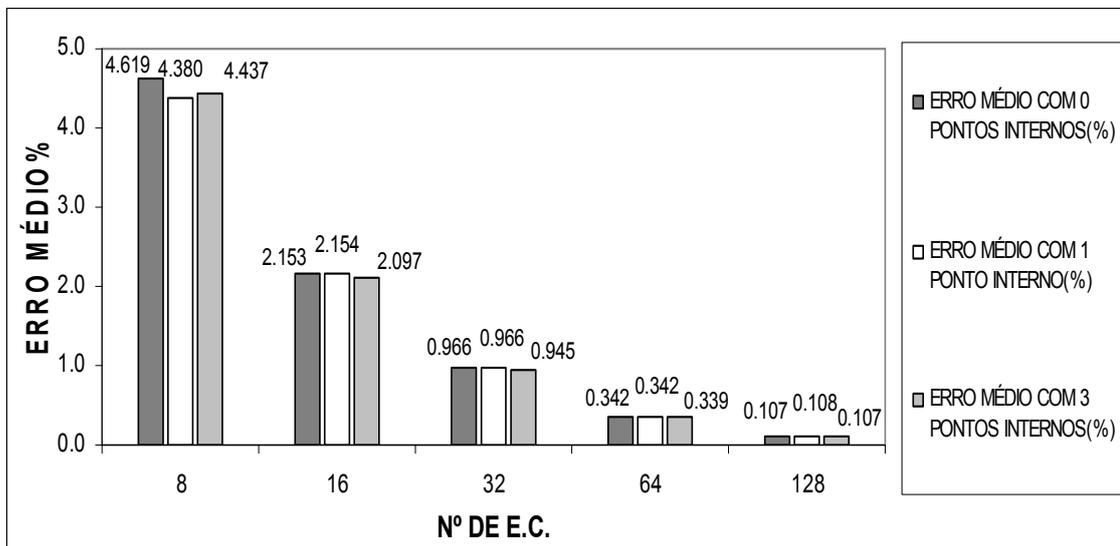


Figura VI.5 - Gráfico da Influência dos Pontos Internos no erro médio

Sendo assim, realizado os testes com relação ao refinamento das malhas e com a inclusão de pontos internos interpolantes, ainda se fez necessário mais uma simulação, desta vez torna-se importante conhecer a precisão do método com a variação da constante m . Neste teste seguinte, toma-se a malha mais refinada, com 128 pontos nodais, e varia-se o valor de m , tornando mais acentuada a variação do módulo de rigidez. O erro médio percentual no cálculo dos deslocamentos ao longo da barra pode ser observado a seguir através da Figura III.6.

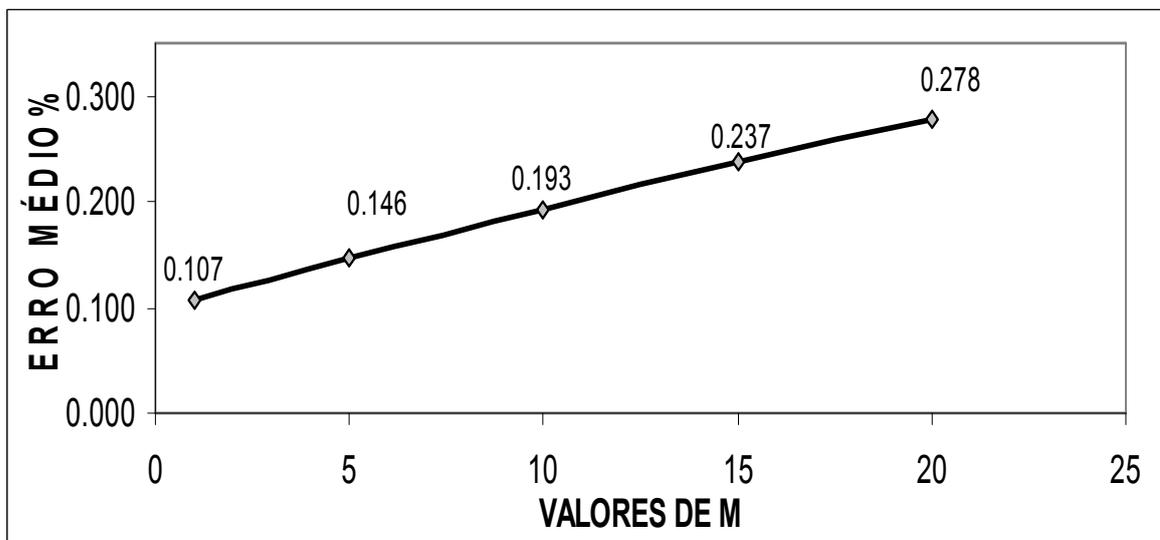


Figura VI.6 - Comportamento do erro com a variação da constante m .

Conforme gráfico mostrado anteriormente, houve um certo aumento do erro médio percentual, de acordo com a variação da constante m , conforme esperado. Este erro, porém, mesmo com um valor de 10 para a constante m ainda é muito baixo, mostrando assim uma boa eficácia do método para variações mais críticas da elasticidade da barra, podendo ainda ser diminuído com o refinamento da malha.

VI.1.2 - DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-1

Considere um problema de difusão bidimensional no qual a condutividade térmica é variável. As condições de contorno deste problema são unicamente do tipo Dirichlet, ou seja, apenas temperaturas são prescritas na fronteira. A configuração geométrica apresentada é a mesma utilizada anteriormente, ou seja, domínio de dimensões 1,0 x 1,0 unidades de comprimento (u.c.) conforme mostra a Figura VI.7:

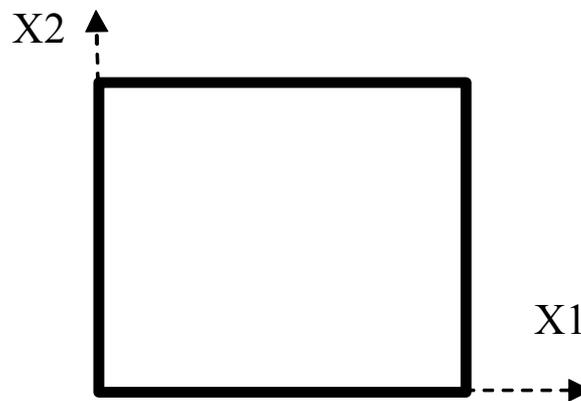


Figura VI.7 – Representação geométrica

A equação de governo deste problema é:

$$K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial K}{\partial x_1} \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \frac{\partial K}{\partial x_2} \frac{\partial \theta}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{VI.3})$$

As temperaturas são prescritas em todo o contorno, e dadas pela seguinte expressão:

$$\theta = e^{Ax_1 + Bx_2} \quad (\text{VI.4})$$

Por sua vez, a condutividade térmica é:

$$K = e^{-Ax_1 - Bx_2} \quad (\text{VI.5})$$

Pode-se constatar que os valores de K e θ são tais que obedecem à equação diferencial parcial dada por (VI.3). Da solução analítica deste problema resultam valores de fluxo de calor variando da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = A e^{Ax_1 + Bx_2} \quad (\text{VI.6})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = B e^{Ax_1 + Bx_2} \quad (\text{VI.7})$$

A simulação numérica feita utilizando-se malha de 8, 16, 32, 64 e 128 e.c. seguindo o mesmo padrão para o problema de barras pode-se, dessa maneira, avaliar o comportamento do método com refinamento do contorno. Para esses testes iniciais admitiu-se os valores de A e B iguais à unidade e assim foram realizados os testes com as diversas malhas idênticas as da Figura VI.2.

Para avaliar a eficácia do método de acordo com o refinamento da malha, plota-se o gráfico da Figura VI.8, que mostra o erro percentual médio de cada malha para o cálculo dos fluxos de calor nos pontos nodais em função da quantidade de elementos de contorno empregados.

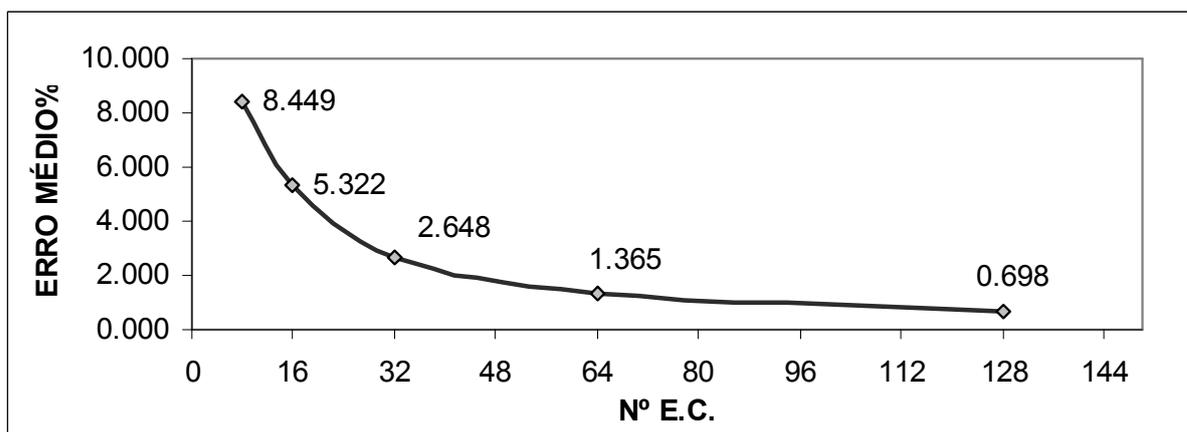


Figura VI.8 - Erro percentual nos valores de fluxo de calor bidimensional

Diante desses resultados, observa-se um bom desempenho do método a partir da malha de 64 e.c. e, obtendo-se um erro médio de menos de 1% com malha de 128 e.c.

No próximo teste tomou-se a malha com 128 elementos e variaram-se os valores das constantes A e B, de forma que estas tenham o mesmo valor, fazendo com que o gradiente de temperatura fosse mais acentuado. A Figura VI.9 apresenta o erro percentual médio para o cálculo dos fluxos, onde se pode notar um erro menor que 1 % para a malha de 128 e.c. indicando um ótimo desempenho da formulação para A e B até 10.

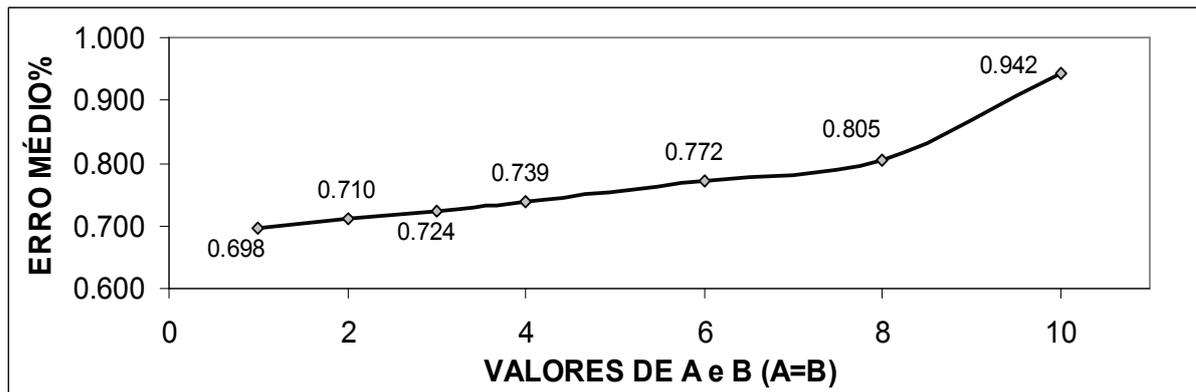


Figura VI.9 - Erro médio percentual com a variação das constantes A e B

Para valores de A e B maiores que dez, houve problemas de convergência, exigindo então, uma malha ainda mais refinada. Estes problemas são devidos às interpolações intrínsecas das funções existentes na formulação com a Quase-Dupla Reciprocidade e dos erros de arredondamento que vão se acumulando no decorrer dos cálculos.

VI.1.3 - DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-2

Considere um problema de difusão bidimensional com um campo de temperaturas variáveis e com a mesma configuração geométrica apresentada no exemplo resolvido anteriormente, porém, agora o campo de temperatura varia de forma diferente, de acordo com a equação:

$$\theta = e^{Ax_1x_2} \quad (\text{VI.8})$$

Os fluxos de calor variam da seguinte forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -Ax_2 e^{-Ax_1 x_2} \quad (\text{VI.9})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = -Ax_1 e^{-Ax_1 x_2} \quad (\text{VI.10})$$

A simulação realizada para este exemplo segue os mesmos moldes do exemplo anterior, sendo este iniciado escolhendo-se o valor da constante A igual a um e realizando as simulações para verificar a convergência do método de elementos de contorno com o refinamento. O gráfico da apresenta o erro médio percentual para o fluxo de calor nos nós em função da quantidade de elementos de contorno.

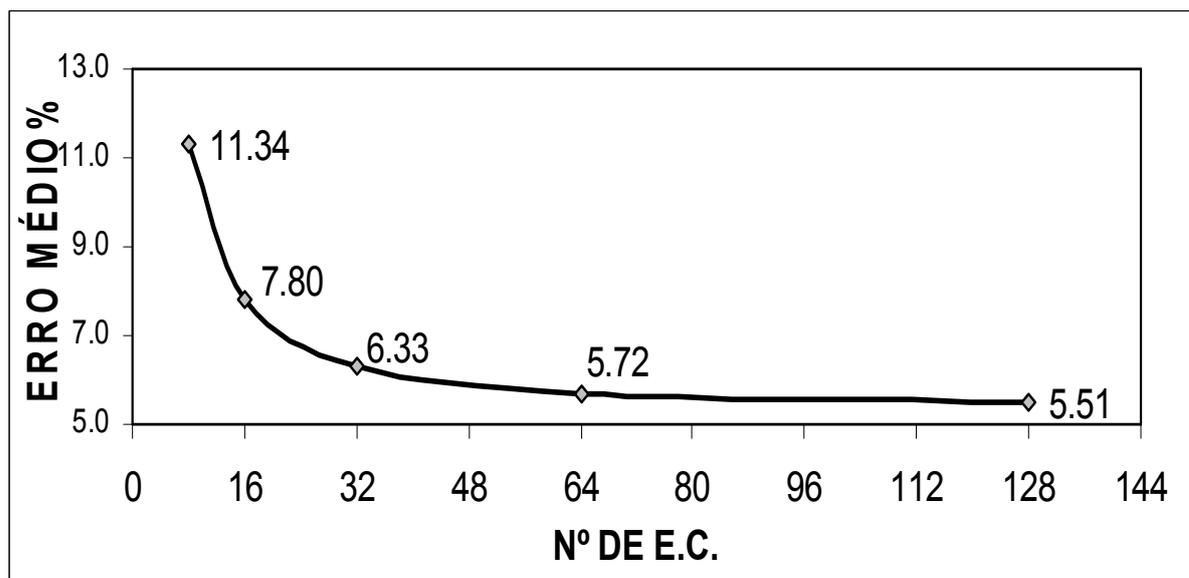


Figura VI.10 - Erro médio percentual com o refinamento da malha

Neste exemplo, devido ao maior rigor dos gradientes de variação da condutividade térmica, os erros provenientes dos cantos foram amplificados consideravelmente. Os testes seguintes foram realizados para desvendar a precisão do método com a variação da constante A . Para

mostrar isto, foi utilizada a malha com 128 e.c. de refinamento. A Figura VI.11 mostra estes resultados.

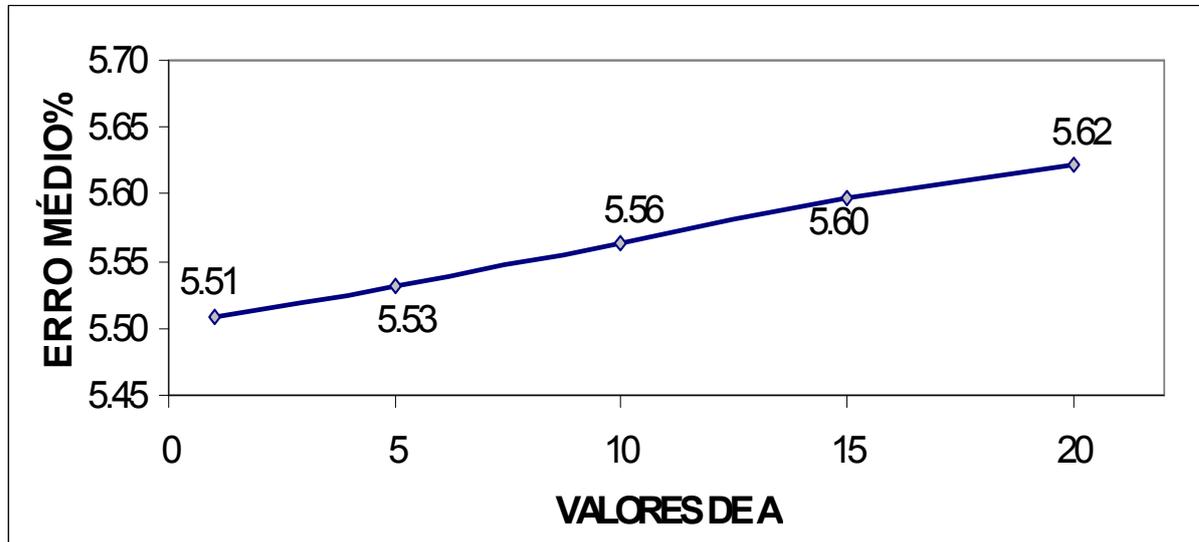


Figura VI.11 – Erro médio percentual com variação da constante A

Novamente, como já era de se esperar, o erro aumenta quando a variação da condutividade térmica aumenta. Mas, a precisão dos resultados não foi tão boa quanto do exemplo anterior, ainda sim, devido a exigência do gradiente, os resultados foram bastante plausíveis.

VI.1.4 - DIFUSÃO BIDIMENSIONAL COM CONDUTIVIDADE TÉRMICA VARIÁVEL-3

O terceiro problema também é sobre difusão bidimensional com um campo de temperaturas variáveis. Apresenta a mesma configuração geométrica mostrada nos exemplos resolvidos anteriormente. Porém, este problema é governado por um campo de temperatura específico que varia de acordo com a equação:

$$\theta = e^{x_1} + e^{x_2} \quad (\text{VI.11})$$

Sendo os fluxos de calor variáveis da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = e^{x_1} \quad (\text{VI.12})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = e^{x_2} \quad (\text{VI.13})$$

Daí então, foi realizada uma bateria de testes para verificar a convergência dos valores numéricos com o refinamento da malha. Os resultados são apresentados na Figura VI.12.

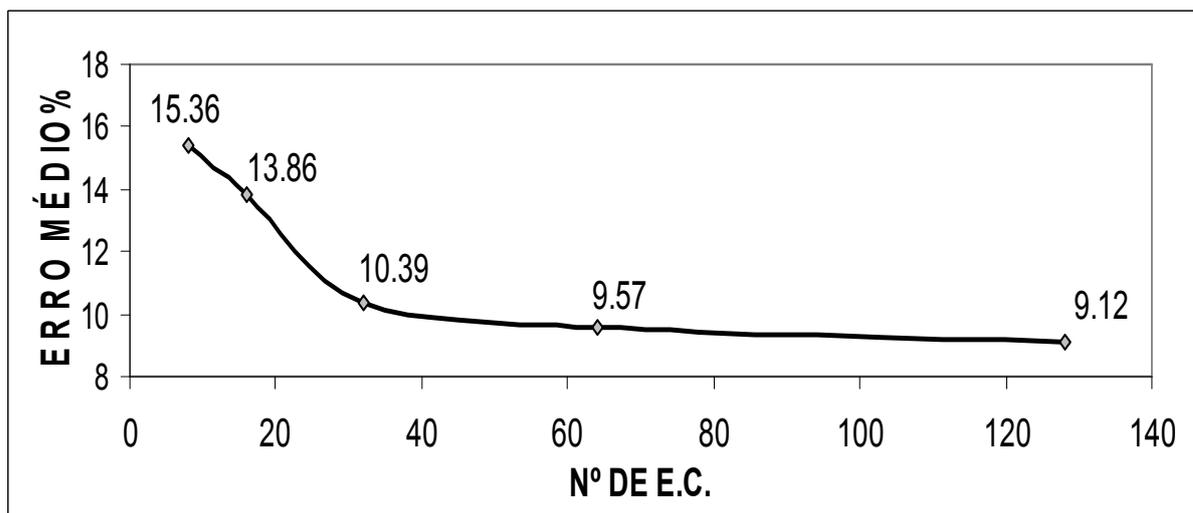


Figura VI.12 - Erro médio percentual com o refinamento da malha

Este problema apresentou maiores dificuldades numéricas do que os casos precedentes, pois o erro percentual ainda foi maior do que naqueles exemplos.

VI.2 - RESULTADOS DO PROBLEMA DINÂMICO

A análise dinâmica exige mais duas condições adicionais às condições de contorno, chamadas de condições iniciais, provenientes das duas integrações realizadas para a resolução da parcela dependente do tempo da E.D.P.

Também são variáveis importantes dois outros parâmetros de análise:

O primeiro deles é o intervalo de variação do tempo (Δt) que se introduz. Este é de imprescindível importância, pois determina a precisão das respostas dinâmicas do problema estudado. Caso Δt fique pequeno além do necessário, provocará um erro típico da formulação com Dupla Reciprocidade, ligado ao acúmulo de erros durante o processo. Tal fenômeno, de caráter ainda não bem definido, parece estar ligado ao fato de que a aproximação produzida pela interpolação inerente a formulação cria ondas espúrias, que deixam de ser filtradas pelos valores de incremento de tempo muito pequenos. Sabe-se da literatura especializada que a redução do passo de integração reduz o amortecimento fictício do algoritmo de avanço no tempo [12]. Já com o emprego de um Δt muito grande, a solução do problema perderá precisão. Portanto, um estudo do Δt ideal é necessário. Pode se extrair da bibliografia uma fórmula para o Δt mais adequado de acordo com o algoritmo de avanço no tempo a ser utilizado, em nosso caso, o algoritmo de Houbolt. O Δt mais adequado pode ser calculado pela seguinte expressão [30]:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta l_{\min}}{c} \quad (\text{VI.14})$$

Onde Δl_{\min} é o elemento de contorno com o menor comprimento e c é a velocidade de propagação da onda no material.

O segundo parâmetro é o tempo total de análise T . Ele, ao ser dividido por Δt , fornece a quantidade de incrementos no tempo. Portanto, depois de definido o Δt , o T determina apenas o tempo total de estudo a ser realizado.

VI.2.1 - ANÁLISE DE PROBLEMAS HOMOGÊNEOS

Quando se trata de casos estacionários em meios não homogêneos, o código Fortran alcançou uma boa convergência para a solução analítica com poucos elementos de contorno. A mesma verificação deve ser feita para os problemas homogêneos que envolvem processos dinâmicos e cujas respostas exatas também são conhecidas.

A barra usada no exemplo do item VI.1.1 - é reimpressa na Figura VI.13 e será trabalhada com as condições de contorno ilustradas e as condições iniciais abaixo:

$$\begin{aligned} \dot{u}(x,0) &= 0 \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

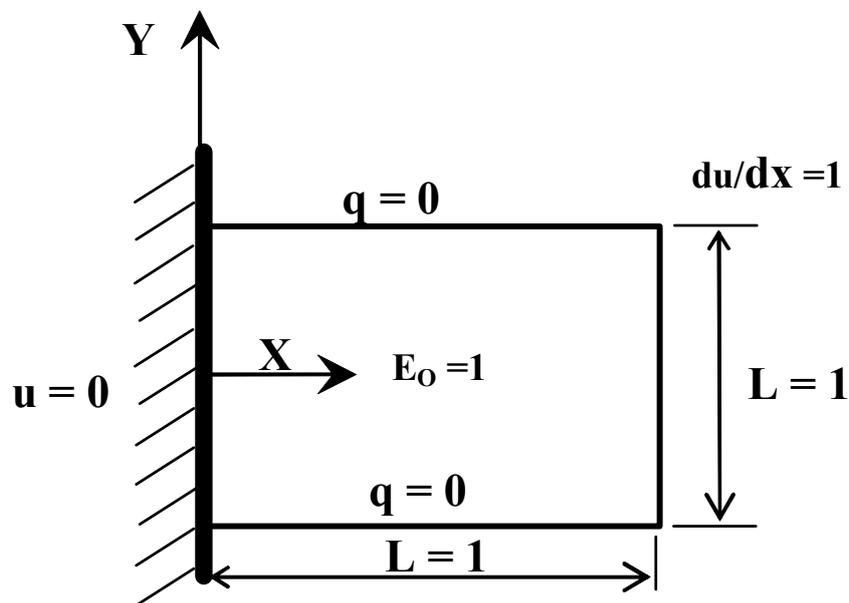


Figura VI.13 - Características Físicas e Geométricas da barra homogênea

Quando a rigidez é igual a unidade, o problema caracterizado na figura acima possui as seguintes soluções analíticas para deslocamentos e deformações:

$$u(x,t) = x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8l}{(2k-1)^2 \pi^2} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi}{2l} \cdot x \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi}{2l} t \quad (\text{VI.16})$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi}{2} \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi}{2l} x \cdot \cos \frac{(2k-1)\pi}{2l} t \quad (\text{VI.17})$$

Estas equações serão usadas para plotar gráficos que ficaram sobrepostos com as soluções aproximadas obtidas através das malhas contendo 4, 8, 16 e 64 elementos de contorno, sendo distribuídos conforme ilustra a Figura VI.14.

Sabe-se, a priori, que quanto mais refinada for a malha de elementos de contorno mais reduzido pode ser tornar Δt , conseqüentemente, mais próxima da solução analítica a solução aproximada se tornará.

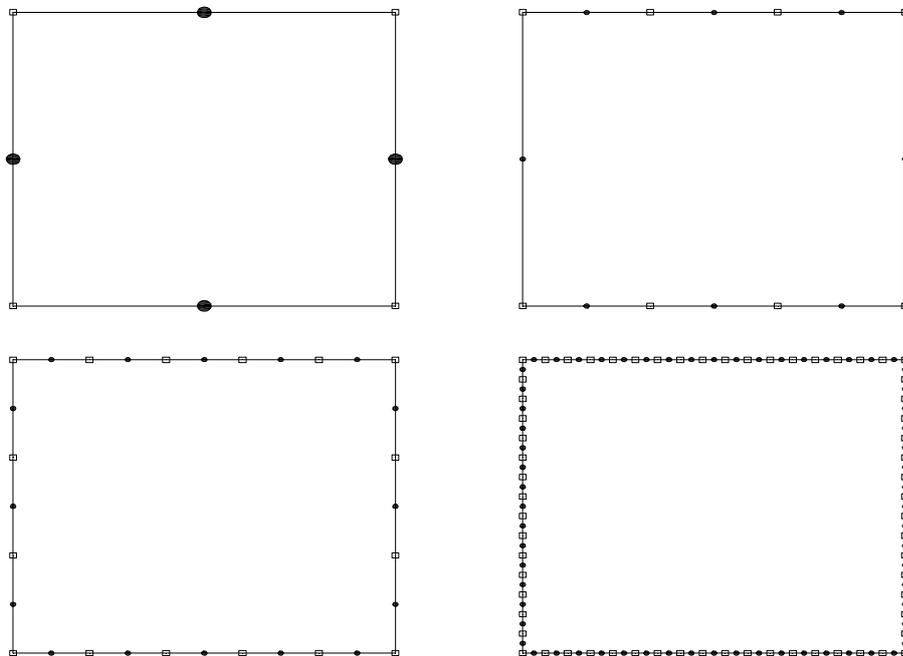


Figura VI.14 –Malhas de 4, 8, 16 e 64 e.c., representando com retângulos vazios os pontos geométricos e com os círculos cheios os pontos funcionais.

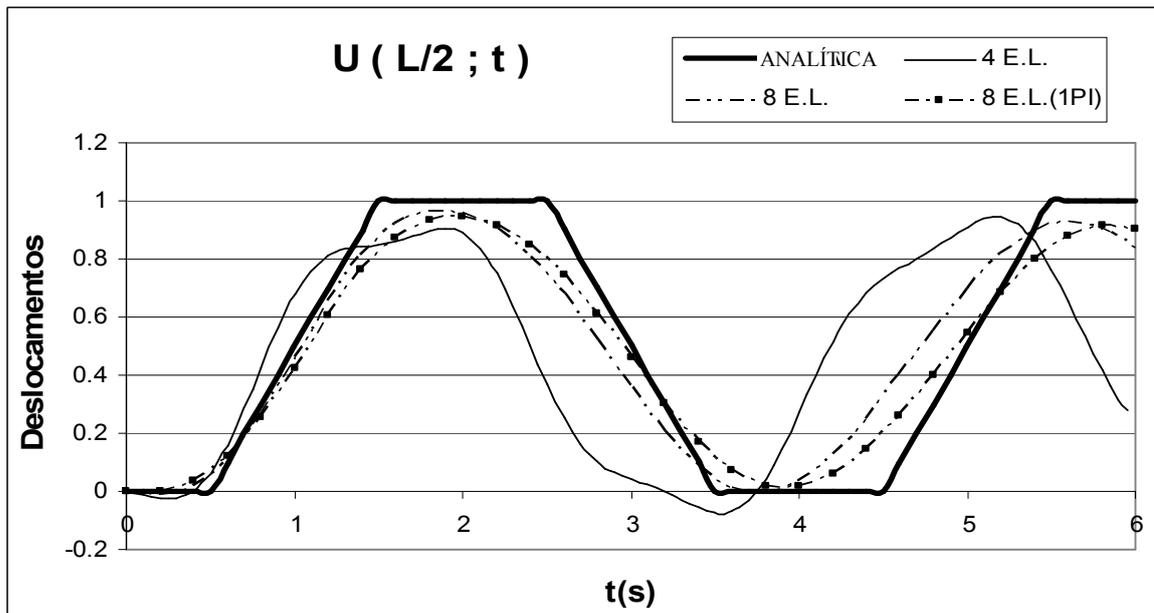


Figura VI.15 – Convergência do Método com o refinamento da Malha de 04 para 08 e.c., e melhor aproximação devido a introdução de um ponto interno no centro geométrico da barra.

Pode se observar que na malha com apenas quatro elementos houve uma grande defasagem do período, especialmente por conta do pobre refinamento da malha, que não fornece mobilidade à estrutura. Sem os graus de liberdade necessários, conseqüentemente, os modos de vibração e demais grandezas decorrentes do movimento estarão mal representados.

A introdução de um ponto interno para este caso trouxe melhorias consideráveis; todavia, uma maior quantidade deles deterioraria a resposta, porque para a Quase-Dupla Reciprocidade a introdução de numerosos pólos resulta numa diminuição sensível de precisão. No caso da Dupla Reciprocidade, a proporção de pólos deve estar relacionada à quantidade de pontos nodais empregados na elaboração da malha. Elevado número de pólos na presença de malhas pobres resultam também em deterioração da resposta. O incremento de tempo Δt variou de 0.5, 0.2, 0.2 e 0.1, conforme o refinamento da malha.

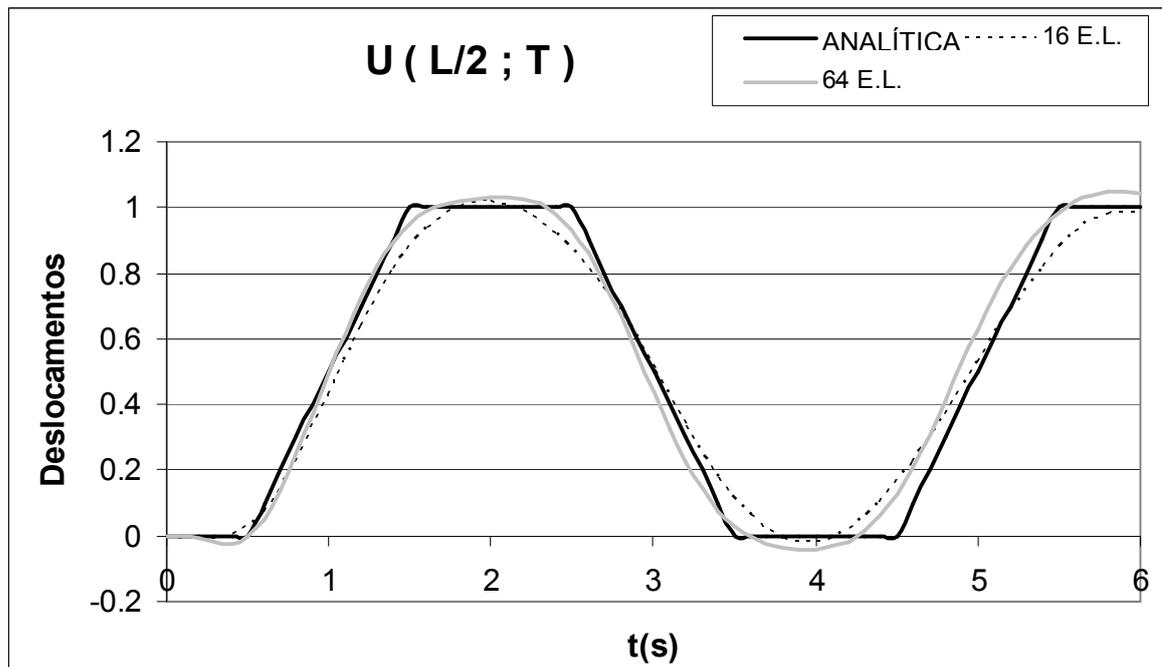


Figura VI.16 – Com um melhor refinamento da malha a quase superposição das curvas e o início do achatamento horizontal.

VI.2.2 - ANÁLISE DE PROBLEMAS NÃO-HOMOGÊNEOS

O mesmo exemplo que deu origem à solução analítica no capítulo III será usada aqui para a obtenção da solução aproximada, mas neste caso, o problema terá duas dimensões. A discretização espacial em duas dimensões pouco afetará os resultados, pois as condições de contorno impostas tentarão garantir a formação exclusiva de ondas longitudinais.

As malhas utilizadas foram com 04 e 08 elementos de contorno. Já os intervalos de tempo, solicitado pelo algoritmo de Houbolt que faz o avanço no tempo, foram respectivamente de 0,05s e 0,2s.

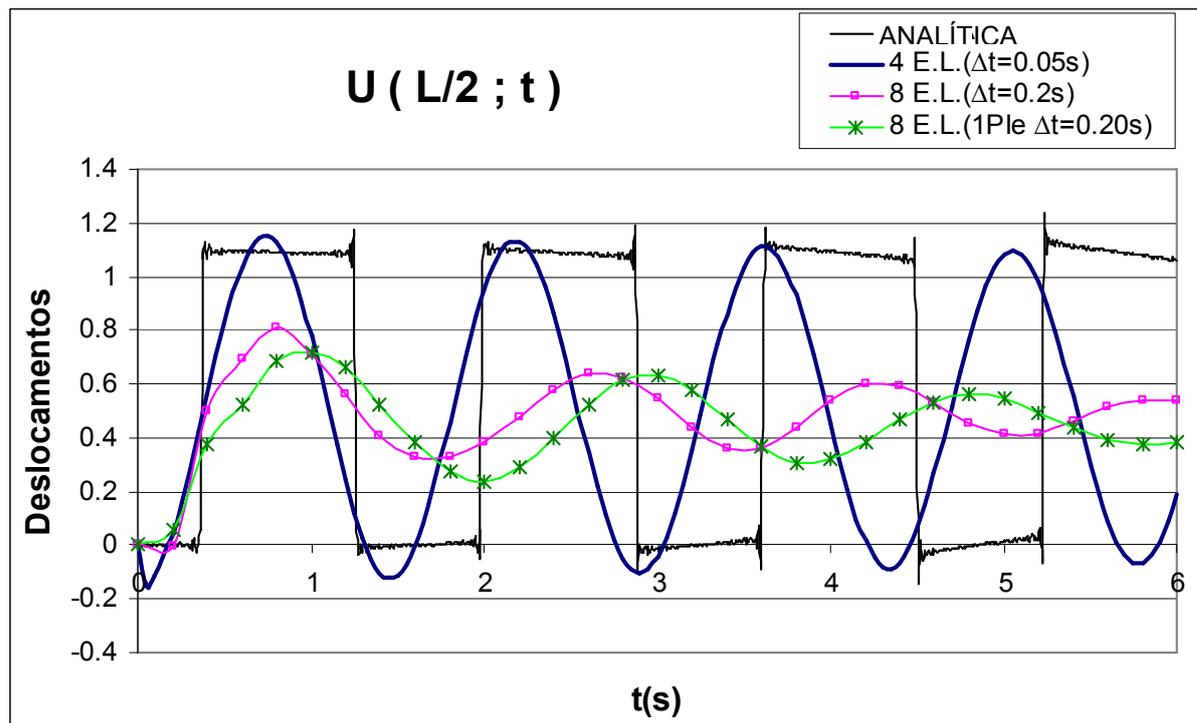


Figura VI.17 – Comparação da solução aproximada com a solução analítica ao refinar a malha e diminuir o intervalo de tempo para análise

Conforme exposto, a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade modelou a parcela espacial e a Dupla Reciprocidade representou a parcela dinâmica.

Na Dupla Reciprocidade os pontos internos são cruciais para aprimorar a precisão dos resultados, porque os mesmos melhoram a representação da inércia do sistema no domínio. Mas, na Quase-Dupla Reciprocidade estes pontos não são necessários [33], e experiências mostraram piora dos seus resultados mesmo para quantidades reduzidas. Então, apenas um ponto interno constitutivo do sistema foi colocado no centro geométrico da barra com a finalidade de verificar se haverá alguma melhora nos resultados nesse exemplo em que ambas as formulações foram empregadas.

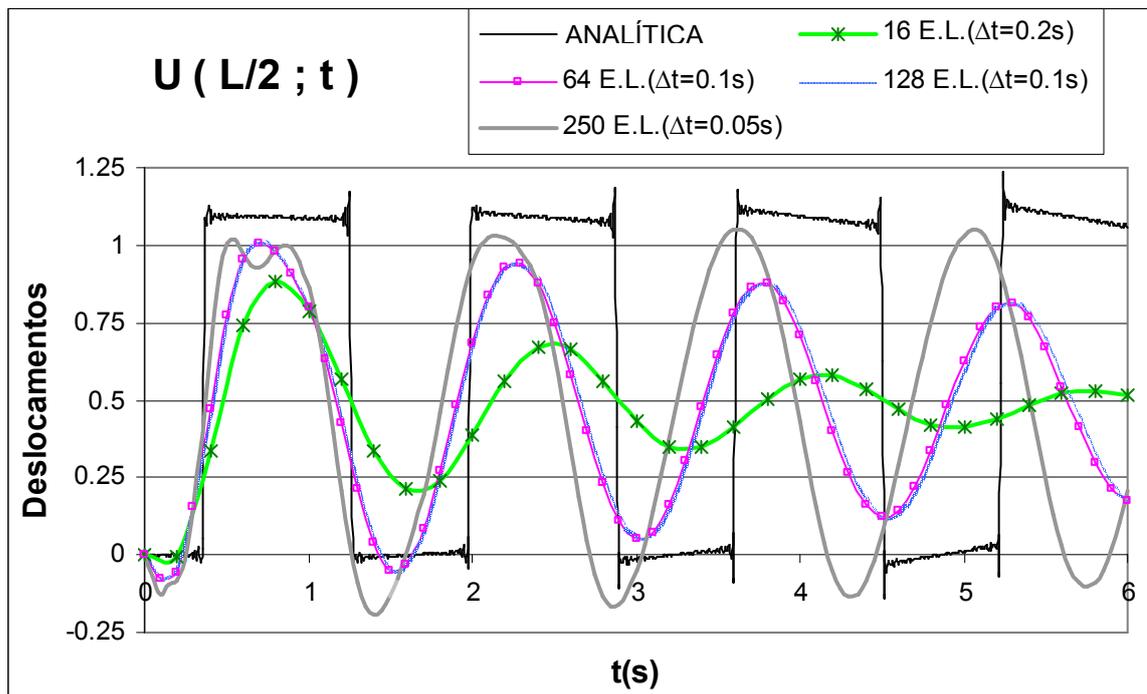


Figura VI.18 – Comparação da solução da analítica com a aproximada ao incluir um ponto interno no centro geométrico da barra.

Malhas mais refinadas foram também testadas. Constatou-se que o refinamento da malha com 64 e.c. ($\Delta t = 0.1$ s) para a malha 128 e.c. ($\Delta t = 0.1$ s) não trouxe uma melhor precisão aos resultados. Como o intervalo de integração foi o mesmo, conclui-se que uma melhor precisão somente seria alcançada pela malha mais refinada com passo menor. A discrepância entre a solução numérica e a analítica, com esses níveis de discretização, está dependendo fundamentalmente do efeito do amortecimento fictício presente, que está filtrando modos relativamente importantes para uma melhor representação da resposta.

É importante ressaltar que as respostas encontradas têm um alto amortecimento fictício proveniente do esquema de integração. A equação diferencial não é possuidora de nenhum termo referente ao amortecimento. Sabe-se que o esquema Houbolt é dos esquemas de integração direta que maior intensidade de amortecimento fictício impõe a resposta. É normalmente escolhido junto à formulação com Dupla Reciprocidade por essa peculiaridade. No entanto, neste exemplo dinâmico não homogêneo, o esquema parece atuar de modo mais

efetivo, reduzindo intensamente a amplitude da resposta, além do desejado. Apesar do problema dinâmico da barra heterogênea não ser dispersivo, diferentemente do problema no qual há variação da área de seção reta em uma barra, é possível que a estrutura discretizada da equação de governo referente a um problema não-homogêneo esteja agravando as características de amortecimento do esquema Houbolt.

Nota-se que a resposta numérica apresenta algumas similaridades com a resposta analítica, mas a rápida degradação da curva sugere a necessidade de se testarem outros esquemas de avanço no tempo ou, então, conforme já exposto, reduzir ainda mais o intervalo de integração usando necessariamente malhas ainda mais refinadas, pois o amortecimento fictício reduz-se conquanto se empregue um incremento de tempo menor. A adoção de elementos de ordem superior, com a melhor representação dos modos de vibração mais elevados, também poderia melhorar o perfil da resposta numérica.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

A formulação com Quase-Dupla Reciprocidade trata a não-homogeneidade física do meio contínuo de modo bastante simples. Dentro da expressão integral típica do Método dos Elementos de Contorno, expressa aproximadamente o núcleo de uma integral de domínio através de uma combinação linear de funções, fazendo nela aplicável o Teorema da Divergência e transformando-a numa integral de contorno. O procedimento é similar ao feito pela formulação com Dupla Reciprocidade no caso de ações de corpo ou de domínio. A influência da variação de propriedades é computada em nível de cada elemento de contorno. Tal procedimento contrasta com a tradicional técnica de sub-regiões, cuja redefinição de novas propriedades é feita em setores do domínio. Isto, de certa forma, caracteriza campos distintos de aplicação das duas técnicas, que não são mutuamente excludentes. As sub-regiões são mais efetivas para casos em que a não-homogeneidade seja setorizada, enquanto a Quase-Dupla Reciprocidade deve ser aplicada para meios nos quais a heterogeneidade seja gradativa. Diante de muitos problemas de mecânica dos solos e geotecnia, que possuem ambas as características, na formulação mostrada nesta dissertação, encontra-se um grande potencial de aplicação, voltada para resolver problemas dinâmicos em meios não-homogêneos, ou seja, nos quais há propagação de ondas sísmicas em meios estratificados.

Trabalhos anteriores, considerando casos homogêneos dinâmicos e casos não-homogêneos estáticos, mostraram bons resultados, o que sugeriu o acoplamento imediato das duas técnicas do Método dos Elementos de Contorno para a resolução de um problema de indiscutível importância prática.

O presente trabalho, portanto, consiste de uma iniciativa pioneira e preliminar. Original no sentido de englobar, numa mesma análise, duas formulações distintas. Preliminar porque necessita de continuidade de testes, melhorias diversas e implantação de algumas estratégias, que podem tornar a modelagem mais precisa.

A precisão das respostas obtidas pode ser melhorada através de elementos mais sofisticados do que o elemento constante. Elementos lineares, quadráticos e cúbicos sem dúvida melhorariam a resposta, especialmente se tratando de uma análise dinâmica.

Avaliando-se as taxas de amortecimento fictício apresentadas pelo esquema Houbolt, nota-se que seria desejável uma atuação menos intensa desse fator na resposta. Isto faria com que as amplitudes da solução numérica não fossem tão drasticamente reduzidas, como se observa já no primeiro ciclo de resposta, e seu comportamento ao longo do tempo não se degenerasse com tamanha rapidez. Com os recursos disponíveis, um aprimoramento da precisão da resposta requer um incremento de tempo bastante reduzido, que por sua vez exige um refinamento maior da malha, significando alto custo computacional. A realização de testes empregando outros esquemas de integração direta possuidores de menor taxa de amortecimento numérico, atualmente bem conhecidos na literatura, poderia ser bem sucedida. Acredita-se que a equação de governo, após a discretização, na sua forma matricial, por conta de sua maior complexidade, induza um teor de amortecimento fictício superior àqueles avaliados na modelagem numérica de problemas estruturais lineares, nos quais à rigidez constante se opõem a forças de inércia e de ação externa.

A introdução de pólos também é problemática. Sabe-se de trabalhos anteriores, especialmente os de Loeffler e Mansur, que os pólos melhoram a representação das propriedades de inércia, e sua inclusão no modelo discreto aprimora sensivelmente a resposta numérica. Todavia, não foi possível introduzi-los em quantidade suficiente, devido à instabilidade que tal quantidade

maior de pólos acarreta na modelagem das propriedades de rigidez variável através da formulação com Quase-Dupla Reciprocidade. É preciso compor uma estrutura numérica que permita atender às duas formulações em conjunto: um reduzido número ou nenhum pólo na modelagem da Quase-Dupla Reciprocidade, e uma quantidade significativa ou suficiente para uma satisfatória representação da inércia na modelagem efetivada pela Dupla Reciprocidade. No modelo numérico construído nesse trabalho não foi possível compatibilizar tais necessidades. Não se implantou um modelo em que a matriz de inércia pudesse ser construída com pólos (conseqüentemente com maior número de graus de liberdade) e as demais matrizes de rigidez não os contabilizassem. Com certeza, diante das experiências progressas dos autores citados, o uso de um número de pólos maior haveria de fazer com que a precisão da resposta numérica do exemplo dinâmico aqui simulado fosse bem superior à apresentada.

A questão do custo computacional não foi considerada prioritária. Sabe-se que as formulações que usam a Dupla-Reciprocidade são computacionalmente custosas, especialmente por conta das inversões de matrizes. No caso dinâmico, o custo é acrescido devido à natureza do processo incremental. Em se tratando de problemas de dimensão reduzida, como os que aqui foram simulados, o tempo de processamento foi aceitável e não houve problemas de armazenamento de dados, considerando o uso de microcomputadores ATHLON 1.7GHz com 356 MB de memória RAM. A malha mais refinada, com incremento de tempo mais reduzido, no valor de 0.05 segundos demorou cerca de 180 segundos para ser completamente processado.

Atualmente as simulações em nível industrial, realizadas na parte de prospecção sísmica, requerem um número muito grande de graus de liberdade. O estágio atual da presente formulação está muito longe de ser competitivo, mas nem por isso é injustificável o seu esforço de pesquisa. Muitas formulações são geradas a partir de modelos embrionários, e conseguem suplantar dificuldades dos modelos anteriores que pareciam intransponíveis. A capacidade de processamento dos computadores também não para de crescer. Há vinte anos atrás, grandes computadores não conseguiam realizar tarefas que os microcomputadores hoje realizam, no mesmo intervalo de tempo.

Por outro lado, o processo de desenvolvimento científico requer o aperfeiçoamento gradativo

das metodologias, através de melhorias consistentes feitas por partes. Necessário se fazia testar a formulação conjunta na dinâmica usando elementos simples e esquemas de integração conhecidos que garantissem a estabilidade da resposta. Também foi necessário desenvolver o modelo dinâmico a partir de um modelo estacionário razoavelmente bem constituído. Seria irracional tentar processar uma resposta dinâmica a partir de um modelo de rigidez variável de discutível consistência. Por essas razões, muitas das sugestões para continuidade dessa pesquisa já haviam sido cogitadas anteriormente, mas foram postergadas para que a cadência lenta, mas segura do método científico fosse obedecida.

A história conta que as novas idéias e tecnologias, em seu começo apresentam problemas tais, que quase sempre são julgadas inviáveis e inseguras. Mas, depois de vencidos os desafios preliminares, muitas são vistas como uma grande possibilidade de mudança do estado presente da arte, da técnica e da ciência. Isto aconteceu por exemplo com a exploração de petróleo que chegou a ser considerada inviável devido ao custo de exploração e a pouca tecnologia existente na época, e, em outras tantas pesquisas de diferentes áreas disciplinares em todo o mundo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. **“O Método dos Elementos de Contorno com Quase-Dupla Reciprocidade Aplicado a Meios Não Homogêneos”**. In: X Congresso Regional dos Estudantes de Engenharia Mecânica, 2003, Santos. 2003.
- [2] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. **“Modelagem de Meios Não Homogêneos Através do Método dos Elementos de Contorno com Quase-Dupla Reciprocidade”**. In: XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2003, São José do Rio Preto. 2003.
- [3] VELÁZQUEZ CASTILLO, G. A., **“Análise comparativa do desempenho dos esquemas incrementais de avanço no tempo com o método dos elementos de contorno”**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica. Vitória, ES, maio de 2001.
- [4] NARDINI, D., BREBBIA, C. A., (1982), **“A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements”**. Proceeding of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering, Southampton.
- [5] LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J., **“Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation. International Journal for Numerical Methods in Engineering”**. Vol 58, Issue 8, pag 1167-1186, John Wiley and Sons, 2003.

- [6] LOEFFLER, C. F.; JARDIM, A.C.; MASSARO, C.A.M., **“A New Technique to Improve Completeness Conditions in Quasi-Dual Boundary Element Formulation”**. Proceedings of XXVIII COBEM (in CD ROM), Ouro Preto, nov 2005.
- [7] MASSARO, C. A. M.; LOEFFLER, C. F., **“Boundary Element Formulation Applied to Solution of Convective-Diffusive Heat Transfer Problems”**. Proceedings of COBEM 2001 (in CD ROM) Uberlândia, Nov 2001.
- [8] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. **“Desempenho de Algumas Estratégias de Simplificação de Equações Diferenciais Empregando o Método dos Elementos de Contorno como Ferramenta de Solução”**. In: IX Congresso Regional dos Estudantes de Engenharia Mecânica, 2002, Itajubá. 2002.
- [9] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. **“Eficácia da Transformação de Variáveis na Simplificação de Problemas de Campo Escalar Simulado pelo Método dos Elementos de Contorno”**. In: XXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 2002, Nova Friburgo. 2002.
- [10] LOEFFLER, CARLOS FRIEDRICH; PEREIRA, RAFAEL DIAS. **“Transformação de Variáveis na Simplificação de Equações Diferenciais: Uma Análise Empregando Elementos de Contorno como Método de Solução”**. In: Revista Engenharia Ciência e Tecnologia, 2003, Vitória, 2003.
- [11] CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J., **“Dynamics of Structures”**. International Student Edition. Tokyo: McGraw – Hill, 1982.
- [12] WARBURTON, G. B., **“The Dynamic Behaviour of structures”**. Pergamon Press, UK, 1976.
- [13] THOMAS, J. E., **“Fundamentos da Engenharia de Petróleo”**. Ed. Interciência, Rio de Janeiro, RJ, 2004.

- [14] GRAFF, K. F., **“Wave Motion in Elastic Solids”**. Dover Publ. New York , 1991.
- [15] SAGEN, H. K., **“Boundary and eigenvalue problems in Mathematical Physics”**. John Wiley and Sons, New York, 1963.
- [16] LOEFFLER, C. F., **“Modelos Mecânicos Derivados da Equação de Campo Escalar Generalizada”**. Revista Militar de Ciência e Tecnologia, vol IX, num. 1, 1992.
- [17] JUVINALL, R. C., **“Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength”**. McGraw-Hill co. New York, 1967.
- [18] BUTKOV, E., **“Mathematical Physics”**. Addison Wesley, Massachussets, 1973.
- [19] ZINDELUK, M., BEVILACQUA, L., **“Propagação de Onda Plana em uma Barra Não-Homogênea”**. Anais do COBEM 79, vol. D, p.p. 31-41. Campinas, Dezembro de 1979.
- [20] BREBBIA, C. A., FERRANTE, A. J., **“The finite element technique”**. Porto Alegre. Editora URGS, 1975.
- [21] BREBBIA, C. A. & WALKER, S., **“Boundary Element Techniques in Engineering”**. Newnes-Buttterworths, U.K.,1980.
- [22] BREBBIA, C. A., **“The Boundary Element Method for Engineers”**. Pentech Press, UK, 1978.
- [23] DAN, M. L., **“Duas Novas Formulações do Método dos Elementos de Contorno Aplicadas a Problemas Advectivos-Difusivos”**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Depto de Engenharia Mecânica, 2004.
- [24] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F. and WROBEL, L. C., **“Boundary Element Techniques Theory And Applications In Engineering”**. Sprinter-Verlag, New York,

- 1984.
- [25] BREBBIA, C. A., POWER, H., (1999), **“Boundary Elements XXI, International Series on Advances in Boundary Elements”**. Volume 6, Witpress, Southampton, Boston.
- [26] PARTRIDGE, P. W., BREBBIA, C. A., WROBEL, L.C., **“The Dual Reciprocity Boundary Element Method”**. Computational Mechanics Publications and Elsevier, 1992.
- [27] PARTRIDGE, P. W., **“Approximation functions in the dual reciprocity method”**. International journal of boundary elements communications, v. 8, n. 1, 1997.
- [28] GOLBERG, M. A. et al., **“Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method”**. Computational mechanics, v.21, p. 141-148 1997.
- [29] LOEFFLER, C. F. & MANSUR, W. J., **“Analysis of Time Integration Schemes for Boundary Element Applications to Transient Wave Propagation Problems. Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer”**. Computational Mechanics Publishing, UK, pp 105-124, 1987.
- [30] BATHE, K. J., **“Finite element procedures in engineering analysis”**. USA: Prentice-Hall, 1982.
- [31] MANSUR, W. J., CARRER, J. A. M., **“Linear traction time approximation in time domain elastodynamic analysis”**. Advances in Bondary Elements XXI, v. 6, p. 323 - 332, UK: WIT Press, 1999.
- [32] MANSUR, W. J., CARRER, J. A. M., **“Higher order traction time approximation in time domain scalar wave equation analysis”**. Advances in Boundary Elements XIX, p. 107 – 116, UK: Computational Mechanics Publications, 1997.

- [33] LOEFFLER, CARLOS. FRIEDRICH; SANTOLIN, WAGNER DALVI, “**Análise dinâmica de problemas escalares não-homogêneos através do método dos elementos de contorno**”. Artigo do XXVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC, São Paulo, SP, 2005. SENAC / SP e Universidade Federal de São Paulo – USP.