

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**SIDEANE MATTOS DE NADAI**

**SOBRE A EXISTÊNCIA E A ESTABILIDADE DE  
MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM  
VIBRO-IMPACTO COM FOLGA SIMÉTRICA**

**VITÓRIA - ES  
2010**

**SIDEANE MATTOS DE NADAI**

**SOBRE A EXISTÊNCIA E A ESTABILIDADE DE  
MOVIMENTOS PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM  
VIBRO-IMPACTO COM FOLGA SIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Sistemas Mecânicos.

**VITÓRIA - ES  
2010**

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

D391s De Nadai, Sideane Mattos, 1984-  
Sobre a existência e a estabilidade de movimentos  
periódicos em sistemas com vibro-impacto com folga simétrica /  
Sideane Mattos De Nadai. – 2010.  
98 f. : il.

Orientador: Márcio Coelho de Mattos.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Oscilações não-lineares. 2. Estabilidade. 3. Colisões  
(Física). 4. Vibração. 5. Ciclos. 6. Vibro-impacto. I. Mattos,  
Márcio Coelho de. II. Universidade Federal do Espírito Santo.  
Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

---

**SIDEANE MATTOS DE NADAI**

**SOBRE A EXISTÊNCIA E A ESTABILIDADE DE MOVIMENTOS  
PERIÓDICOS EM SISTEMAS COM VIBRO-IMPACTO COM FOLGA  
SIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

**Prof. Dr. Márcio Coelho de Mattos - Orientador**  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

**Prof. Dr. José Manoel Balthazar**  
Universidade Estadual Paulista

---

**Prof. Dr. Angelo Gil Pezzino Rangel**  
Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória (ES), 16 de dezembro de 2010.

Aos meus pais, Natalia e Cidalino, e  
ao meu amado, Angelito.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por tudo em minha vida, e que me deu forças para superar os obstáculos e os desafios.

Aos meus pais, Natalia e Cidalino, que sempre me apoiaram nos meus estudos, pela educação que me deram, pelo o apoio incondicional que prestam em minha vida e pelo grande amor e carinho.

Ao meu noivo Angelito, por todo o seu apoio, compreensão e amor.

Aos meus irmãos, Josiane e Sidne, pelo incentivo, convivência e compreensão. Aos meus amigos e familiares, pelo incentivo e por entenderem a minha ausência nos momentos em que minha dedicação foi exclusiva a este trabalho. A tia Noêmia (Nonô) pelas orações.

Ao prof. Márcio Coelho de Mattos, pelos conselhos e pela disposição em me ajudar, e que me orientou no mestrado e também no projeto final na época da graduação.

Aos funcionários do departamento de Engenharia Mecânica, Iury, Maria José (Zezé) e Celina. Ao professor Vladimir Ivanovitch Dynnikov, que sugeriu que eu fizesse o mestrado (trilha, antes, nunca imaginada por mim) na apresentação do projeto final.

Ao departamento de Engenharia Mecânica. Aos professores Antônio Bento Filho e Oswaldo Paiva Almeida Filho, pela colaboração com relação às disciplinas por mim ministradas.

Aos professores membros da banca examinadora, pela disponibilidade e contribuição.

Aos colegas de mestrado que proporcionaram momentos de boa convivência.

Aos que sempre acreditaram em meu potencial, que me incentivaram com palavras encorajadoras, e que contribuíram, direta ou indiretamente, para que eu conseguisse mais este triunfo em minha vida.

A CAPES pelo apoio financeiro concedido.

*“O coração do homem considera o seu caminho,  
mas o Senhor lhe dirige os passos.”*

*(Provérbios 16, 9)*

## RESUMO

Este trabalho apresenta a modelagem matemática de um sistema com vibro-impacto e excitação harmônica de base. O sistema tem sido estudado por vários pesquisadores que exploraram muitos aspectos da dinâmica global. No entanto, eles supuseram um único padrão de movimentos periódicos, isto é, um movimento com o mesmo período que a força de excitação. Este trabalho mostra que vários padrões de movimentos periódicos podem ocorrer e as condições de existência e estabilidade destes deve ser estudada cuidadosamente. As condições de periodicidade são aplicadas sobre o estado nos instantes de impactos a fim de obter um mapa do próximo impacto baseado no estado da anterior. Este mapa não-linear é aplicado para obter as condições de existência dos movimentos periódicos com padrões específicos. Aplicando as condições de existência, a estabilidade do movimento pode ser realizada por meio da análise dos autovalores do mapa, tendo em conta estas restrições.

Palavras-chave: oscilações não-lineares, sistema mecânico não-suave, vibro-impacto, movimentos periódicos, estabilidade.

## **ABSTRACT**

In this work the mathematical modeling of a base harmonically excited vibro-impact system is presented. The system has been investigated by several researchers who have many aspects of the global dynamics. However, they have only admitted one pattern of periodic motions, that is, a motion with the same period as the excitation force. Hereby, it is shown that several patterns of periodic motions can occur and their existence and stability conditions must be accurately investigated. Periodicity conditions are applied on the state at the instants of impacts in order to obtain a map of the next impact based on the state of the previous one. This nonlinear map is used to obtain the conditions of existence of periodic motions with specific patterns. Applying the existence conditions, the stability of the motion can be carried out by analyzing the eigenvalues of the map while taking these conditions into account.

**Keywords:** nonlinear oscillations, non-smooth mechanical system, vibro-impact, periodic motions, stability.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1.1:</b> Modelo físico investigado.....	15
<b>Figura 2.1:</b> Sistema com vibro-impacto e oscilação de base.....	34
<b>Figura 2.2:</b> Topologia 1-4, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,3$ ; $x_0=0,0$ e $v_0=0,0$ ...42	42
<b>Figura 2.3:</b> Topologia 1-7, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,1$ ; $x_0=0,0$ e $v_0=0,0$ ...43	43
<b>Figura 2.4:</b> Topologia 2-8, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,33$ ; $x_0=0,0$ e $v_0=2$ ...43	43
<b>Figura 2.5:</b> Topologia 2-10, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,22$ ; $x_0=0$ e $v_0=0$ .....43	43
<b>Figura 2.6:</b> Topologia 3-4, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=4$ ; $x_0=0,0$ e $v_0=0,0$ .....44	44
<b>Figura 2.7:</b> Topologia 3-8, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,5$ ; $x_0=0,0$ e $v_0=3,5$ ...44	44
<b>Figura 2.8:</b> Topologia 3-12, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,31$ ; $x_0=0$ e $v_0=0$ .....44	44
<b>Figura 2.9:</b> Amplitude máxima do sistema linear para $\xi=0,05$ .....45	45
<b>Figura 2.10:</b> $\eta_{cr}^2$ , com $e=1$ e $\xi=0,05$ . Topologia 1-2 simétrico.....52	52
<b>Figura 2.11:</b> Região de $\eta_{cr}^2$ para $0,01 \leq \omega \leq 0,1$ . Topologia 1-2 simétrico.....52	52
<b>Figura 3.1:</b> Comportamento de $\eta_{cr}^2$ versus $\omega$ , com $e=1$ ; $\xi=0,05$ e $r=1/3$ .....59	59
<b>Figura 3.2:</b> Região da Figura 3.1 para $\eta_{cr}^2 \leq 1$ .....59	59
<b>Figura 3.3:</b> Comportamento de $\eta_{cr}^2$ versus $\omega$ , com $e=1$ ; $\xi=0,05$ e $r=2/3$ .....59	59
<b>Figura 3.4:</b> Região da Figura 3.3 para $\eta_{cr}^2 \leq 1$ .....60	60
<b>Figura 3.5:</b> Exemplo de um movimento 1-2 assimétrico no período.....61	61
<b>Figura 3.6:</b> Movimento não-periódico, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,2$ ; $x_0=0,0$ e $v_0=0,0$ .....67	67

<b>Figura 3.7:</b> Movimento periódico, com $e=1$ ; $\xi=0,05$ ; $\omega=1$ ; $\varepsilon=0,2$ ; $x_0=0,2$ e $v_0 \cong -0,7832903073871$ . Topologia obtida logo após o primeiro impacto.....	68
<b>Figura 3.8:</b> $\eta_{cr}^2$ , com $e=1$ e $\xi=0,05$ . Topologia 1-4 simétrico.....	70
<b>Figura 4.1:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,1$ . .....	78
<b>Figura 4.2:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,2$ .....	78
<b>Figura 4.3:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,3$ . .....	79
<b>Figura 4.4:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,4$ .....	79
<b>Figura 4.5:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,5$ .....	80
<b>Figura 4.6:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=1,0$ . .....	80
<b>Figura 4.7:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=1,25$ .....	81
<b>Figura 4.8:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=1$ e $\varepsilon=1,5$ . .....	81
<b>Figura 4.9:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,5$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,1$ . .....	82
<b>Figura 4.10:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,5$ ; $e=1$ e $\varepsilon=0,5$ .....	82
<b>Figura 4.11:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,5$ ; $e=1$ e $\varepsilon=1$ . .....	83
<b>Figura 4.12:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=0,95$ e $\varepsilon=0,1$ . .....	83
<b>Figura 4.13:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=0,95$ e $\varepsilon=0,5$ .....	84
<b>Figura 4.14:</b> Região de estabilidade para $\xi=0,05$ ; $e=0,95$ e $\varepsilon=1$ . .....	84

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $a$  : termo da amplitude da resposta transiente do sistema linear associado  
número menor que 1
- $a_{ij}$  : termos da matriz  $\mathbf{A}$  ,  $i, j \leq 2$
- $b$  : termo da amplitude da resposta transiente do sistema linear associado
- $c$  : coeficiente de amortecimento
- $d_{ij}$  : termos da matriz  $\mathbf{D}$  ,  $i, j \leq 2$
- $e$  : coeficiente de restituição
- $i_0$  : número de impactos a partir do qual o estado estacionário é alcançado
- $j$  : componente imaginária
- $k$  : coeficiente de restituição elástica ou coeficiente de rigidez
- $m$  : massa
- ordem do período da resposta
- $n$  : número de colisões que ocorrem dentro do período da resposta
- $p$  : frequência de oscilação da base
- $r$  : razão de distribuição entre os instantes de impacto pelo período da resposta
- $s$  : deslocamento da base
- $s_0$  : amplitude de oscilação da base
- $t$  : tempo dimensional
- $t_{ij}$  : termos da matriz  $\mathbf{T}$  ,  $i, j \leq 2$
- $v_0$  : condição inicial de velocidade;  
condição necessária de velocidade
- $v_c$  : velocidade de contorno que corresponde a  $v_0$  (seção 3.3)
- $x$  : deslocamento adimensional
- $\dot{x}$  : velocidade adimensional
- $\ddot{x}$  : aceleração adimensional

$x_0$ : condição inicial de deslocamento

$y$ : deslocamento relativo entre o bloco e a base oscilante

$y_0$ : valor de referência, para adimensionalização, da coordenada  $y$ .

$z$ : deslocamento do bloco

$A$ : amplitude da resposta permanente do sistema linear associado

$T$ : período da resposta

$f$ : vetor de fase entre a resposta e a excitação

$x$ : vetor de estado

$x_c$ : vetor de estado estabelecido logo após a primeira colisão (seção 3.3)

$A$ : matriz dinâmica do sistema

$B$ : matriz modificada de entrada

$\tilde{B}$ : matriz da resposta do sistema

$C$ : matriz que relaciona as condições de fase entre os instantes de impactos pela fração de período transcorrida

$D$ : matriz de estabilidade

$I$ : matriz identidade

$J$ : matriz de transição

$P$ : termo de produtos da matriz  $T$

$Q$ : termo de produtos da matriz  $T$

$R$ : termo de produtos da matriz  $T$  e do mapa de topologia geral

$T$ : matriz obtida do mapa para as condições de impacto num movimento periódico

### **Símbolos Gregos**

$\Delta$ : folga absoluta

$\alpha$ : termo da solução para a fase

$\beta$ : termo da solução para a fase

$\delta$ : notação para o denominador de expressões

$\varepsilon$ : folga relativa adimensional

$\varphi$ : ângulo de fase entre a excitação e a resposta, para o sistema linear associado

$\eta$ : termo da solução para a fase que considera  $\varepsilon$

$\eta_{cr}$ : função crítica de  $\eta$

$\lambda_a, \lambda_b$ : autovalores do sistema linear associado

$\lambda_j$ : autovalores da matriz do Jacobiano do mapa das condições de impacto num movimento periódico

$\tau$ : tempo adimensional

$\tau_c$ : tempo de contorno determinado por meio das condições de fase

$\tau_i$ : instante do  $i$ -ésimo impacto

$\omega$ : razão entre as frequências de oscilação da base e natural do sistema

$\omega_d$ : frequência natural amortecida

$\omega_n$ : frequência natural de oscilação do sistema

$\xi$ : fator de amortecimento

### **Subscritos e Sobrescritos**

$i$ : relativo ao  $i$ -ésimo impacto

$n$ : número do impacto dentro do período da resposta

$\cdot$ : derivada

$\hat{\cdot}$ : relativo ao fim do processo de colisão, por conseguinte, condições de início do movimento

$-\cdot$ : relativo ao início do processo de colisão

$+\cdot$ : relativo ao final do processo de colisão

$\prime$ : notação para a abreviação das expressões de  $t_{ij}$

$\sim$ : notação para a abreviação de expressões

$\hat{\sim}$ : notação para a abreviação de expressões

$\sim$ : notação para a abreviação de expressões

### **Abreviaturas**

NNM: modo normal não-linear (*nonlinear normal mode*)

# SUMÁRIO

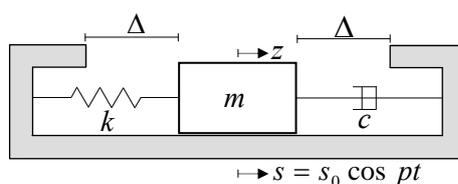
1	Introdução .....	15
1.1	Descrição do Sistema em Estudo .....	15
1.2	Comentários sobre Sistemas com Vibro-Impacto.....	17
1.3	Revisão Bibliográfica .....	24
1.4	Motivação e Objetivos do Trabalho .....	32
1.5	Organização da Dissertação.....	33
2	Modelagem Matemática do Sistema .....	34
2.1	Equação de Movimento .....	34
2.2	Mapa envolvendo os Estados nos Instantes de Colisão .....	37
2.3	Indexação de Topologias de Movimentos em Resposta Estacionária.....	41
2.4	Região de Existência de Impactos no Movimento Linear .....	45
2.5	Condições de Existência de Movimentos Periódicos 1-2 Simétricos.....	45
2.5.1	Região de existência do movimento 1-2 simétrico.....	50
3	Mapa de Movimentos Periódicos de Topologia Mais Complexa .....	53
3.1	Movimentos Periódicos 1-2 Assimétricos .....	53
3.1.1	Região de existência de alguns movimentos 1-2 assimétricos.....	56
3.2	Movimentos Periódicos de Topologias Gerais.....	61
3.3	Otimização da Simulação .....	66
3.4	Movimentos Periódicos 1-4 Simétricos .....	68
3.5	Análise de Estabilidade para o Movimento 1-2 Simétrico.....	71
3.6	Análise de Estabilidade para o Movimento Geral .....	75
4	Análise de Estabilidade de Movimentos .....	77
4.1	Estabilidade do Movimento 1-2 Simétrico.....	77
5	Conclusão .....	85
5.1	Sugestões de Trabalho Futuro .....	86
	Referências Bibliográficas .....	87
	Anexo I .....	93
	Anexo II .....	95

# 1 Introdução

Este capítulo delimita e contextualiza o problema do sistema em estudo nesta dissertação. Segue, também, uma revisão bibliográfica para situar o estado da arte sobre o tema, os objetivos do trabalho e sua organização.

## 1.1 Descrição do Sistema em Estudo

O modelo do sistema investigado consiste de um bloco que se movimenta entre batentes rígidos e está conectado a uma base oscilante por meio de um suporte visco-elástico. O modelo físico representativo do sistema de interesse se encontra na Figura 1.1.



**Figura 1.1:** Modelo físico investigado.

Existem vários enfoques possíveis para o estudo do sistema. Dentre eles:

- a dinâmica global, com comportamento oscilatório condicionado à variação de parâmetros, que é a direção a ser seguida neste trabalho;
- o desgaste devido aos impactos; e
- as características das ondas sonoras provocadas pelos impactos.

No que relaciona aos aspectos da dinâmica global, pode-se enfatizar as condições de existência e estabilidade de movimentos periódicos, as condições de transição para o caos, o controle de sistemas caóticos, as considerações de diversos modelos para o impacto e a dissipação de energia no impacto.

Limitado ao estudo da dinâmica global do sistema, o presente trabalho procura explorar características que facilitem a sua compreensão a partir do mapeamento do estado nos instantes de colisão, levando-se em conta as colisões anteriores e abordando aspectos da existência e da estabilidade de movimentos de certas topologias. Não se farão análises detalhadas com mapas de Poincaré, nem tampouco com diagramas de bifurcação. O objetivo maior é apresentar uma estratégia de mapeamento que:

- auxilie na definição das condições iniciais da simulação numérica do sistema a fim de poupar esforço computacional até atingir o estado estacionário, se ele existir; e
- contenha certa sistematização, a qual facilite a geração de procedimentos de análise das diversas topologias de movimento possíveis.

Barbosa [Barbosa-2009] estudou este mesmo sistema, mas não analisou os dois aspectos acima mencionados, tendo dado maior enfoque a observações sobre os movimentos do sistema a partir, principalmente, das simulações numéricas.

É preciso descrever algumas características do modelo. De forma geral:

- i) despreza-se o atrito seco na superfície do movimento;
- ii) considera-se que a mola e o amortecedor possuem comportamento linear;
- iii) o sistema realiza impacto unidirecional, ou seja, o sistema move-se somente na direção horizontal e o impacto entre o corpo e o batente rígido acoplado à base será sempre frontal; e
- iv) impõe-se o movimento oscilatório na base, de forma que as colisões e o próprio movimento do bloco não induzem qualquer perturbação. Em outras palavras, considera-se que a energia mecânica é suficientemente robusta, compensando

todas as perturbações externas e a do movimento do próprio bloco, para garantir a oscilação prescrita da base.

## 1.2 Comentários sobre Sistemas com Vibro-Impacto

Sistemas em que impactos ocorrem repetidamente devido a vibrações são costumeiramente denominados sistemas com vibro-impacto.

Não é difícil perceber a ampla variedade de aplicações na Engenharia, especialmente em mecanismos e máquinas com folgas ou espaçamentos, nos quais componentes de um sistema em vibração colidem com obstáculos, rígidos ou não. É o caso, por exemplo, de martelos vibratórios, amortecedores de impacto e amortecedores por impacto, excitadores eletromecânicos (*inertial shakers*), bate-estacas, moinhos e máquinas conformadoras [Luo-2008].

Os impactos vibratórios podem ser indesejáveis, como, por exemplo, em máquinas com folgas, em engrenagens, em rodeiros de transporte ferroviário, em trocadores de calor, nos quais a vibração é induzida pelo fluxo nos tubos. Citam-se, também, sistemas de tubulações e assim por diante, pois provocam falhas, desgaste, *pitting*, *scoring*, fadiga superficial, aumento dos níveis de ruído e diminuição da vida útil.

Nesses casos, a investigação sobre a dinâmica do vibro-impacto tem um significado importante na supressão de ruído, na análise da confiabilidade e na otimização do projeto de máquinas com folgas ou obstáculos rígidos. Por isso é necessário conhecer a dinâmica do sistema em cada caso para que se possa tentar atenuar os efeitos do impacto [Kovaleva-2004][Mattos-1998][Luo-2008].

Vale indicar que as fontes de vibro-impacto podem ser as forças provenientes de desbalanceamento em eixos, de interação entre engrenagens, de explosões em motores de combustão interna, ou ainda, pelo fluxo induzido em tubos, como já mencionado [Mattos-1998][Luo-2008].

Com relação à excitação de sistemas vibratórios, há as duas classificações:

- fonte ideal de energia, ou uma excitação ideal: quando esta não é influenciada pela resposta do sistema; e
- fonte não-ideal de energia, ou excitação não-ideal: quando a excitação é influenciada pela resposta do sistema.

Então, analogamente, dependendo da excitação refere-se a um sistema vibratório como:

- sistema ideal: a consideração da aplicação de uma força harmônica de amplitude predeterminada também é um sistema ideal, pois supõe que a força é produzida por uma fonte de energia robusta o suficiente para mantê-la; e
- sistema não-ideal: geralmente, são aqueles em que a alimentação é limitada. Será necessária a consideração, no equacionamento do problema, da dinâmica não ideal da fonte. Assim, o sistema não-ideal tem um grau de liberdade a mais em relação ao mesmo sistema considerado ideal [Balthazar-2003] [Mook-1976].

Acerca de sistemas não-ideais, Balthazar *et al.* [Balthazar-2003] fornecem uma visão geral sobre o assunto, reunindo além de conceitos, uma revisão de vários resultados publicados.

Para que se permita o uso contínuo do componente após o impacto, é necessário que o impacto não cause deformação permanente, ou seja, a tensão deve permanecer na região elástica [Norton-2007]. Uma forte suposição no estudo de sistema com impacto é a de que os corpos são rígidos e que, portanto, não existem deformações destes corpos durante a colisão, ou estas podem ser desprezadas sem problemas para a resposta que se vai obter. No entanto, a ocorrência de deformações nos corpos sob impacto não viola a idéia de corpos rígidos. Os corpos são rígidos quando o único movimento importante antes e depois da colisão é o movimento de corpo rígido [Chatterjee-1997].

O impacto é um fenômeno complexo que ocorre quando dois ou mais corpos são submetidos à colisão e são difíceis de entender e modelar devido as não linearidades envolvidas.

A utilização de um modelo depende do contexto de cada problema e, ainda, o objetivo de se desenvolvê-lo determina quais características do sistema devem ser reproduzidas de forma aproximada, pois modelos com propriedades bastante diferentes podem ser desenvolvidos [Aguirre-2000]. Assim, muitas vezes modelos simples para a colisão são aplicados na análise de sistemas e resultados aceitáveis são obtidos.

Assim, os elementos que se quiser utilizar na análise do sistema de vibro-impacto deverão ser levados em conta na modelagem. Vários exemplos podem ser aplicados, como:

- se as forças de atrito na superfície de contato são consideradas, é necessário que o modelo as leve em conta. E este modelo pode não depender apenas das propriedades dos materiais dos corpos, mas também do estado de movimento. Para muitos impactos bi ou tridimensionais, a força de atrito não poderá ser desconsiderada, pois nesses tipos de impacto raramente as componentes de forças paralelas à superfície de contato serão nulas porque raramente a normal àquela superfície passará pelo centro de massa dos corpos em colisão.
- se as deformações são levadas em conta, podem ser consideradas numa relação linear ou não linear, com as forças que atuam na região de contato. Essa consideração depende, não apenas das propriedades dos materiais dos corpos em colisão, como, também, da sua geometria.
- quando a preocupação do estudo recai sobre as tensões que se desenvolvem na região de contato durante o impacto, a modelagem dessas forças e a definição do que seja a região de contato (este depende de vários fatores, tais como a rigidez dos corpos em colisão e geometria destes corpos, além da própria intensidade das forças envolvidas no impacto) crescem de importância [Mattos-1998].

Quando o corpo atinge um dos batentes, inicia-se um processo de colisão que deve ser adequadamente modelado. É considerado aqui o modelo de colisão convencional, a saber:

- o lapso da colisão será considerado nulo. Isto é uma idealização do ponto de vista de que haverá conversão de energia, entre cinética e potencial, bem como dissipação num intervalo de tempo zero.
- a força do impacto entre o corpo e a base tem magnitude muito maior do que todas as demais forças atuantes sobre o sistema. Como a força de contato tende para o infinito, a duração do impacto tende para zero.
- rápida dissipação de energia. Da equação da variação de quantidade de movimento linear, pode-se obter a velocidade após o impacto. Então, se utiliza um coeficiente de restituição para representar a perda de energia durante a colisão.

Gilardi e Sharf [Gilardi-2002] proveram uma visão geral sobre impacto e metodologias de modelagem do contato, tendo em conta diferentes aspectos, entre os quais, a perda de energia, a influência do modelo de atrito, as abordagens de soluções, o problema do multi-contato e a verificação experimental. Os autores dividiram a análise do impacto em duas categorias:

- discreto: no qual a dissipação de energia é considerada pelo coeficiente de restituição e pela razão de impulso. Essa formulação é aplicada principalmente para colisões de corpos rígidos. Afirmam que o uso do coeficiente de restituição por impactos envolvendo corpos flexíveis é precário e, ainda, que o uso da lei de Coulomb com este tipo de abordagem pode conduzir a soluções inconsistentes; e
- contínuo: a análise dinâmica é transmitida continuamente pela suposição da relação entre a força de contato e a deformação. Essa abordagem apresenta uma melhor análise para sistemas flexíveis com multi-corpos sujeitos a múltiplos impactos e contatos.

O modelo analisado na dissertação é linear por intervalos. O movimento entre os batentes e antes que o processo de colisão ocorra é analisado como um sistema linear (lembre-se que o acoplamento visco-elástico também é linear). No entanto, o impacto entre o corpo e a base vincula ao modelo matemático uma descontinuidade no movimento, tornando o sistema não-suave. Com isso, embora o sistema seja

linear em intervalos de sua resposta, ele é não linear em sua dinâmica global. É bom lembrar que sistemas não-lineares não satisfazem ao princípio da superposição e da proporcionalidade.

Popp [Popp-1998] apresenta uma visão geral, do ponto de vista da aplicação, dos sistemas dinâmicos não-suaves e ressalta os desafios que estes tipos de sistemas são para engenheiros e matemáticos. Um sistema não suave é identificado pelas características da força e/ou do movimento, as quais não são contínuas, ou diferenciáveis. Seguem exemplos:

- i) tratando-se as características de forças não suaves, tem-se os elementos que normalmente se acoplam a massas ou outros elementos para formar um sistema dinâmico, como:
  - duas molas lineares com reação, também chamada de rigidez antisimétrica;
  - molas lineares com pré-carga; e
  - elementos deslizantes com atrito seco, ou atrito Coulomb;
- ii) tratando-se as características de movimentos, exemplifica-se:
  - o impacto de duas massas; e
  - o impacto de uma massa contra uma parede rígida.

Popp [Popp-1998] mostra alguns problemas de impacto e de atrito seco, juntamente com os correspondentes modelos mecânicos. Traz, ainda, uma revisão de trabalhos com problemas envolvendo sistemas não-suaves anteriores àquela época. Entre os problemas relacionados ao impacto citam-se:

- o do bloco em balanço (*rocking block*) com ou sem excitação de base, a datar de 1956, com Housner [Housner-1956], no qual o projeto de fundações para edifícios sob excitação devido a terremoto tenha sido discutido;
- o da bola oscilante (*bouncing ball*), no qual se diz que o comportamento do movimento regular é regido pelo número de períodos de excitação entre os impactos subsequentes e a periodicidade do movimento em si. Esse modelo é

semelhante em uma máquina de perfuração de percussão e no livro de Moon [Moon-2004] diz-se que este modelo também é aplicável para a aceleração dos elétrons em campos eletromagnéticos;

- a trepidação das caixas de engrenagens (*rattling gear boxes*), onde as rodas dentadas não estão carregadas; e
- o oscilador de impacto, investigado com o nome de sistema de vibro-impacto por Babitsky [Babitsky-1976]. Neste, um novo tipo de bifurcação tem sido encontrado, o *grazing bifurcation*, onde o caso limite de impacto, com velocidade zero, é dado por Nordmark [Nordmark-1991], Budd e Dux [Budd-1994].

O equilíbrio também é um exemplo do estado estável a que se pode ter interesse. No trabalho de Blackburn *et al.* [Blackburn-1992], a análise numérica de estabilidade é realizada em um pêndulo invertido, no qual o equilíbrio pode ser obtido por meio de uma oscilação harmônica vertical da base, de apropriadas frequência e amplitude. A abordagem teórica é feita através da aproximação da equação de movimento pela equação de Mathieu, que é adimensionalizada, e através de um modelo citado pelos autores como fenomenológico baseado no potencial efetivo, no qual se considera o efeito dissipativo. Após, simulações numéricas são empregadas para investigar a maneira na qual a posição invertida de um pêndulo simples se desestabiliza quando a amplitude da oscilação no ponto de suspensão é aumentada acima de um valor crítico. O livro do Cartmell [Cartmell-1990] trata de uma breve discussão sobre a estabilidade do pêndulo invertido.

Com relação a sistemas periódicos no tempo, Sinha [Sinha-2001] comenta que estes desempenham um papel importante nas ciências e na Engenharia, e são objeto de investigação desde 1868, iniciada por Mathieu, ao analisar as vibrações de uma membrana elíptica. Desde aquela época, o estudo das equações periódicas no tempo tem encontrado aplicações em muitas áreas, tais como a estabilidade dinâmica de estruturas, a teoria de circuitos, os sistemas de controle, a dinâmica de satélites, de eixos rotativos, de hélices de rotor de helicóptero, da mecânica quântica e da biomecânica (locomoção humana ou animal, ou modelagem do funcionamento do coração).

Em geral, não é possível obter soluções exatas de sistemas não-lineares periódicos no tempo. Para a resolução das equações de movimento em vibro-impacto, a aplicação dos métodos analíticos é muito complexa e limitada, tendo em conta o fato de que as soluções são do tipo transcendental, ou seja, eles não podem ser encontrados em uma forma fechada, uma vez que os movimentos oscilatórios são interrompidos por impactos. No entanto, as alterações que ocorrem na dinâmica de um determinado sistema mecânico não precisam ser necessariamente quantificadas, ou seja, na maioria das aplicações, pode ser suficiente:

- obter soluções aproximadas;
- saber algo sobre a existência, ou não, de pontos fixos em determinadas regiões do espaço onde os parâmetros podem variar;
- conhecer alguma coisa sobre a estabilidade destes pontos fixos; e
- inferir acerca dos mecanismos de bifurcação.

Para estes casos em que não é necessário quantificar a resposta temporal do sistema, a idéia é, de alguma forma, eliminar a dependência temporal explícita e tornar o sistema autônomo e passível de aplicações de um grande número de teorias desenvolvidas para sistemas invariantes no tempo. Os métodos para a resolução desses problemas são baseados na aplicação de métodos numéricos e gráficos com a interpretação dos dados geométricos, isto é, métodos pelos quais se investigam as alterações qualitativas da dinâmica dos sistemas. O mapa de Poincaré e os diagramas de bifurcação são ferramentas importantes para a análise geométrica da dinâmica de sistemas [Sinha-2001][Strogatz-1994][Mitić-1997][Mattos-1998][Hinrichs-1997].

Entre as três perguntas apresentadas no trabalho do Popp [Popp-1998], serão transcritas duas que são de interesse. A última delas, que trata de atratores, não será relatada, pois não está no escopo do trabalho. São elas:

- i) Como podem os sistemas não-suaves serem resolvidos eficientemente?

Métodos de solução devem ser avaliados e melhorados, como as soluções por intervalos, a abordagem de mapeamento, as técnicas de suavização e as simulações numéricas.

ii) Como podem ser analisadas as propriedades da solução de sistemas não-suaves?

É requerida a utilização de métodos eficientes para a análise de estabilidade e de bifurcação.

### 1.3 Revisão Bibliográfica

O interesse pelo estudo de sistemas com vibro-impacto aumentou muito na última década, e atualmente há um congresso internacional dedicado a este tema, o *International Conference on Vibro-Impact Systems* (ICOVIS).

Extensa abordagem matemática para sistemas com vibro-impacto é feita por Paoli [Paoli-2001], considerando impacto unilateral com número finito de graus de liberdade. Em outro trabalho [Paoli-2005], ele diz provar a convergência de uma solução aproximada proposta.

Tangasawi *et al.* [Tangasawi-2008] estudaram o ruído causado pela trepidação de engrenagens de transmissão automotiva, de forma específica, a trepidação na engrenagem intermediária (*idle gear rattle*) sujeita a impactos repetitivos entre os dentes. É considerado, ainda, o efeito do filme lubrificante, com regime de lubrificação hidrodinâmico, já que, para eles, as contribuições espectrais na assinatura de vibração são afetadas pela reologia do lubrificante, particularmente a variação da viscosidade com a temperatura. É escrito que a influência do comportamento do filme de líquido na trepidação da engrenagem intermediária é por eles determinada, mas até aquela época, não havia atraído pesquisas suficientes.

Nguyen e Woo [Nguyen-2008] apresentam uma plataforma de testes eletromagnéticos de vibro-impacto que foi projetada, fabricada e testada em

laboratório, capaz de gerar forças de grande impacto, e, por conseguinte maior taxa de penetração.

Sokolov *et al.* [Sokolov-2007] utilizaram o conceito de sistemas auto-ressonantes. Apresentaram o projeto e a plataforma experimental de um *shaker* que utiliza atuador eletromagnético. O regime ressonante pode ser obtido com impactos nos dois lados, de um lado, ou sem impactos. Para isso, atuadores eletromagnéticos elementares podem ser usados com sucesso em vários sistemas auto-ressonantes, incluindo máquinas de vibração de alta potência.

Sosnovskiy e Sherbakov [Sosnovskiy-2007] realizaram estudos na área de tribo-fadiga associado ao vibro-impacto. No artigo, tratam de danos residuais irregulares, denominados de fenômeno *tropy*, que ocorrem na área de contato em atrito de rolamento em um sistema com vibro-impacto. É feita a modelagem matemática e simulação de distribuição de tensões.

Bazhenov *et al.* [Bazhenov-2009] consideraram diferentes métodos de modelagem do impacto em sistemas com vibro-impacto, seja pela força de interação do contato na qual pode ser considerada como força elástica, bem como a força correspondente a lei de Hertz, com a ajuda do método da condição de contorno utilizando o coeficiente de restituição. É feita a comparação dos resultados da modelagem por meio desses métodos e propostas recomendações para sua aplicação.

Liang *et al.* [Liang-2008] abordaram o controle em um sistema de vibro-impacto baseado na lei do controle de amortecimento e, em seguida, investigaram o comportamento dinâmico desse sistema. Eles concluíram, com a simulação numérica, que este esquema de controle não apenas suprimiu o caos para a órbita periódica, mas também gerou o caos no sistema. Em seguida, afirmam confirmar a viabilidade e a robustez do controlador. O sistema sob análise é de dois graus de liberdade, amortecido, com força atuando nas duas massas e barreira rígida em um lado de uma coordenada.

Um sistema com vibro-impacto e atrito seco foi analisado por Andraeus e Casini [Andraeus-2002], os quais discutiram os fenômenos chamados de *stick-slip*, *stick-contact* e *slip-contact*. O sistema de um grau de liberdade colide contra um obstáculo e possui excitação de base que transfere energia para o sistema por atrito.

Brindeu [Brindeu-2000] tratou de um método direto que é aplicado para sistemas com um ou vários graus de liberdade, cujo movimento foi analisado por meio das equações de Lagrange. Como exemplos, foram apresentados um caso particular de um grau de liberdade, o qual consistiu em um mecanismo biela-manivela, e um sistema com dois graus de liberdade. O autor afirma que o estudo de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto com dois graus de liberdade é bastante trabalhoso por causa do grande volume de cálculo necessário para a determinação das condições de estabilidade. Afirma, ainda, que com a ajuda das equações de Lagrange e do método direto, as condições de estabilidade podem ser determinadas eficientemente.

Rong *et al.* [Rong-2009] estudaram os métodos da transformação de Zhuravlev e da média estocástica para analisar a resposta do sistema de impacto de um grau de liberdade, não-linear e sob excitação aleatória. Comentaram que, para tratar estes tipos de problemas, métodos aproximados têm sido desenvolvidos e utilizados. Entre estes, citam-se os métodos de linearização equivalente, ou estocástica, os métodos de perturbação, a média estocástica e a expansão em séries.

Para, ainda, Rong *et al.* [Rong-2009], assim como em sistemas determinísticos não lineares de um grau de liberdade, nos quais, a solução exata é difícil, ou até impossível, conseqüentemente, métodos aproximados têm extensa utilização na análise do sistema, em determinados sistemas, tais métodos aproximados podem ser estendidos para sistemas aleatórios. Os autores citam como estes métodos aproximados, o método: dos pequenos parâmetros, de transformação de coordenadas, das múltiplas escalas, de parâmetro variacional diminuído, KBM, da linearização equivalente, do balanço harmônico, entre outros.

Sistemas com vibro-impacto modelados de forma estocástica também foram estudados por Wolter *et al.* [Wolter-2002], por meio de uma viga, a qual é limitada

lateralmente em ambos os lados por batentes elásticos. Eles obtiveram modos empíricos que são usados como funções de aproximação no método de Galerkin para se construir um modelo reduzido.

Kovaleva [Kovaleva-2004] apresentou a análise de um sistema dinâmico estocástico com impacto de uma estrutura flexível, modelada como um sistema de múltiplos graus de liberdade em que uma das massas, a da base, colide com um anteparo rígido. Para o autor, o exame do modelo reduzido pelo método da média estocástica permite a estimativa das propriedades estatísticas do movimento de vibro-impacto.

Knudsen e Massih [Knudsen-2003] analisaram uma viga e um sistema de um grau de liberdade amortecido e forçado, ambos sujeitos a impactos, nos dois lados, contra batentes elásticos. Os autores afirmam que no trabalho deles foram avaliados:

- numericamente a estabilidade de órbitas periódicas e da bifurcação local; e
- o *impact work-rate*, que é a taxa de energia dissipada nas superfícies de impacto. Essa propriedade, para eles, é tida como uma medida da energia disponível para danificar a superfície.

Além disto, foi dada atenção para o experimento com uma viga em balanço apresentada por Moon e Shaw, a qual também é mostrada por Moon [Moon-2004]. Eles afirmaram que há algumas discrepâncias nos resultados simulados devida às considerações de aplicação da carga e de amortecimento de Rayleigh, ou seja:

- para a carga aplicada, a carga distribuída foi usada na simulação, ao invés de uma carga de deslocamento, como a empregada no experimento.
- em relação ao amortecimento, a parte proporcional à rigidez do amortecimento Rayleigh, para os autores, fornecerá maior amortecimento em altas frequências. Essa característica, no entanto, apesar de atraente em termos numéricos, não é necessariamente correta.

Knudsen e Massih [Knudsen-2003] afirmaram ainda que o desgaste é um processo lento em qualquer sistema de engenharia bem concebido e, além disso, a excitação

harmônica é uma característica de muitos desses sistemas (por exemplo, turbinas). Assim, o estudo de órbitas periódicas em um sistema de vibração harmônico com desgaste é relevante e que, para os autores, o método descrito no trabalho pode ser usado para avaliar a suscetibilidade de desgaste em vigas ou estruturas que estão sujeitas ao vibro-impacto.

Bapat [Bapat-1998] investigou os efeitos em movimentos periódicos causados pelos parâmetros como o coeficiente de amortecimento, o coeficiente de restituição constante e variável, a amplitude e a frequência da força senoidal e de uma força constante chamada de força de influência (*bias force*), ambos aplicados sobre a massa. Para o autor, abordagens de simulação são computacionalmente exaustivas no estudo de movimentos periódicos. O sistema analisado é de um grau de liberdade e os batentes rígidos com folga em ambos os lados.

Em Luo *et al.* [Luo-2008] é apresentado um mapa tridimensional na análise de um oscilador de dois graus de liberdade considerando o impacto perfeitamente plástico ou inelástico. A dinâmica não-linear do sistema de vibro-impacto é analisada usando o mapa de Poincaré. O foco do estudo é a atenção para os fenômenos de *rising* e *grazing* que ocorrem nos problemas de aderência (*sticking*) em um sistema de dois graus de liberdade com impacto plástico.

Para, ainda, Luo *et al.* [Luo-2008], a presença da fase de aderência dificulta a análise dinâmica do sistema de vibro-impacto. É necessário esclarecer que esta fase de aderência citada na publicação não se refere à mesma singularidade encontrada em sistemas com atrito seco e, sim, o movimento combinado das duas massas que se impactam, pois o sistema analisado por eles é de dois graus de liberdade, forçado em ambas as massas, as massas se impactam entre si por meio de um anteparo rígido preso a elas, e estas estão conectadas entre si e com a base por meio de molas e amortecedores.

Utilizando a resposta de um sistema com vibro-impacto sujeito a uma excitação aleatória e usando simulação numérica, Lin e Bapat [Lin-1993] propuseram um método para estimar a folga de um sistema com vibro-impacto. Os resultados foram comparados com folgas reais e, para eles, indicou uma boa concordância. O sistema

do artigo é de um grau de liberdade, amortecido, com barreiras elásticas nos dois lados e com excitação aleatória de base.

Tem-se observado alguns trabalhos que tratam de um método para construir o chamado modo normal não-linear, costumeiramente abreviado por NNMs do inglês *nonlinear normal mode*. Os próximos quatro trabalhos que serão citados tratam deste método.

Um sistema consistindo de um oscilador linear, com uma massa relativamente grande, o que é uma aproximação de muitos sistemas elásticos, e um oscilador de vibro-impacto com uma massa relativamente pequena que funciona como um absorvedor, principalmente, de sistemas vibratórios lineares, é analisado usando o método NNMs por Mikhlin e Reshetnikova [Mikhlin-2006].

Um método numérico para a construção dos NNMs para sistemas autônomos linear por partes é apresentado por Jiang *et al.* [Jiang-2004] e por Chen e Shaw [Chen-1996].

No trabalho de Jiang *et al.* [Jiang-2004], os NNMs são baseados no conceito de variedades invariantes (*invariant manifolds*) e são obtidos utilizando uma solução baseada em Galerkin. Para ilustrar a técnica foi apresentado um estudo de caso de um sistema com dois graus de liberdade, não forçado, não amortecido e com barreira elástica de um lado. Os autores alegam que, foi investigada a existência, estabilidade e bifurcações do NNMs. O multiplicador característico e o mapa de Poincaré foram empregados para explorar a estabilidade dos NNMs e algumas características da resposta. Chen e Shaw [Chen-1996] também utilizaram os conceitos de mapas de Poincaré e de variedades invariantes.

Os métodos analíticos utilizados por Mikhlin *et al.* [Mikhlin-1998] são do tipo NNMs usando uma formulação para problemas de valores de contorno o que, para eles, possibilitou o cálculo de vários ramos de solução de bifurcação periódica com diferentes características de impacto. Resultados numéricos foram obtidos pela integração da equação de movimento e então usados para construir os mapas de Poincaré. Para os autores, complicadas sequências de bifurcações dão razão para

novos tipos de movimentos de impacto em um ou dois lados, instabilidades e respostas caóticas. A análise apresentada, para eles, pode ser usada para estudar bifurcações associadas ao problema inverso, isto é, para investigar degenerações na classe de sistemas de vibro-impacto que produzem uma órbita específica no espaço de configuração. O sistema analisado possuía dois graus de liberdade, não amortecido, não forçado e com barreira nos dois lados de cada massa.

O estudo do comportamento de um oscilador descrito pela equação diferencial de Duffing impactando um batente em um ou em ambos os lados foi mostrado por:

- Bhutani *et al.* [Bhutani-1998]: obtiveram resultados utilizando um método de diferença central com um intervalo de tempo muito pequeno;
- Mitić [Mitić-1997]: analisou qualitativamente a estabilidade dinâmica global do sistema com base em retratos de fase e de mapeamento bidimensional; e
- Avramov [Avramov-2008]: utilizou a transformação não suave de Zhuravlev e o método das múltiplas escalas. As considerações são feitas no domínio da ressonância. A estabilidade e a bifurcação para a vibração periódica foi analisada. Para o autor, os resultados demonstraram eficiência do uso combinado da transformação e do método das múltiplas escalas.

Xie *et al.* [Xie-2005] estudaram a bifurcação de Hopf-flip para mapas de alta dimensão por meio da análise teórica e da simulação numérica. Eles exemplificam o estudo de um sistema de dois graus de liberdade, com força aplicada em ambas as massas, amortecido e com anteparo rígido impactando uma massa em um lado. A estabilidade da solução periódica foi estudada pelo mapa linearizado. Para os autores, movimentos periódicos podem direcionar diretamente para movimentos de diferentes tipos, tal como subharmônicos, quase-periódicos e movimentos no toro dimensional alto (*high dimensional tori*).

No trabalho de Yuan e Jian-Hua [Yuan-2007] são considerados um movimento simétrico e outro não simétrico, com dois impactos em um sistema com um grau de liberdade que impacta entre dois anteparos rígidos. A teoria das bifurcações do ponto fixo é aplicada a esse modelo e confirmam que o movimento periódico

simétrico tem somente a bifurcação de pitchfork pela análise da simetria do mapa de Poincaré.

Hinrichs *et al.* [Hinrichs-1997] investigaram numérica e experimentalmente dois sistemas dinâmicos não suaves: um sistema com vibro-impacto e um com atrito seco. O sistema com vibro-impacto possui um grau de liberdade, amortecimento, excitação de base e anteparo rígido em um lado. Os autores afirmaram que houve uma boa concordância entre as curvas de fase, diagramas de bifurcação e mapas de Poincaré, com os resultados medidos e simulados.

Janin e Lamarque [Janin-2002] têm como foco as singularidades no mapa de Poincaré de um sistema de um grau de liberdade, amortecido, forçado e com impacto. O comportamento do mapa de Poincaré na vizinhança de um ponto fixo não-diferenciável foi investigado e dizem mostrar, a partir do mapa aproximado, que a solução periódica é estável quando os multiplicadores de Floquet são reais.

Shaw e Holmes [Shaw-1983] descobriram movimentos harmônicos, subharmônicos e caóticos e analisaram as bifurcações a que aqueles movimentos conduzem. Foi analisado um sistema de um grau de liberdade, amortecido, com excitação de base e restrição unilateral elástica.

Luo e Xie [Luo-2004] estudaram um sistema de dois graus de liberdade com batentes rígidos em ambos os lados de uma massa, amortecidos, e forçados em ambas as massas. Para eles, uma importante aplicação do modelo é na dinâmica de tubos de trocadores de calor de reatores nucleares que são projetados para apresentarem folgas nos pontos de suporte e assim permitir a sua expansão térmica. Afirmaram que a resposta desses sistemas é muito complicada e o desgaste dos tubos são um dos maiores problemas na indústria nuclear. A passagem do fluxo de fluido e a viga podem resultar em movimentos caóticos e, desse modo, o comportamento de bifurcação e os movimentos caóticos podem prover uma apropriada ferramenta para o estudo de desgaste no tubo. No artigo, são analisadas a estabilidade e a bifurcação de *Hopf* e *pitchfork* para um movimento simétrico de dois impactos por período.

## 1.4 Motivação e Objetivos do Trabalho

Embora diversos autores explorem sistemas com vibro-impacto, via de regra, a análise de existência e de estabilidade conduzida nos artigos pressupõe movimentos de topologia simples. As topologias mais complexas são analisadas em geral por meio de mapas de Poincaré, expoentes de Lyapunov, diagramas de bifurcação e localização de atratores caóticos.

No trabalho de Barbosa [Barbosa-2009], as simulações mostraram movimentos periódicos de padrões incomuns quando comparados com aqueles analisados na literatura. Chama a atenção, a existência de movimentos com “elevado” número de impactos por período e a percepção de que, nas frequências das quais a frequência de excitação é múltipla, a ocorrência destes “movimentos periódicos estranhos” é mais provável.

A análise detalhada de topologias de sistemas com vibro-impacto, com a determinação de padrões e a análise da existência não são metodologicamente exploradas na literatura consultada. Faz-se necessária uma minuciosa análise do sistema com vibro-impacto, que possui linearidades fortes a fim de que se tenha qualitativamente um estudo do comportamento destes sistemas.

A dissertação tem por objetivos diretos:

- analisar as condições de existência e estabilidade de alguns padrões de movimentos periódicos, de topologia simples e, também, mais complexa;
- caracterizar um conjunto de movimentos e propor metodologias de análise quanto à sua condição de existência e estabilidade por meio de um modelo de estado; e
- analisar características de mapas que relacionam estados nos instantes de colisão, de ordens e números de colisões por período diversos.

Adicionalmente, busca-se:

- contextualizar o estado da arte no que diz respeito ao estudo do sistema com vibro-impacto, notadamente sobre a existência e a estabilidade de movimentos;
- descrever a modelagem matemática do sistema selecionado para estudo, explorando características que facilitem sua análise no espaço-estado;
- apresentar um conjunto de simulações que apontem a existência de movimentos periódicos com diferentes números de colisões por período.

## 1.5 Organização da Dissertação

Além do capítulo introdutório, a dissertação é composta de mais quatro capítulos, totalizando, portanto, cinco capítulos.

O Capítulo 1 apresenta o problema de interesse com várias considerações pertinentes. Dispõe comentários acerca da importância do estudo de sistemas com vibro-impacto, da análise da estabilidade e de hipóteses comumente realizadas em sistemas com impacto e, após uma seção disponível com a revisão bibliográfica. Em seguida estão a motivação, os objetivos e a estruturação da dissertação.

O Capítulo 2 apresenta a modelagem matemática do sistema dinâmico, explorando a solução na sua forma adimensional e matricial para a construção do mapa não-linear.

Os mapas de movimentos com topologia mais complexa são apresentados no Capítulo 3.

No Capítulo 4 mostram-se as simulações numéricas da análise de estabilidade de um padrão de movimento periódico.

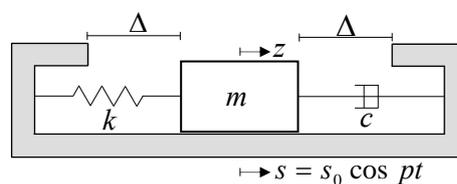
O Capítulo 5, por fim, apresenta análise final do trabalho, destacando as conclusões e proposições para trabalhos futuros.

## 2 Modelagem Matemática do Sistema

O capítulo apresenta o equacionamento do movimento em sua forma autônoma, os detalhes do mapa não-linear, a indexação de topologias de movimento, bem como as condições de existência do movimento de topologia simples.

### 2.1 Equação de Movimento

O modelo físico do sistema em estudo está novamente esquematizado na Figura 2.1, e consiste de uma base oscilante, na qual se move um bloco e este está preso à base por meio de uma mola com coeficiente de rigidez  $k$  e de um amortecedor com coeficiente de amortecimento viscoso  $c$ . O movimento do corpo de massa  $m$  é limitado por duas restrições laterais, contra os quais ele impacta repetitivamente. A folga entre o corpo e as restrições laterais ou batentes é denominada por  $\Delta$ .



**Figura 2.1:** Sistema com vibro-impacto e oscilação de base.

Como o sistema é dito linear por intervalos, analisa-se o movimento do bloco antes que ocorra o processo de colisão. Os movimentos do bloco e da base são dados, respectivamente, pelas coordenadas  $z$  e  $s$ . Pela aplicação da segunda lei de Newton, tem-se

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + c \left( \frac{dz}{dt} - \frac{ds}{dt} \right) + k(z - s) = 0 \quad (2.1)$$

O movimento relativo é definido como  $y = z - s$ , que substituído na Equação (2.1) permite escrever:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = -m \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (2.2)$$

A oscilação da base é tida como um movimento harmônico descrito por  $s = s_0 \cos pt$ , onde  $s_0$  e  $p$  são, respectivamente, a amplitude e a frequência da excitação. Então, pode-se obter

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + ky = ms_0 p^2 \cos pt \quad (2.3)$$

que é válida enquanto o bloco não atinge os batentes. Com o intuito de adimensionalizar a Equação (2.3), define-se

$$\tau = \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{km^{-1}}, \quad \omega = \frac{p}{\omega_n}, \quad x = \frac{y}{y_0} \quad \text{e} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (2.4)$$

sendo  $\omega_n$  a frequência natural de oscilação do sistema e  $\xi$  o fator de amortecimento.

Com as considerações na Equação (2.4), a Equação (2.3) leva a

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dx}{d\tau} + x = \frac{s_0 \omega^2}{y_0} \cos(\omega\tau) \quad (2.5)$$

Quando o corpo atinge o batente, o deslocamento  $y$  descrito pela Equação (2.3) equivale à folga  $\Delta$ . Portanto, se faz necessário, também, escrever a folga na forma adimensional para que seja imposto o intervalo de validade da Equação (2.5). Então, fazendo:

$$y \leq \Delta \Rightarrow \frac{y}{y_0} \leq \frac{\Delta}{y_0} = \varepsilon \quad (2.6)$$

Adota-se que  $y_0 = s_0$ . Por conseguinte, substituindo na Equação (2.5) e modificando a notação, apresenta-se

$$\ddot{x}(\tau) + 2\xi\dot{x}(\tau) + x(\tau) = \omega^2 \cos(\omega\tau), \quad |x| \leq \varepsilon = \frac{\Delta}{s_0} \quad (2.7)$$

a qual está na forma adimensional e rege o movimento entre duas colisões consecutivas.

Parte-se para a análise da resposta governada pela Equação (2.7). Para isso é necessário lembrar a consideração descrita no capítulo anterior do ínfimo intervalo de duração do impacto. Com isso, as condições de início do movimento são a posição e a velocidade no fim do processo de colisão. Portanto, o tempo também será contado a partir do instante final da colisão, e representa-se  $x(\hat{\tau}) = \hat{x}$  e  $\dot{x}(\hat{\tau}) = \hat{v}$ .

Supõe-se que o sistema seja sub-amortecido, ou seja, com  $\xi < 1$ . Obtém-se, assim,

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} + b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} + A \cos \varphi \cos(\omega\tau) + A \sin \varphi \sin(\omega\tau) \\ \dot{x}(\tau) &= a \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} + b \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - A \omega \cos \varphi \sin(\omega\tau) + A \omega \sin \varphi \cos(\omega\tau) \\ \ddot{x}(\tau) &= a \lambda_a^2 e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} + b \lambda_b^2 e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - A \omega^2 \cos \varphi \cos(\omega\tau) - A \omega^2 \sin \varphi \sin(\omega\tau) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

onde:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_a &= -\xi - j\sqrt{1-\xi^2}, & \lambda_b &= -\xi + j\sqrt{1-\xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)-a$$

$$\left. \begin{aligned} A \cos \varphi &= \frac{\omega^2 (1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}, & A \sin \varphi &= \frac{\omega^2 (2\xi\omega)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)-b$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\lambda_b (\hat{x} - A \cos \varphi \cos \omega \hat{\tau} - A \sin \varphi \sin \omega \hat{\tau}) - (\hat{v} + A \omega \cos \varphi \sin \omega \hat{\tau} - A \omega \sin \varphi \cos \omega \hat{\tau})}{\lambda_b - \lambda_a} \\ b &= \frac{-\lambda_a (\hat{x} - A \cos \varphi \cos \omega \hat{\tau} - A \sin \varphi \sin \omega \hat{\tau}) + (\hat{v} + A \omega \cos \varphi \sin \omega \hat{\tau} - A \omega \sin \varphi \cos \omega \hat{\tau})}{\lambda_b - \lambda_a} \end{aligned} \right\} (2.9)\text{-c}$$

Ao se substituir todos os termos relacionados nas Equações (2.9) e as respostas contidas na Equação (2.8) na Equação (2.7) verifica-se que a equação de movimento é igual a  $\omega^2 \cos(\omega \tau)$ , conforme esperado. Substituindo os termos das Equações (2.9) em  $x(\tau)$  e  $\dot{x}(\tau)$  contidos na Equação (2.8), verifica-se se a resposta satisfaz as condições iniciais do problema. Então, para  $\tau = \hat{\tau}$ , encontra-se  $x(\hat{\tau}) = \hat{x}$  e  $\dot{x}(\hat{\tau}) = \hat{v}$ , de acordo com o esperado.

## 2.2 Mapa envolvendo os Estados nos Instantes de Colisão

Voltando para a análise da resposta expressa na Equação (2.8), é feita a suposição de que se conheça o estado do sistema no instante  $\tau_i$ . Assim, enquanto o batente não for atingido, o estado poderá ser determinado pelas equações:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_i e^{\lambda_a(\tau-\tau_i)} + b_i e^{\lambda_b(\tau-\tau_i)} + A_c \cos(\omega \tau) + A_s \sin(\omega \tau) \\ \dot{x} &= a_i \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\tau_i)} + b_i \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\tau_i)} - A_c \omega \sin(\omega \tau) + A_s \omega \cos(\omega \tau) \end{aligned} \right\} (2.10)$$

Analogamente às Equações (2.9), ter-se-á:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_a &= -\xi - j\sqrt{1-\xi^2}, & \lambda_b &= -\xi + j\sqrt{1-\xi^2} \end{aligned} \right\} (2.11)\text{-a}$$

$$\left. \begin{aligned} A_c &= A \cos \varphi = \frac{\omega^2 (1-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}, & A_s &= A \sin \varphi = \frac{\omega^2 (2\xi\omega)}{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2} \end{aligned} \right\} (2.11)\text{-b}$$

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\lambda_b (x_i - A_c \cos(\omega\tau_i) - A_s \sin(\omega\tau_i)) - (v_i + A_c \omega \sin(\omega\tau_i) - A_s \omega \cos(\omega\tau_i))}{\lambda_b - \lambda_a} \\ b_i &= \frac{-\lambda_a (x_i - A_c \cos(\omega\tau_i) - A_s \sin(\omega\tau_i)) + (v_i + A_c \omega \sin(\omega\tau_i) - A_s \omega \cos(\omega\tau_i))}{\lambda_b - \lambda_a} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)\text{-c}$$

Usando do vetor  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{bmatrix}$ , que representa o estado do sistema, pode-se escrever

a Equação (2.10) da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{x}(\hat{\tau}) + \tilde{\mathbf{B}}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \hat{\tau} \\ \sin \omega \hat{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} & e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \\ \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) & \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \end{bmatrix} \quad (2.13)\text{-a}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_c & A_s \\ \omega A_s & -\omega A_c \end{bmatrix} \quad (2.13)\text{-b}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.13)\text{-c}$$

sendo

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_{11} &= -A_c (\lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_s (e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{12} &= -A_s (\lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) + \omega A_c (e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{21} &= -A_c \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) - \omega A_s (\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \\ \tilde{b}_{22} &= -A_s \lambda_a \lambda_b (e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})}) + \omega A_c (\lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})}) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)\text{-d}$$

Repara-se que  $\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) \therefore -\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}$ , como pode ser verificado:

$$\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) = \frac{1}{\lambda_b - \lambda_a} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A_c & -A_s \\ -\omega A_s & +\omega A_c \end{bmatrix} \therefore -\mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_{11} & \hat{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} & \hat{b}_{22} \end{bmatrix}, \text{ com}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{b}_{11} &= -A_c \left( \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) - \omega A_s \left( e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) &= \tilde{b}_{11} \\ \hat{b}_{12} &= -A_s \left( \lambda_b e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) + \omega A_c \left( e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) &= \tilde{b}_{12} \\ \hat{b}_{21} &= -A_c \lambda_a \lambda_b \left( e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) - \omega A_s \left( \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) &= \tilde{b}_{21} \\ \hat{b}_{22} &= -A_s \lambda_a \lambda_b \left( e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} - e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} \right) + \omega A_c \left( \lambda_b e^{\lambda_b(\tau-\hat{\tau})} - \lambda_a e^{\lambda_a(\tau-\hat{\tau})} \right) &= \tilde{b}_{22} \end{aligned} \right\}$$

Assim, pode-se escrever:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot (-\mathbf{B}) \quad (2.14)$$

Considerando a Equação (2.12), os termos das Equações (2.13)-a, (2.13)-b, (2.13)-c e (2.13)-d, a solução baseada no estado para o instante  $\hat{\tau}$  é:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{x}(\hat{\tau}) - \mathbf{A}(\tau, \hat{\tau}) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \hat{\tau} \\ \sin \omega \hat{\tau} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

onde  $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x}]^T$  é o vetor de estado,  $\mathbf{A}$  é a matriz dinâmica do sistema e  $\mathbf{B}$  trabalha como uma matriz modificada de entrada.

Se for considerado o instante  $\tau = \hat{\tau}$  na Equação (2.15), a equação trivial é encontrada, ou seja,  $\mathbf{x}(\hat{\tau}) = \mathbf{x}(\hat{\tau})$ , já que  $\mathbf{A}(\hat{\tau}, \hat{\tau}) = \mathbf{I}$ , com  $\mathbf{I}$  representando a matriz identidade.

Admite-se a colisão como perfeitamente elástica, com coeficiente de restituição  $e$ . Então, em um instante infinitesimalmente anterior,  $\tau^-$ , e posterior,  $\tau^+$ , à colisão, pode-se escrever

$$\mathbf{x}(\tau^+) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau^-) \quad (2.16)$$

As Equações (2.15) e (2.16) podem ser manipuladas para obter um mapa entre dois impactos sucessivos. Para isso, serão necessários alguns passos de análise do movimento:

a) Supondo-se que no instante  $\tau_0$ , tem-se a condição inicial do movimento:

$\mathbf{x}(\tau_0) = [x_0 \quad v_0]^T$ . Então, até a primeira colisão:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_0) \cdot \mathbf{x}(\tau_0) - \mathbf{A}(\tau, \tau_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \sin \omega \tau_0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

b) Seja  $\tau_1$  o instante da primeira colisão. Daí até a segunda colisão ter-se-á:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_1) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_1^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_1) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

com  $\mathbf{x}(\tau_1^-)$  calculado da Equação (2.17), substituindo-se  $\tau$  por  $\tau_1^-$ . De fato, para  $\tau = \tau_1^+$  na Equação (2.18), tem-se:

$$\mathbf{x}(\tau_1^+) = \mathbf{A}(\tau_1, \tau_1) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_1^-) - \mathbf{A}(\tau_1, \tau_1) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1 \end{bmatrix}$$

Como  $\mathbf{A}(\tau_1, \tau_1) = \mathbf{I}$ , encontra-se  $\mathbf{x}(\tau_1^+) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_1^-)$ , o que se esperava obter.

c) Seja  $\tau_2$  o instante da segunda colisão. Daí até a terceira colisão ter-se-á:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_2) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_2^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_2) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_2 \\ \sin \omega \tau_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

d) Logo, seja  $\tau_i$  o instante da  $i$ -ésima colisão. Daí até a  $(i+1)$ -ésima colisão ter-se-á:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Com a mesma sistemática listada anteriormente, da Equação (2.20) pode-se escrever que infinitesimalmente antes da  $(i+1)$ -ésima colisão, a qual ocorrerá no instante  $\tau_{i+1}^-$ , tem-se

$$\mathbf{x}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Multiplicando a Equação (2.21) por  $\mathbf{J}$ , tendo em conta que  $\mathbf{J}$  é diferente de zero, pode-se escrever

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_{i+1}^-) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Seja  $\mathbf{x}_i = [x_i \quad v_i]^T$  o estado do sistema imediatamente após a  $i$ -ésima colisão.

Assim, pode-se escrever que  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{x}(\tau_i^-) = \begin{bmatrix} x_i \\ v_i \end{bmatrix}$  e obtém-se a seguinte forma da

Equação (2.22):

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_{i+1}, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_{i+1}, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_{i+1} \\ \sin \omega \tau_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

com  $\Delta \tau_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  e as matrizes  $\mathbf{A}(\Delta \tau)$  e  $\mathbf{B}$  são as apresentadas nas Equações (2.13)-a e (2.13)-b, respectivamente.

### 2.3 Indexação de Topologias de Movimentos em Resposta Estacionária

As condições de resposta periódica do sistema, como expressas pela Equação (2.23), podem ser escritas na forma

$$\mathbf{x}_{i+n} = \mathbf{x}_i, \text{ para algum } (i, n) \in \mathbb{N}, i > i_0 \quad (2.24)$$

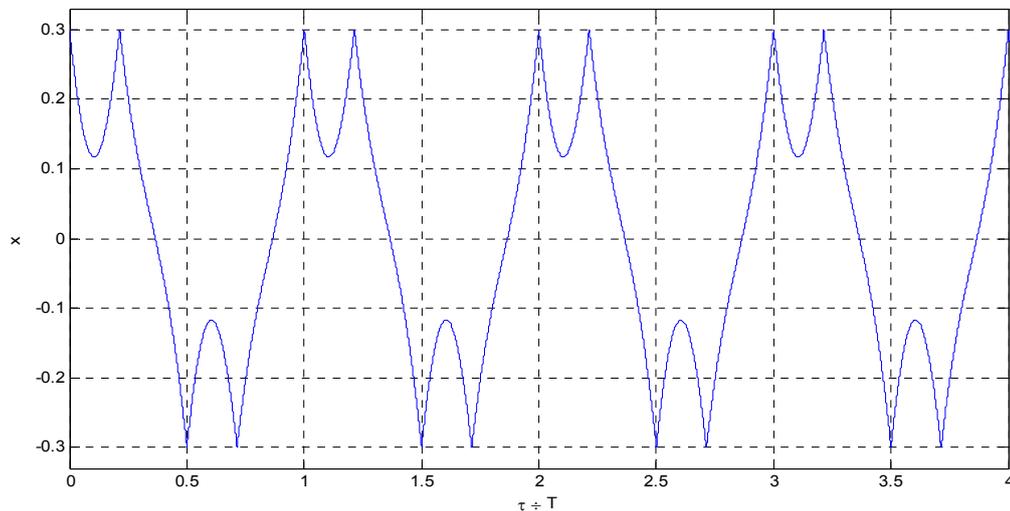
onde  $i_0$  representa um número de impactos a partir do qual o estado estacionário é alcançado.

A topologia do movimento do estado estacionário pode ser caracterizada por um par  $m-n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ), onde

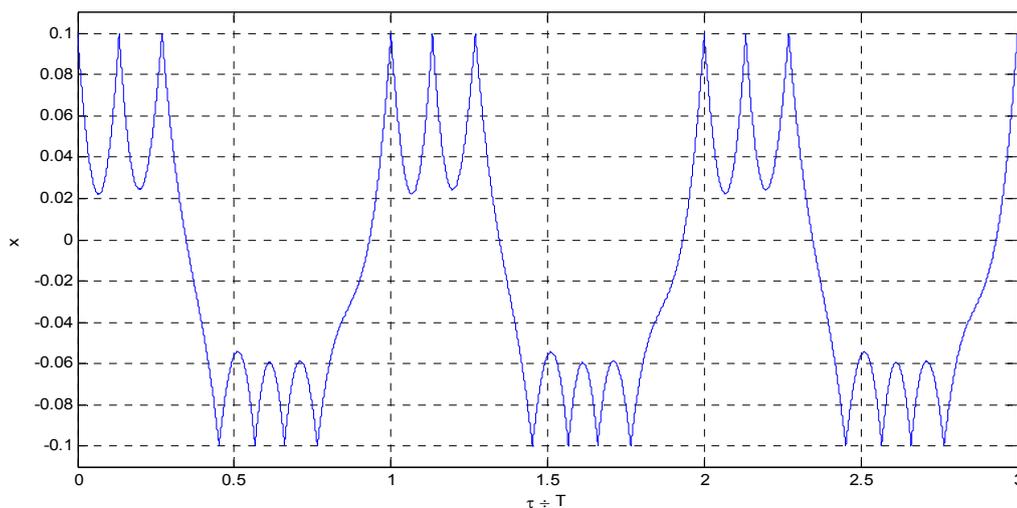
- $m$  indica a razão entre o período da resposta e o período da excitação, que será denominada de ordem do período da resposta; e
- $n$  representa o número de impactos que ocorrem dentro do período da resposta.

Assim, por exemplo, um movimento de topologia 1-2 indica que o período da resposta é o mesmo da excitação e nele ocorrem dois impactos a cada período do movimento.

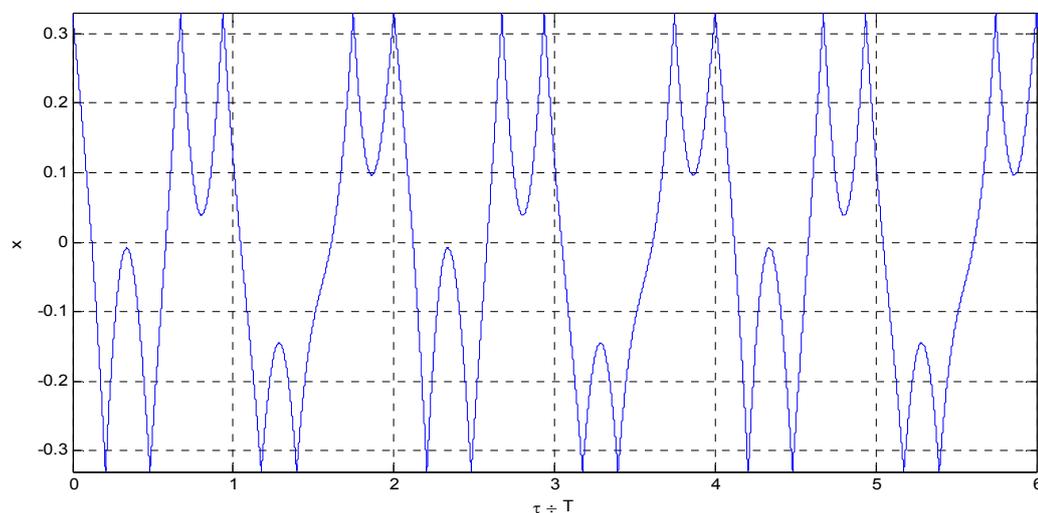
As Figuras 2.2 a 2.8 apresentam algumas topologias de movimento.



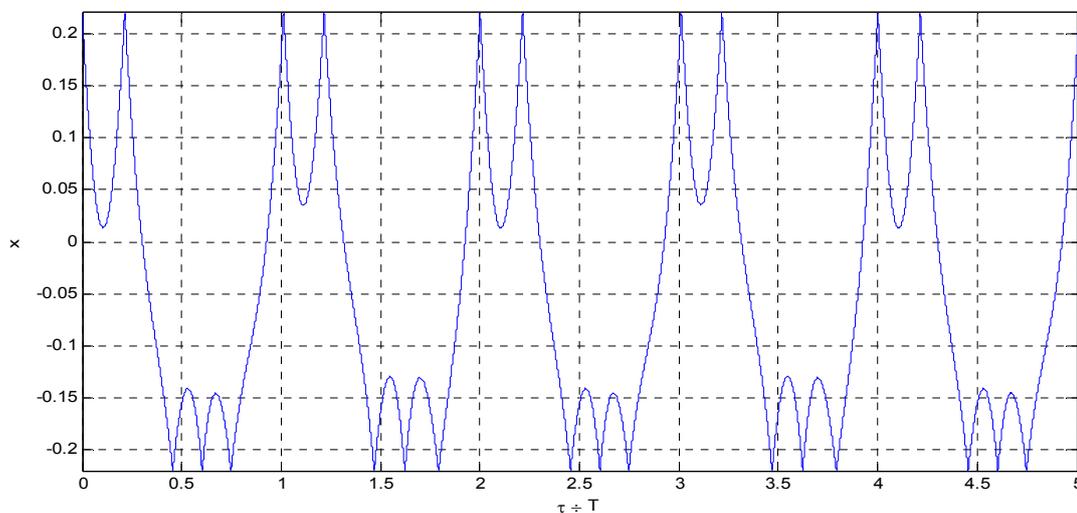
**Figura 2.2:** Topologia 1-4, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,3$ ;  $x_0 = 0,0$  e  $v_0 = 0,0$ .



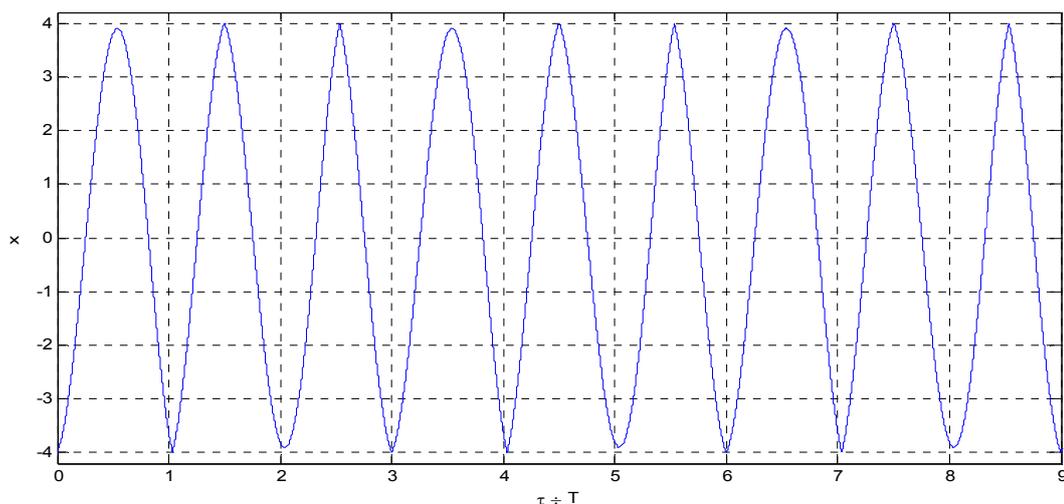
**Figura 2.3:** Topologia 1-7, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,1$ ;  $x_0 = 0,0$  e  $v_0 = 0,0$ .



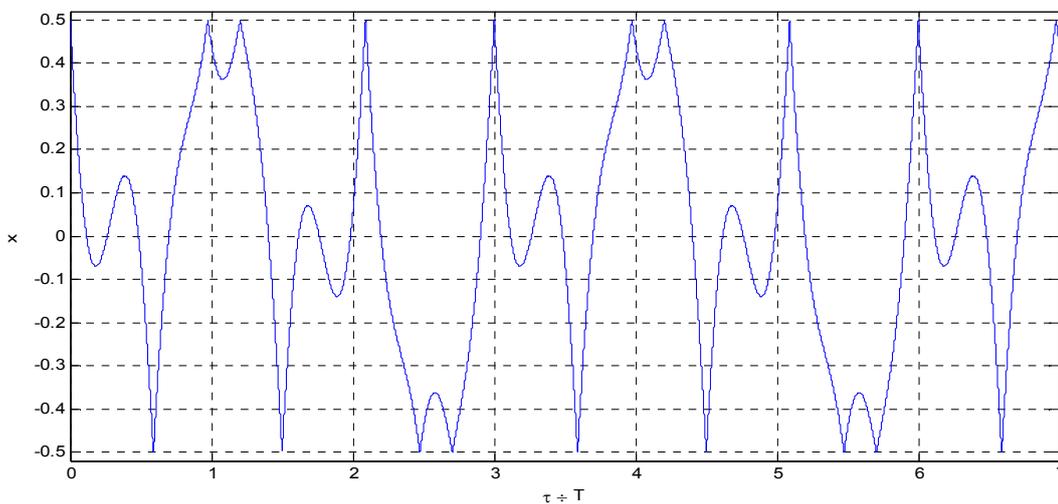
**Figura 2.4:** Topologia 2-8, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,33$ ;  $x_0 = 0,0$  e  $v_0 = 2$ .



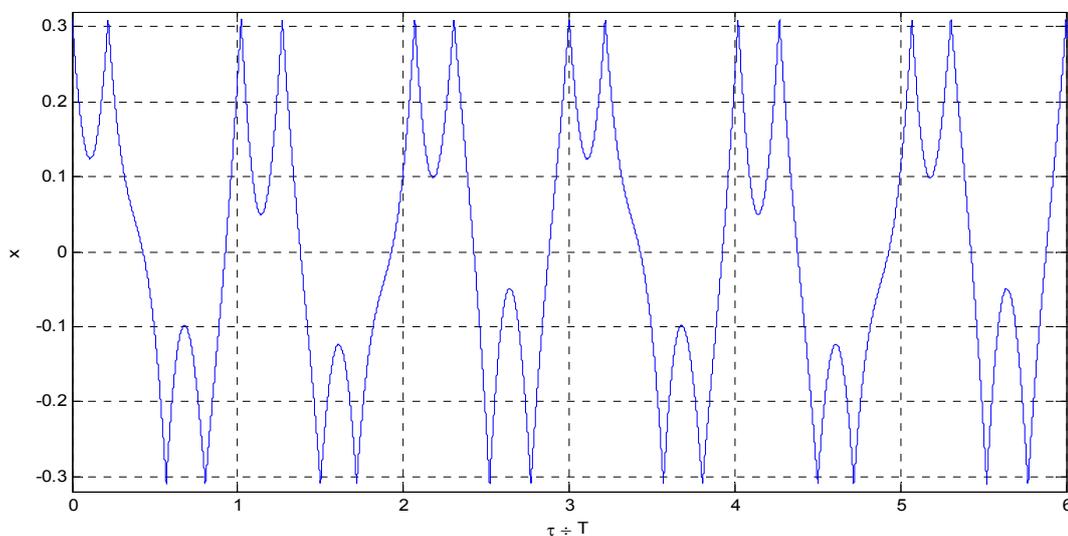
**Figura 2.5:** Topologia 2-10, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,22$ ;  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ .



**Figura 2.6:** Topologia 3-4, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 4$ ;  $x_0 = 0,0$  e  $v_0 = 0,0$ .



**Figura 2.7:** Topologia 3-8, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,5$ ;  $x_0 = 0,0$  e  $v_0 = 3,5$ .



**Figura 2.8:** Topologia 3-12, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,31$ ;  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ .

## 2.4 Região de Existência de Impactos no Movimento Linear

Das Equações (2.11)-b, tem-se, de  $A_c$  e  $A_s$ , que

$$A = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \quad (2.25)$$

A Equação (2.25) representa a amplitude máxima para o regime permanente no intervalo linear. Com isso, na região em que a amplitude do movimento do sistema linear excede a folga, existe a possibilidade de impactos. A curva limite para que impactos ocorram para  $\xi = 0,05$  é apresentada na Figura 2.9.

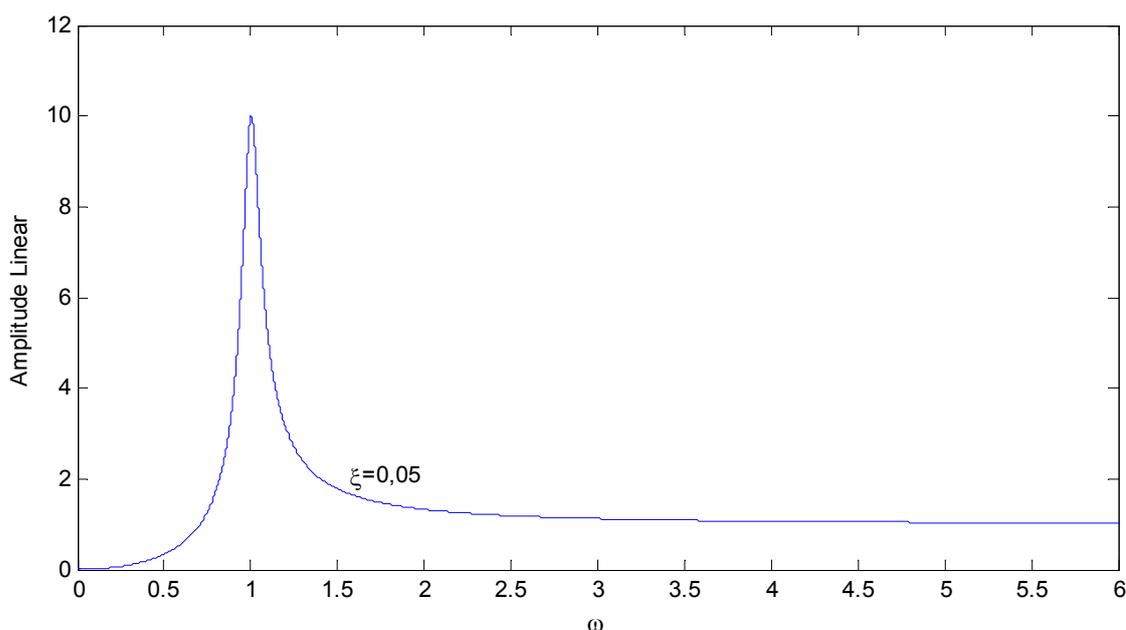


Figura 2.9: Amplitude máxima do sistema linear para  $\xi = 0,05$ .

## 2.5 Condições de Existência de Movimentos Periódicos 1-2 Simétricos

Diversos autores estudaram a estabilidade de movimentos periódicos em sistemas com vibro-impacto [Knudsen-2003][Luo-2008][Mikhlin-1998][Shaw-1983][Luo-2004][Janin-2002], seja por mapas de Poincaré [Yuan-2007][Luo-2008][Hinrichs-1997][Knudsen-2003], por multiplicador característico [Jiang-2004], multiplicadores de

Floquet [Janin-2002] e por variedades invariantes [Chen-1996][Jiang-2004]. As condições de existência, no entanto, não foram objeto de atenção maior, tendo sido encontrado apenas um artigo sobre o tema [Luo-2008].

Uma condição necessária para um movimento de topologia 1-2 é

$$\mathbf{x}_{i+2} = \mathbf{x}_i \quad (2.26)$$

Barbosa [Barbosa-2009] analisou de forma mais detida as condições de existência do movimento 1-2 simétrico. Naquela análise foram consideradas as duas condições possíveis para a ocorrência do movimento. São elas

$$x_{i+1} = -x_i \quad \text{OU} \quad x_{i+1} = +x_i \quad (2.27)$$

A outra condição necessária diz respeito ao tempo. Para um movimento de ordem 1, deve-se observar:

$$\tau_{i+2} = \tau_i + T \quad (2.28)$$

Agora se pode, também, distinguir dois tipos de movimento 1-2 no tempo, a saber:

$$\left. \begin{array}{l} \text{movimento simétrico no tempo: } \tau_{i+2} - \tau_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i \\ \text{movimento assimétrico no tempo: } \tau_{i+2} - \tau_{i+1} \neq \tau_{i+1} - \tau_i \end{array} \right\} \quad (2.29)$$

As condições necessárias e suficientes para um movimento 1-2 simétrico são

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{i+1} = \tau_i + \frac{T}{2} \quad \tau_{i+2} = \tau_i + T \\ x_{i+2} = x_i \quad v_{i+2} = v_i \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

A análise combinada do mapa na Equação (2.23) e das condições nas Equações (2.26) e (2.28) permite chegar ao resultado de que somente a condição  $\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{x}_i$  é possível. No caso do padrão selecionado, mostra-se que ele é possível em toda a faixa de frequência e folga, o que não significa dizer que ele é estável.

Considerando as condições da Equação (2.30) e as possibilidades da Equação (2.27), da Equação (2.23) obtém-se

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_{i+1} \\ \sin \omega \tau_{i+1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Com a aplicação de relações trigonométricas, a Equação (2.31) é escrita em função de  $\tau_i$ , tornando-se

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_{i+2} &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{x}_{i+1} + \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

A soma das Equações (2.32) resulta em:

$$\mathbf{x}_{i+2} + \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}) \quad (2.33)$$

Levando em conta a condição da Equação (2.26), tem-se da Equação (2.33):

$$\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1}) \quad (2.34)$$

As soluções possíveis para a relação na Equação (2.34), são:

- $\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) = \mathbf{I}$ , esta solução não está relacionada ao problema físico; e
- $\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_{i+1} = 0$ , esta solução é a de interesse, pois  $\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{x}_i$ .

Então, desconsidera-se a condição de que  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i$ , já que a periodicidade com dois impactos por período igualmente espaçados no tempo exige que  $\mathbf{x}_{i+2} = -\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i$ .

Com este resultado, podem-se desenvolver as Equações (2.32) para  $\mathbf{x}_{i+1}$  ou para  $\mathbf{x}_{i+2}$ , que se obtém resultado similar. Então, se escreve a Equação (2.32) como

$$-\mathbf{x}_i = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Desenvolvendo a Equação (2.35), obtém-se

$$\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right)^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Algumas observações em relação à Equação (2.36):

- o que a impõe são as condições de fase entre a resposta e a excitação para que exista o estado  $\mathbf{x}_i$  que permita o padrão de movimento desejado.
- não há nenhuma restrição com relação ao parâmetro folga, que determina a posição em que os impactos ocorrem.

Para saber se determinado movimento pode ocorrer, em uma determinada frequência, para uma determinada folga, dados os demais parâmetros do sistema, deve-se impor

$$\mathbf{x}_i = \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right)^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

A Equação (2.37) estabelece as condições de fase e a velocidade necessária ao final da colisão para que a próxima colisão ocorra na posição e no instante tal que assegurem o padrão de movimento. Se essas condições não puderem ser satisfeitas, a conclusão é de que o padrão de movimento estipulado não pode ocorrer.

Como determinar, então, as condições de fase e a velocidade? Para responder a esta pergunta, recorre-se à Equação (2.37) e faz-se:

$$\mathbf{T} = \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right)^{-1} \cdot \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{A}\left(\frac{T}{2}\right) + \mathbf{I}\right) \cdot \mathbf{B} \quad (2.38)$$

Então, a Equação (2.37) pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix}$$

de forma que se tem:

$$t_{11} \cos \omega \tau_i + t_{12} \sin \omega \tau_i = \varepsilon \quad (2.39)\text{-a}$$

$$t_{21} \cos \omega \tau_i + t_{22} \sin \omega \tau_i = v_i \quad (2.39)\text{-b}$$

É indispensável que a relação  $\sin^2(\omega \tau_i) + \cos^2(\omega \tau_i) = 1$  também seja satisfeita.

Da Equação (2.39)-a tem-se a seguinte solução para a fase:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega \tau_i &= \alpha \cdot \eta \pm \beta \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \\ \sin \omega \tau_i &= \beta \cdot \eta \mp \alpha \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.40)\text{-a}$$

onde:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}}, \quad \alpha = \frac{t_{11}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{t_{12}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (2.40)\text{-b}$$

Substituindo as relações das Equações (2.40)-a e (2.40)-b nas Equações (2.39)-a, (2.39)-b e na relação  $\sin^2(\omega \tau_i) + \cos^2(\omega \tau_i)$ , encontram-se, respectivamente, e conforme esperado,  $\varepsilon$ ,  $v_i$  e 1 como resultado.

Da Equação (2.40)-a observa-se que a condição de existência do padrão de movimento indicado passa pelo termo  $(1 - \eta^2)$ , que deve ser maior ou igual a zero para que existam  $\cos(\omega \tau_i)$  e  $\sin(\omega \tau_i)$  reais. Então, para que o movimento estudado exista, a condição (necessária, mas não suficiente) a ser satisfeita é

$$\eta^2 \leq 1 \quad (2.41)$$

De posse das condições de fase obtidas da Equação (2.39)-a, a Equação (2.39)-b

fornece a velocidade necessária, completando as condições de existência do padrão de movimento, de forma que se pode escrever

$$v_i = (\alpha \cdot t_{21} + \beta \cdot t_{22}) \cdot \eta + (\pm \beta \cdot t_{21} \mp \alpha \cdot t_{22}) \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \quad (2.42)$$

### 2.5.1 Região de existência do movimento 1-2 simétrico

Para as condições de fase e velocidade, é necessária a determinação dos coeficientes da matriz  $\mathbf{T}$ . Tem-se, para o movimento de topologia 1-2 simétrico, que  $(\tau - \hat{\tau}) = \pi/2$ . Dessa maneira, a combinação das Equações (2.16), (2.13)-a, (2.13)-b, (2.11)-a e (2.11)-b levam a escrever a Equação (2.38) da seguinte forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta \cdot (1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 4\xi^2 \omega^2)} \begin{bmatrix} \omega^2 t'_{11} & \omega^3 t'_{12} \\ 2e\xi\omega^4 t'_{21} & e\omega^3 t'_{22} \end{bmatrix} \quad (2.43)\text{-a}$$

com

$$\delta = \left. \begin{aligned} & -(1-e)(1-\xi^2) e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) - (1-\xi^2) \left(1 - e e^{\left(-2\frac{\xi\pi}{\omega}\right)}\right) + \\ & -(1+e)\xi\sqrt{1-\xi^2} e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)\text{-b}$$

$$t'_{11} = \left. \begin{aligned} & (1-\xi^2)(1-\omega^2) \left[ (1-e) e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + 1 - e e^{\left(-2\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \right] + \\ & + (1+\omega^2)(e+1)\xi\sqrt{1-\xi^2} e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)\text{-c}$$

$$t'_{12} = \left. \begin{aligned} & 2\xi(1-\xi^2) \left[ (1-e) e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + 1 - e e^{\left(-2\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \right] + \\ & + [2\xi^2 - (1-\omega^2)](e+1)\sqrt{1-\xi^2} e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)\text{-d}$$

$$t'_{21} = -(1-\xi^2) \left[ 2e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + e^{\left(-2\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} + 1 \right] \quad (2.43)\text{-e}$$

$$t'_{22} = (1-\omega^2)(1-\xi^2) \left[ 2e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + e^{\left(-\frac{2\xi\pi}{\omega}\right)} + 1 \right] \quad (2.43)\text{-f}$$

Há, portanto, um valor crítico de  $\eta$  correspondente ao limite entre as regiões de ocorrência do impacto para o movimento 1-2. Se o valor crítico não ultrapassar a unidade, considerando a relação na Equação (2.41), o padrão de movimento em estudo é possível, em determinada frequência  $\omega$ , para qualquer valor da folga  $\varepsilon$ .

Levando em conta a equação para  $\eta$  na Equação (2.40)-b e a amplitude máxima dada pela Equação (2.25), obtém-se:

$$\eta_{cr} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (2.44)$$

Substituindo na Equação (2.44) as Equações (2.43)-a-d e os valores de  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$  da Equação (2.11)-a, pode-se apresentar uma curva com a variação de  $\eta_{cr}$ . O valor crítico de  $\eta$  depende apenas de  $e$ ,  $\xi$  e  $\omega$ , e é dado por

$$\eta_{cr}^2 = \frac{2(-\delta)^2}{-(1-\xi^2)} \left\{ \left( e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} - e^{\left(-\frac{3\xi\pi}{\omega}\right)} \right) 4(1+e)\xi\sqrt{1-\xi^2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + \left( e^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} + e^{\left(-\frac{3\xi\pi}{\omega}\right)} \right) 4(1-e)(1-\xi^2) \cos\left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + 2(1-e^2) e^{\left(-\frac{2\xi\pi}{\omega}\right)} \xi\sqrt{1-\xi^2} \operatorname{sen}\left(2\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + \left[ (1-\omega^2)(e+1)^2 - 2(e+1)^2 + 2(1-\xi^2)(1+e^2) \right] e^{\left(-\frac{2\xi\pi}{\omega}\right)} \cos\left(2\sqrt{1-\xi^2} \frac{\pi}{\omega}\right) + \left[ -(1-\omega^2)(e+1)^2 + 2(e+1)^2 - 8(1-\xi^2)e \right] e^{\left(-\frac{2\xi\pi}{\omega}\right)} + 2(1-\xi^2) \left( e^2 e^{\left(-\frac{4\xi\pi}{\omega}\right)} + 1 \right) \right\}^{-1} \quad (2.45)$$

A Figura 2.10 apresenta o plano de  $\eta_{cr}^2$  versus  $\omega$ , para  $e=1$  e  $\xi=0.05$ . Repara-se que  $\eta_{cr}^2$  é menor que a unidade para qualquer valor de  $\omega$ . A Figura 2.11 é uma ampliação da Figura 2.10 para melhor visualizar a região em que  $\omega \leq 0,1$ .

Pelas Figuras 2.10 e 2.11, verifica-se que o movimento com período de ordem 1 e dois impactos simetricamente localizados no período é sempre possível no sistema. Isto não significa que outros movimentos não sejam possíveis.

No próximo capítulo serão analisados os movimentos de topologias mais complexas.

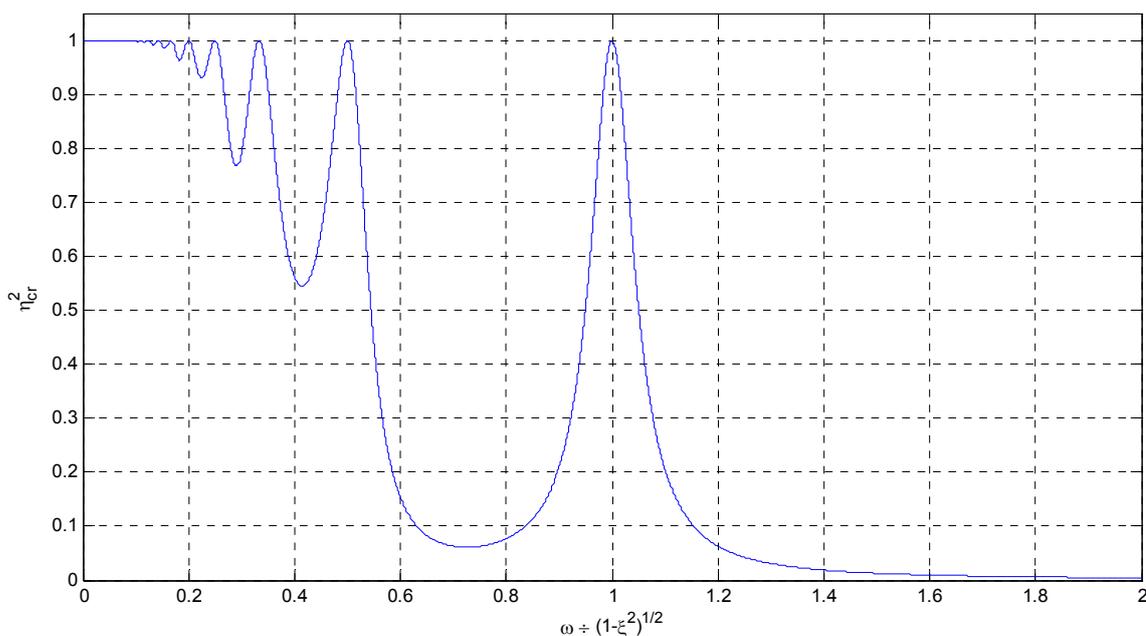


Figura 2.10:  $\eta_{cr}^2$ , com  $e = 1$  e  $\xi = 0,05$ . Topologia 1-2 simétrico.

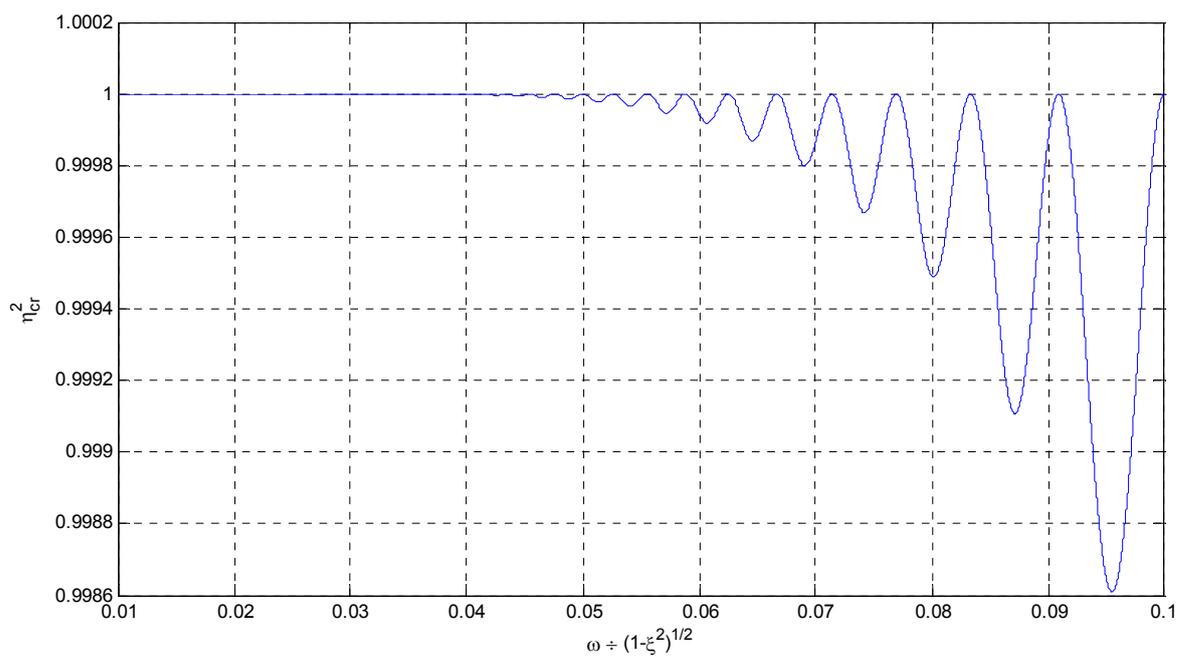


Figura 2.11: Região de  $\eta_{cr}^2$  para  $0,01 \leq \omega \leq 0,1$ . Topologia 1-2 simétrico.

## 3 Mapa de Movimentos Periódicos de Topologia Mais Complexa

Neste terceiro capítulo, apresentam-se um movimento de topologia 1-2 assimétrico, o mapa geral, que permite a análise de diversas topologias de movimentos e uma forma de otimizar a simulação. A apresentação teórica da análise de estabilidade finaliza o capítulo.

### 3.1 Movimentos Periódicos 1-2 Assimétricos

As Equações (2.30) apresentam as condições de existência de um movimento de topologia 1-2 simétrico. Abstraindo-se da condição de movimento simétrico, as condições de existência de um movimento 1-2 são

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+2} &= \mathbf{x}_i \\ \tau_{i+2} &= \tau_i + T \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Apenas para facilitar a escrita, define-se a condição de fase como  $\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_i \\ \sin \omega \tau_i \end{bmatrix}$ .

Então, a Equação (2.23) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_{i+1}, \tau_i) \cdot \mathbf{x}_i - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_{i+1}, \tau_i) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_{i+1} \quad (3.2)$$

Sem perda de generalidade, o movimento 1-2 pode ser escrito como:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_1, \tau_0) \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_1, \tau_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_2, \tau_1) \cdot \mathbf{x}_1 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}(\tau_2, \tau_1) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Alterando-se a notação, as Equações (3.3) são reduzidas a

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_2$$

a qual, após manipulações, permite obter o mapa do movimento de topologia 1-2 assimétrico como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{x}_0 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{f}_1 + \\ &\quad - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Aplicando-se as condições da Equação (3.1), tem-se  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_0$ , de forma que se é capaz escrever a Equação (3.4) da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_0 = [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)]^{-1} \{ [\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1 \} \quad (3.5)$$

Sendo os impactos assimétricos no tempo, pode-se definir a razão

$$r = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} = \frac{\omega(\tau_1 - \tau_0)}{2\pi} \Rightarrow 1 - r = \frac{\omega(\tau_2 - \tau_1)}{2\pi} \quad (3.6)$$

Assim, o vetor  $\mathbf{f}_1$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega \tau_0 + 2r\pi) \\ \sin(\omega \tau_0 + 2r\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2r\pi & -\sin 2r\pi \\ \sin 2r\pi & \cos 2r\pi \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}_0 \quad (3.7)$$

de forma que a Equação (3.5) é escrita como

$$\mathbf{x}_0 = [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)]^{-1} \{ [\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)] \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \} \cdot \mathbf{f}_0 \quad (3.8)$$

ou

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}_0 \quad (3.9)$$

com

$$\mathbf{T} = [\mathbf{I} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)]^{-1} \{ [\mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)] \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \} \quad (3.10)$$

Como  $\mathbf{x}_0$  é o estado num instante de colisão, a Equação (3.10) pode ser aberta em duas outras, a saber:

$$t_{11} \cos \omega \tau_0 + t_{12} \sin \omega \tau_0 = \varepsilon \quad (3.11)\text{-a}$$

$$t_{21} \cos \omega \tau_0 + t_{22} \sin \omega \tau_0 = v_0 \quad (3.11)\text{-b}$$

onde  $t_{ij}$  é o termo da  $i$ -ésima linha e da  $j$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{T}$ .

A solução da Equação (3.11)-a é dada por:

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega \tau_0 &= \alpha \cdot \eta \pm \beta \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \\ \sin \omega \tau_0 &= \beta \cdot \eta \mp \alpha \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)\text{-a}$$

onde

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}}, \quad \alpha = \frac{t_{11}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{t_{12}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (3.12)\text{-b}$$

Para que o movimento estudado exista, a condição

$$\eta^2 \leq 1 \quad (3.13)$$

deve ser satisfeita.

A Equação (3.11)-b fornecerá a velocidade necessária, completando as condições de existência do padrão de movimento. Então,

$$v_0 = (\alpha \cdot t_{21} + \beta \cdot t_{22}) \cdot \eta + (\pm \alpha \cdot t_{21} \mp \beta \cdot t_{22}) \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \quad (3.14)$$

### 3.1.1 Região de existência de alguns movimentos 1-2 assimétricos

Para o movimento 1-2 assimétrico tem-se, da relação na Equação (3.6), que:

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \tau_0 + \frac{2r\pi}{\omega} \\ \tau_2 &= \tau_0 + \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Desta maneira, a combinação das Equações (3.15), (3.7), (2.16), (2.13)-a-b e (2.11)-a-b levam a escrever a Equação (3.10) da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\delta\omega_d \left[ (1 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2 \right]} \begin{bmatrix} -\omega^2 t'_{11} & \omega^3 t'_{12} \\ 2e\omega^3 \omega_d^2 t'_{21} & -2e\omega^3 \omega_d^2 t'_{22} \end{bmatrix} \quad (3.16)-a$$

com:

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.16)-b$$

$$\delta = \left. \begin{aligned} & -e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \left[ (e+1)^2 \cos\left(4\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) + \left[ 2\omega_d^2(1+e^2) - (e+1)^2 \right] \right] + \right. \\ & \left. + \sin\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \left[ (e+1)^2 \sin\left(4\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) + 2\xi\omega_d(1-e^2) \right] \right\} + 2\omega_d^2 \left( e^2 e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)-c$$

$$\begin{aligned}
t'_{11} = & -2\omega_d^2 \tilde{M} \left\{ e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(1-r)\right)} \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}(r-1)\right) + e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \right\} + \\
& + 2(e+1)^2 e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \cos\left(4\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \left[ (2\xi^2\omega^2 + 1 - \omega^2)\omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) - 2\xi\omega^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_d^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] + \operatorname{sen}\left(4\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \left[ 2\xi\omega^2\omega_d^2 \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) + (2\xi^2\omega^2 + 1 - \omega^2) \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_d \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] \right\} + 2e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \left[ (1-\omega^2)(4e\xi^2 + (e-1)^2) - 2\xi^2(e+1)^2 \right] \omega_d \right. \\
& \left. \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) + 2\xi\omega_d^2(1-e^2) \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right\} - 4\omega_d^2\omega_d(1-\omega^2) \left[ e^2 e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} + 1 \right]
\end{aligned} \quad (3.16)-d$$

$$\begin{aligned}
t'_{12} = & -2\omega_d^2 \tilde{N} \left\{ e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(1-r)\right)} \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}(r-1)\right) + e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \right\} + \\
& + 2(e+1)^2 e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \cos\left(4\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \left[ -(1+\omega^2)\xi\omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) - (1-\omega^2) \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_d^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] + \operatorname{sen}\left(4\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \left[ (1-\omega^2)\omega_d^2 \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) - (1+\omega^2)\xi \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_d \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] \right\} + 2e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \xi\omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \left[ (e+1)^2(1+\omega^2) - 4\omega_d^2(e^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 1) \right] - (1-e^2)(4\xi^2 - 1 + \omega^2)\omega_d^2 \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right\} + 8\xi\omega_d^2\omega_d \left[ e^2 e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} + 1 \right]
\end{aligned} \quad (3.16)-e$$

$$\begin{aligned}
t'_{21} = & \tilde{M} \left\{ e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(1-r)\right)} \left[ \omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}(r-1)\right) + \xi \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}(r-1)\right) \right] - e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} \right. \\
& \left[ \omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) + \xi \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \right] \left. \right\} + 4\xi\omega e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left[ (e-1)\omega_d \right. \\
& \left. \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) + (e+1)\xi \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] + 4\xi\omega\omega_d \left[ e e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} - 1 \right]
\end{aligned} \quad (3.16)-f$$

$$\begin{aligned}
t'_{22} = & \tilde{N} \left\{ e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(1-r)\right)} \left[ \omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}(r-1)\right) + \xi \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}(r-1)\right) \right] - e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} \right. \\
& \left[ \omega_d \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) + \xi \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}r\right) \right] \left. \right\} + 2(1-\omega^2) e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left[ (1-e)\omega_d \right. \\
& \left. \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) + (e+1)\xi \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] + 2(1-\omega^2)\omega_d \left[ e e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} - 1 \right]
\end{aligned} \quad (3.16)-g$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{M} &= 2(e+1) \left[ 2\xi\omega \cos(2r\pi) - (1-\omega^2) \sin(2r\pi) \right] \\ \tilde{N} &= 2(e+1) \left[ (1-\omega^2) \cos(2r\pi) + 2\xi\omega \sin(2r\pi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.16)\text{-h}$$

De  $\eta$  na Equação (3.12)-b e tendo em consideração a Equação (2.25), obtém-se:

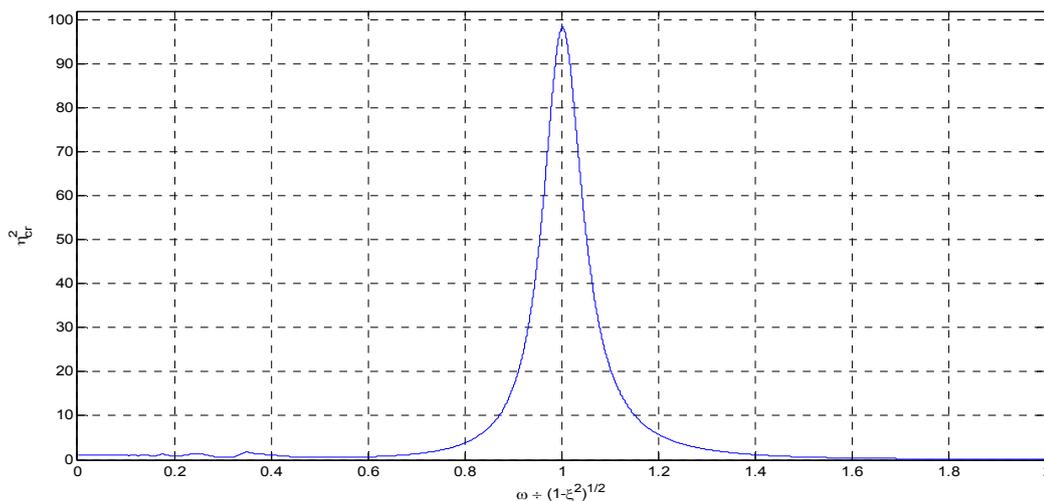
$$\eta_{cr} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (3.17)$$

Substituindo na Equação (3.17) as Equações (3.16)-a-e, (3.16)-h e os valores de  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$  da Equação (2.11)-a, pode-se obter a variação de  $\eta_{cr}$ , cuja expressão está no Anexo I.

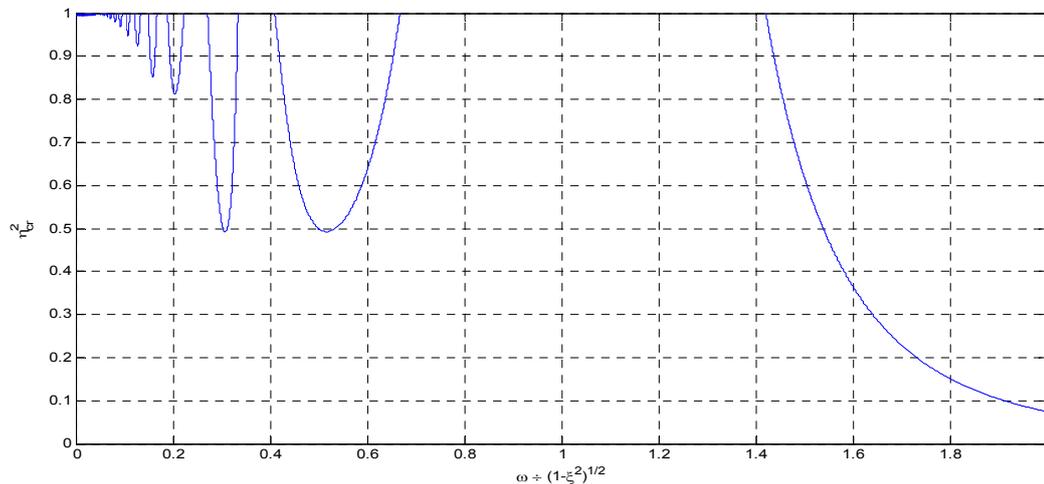
Deve-se reparar que, diferentemente da Equação (2.45), em que  $\eta$  dependia de  $e$ ,  $\omega$  e  $\xi$ , na Equação (I.1), depende de  $e$ ,  $\omega$ ,  $\xi$  e  $r$ , este último parâmetro presente nas matrizes **C** e **A**. Importa, pois, verificar para quais valores de  $r$  a Equação (3.13) pode ser satisfeita.

Fazendo-se  $r = \frac{1}{2}$ , obtém-se a mesma curva obtida para o caso do movimento 1-2 simétrico, o que era de se esperar.

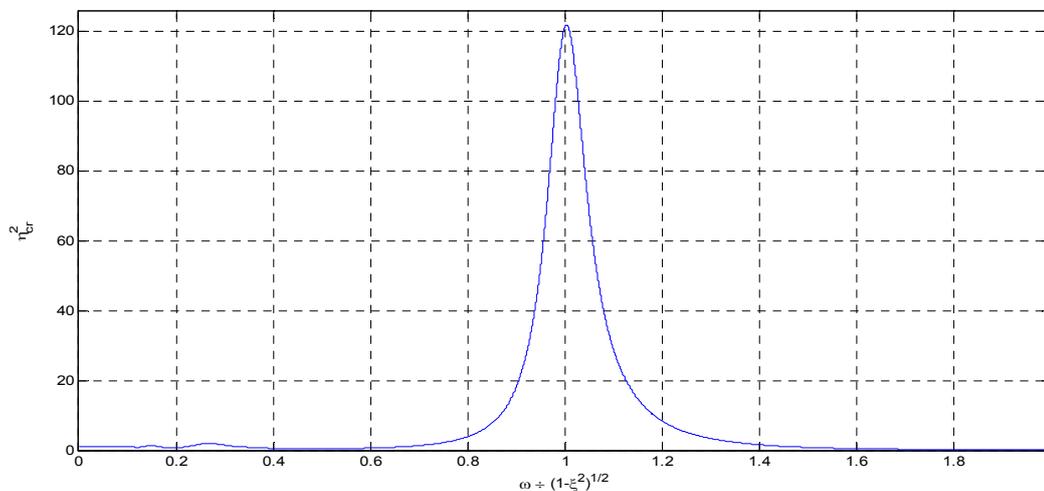
A Figura 3.1 apresenta o plano de  $\eta_{cr}^2$  versus  $\omega$  para  $e=1$ ,  $\xi=0,05$  e  $r=\frac{1}{3}$ , já na Figura 3.3 é apresentada para os seguintes valores:  $e=1$ ,  $\xi=0,05$  e  $r=\frac{2}{3}$ . A Figura 3.2 e a Figura 3.4 apresentam as regiões em que  $\eta_{cr}^2$  é menor ou igual a 1, respectivamente, das Figuras 3.1 e 3.3.



**Figura 3.1:** Comportamento de  $\eta_{cr}^2$  versus  $\omega$ , com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$  e  $r = \frac{1}{3}$ .



**Figura 3.2:** Região da Figura 3.1 para  $\eta_{cr}^2 \leq 1$ .



**Figura 3.3:** Comportamento de  $\eta_{cr}^2$  versus  $\omega$ , com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$  e  $r = \frac{2}{3}$ .

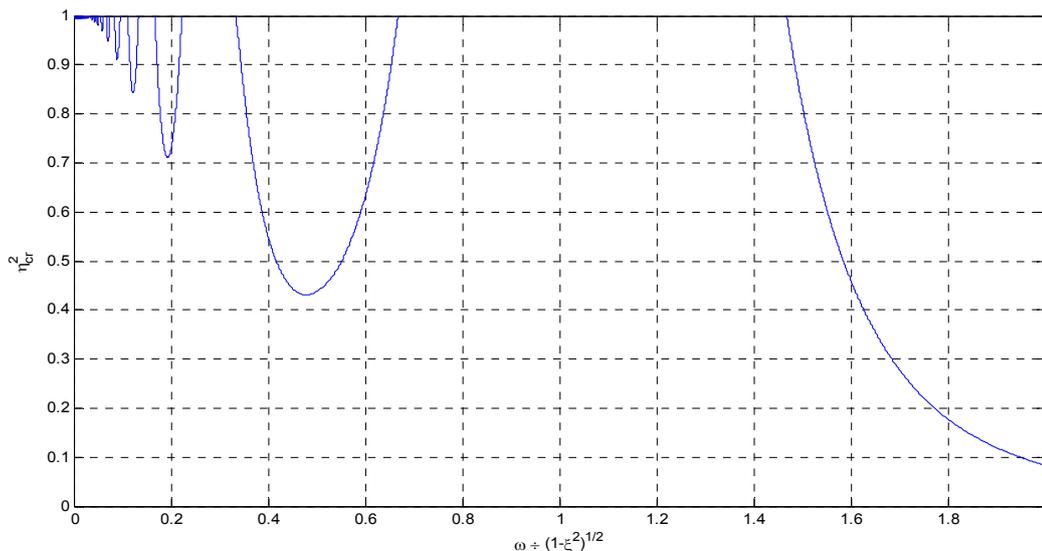


Figura 3.4: Região da Figura 3.3 para  $\eta_{cr}^2 \leq 1$ .

A Figura 3.5 apresenta o que poderia ser um movimento 1-2 assimétrico no período. Obviamente tem-se o mesmo movimento independentemente do estado inicial começar em  $+\varepsilon$  ou  $-\varepsilon$ . Portanto, as condições de existência deveriam ser as mesmas, tanto quando a colisão entre os estados repetitivos ocorre no instante  $\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{2r\pi}{\omega}$ , como quando ela ocorre no instante  $\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{2(1-r)\pi}{\omega}$ . No entanto, as Figuras 3.1 e 3.3 apresentam condições, no que diz respeito ao parâmetro  $\eta_{cr}$ , diferentes. Isto apenas confirma, como já discutido, que a condição  $\eta^2 \leq 1$  é, de fato, apenas necessária. As condições de suficiência estão relacionadas à velocidade. No caso do movimento 1-2 assimétrico, estas condições são:

$$v_{i+1}|_{r=1-a} = v_{i+2}|_{r=a} = v_i|_{r=a}$$

Obviamente que, para a ordem do movimento que se está em consideração,  $a$  deve ser menor que a unidade.

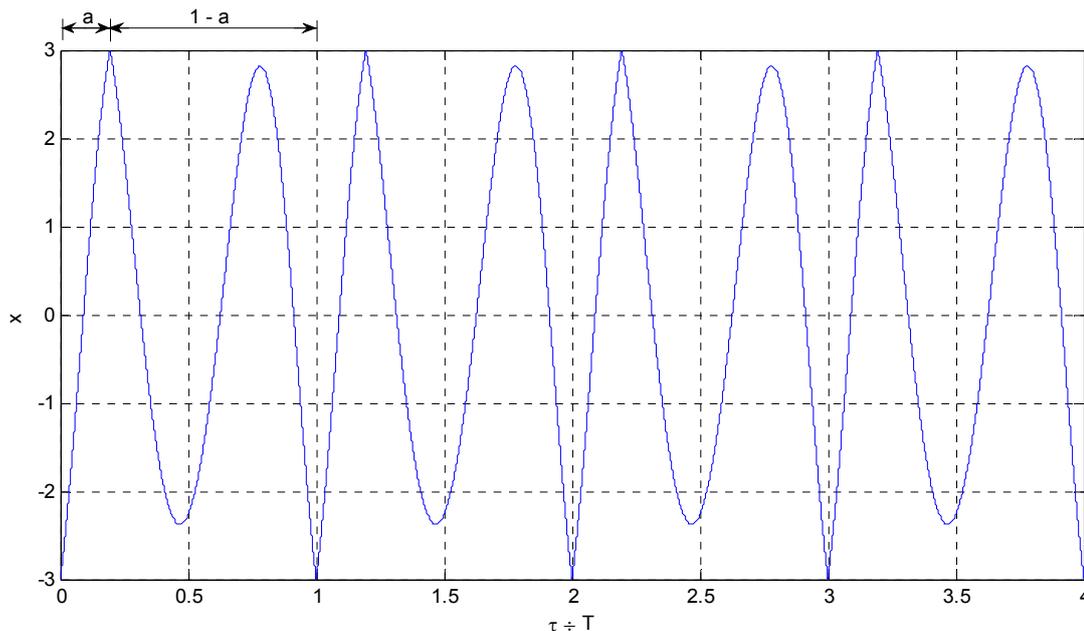


Figura 3.5: Exemplo de um movimento 1-2 assimétrico no período.

### 3.2 Movimentos Periódicos de Topologias Gerais

As condições necessárias de existência de um movimento de topologia geral podem ser escritas como:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_{i+n} = \mathbf{x}_i &\Rightarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \\ \tau_{i+n} = \tau_i + T &\Rightarrow \mathbf{f}_n = \mathbf{f}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

Uma forma geral permite escrever o mapa a seguir, que pode ser desenvolvido para as diversas topologias de movimentos periódicos. Então:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_n = & \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{x}_0 - \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_k \right\} + \\ & + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_n \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Avaliando, ainda, que

$$\left. \begin{aligned} r_k = \frac{(\tau_k - \tau_0)}{T} &\Rightarrow \mathbf{f}_k = \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

o mapa da Equação (3.19) é escrito como

$$\mathbf{x}_n = \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{x}_0 - \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_0 + \left. \begin{aligned} &+ \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_n \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Analisa-se a Equação (3.21) para as condições necessárias e suficientes presentes nas Equações (3.18) e (3.20), tornando-se, então,

$$\mathbf{x}_0 = \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{x}_0 - \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0$$

Dai,

$$\left\{ \mathbf{I} - \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{x}_0 = \left\{ \mathbf{J} - \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_0 \quad (3.22)$$

Da Equação (3.22), verifica-se que:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{C}_k \cdot \mathbf{f}_0 \quad (3.23)$$

onde:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \quad (3.24)\text{-a}$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \mathbf{J} - \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \quad (3.24)\text{-b}$$

$$\mathbf{R}_k = \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \quad (3.24)\text{-c}$$

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \cos(r_k 2\pi) & -\text{sen}(r_k 2\pi) \\ \text{sen}(r_k 2\pi) & \cos(r_k 2\pi) \end{bmatrix} \quad (3.24)\text{-d}$$

Devem-se, agora, impor, na Equação (3.23), as restrições:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{C}_k \right\} \cdot \mathbf{f}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{E} \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

sendo  $n$  igual ao número de impactos dentro do período da resposta e as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  determinadas pelas Equações (3.24)-a-d.

Para a determinação adequada da razão  $r_k$ , é preciso observar que

$$\left. \begin{array}{l} \text{no caso simétrico: } r_k = \frac{k}{n}, \quad k = n-1, \dots, 1 \\ \text{no caso assimétrico: } r_k > r_{k-1} \end{array} \right\} \quad (3.26)$$

Um termo que leve em consideração a ordem do movimento, que é denominado por  $m$ , é fácil de ser considerado, tendo em conta que qualquer resposta periódica tem período igual ou múltiplo do período correspondente à função excitadora. Então:

$$T = m \cdot \frac{2\pi}{\omega}; m \in \mathbb{N} \quad (3.27)$$

Para calcular as condições de fase do movimento, segue-se o mesmo procedimento utilizado na seção anterior. Voltando à Equação (3.25), faz-se

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}_0 \quad (3.28)$$

e define-se uma matriz  $\mathbf{T}$ , a qual, de forma geral, pode ser escrita como:

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \left\{ \mathbf{Q} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{R}_k \cdot \mathbf{C}_k \right\} \quad (3.29)$$

com as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}_k$  e  $\mathbf{C}_k$  determinadas pelas Equações (3.24)-a-d.

Da Equação (3.28),

$$t_{11} \cos \omega \tau_0 + t_{12} \sin \omega \tau_0 = \varepsilon \quad (3.30)\text{-a}$$

$$t_{21} \cos \omega \tau_0 + t_{22} \sin \omega \tau_0 = v_0 \quad (3.30)\text{-b}$$

A solução da Equação (3.30)-a pode ser escrita na forma

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega \tau_0 &= \alpha \cdot \eta \pm \beta \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \\ \sin \omega \tau_0 &= \beta \cdot \eta \mp \alpha \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.31)\text{-a}$$

onde:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}}, \quad \alpha = \frac{t_{11}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{t_{12}}{\sqrt{t_{11}^2 + t_{12}^2}} \quad (3.31)\text{-b}$$

Deve-se notar que a condição de existência do padrão de movimento indicado depende do termo  $\sqrt{1 - \eta^2}$ , que deve ser positivo ou nulo para que  $\cos \omega \tau_0$  e  $\sin \omega \tau_0$ , sejam reais. Veja-se que a condição necessária  $\sin^2(\omega \tau_0) + \cos^2(\omega \tau_0) = 1$  é satisfeita para qualquer valor de  $\eta$ . Então, para que o movimento estudado exista, a condição (necessária, mas não suficiente) deve ser satisfeita:

$$\eta^2 \leq 1 \quad (3.32)$$

De posse das condições de fase na Equação (3.31)-a, a Equação (3.30)-b fornecerá a velocidade necessária, completando as condições de existência do padrão de movimento, de forma que se pode escrever:

$$v_0 = (\alpha \cdot t_{21} + \beta \cdot t_{22}) \cdot \eta + (\pm \alpha \cdot t_{21} \mp \beta \cdot t_{22}) \cdot \sqrt{1 - \eta^2} \quad (3.33)$$

Os termos da matriz  $\mathbf{T}$  são determinados a partir da solução da Equação (3.29) e adquire a forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

A resolução dos termos da matriz na Equação (3.34) será calculada, como se pode observar pela Equação (3.29), com as Equações (3.24)-a-d, que inclui a consideração das condições presente nas Equações (3.18) e (3.20), além das Equações (2.16), (2.13)-a-b e (2.11)-a-b.

Determinados os coeficientes da Equação (3.34), se faz preciso calcular a região de existência do movimento que obedeça a relação presente na Equação (3.32). Para isso, define-se um  $\eta_{cr}$ .

Com a Equação (3.31)-b, para  $\eta$ , e a amplitude permanente do movimento linear associado, considerado na Equação (2.25), define-se

$$\eta_{cr} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t'_{11}{}^2 + t'_{12}{}^2}} \quad (3.35)$$

A equação para  $\eta_{cr}$  vai depender de  $e$ ,  $\omega$ ,  $\xi$ , e  $r_k$ . Deve-se verificar para quais valores de  $r_k$  a equação pode ser satisfeita, dados os demais parâmetros.

Como o mapa da Equação (3.21) será idêntico para topologias com o mesmo número de impactos, conseqüentemente, as Equações (3.29) e (3.35), também serão idênticas. Portanto, o que se diferencia nessas equações é a escolha adequada de  $r_k$ , que inclui como mostrado na Equação (3.27), a ordem do período da resposta.

Seguindo a metodologia apresentada nessa seção, diversas topologias de movimentos podem ser analisadas.

### 3.3 Otimização da Simulação

A periodicidade do movimento também está sujeita a uma região do espaço de solução que isto venha a ocorrer. Pode acontecer, dependendo das condições iniciais, que o movimento periódico aconteça após poucos, ou muitos impactos. Isto, no entanto, pode exigir muito tempo para a análise.

Para efetuar a simulação de dados, foi necessário esperar o tempo de transiente da simulação até que se conseguisse obter um movimento periódico, para que fossem estabelecidos os parâmetros do sistema. No caso simulado para  $e = 1$ ,  $\xi = 0,05$ ,  $\omega = 1$  e  $\varepsilon = 0,2$ , a resposta não ficou periódica nem mesmo quando se estendeu o total de aproximadamente 500.000 impactos, como mostrada na Figura 3.6.

A aplicação do método de otimização permitiu uma condição inicial tal que possibilitasse, logo após o primeiro impacto, obter um movimento periódico. Ora, a obtenção da condição inicial que facilite este processo é possível.

A partir da aplicação da Equação (2.15) de início do movimento, antes que o impacto tenha ocorrido, e por meio da consideração de um tempo que será chamado de tempo de contorno, representado por  $\tau_c$ , e de uma velocidade de contorno, que será representada por  $v_c$ , obtém-se:

$$\mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_c \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\tau_c, 0) \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{A}(\tau_c, 0) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \sin \omega \tau_0 \end{bmatrix}$$

então:

$$\mathbf{A}(\tau_c, 0) \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_c \end{bmatrix} + \mathbf{A}(\tau_c, 0) \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \sin \omega \tau_0 \end{bmatrix}$$

Fazendo  $\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_c \end{bmatrix}$ , escreve-se:

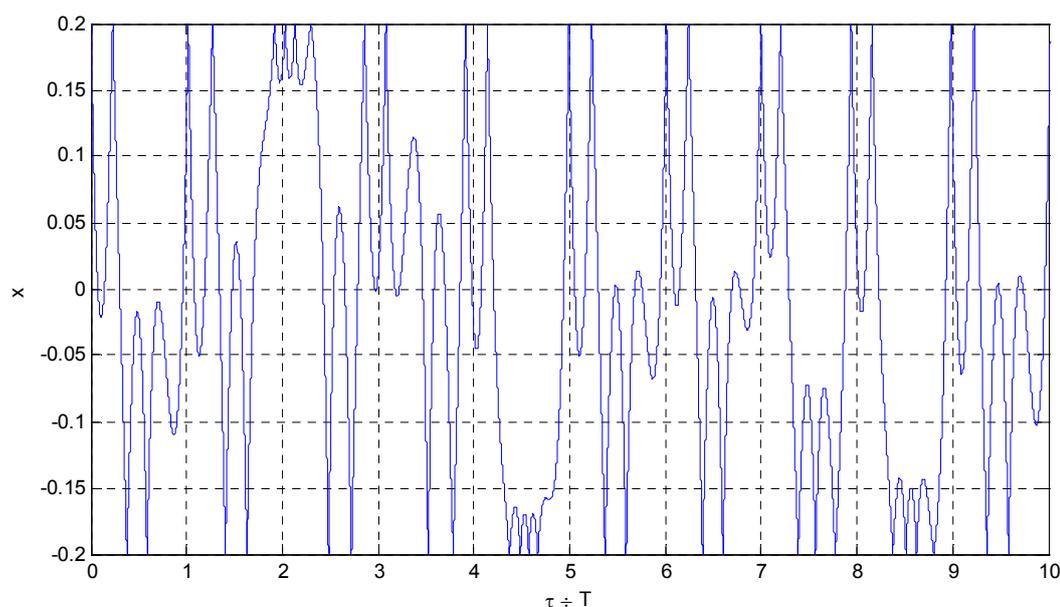
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{x}_c + \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega \tau_0 \\ \sin \omega \tau_0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

onde

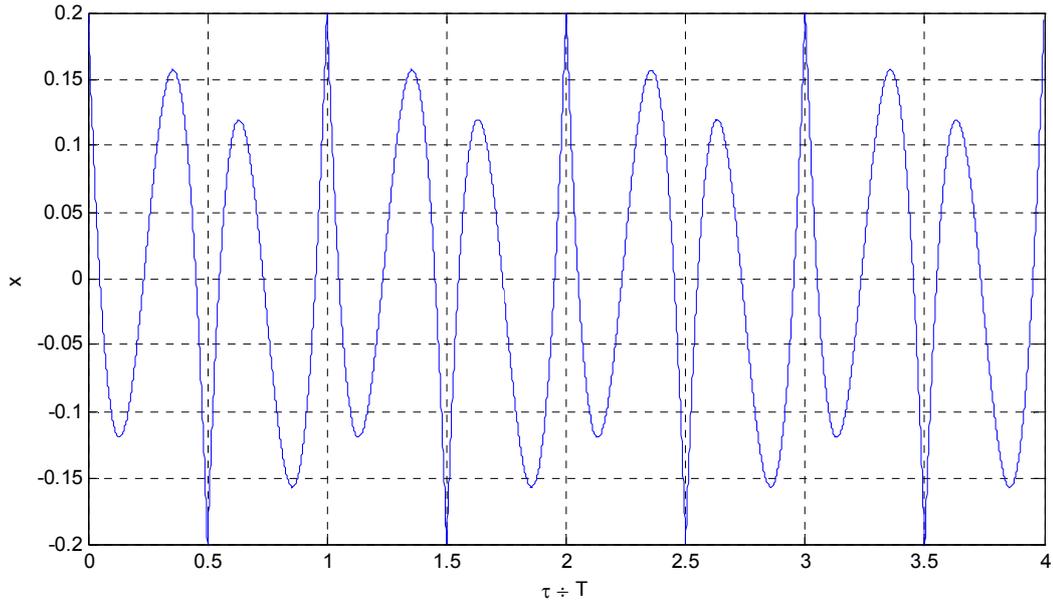
$$\tau_c = \arctan \left( \frac{\sin \omega \tau_0}{\cos \omega \tau_0} \right)$$

As condições de fase  $\sin(\omega \tau_0)$  e  $\cos(\omega \tau_0)$  são determinadas usando as Equações (3.31)-a e (3.31)-b, enquanto a velocidade de contorno,  $v_c$ , é dada pela Equação (3.33). Com o estado que deve ser observado ao término do processo de colisão, é possível obter a condição inicial por meio da Equação (3.36), sendo que o estado  $\mathbf{x}_c$  é o estabelecido logo após a primeira colisão. Antes da colisão, o tempo é tipo como  $\hat{t} = 0$ .

A Figura 3.7 mostra o movimento periódico obtido logo após o primeiro impacto, utilizando as condições de fase e velocidade para o movimento de topologia 1-2 simétrico.



**Figura 3.6:** Movimento não-periódico, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,2$ ;  $x_0 = 0,0$  e  $v_0 = 0,0$ .



**Figura 3.7:** Movimento periódico, com  $e = 1$ ;  $\xi = 0,05$ ;  $\omega = 1$ ;  $\varepsilon = 0,2$ ;  $x_0 = 0,2$  e  $v_0 \cong -0,7832903073871$ . Topologia obtida logo após o primeiro impacto.

### 3.4 Movimentos Periódicos 1-4 Simétricos

Analisando um movimento de topologia 1-4, da Equação (3.18), as condições necessárias de existência podem ser escritas como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_4 &= \mathbf{x}_0 \\ \tau_4 &= \tau_0 + T \Rightarrow \mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

A Equação (3.19) possibilita apresentar o mapa do movimento de topologia 1-4 que é escrito conforme a seguir:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_4 &= \left\{ \prod_{i=3}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{x}_0 - \left\{ \prod_{i=3}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + \left\{ \prod_{i=3}^1 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1 \\ &+ \left\{ \prod_{i=3}^2 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_2 + [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_3 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_4 \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Pela Equação (3.25) e considerando a condição na Equação (3.20), tem-se

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}^{-1} \cdot \{ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{R}_3 \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{f}_0 \} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu_0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

onde as matrizes  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}_k$  são determinadas pelas Equações (3.24)-a-c, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{I} - \prod_{i=3}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] & \Rightarrow & \mathbf{P} = \mathbf{I} - [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0] \\ \mathbf{Q} &= \left\{ \mathbf{J} - \prod_{i=3}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} & \Rightarrow & \mathbf{Q} = (\mathbf{J} - [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0]) \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{R}_k &= \left\{ \prod_{i=3}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} & \Rightarrow & \begin{cases} \mathbf{R}_1 = ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{R}_2 = ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \\ \mathbf{R}_3 = ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \end{cases} \end{aligned}$$

Então, na Equação (3.39), obtém-se:

$$\mathbf{x}_0 = \left. \begin{aligned} & (\mathbf{I} - [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0])^{-1} \cdot \left\{ (\mathbf{J} - [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1] \right. \\ & \left. [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0]) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{f}_0 + \right. \\ & \left. + ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{f}_0 + ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \mathbf{f}_0 \right\} = [\varepsilon \quad \nu]^T \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

Da Equação (3.40), percebe-se que devem ser determinadas as condições com relação ao tempo, logo,  $r_k$ . Então, como os impactos são igualmente espaçados no período, tem-se, das Equações (3.20), (3.26) e (3.27) que

$$r_k = m \frac{k}{4}, \quad m = 1 \text{ e } k = 1, 2, 3 \quad (3.41)$$

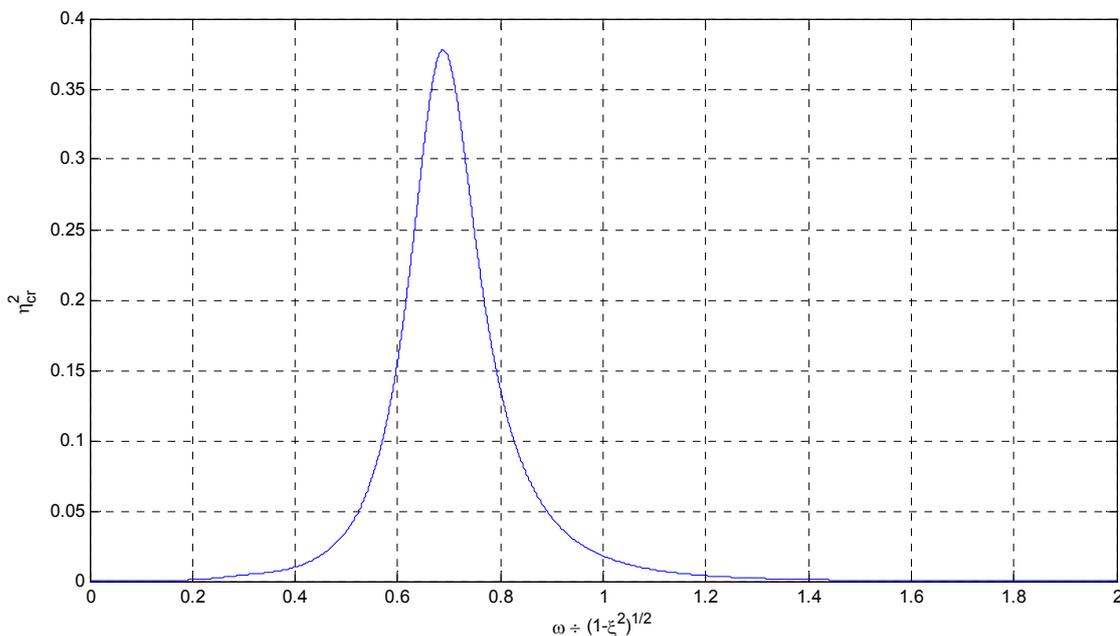
Consequentemente, das relações na Equação (3.41), as matrizes  $\mathbf{C}_k$  podem ser determinadas pela Equação (3.24)-d.

A matriz  $\mathbf{T}$  agora é dada por

$$\mathbf{T} = \left( \mathbf{I} - [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0] \right)^{-1} \cdot \left\{ \begin{aligned} & (\mathbf{J} - [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1] \\ & [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0]) \cdot \mathbf{B} + ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2][\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_1 + ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3] \\ & [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_2]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_2 + ([\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_3]) \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Seguindo a mesma metodologia de resolução apresentada na seção anterior, encontram-se os coeficientes da matriz  $\mathbf{T}$ , podendo-se assim, verificar o  $\eta_{cr}$ , cuja expressão é dada no Anexo II, e a região da condição necessária está apresentada na Figura 3.8.

Pela Figura 3.8, percebe-se que o movimento 1-4 simétrico obedece a condição da Equação (3.32), para toda a faixa de frequência e parâmetros selecionados. Portanto, o movimento é sempre possível, mas isso não significa que seja estável e que outras topologias de movimentos não sejam possíveis.



**Figura 3.8:**  $\eta_{cr}^2$ , com  $e = 1$  e  $\xi = 0,05$ . Topologia 1-4 simétrico.

### 3.5 Análise de Estabilidade para o Movimento 1-2 Simétrico

Suponhamos  $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v_i \end{bmatrix}$ , isto é, o estado numa colisão. O estado na próxima colisão será dado por

$$\mathbf{x}_{i+1} = \begin{bmatrix} x_{i+1}(\tau_{i+1}; \tau_i, v_i) \\ v_{i+1}(\tau_{i+1}; \tau_i, v_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varepsilon \\ -v_i \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

desde que se deseje um movimento 1-2 simétrico.

Tem-se que

$$\left. \begin{aligned} \tau_{i+1} = \tau_{i+1}(x_i, v_i, \tau_i) &\Rightarrow \tau_1 = \tau_1(x_0, v_0, \tau_0) \\ v_{i+1} = v_{i+1}(x_i, v_i, \tau_i) &\Rightarrow v_1 = v_1(x_0, v_0, \tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Supondo  $\mathbf{x}_{i+1} = -\mathbf{x}_i$  e derivando os dois lados da Equação (3.43), para a análise da estabilidade de um movimento, escreve-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}}{\partial(\tau_i, v_i)} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial(\tau_i, v_i)} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Fazendo  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial \tau_i} \quad \frac{\partial}{\partial v_i} \right]$ , reescreve-se a Equação (3.45) como

$$\mathbf{x} \cdot \nabla = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ v \end{bmatrix} \cdot \nabla \quad (3.46)$$

que resulta em

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial \mathbf{x}_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

A solução da Equação (3.47) fornecerá as seguintes derivadas:

- $\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial \tau_i} \\ \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial \tau_i} \end{bmatrix}$ , obtidas a partir da primeira linha; e
- com as soluções do item anterior, substitui-se nas equações  $\begin{bmatrix} \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \tau_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix} \mathbf{e} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \tau_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix}$ , que são obtidas na segunda linha.

Para o movimento de topologia 1-2 simétrico, na Equação (2.31), a Equação (3.47) torna-se

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial \tau_{i+1}}{\partial v_i} \\ \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \tau_i} & \frac{\partial v_{i+1}}{\partial v_i} \end{bmatrix} \Rightarrow = \frac{e}{v_1 \omega_d \left[ (1 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2 \right]} \cdot \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

onde  $\mathbf{D}$  é a matriz de estabilidade e os termos da Equação (3.48) são

$$d_{11} = \left[ (1 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2 \right] \mathbf{e}^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \left\{ \left[ -\omega^2 \cos(\omega\tau_0) + v_0\xi + \varepsilon \right] \operatorname{sen}\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) + \right. \\ \left. -v_0\omega_d \cos\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) \right\} \quad (3.49)\text{-a}$$

$$d_{12} = \left[ (1 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega)^2 \right] \mathbf{e}^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \operatorname{sen}\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) \quad (3.49)\text{-b}$$

$$d_{21} = e\omega^3\omega_d^{-1} \mathbf{e}^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \left\{ \left\{ 2\xi\omega^3 \cos(\omega\tau_0)^2 - (\omega^2\varepsilon - \varepsilon - 2\xi v_0) \operatorname{sen}(\omega\tau_0) - \omega \left[ (\omega - \omega^3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \operatorname{sen}(\omega\tau_0) + (4\xi^2 + \omega^2 - 1)v_0 + 2\varepsilon\xi \right] \cos(\omega\tau_0) \right\} \omega_d^2 \left[ \cos\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) + \mathbf{e}^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \right] + \right. \\ \left. + \left\{ -\omega^3(\omega^2 - 1 + 2\xi^2) \cos(\omega\tau_0)^2 + \left[ \omega\xi(1 + \omega^2) \operatorname{sen}(\omega\tau_0) + (\omega^2 + 4\xi^2 - 3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \xi v_0 + \varepsilon(\omega^2 - 1 + 2\xi^2) \right] \omega \cos(\omega\tau_0) - \left[ (\omega^2 - 1 + 2\xi^2)v_0 + (1 + \omega^2)\xi\varepsilon \right] \right. \\ \left. \left. \operatorname{sen}(\omega\tau_0) \right\} \omega_d \operatorname{sen}\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) \right\} \quad (3.49)\text{-c}$$

$$d_{22} = e\omega_d^{-1} \mathbf{e}^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \left\{ -\left[ (\omega^5 - \omega^3) \sin(\omega\tau_0) + 2\xi\omega^4 \cos(\omega\tau_0) \right] \omega_d^2 \cos\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) + \right. \\ \left. -\left[ (\omega^5 + \omega^3) \xi \sin(\omega\tau_0) - (\omega^2 - 1 + 2\xi^2) \omega^4 \cos(\omega\tau_0) \right] \omega_d \right. \\ \left. \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega}\right) - \omega_d^2 \mathbf{e}^{\left(-\frac{\xi\pi}{\omega}\right)} \left\{ (\omega^5 - \omega^3) \sin(\omega\tau_0) + 2\xi\omega^4 \cos(\omega\tau_0) + \right. \right. \\ \left. \left. -\left[ 1 + \omega^4 + (2\xi^2 - 1)2\omega^2 \right] v_0 \right\} \right\} \quad (3.49)\text{-d}$$

$$\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.49)\text{-e}$$

Pela condição de periodicidade do movimento considerado, traz-se que  $v_1 = -v_0$ .

No movimento 1-2 assimétrico, tem-se, da Equação (3.4) e considerando a Equação (3.7), que  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}_0$ . Obtém-se, então,

$$\mathbf{x}_2 = \left. \begin{aligned} & (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{x}_0 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}_0 + \\ & - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Aplicando a derivada parcial à Equação (3.50),

$$\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \tau_0} = \left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B} \} \cdot \mathbf{f}_0 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \\ & \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \} \cdot \mathbf{f}_0 + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} + \\ & - \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{ \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \} \cdot \mathbf{f}_0 - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \tau_0} \Big|_{1,1} \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \mathbf{x}_0} = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_0} \Big|_{1,2} \quad (3.52)$$

Da primeira linha da Equação (3.47), as Equações (3.51) e (3.52) tornam-se

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \tau_0} \Big|_{1,1} &= \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau_0} \{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0)\} \cdot \mathbf{x}_0 + \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B}\} \cdot \mathbf{f}_0 + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} - \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}\} \cdot \mathbf{f}_0 - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \tau_0} \{ \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \} \cdot \mathbf{f}_0 + \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_0} \Big|_{1,2} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \{ -(\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_1) \cdot (\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_0) \} \quad (3.54)$$

A segunda linha da Equação (3.47) é obtida diretamente da segunda linha das Equações (3.51) e (3.52), com  $\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \tau_0} \Big|_{1,1}$  e  $\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}_0} \Big|_{1,2}$  determinadas pela primeira linha das Equações (3.53) e (3.54), respectivamente.

Com isso, pode-se definir a matriz do Jacobiano, obtido do mapa, para a análise de estabilidade.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \tau_0} \Big|_{1,1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \nu_0} \Big|_{1,2} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \mathbf{x}_2}{\partial \nu_0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \tau_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \tau_2}{\partial \nu_0} \\ \frac{\partial \nu_2}{\partial \tau_0} & \frac{\partial \nu_2}{\partial \nu_0} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Os autovalores da Equação (3.55) devem estar contidos dentro de um círculo de raio unitário, para que, com determinados parâmetros, o sistema seja estável, e podem ser calculados conforme mostrado na próxima seção.

### 3.6 Análise de Estabilidade para o Movimento Geral

Considera-se, para um caso geral, que:

$$\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial (\tau_i, \nu_i)} \right] = \frac{\partial}{\partial (\tau_i, \nu_i)} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \nu \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Pode-se verificar, da Equação (3.19),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial (\tau_i, \nu_i)} = & \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial (\tau_i, \nu_i)} - \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial (\tau_i, \nu_i)} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial (\tau_i, \nu_i)} \right\} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial (\tau_i, \nu_i)} \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

ou, para um caso geral,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \tau_0} = & \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{x}_0 - \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_0 - \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \tau_0} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left\{ \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \right\} \cdot \mathbf{f}_k + \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \tau_0} \right\} + \\ & + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \tau_0} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{x}_0} = \left\{ \prod_{i=n-1}^0 [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left\{ \prod_{i=n-1}^k [\mathbf{J} \cdot \mathbf{A}_i] \right\} \cdot [\mathbf{J} - \mathbf{I}] \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_k}{\partial \mathbf{x}_0} \right\} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{x}_0}$$

onde  $\mathbf{f}_k$  são dados pelas Equações (3.20) e (3.24)-d.

Determinam-se as raízes da matriz  $\mathbf{D}$  conforme Shaw e Holmes [Shaw-1983], isto é,

$$\lambda_j = \frac{1}{2} \left( \text{tr}(\mathbf{D}) \pm \sqrt{(\text{tr}(\mathbf{D}))^2 - 4|\mathbf{D}|} \right) \quad (3.58)$$

onde  $\text{tr}(\mathbf{D})$  e  $|\mathbf{D}|$  são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz  $\mathbf{D}$ .

Os possíveis autovalores representados na Equação (3.58) levam, para determinados parâmetros, aos seguintes comportamentos do sistema:

$$\left. \begin{array}{l} |\lambda_j| < 1 \Rightarrow \text{estável,} \\ |\lambda_j| > 1 \Rightarrow \text{instável,} \\ |\lambda_j| = 1 \Rightarrow \text{centro.} \end{array} \right\} \quad (3.59)$$

## 4 Análise de Estabilidade de Movimentos

Neste capítulo é analisada a estabilidade de movimentos para determinados parâmetros do sistema. O objetivo é demonstrar a aplicação dos mapas apresentados nos Capítulos 2 e 3.

### 4.1 Estabilidade do Movimento 1-2 Simétrico

As Figuras 4.1 a 4.8 apresentam o valor do módulo dos autovalores do mapa que relaciona impactos sucessivos no movimento 1-2 simétrico, na região de frequência onde, para os parâmetros adotados, ocorrem os impactos, isto é, na região em que  $\eta^2 \leq 1$ . Mesmo na região de possibilidade de impactos, o movimento 1-2 simétrico pode ser instável.

Repara-se que, o movimento de topologia 1-2 simétrico torna-se instável nas frequências mais altas quando a folga ( $\varepsilon$ ) cresce, estando o limite inferior da região de instabilidade cada vez mais próxima da frequência de ressonância do sistema linear associado ao sistema real.

Por outro lado, uma região de instabilidade de frequência mais baixa passa a surgir quando a folga  $\varepsilon$  é reduzida, como mostram as Figuras 4.1 a 4.4.

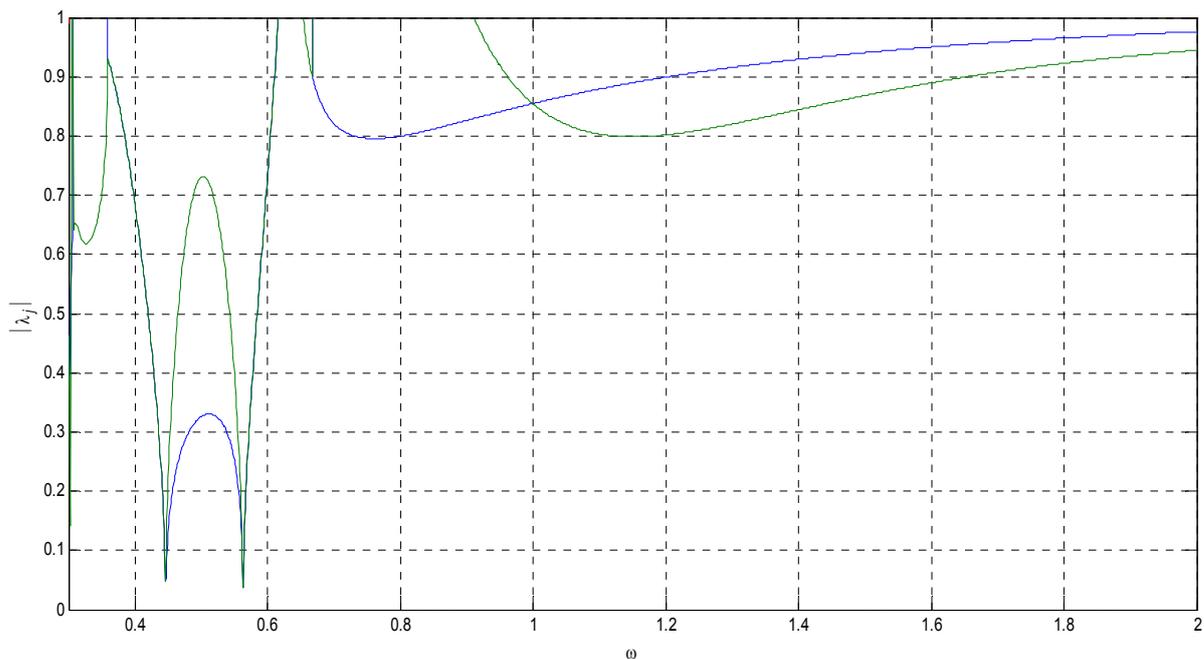


Figura 4.1: Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,1$ .

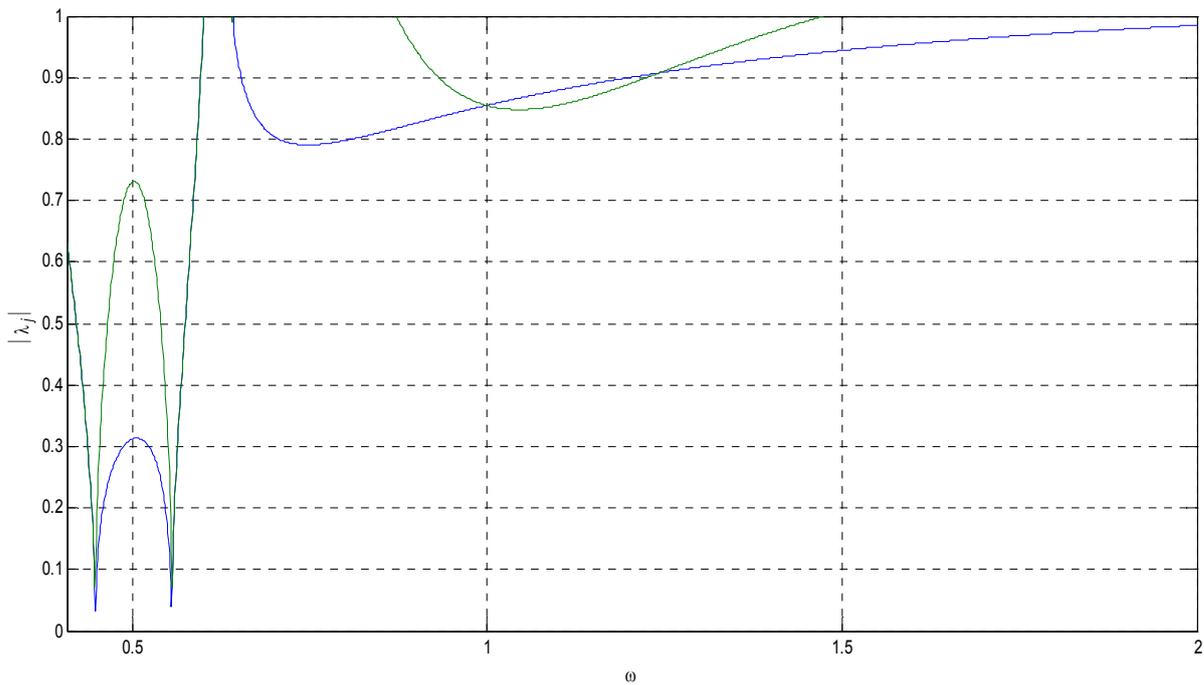


Figura 4.2: Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,2$ .

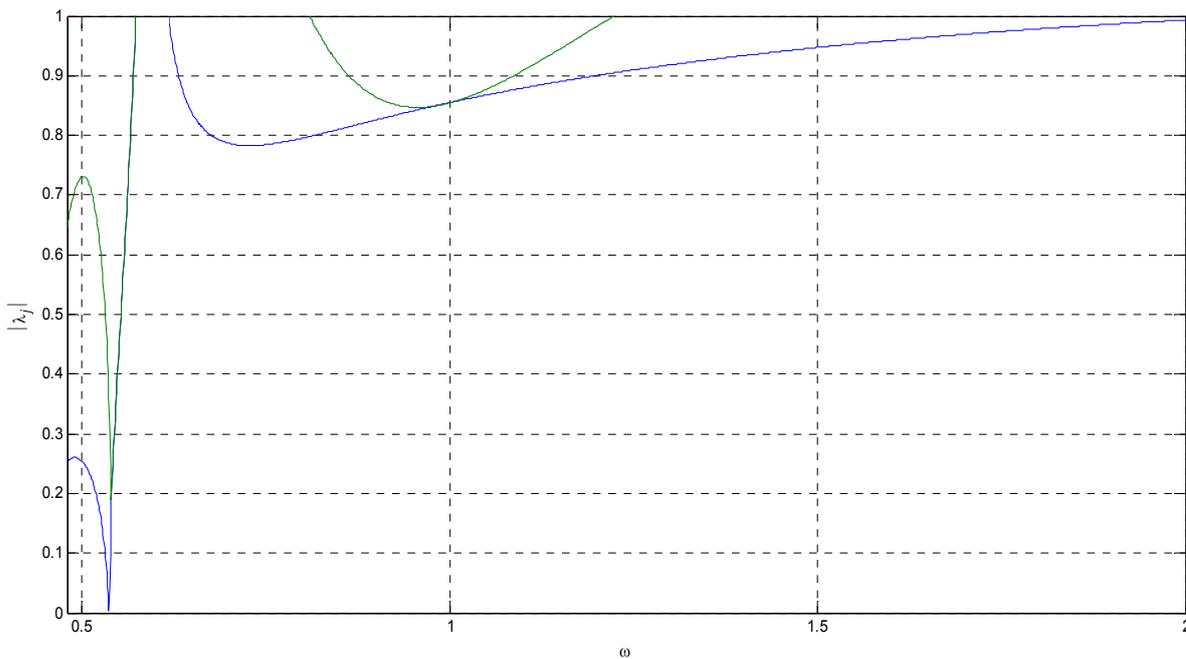


Figura 4.3: Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,3$ .

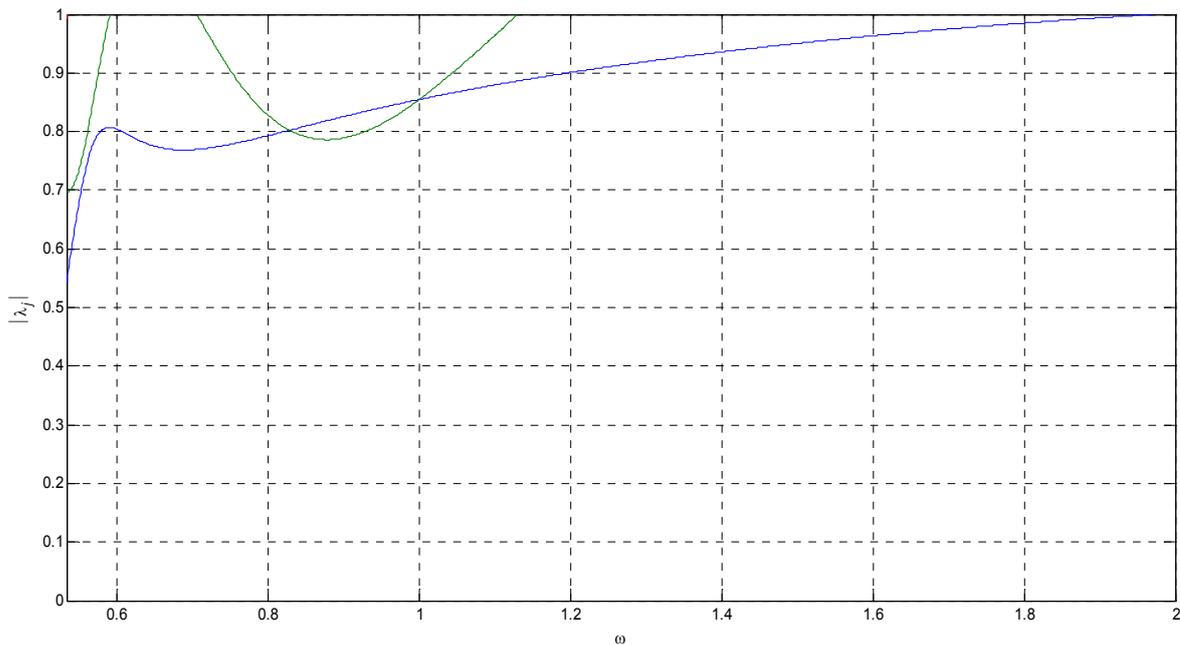
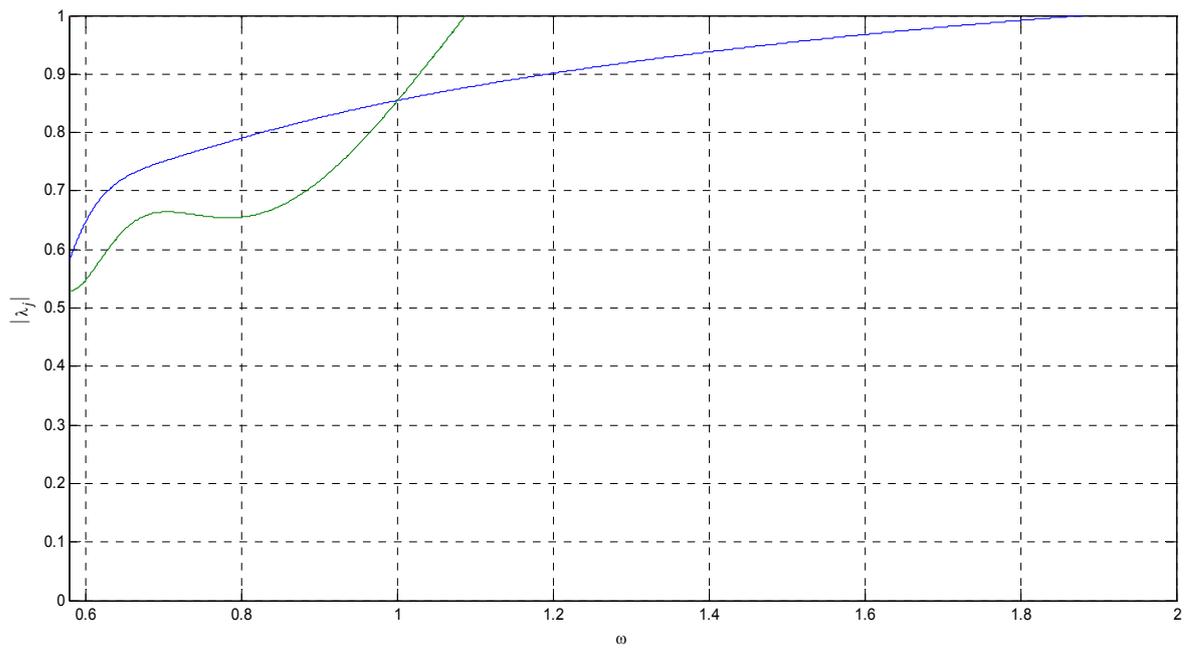
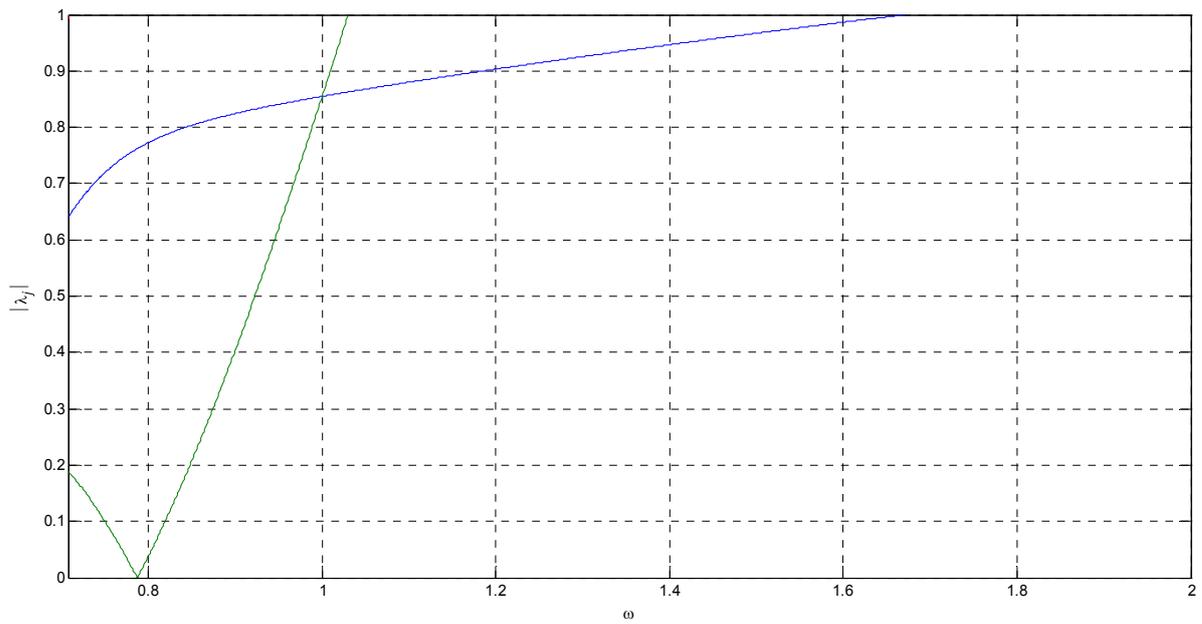


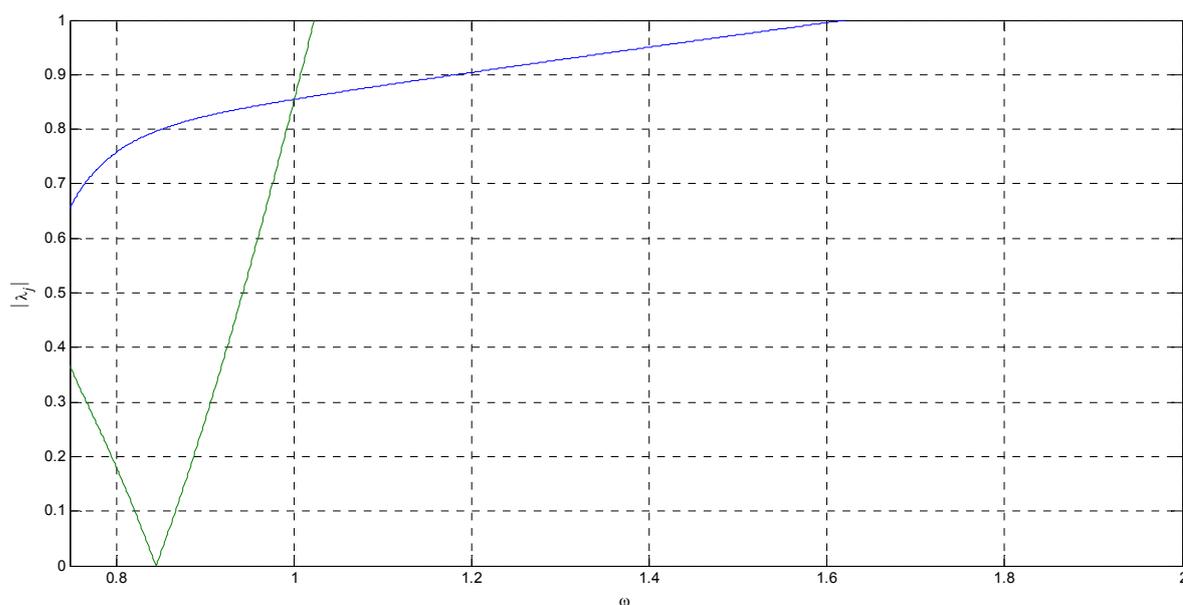
Figura 4.4: Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,4$ .



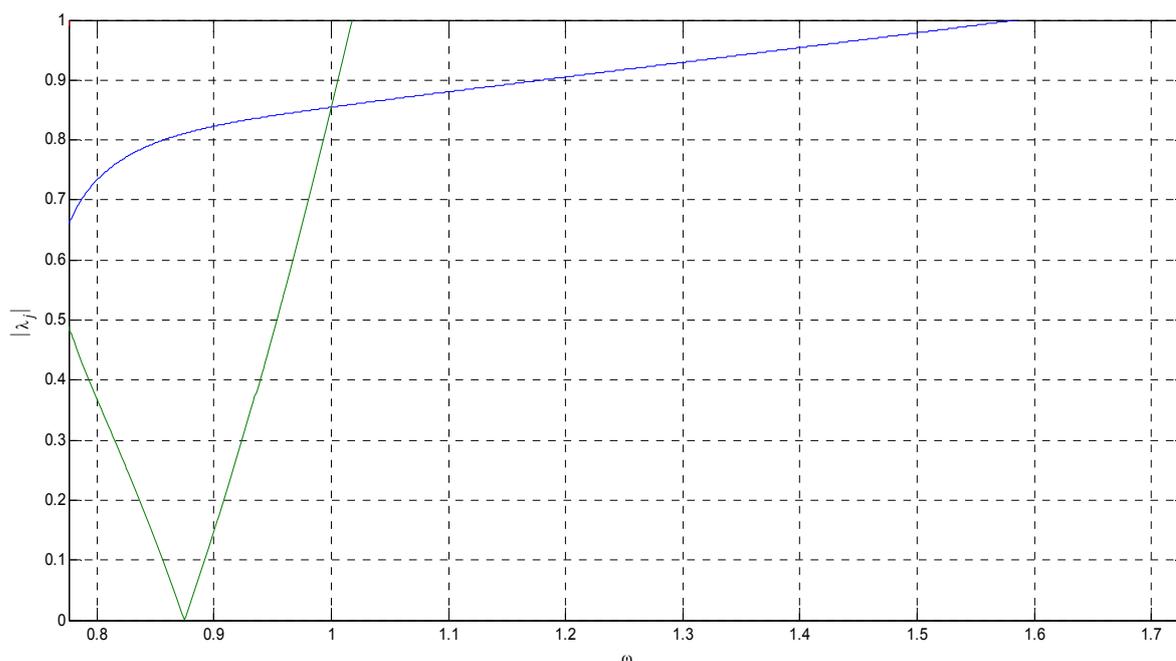
**Figura 4.5:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,5$ .



**Figura 4.6:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 1,0$ .



**Figura 4.7:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 1,25$ .



**Figura 4.8:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 1,5$ .

Da Figura 4.9 até a Figura 4.11 apresenta-se, também, a variação do módulo dos autovalores do mapa de impactos sucessivos em movimento 1-2 simétricos, porém, para o fator de amortecimento viscoso bem mais alto ( $\xi = \frac{1}{2}$ ). Notam-se, para pequenas folgas, duas estreitas regiões de instabilidade quando se varia a frequência. Quando a folga cresce, a região de frequências mais altas torna-se

instável, estando o limite inferior desta região em frequências mais baixas à medida que a folga aumenta.

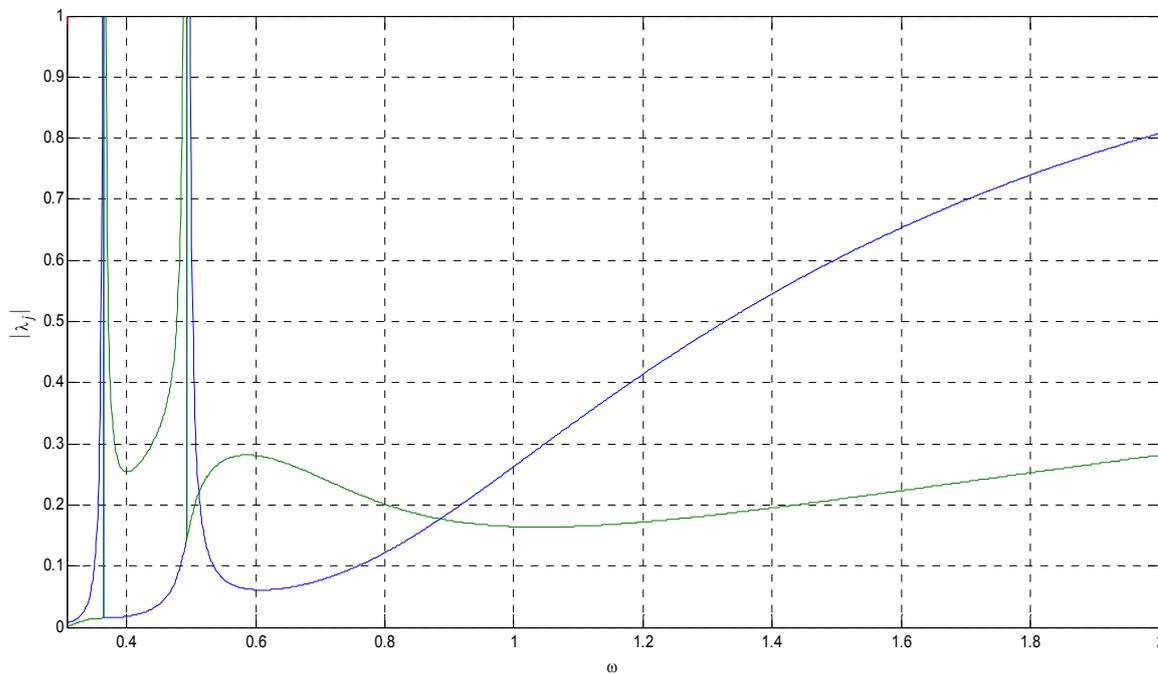


Figura 4.9: Região de estabilidade para  $\xi = 0,5$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,1$ .

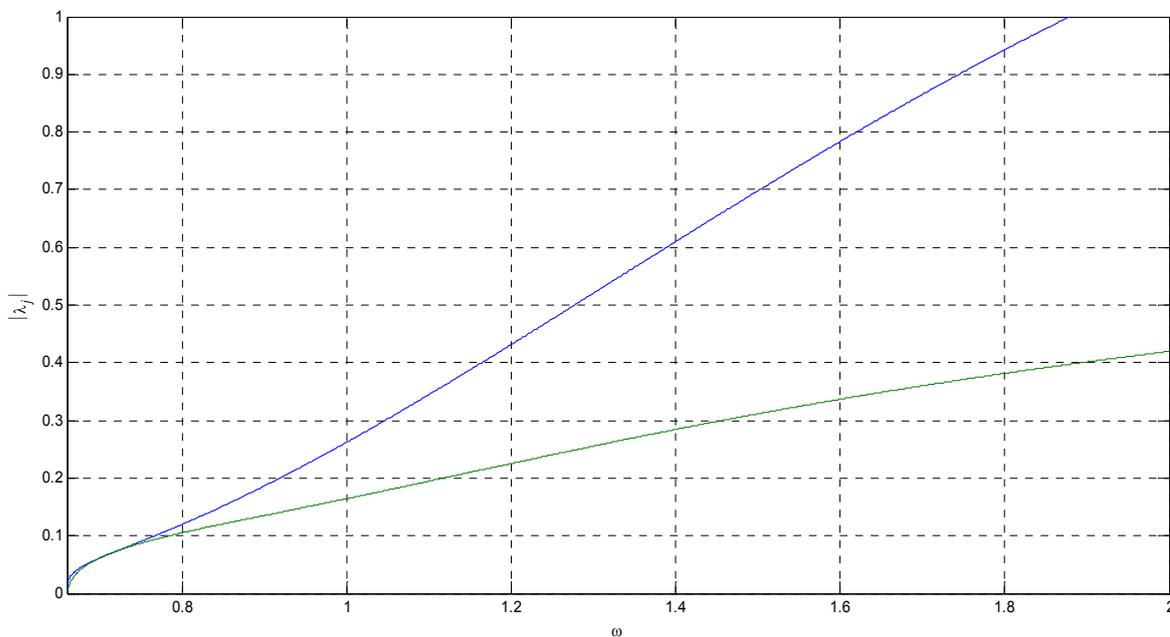
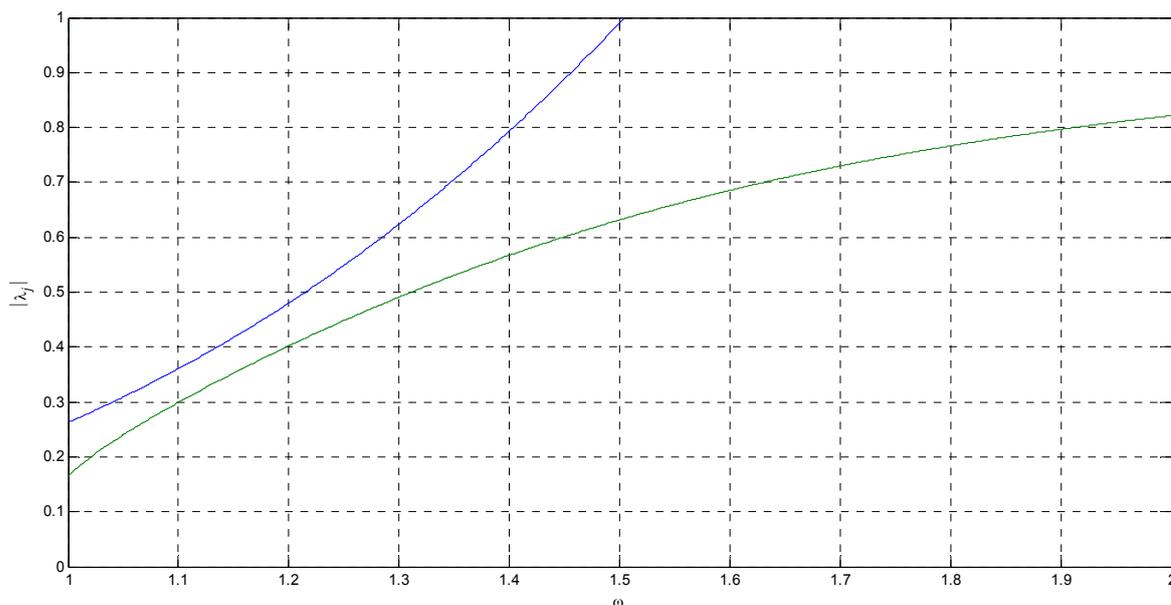
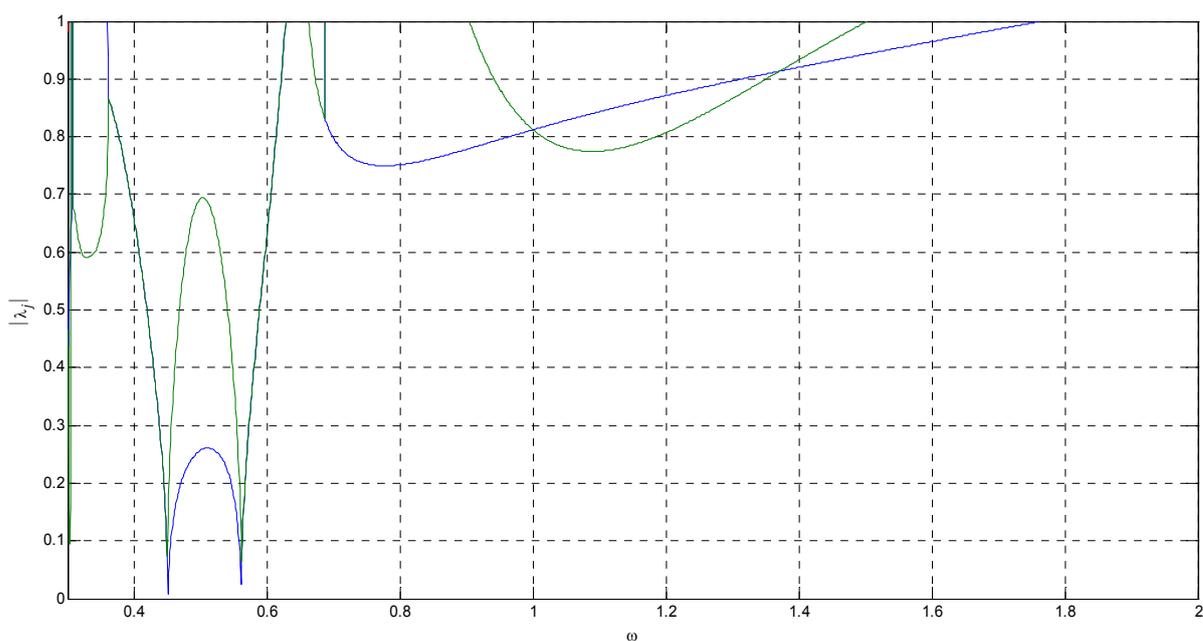


Figura 4.10: Região de estabilidade para  $\xi = 0,5$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 0,5$ .

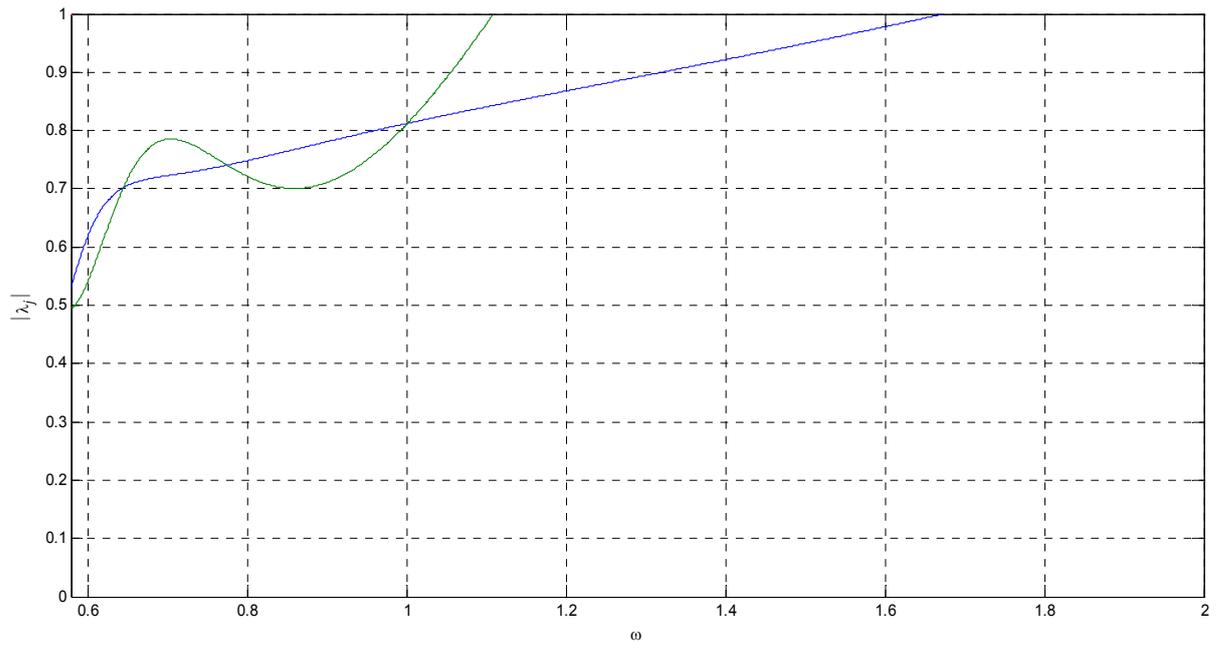


**Figura 4.11:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,5$ ;  $e = 1$  e  $\varepsilon = 1$ .

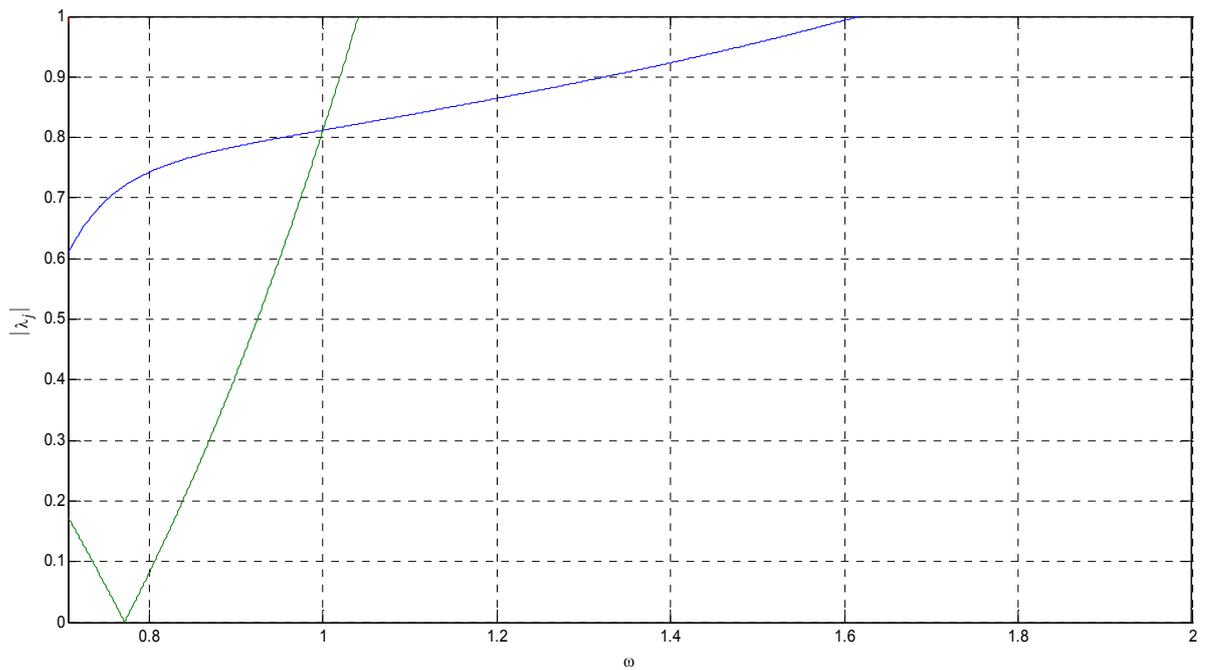
A Figura 4.12 até a Figura 4.14 trata de situação semelhante a das Figuras 4.1, 4.5 e 4.6, mas para coeficiente de restituição menor que a unidade ( $e = 0,95$ ). Também neste caso, existem duas regiões de instabilidade nas frequências mais baixas. O limite inferior da região de instabilidade mais à direita (frequências mais altas) torna-se menor quando a folga  $\varepsilon$  aumenta. Na Figura 4.12, diferentemente das Figuras 4.1 e 4.9, já aparece a região de instabilidade para as frequências mais altas.



**Figura 4.12:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 0,95$  e  $\varepsilon = 0,1$ .



**Figura 4.13:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 0,95$  e  $\varepsilon = 0,5$ .



**Figura 4.14:** Região de estabilidade para  $\xi = 0,05$ ;  $e = 0,95$  e  $\varepsilon = 1$ .

## 5 Conclusão

O equacionamento foi apresentado no formato de espaço-estado, possibilitando melhor visualização e análise do comportamento do fenômeno de vibro-impacto.

A análise do sistema no espaço-estado através da metodologia apresentada permite que as equações sejam escritas de forma mais condensada. Além disso, os mapas que relacionam os estados do sistema nos instantes de colisão podem ser computados de forma mais evidente.

A existência de movimentos periódicos de ordem mais alta, com grande número de impactos por período ficou mostrada neste trabalho, como se pode ver no Capítulo 2, da Figura 2.4 até a Figura 2.8.

O movimento assimétrico do impacto e, por conseguinte, o simétrico, pode ser condensado em uma matriz  $C$  mediante a escolha coerente da razão  $r$ . Isto acaba por facilitar a implementação e o cálculo dos coeficientes.

A existência de movimento de topologia 1-2 fica condicionada a movimentos simétricos no período. Não foi encontrada na literatura demonstração da impossibilidade de movimentos assimétricos com esta topologia.

A análise de diversas topologias pode ser obtida por meio da aplicação do mapa geral apresentado, sendo que, o mapa é similar para a mesma quantidade de impactos por período, portanto, é preciso apenas a determinação da razão  $r_k$ , na qual já pode vir inclusa a ordem do movimento. Assim, podem ser apresentadas as condições de existência e estabilidade destes movimentos.

O método de otimização da simulação permite, por meio de apropriadas condições iniciais, obter um movimento periódico logo após o primeiro impacto. Já a obtenção da topologia de interesse, depende se o movimento existe e é estável para determinados parâmetros do sistema.

No que se refere ao movimento periódico de topologia 1-2 simétrico, procedeu-se uma análise mais detalhada das suas regiões de instabilidade, tendo sido encontrado regiões bastante singulares, como mostram as Figuras 4.1, 4.9 e 4.12, nas quais há a indicação de uma frequência de instabilidade bem definida. Essas figuras possuem em comum o menor valor simulado da folga de  $\varepsilon = 0,1$ .

No trabalho, procurou-se generalizar a forma de equacionamento, a fim de que se possa obter a análise da condição de existência de diversas topologias de movimentos.

## 5.1 Sugestões de Trabalho Futuro

Sem perda da estrutura apresentada, pode-se analisar o sistema estudado sob condição de folga assimétrica.

Explorar a estrutura algébrica, de forma a exibir algum padrão da matriz de estabilidade, **D**.

Pode-se, ainda, adotar um modelo de colisão mais complexo, ou que tente chegar o mais próximo possível da condição real.

Avaliar a aplicabilidade, em Engenharia, dos efeitos de dissipação de energia nas diferentes topologias. Talvez esta informação possa ser importante para ajuste de absorvedores de vibração por impacto.

## Referências Bibliográficas

- [01] [Aguirre-2000] AGUIRRE, L. A.. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2000.
- [02] [Andreaus-2002] ANDREAUS, U.; CASINI, P.. Friction oscillator excited by moving base and colliding with a rigid or deformable obstacle. **International Journal of Non-linear Mechanics**, 37, p.117-133, 2002.
- [03] [Avramov-2008] AVRAMOV, K. V.. Application of nonsmooth transformations to analyze a vibroimpact Duffing system. **International Applied Mechanics**, 44(10), p.1173-1179, 2008.
- [04] [Babitsky-1976] BABITSKY, V. I.. **The Theory of Vibro-Impact Systems**. Nauka, Moscow, 1976. (em russo)
- [05] [Babitsky-2007] BABITSKY, V. I.; SOKOLOV, I. J.. Autoresonant homeostat concept for engineering application of nonlinear vibration modes. **Nonlinear Dyn**, 50, p.447-460, 2007.
- [06] [Balthazar-2003] BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; WEBER, H. I.; BRASIL, R. M. L. R. F.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J. L. P.. An overview on non-ideal vibrations. **Meccanica**, 38, p.613-621, 2003.
- [07] [Bapat-1998] BAPAT, C. N.. Periodic motions of an impact oscillator. **Journal of Sound and Vibration**, 209(1), p.43-60, 1998.
- [08] [Barbosa-2009] BARBOSA, D. A.. **Análise de Movimentos Periódicos em**

- Sistemas com Vibro-Impacto Harmonicamente Excitados.** 90 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2009.
- [09] [Bazhenov-2009] BAZHENOV, V. A.; POGORELOVA, O. S.; POSTNIKOVA, T. G.; GONCHARENKO, S. N.. Comparative analysis of modeling methods for studying contact interaction in vibroimpact systems. **Strength of Materials**, 41(4), p.392-398, 2009.
- [10] [Bhutani-1998] BHUTANI, N.; KULKARNI, S.; BAPAT, C. N.. Vibroimpacts of a Duffing oscillator under sinusoidal force. **Journal of Sound and Vibration**, 210(3), p.407-411, 1998.
- [11] [Blackburn-1992] BLACKBURN, J. A.; SMITH, H. J. T.; JENSEN, N. G.. Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum. **American Association of Physics Teachers**, 60(10), p.903-908, 1992.
- [12] [Brindeu-2000] BRÂNDEU, L.. Stability of the periodic motions of the vibro-impact systems. **Chaos, Solitons and Fractals**, 11, p.2493-2503, 2000.
- [13] [Budd-1994] BUDD, C., DUX, F.. Chattering and related behaviours in impact oscillators. **Proc. R. Soc. Lond. A** 347, p.365-389, 1994.
- [14] [Cartmell-1990] CARTMELL, M.. **Introduction to Linear, Parametric and Nonlinear Vibrations**. London: Chapman and Hall, 1990.
- [15] [Chatterjee-1997] CHATTERJEE, S.. **Rigid body collisions: some general considerations, new collisions law, and some experimental data**. 193 f. Tese (Doutorado) - Cornell University, 1997.
- [16] [Chen-1996] CHEN, S.-L.; SHAW, S. W.. Normal modes for piecewise linear vibratory systems. **Nonlinear Dynamics**, 10, p.135-164, 1996.
- [17] [Cheng-2006] CHENG, J.; XU, H.. Nonlinear dynamic characteristics of a vibro-impact system under harmonic excitation. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, 1(2), p.239-257, 2006.

- [18] [Gilardi-2002] GILARDI, G.; SHARF, I.. Literature survey of contact dynamics modelling. **Mechanism and Machine Theory**, 37, p.1213-1239, 2002.
- [19] [Hinrichs-1997] HINRICHS, N.; OESTREICH, M.; POPP, K.. Dynamics of oscillators with impact and friction. **Chaos, Solitons & Fractals**, 8(4), p.535-558, 1997.
- [20] [Housner-1956] HOUSNER, G.W.. Limit design of structures to resist earthquakes. **Proc. of the World Conference on Earthquake Engineering**, 1956.
- [21] [Janin-2002] JANIN, O.; LAMARQUE, C. H.. Stability of singular periodic motions in a vibro-impact oscillator. **Nonlinear Dynamics**, 28, p.231-241, 2002.
- [22] [Jiang-2004] JIANG, D.; PIERRE, C.; SHAW, S. W.. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. **Journal of Sound and Vibration**, 272, p.869-891, 2004.
- [23] [Knudsen-2003] KNUDSEN, J.; MASSIH, A. R.. Dynamic stability of weakly damped oscillators with elastic impacts and wear. **Journal of Sound and Vibration**, 263, p.175-204, 2003.
- [24] [Kovaleva-2004] KOVALEVA, A.. Stochastic dynamics of flexible systems with motion limiters. **Nonlinear Dynamics**, 36, p.313-327, 2004
- [25] [Liang-2008] LIANG, W.; WEI, X.; YING, L.. Dynamical behaviour of a controlled vibro-impact system. **Chinese Physics B**, 17(7), p.2446-2450, 2008.
- [26] [Lin-1993] LIN, S. Q.; BAPAT, C. N.. Estimation of clearances and impact forces using vibroimpact response: random excitation. **Journal of Sound and Vibration**, 163(3), p.407-421, 1993.
- [27] [Luo-2004] LUO, G. W.; XIE, J. H.. Stability of periodic motion, bifurcations and chaos of a two-degree-of-freedom vibratory system with symmetrical rigid

- stops. **Journal of Sound and Vibration**, 273, p.543-568, 2004.
- [28] [Luo-2008] LUO, G.; XIE, J.; ZHU, X.; ZHANG, J.. Periodic motions and bifurcations of a vibro-impact system. **Chaos, Solitons and Fractals**, 36, p.1340-1347, 2008.
- [29] [Mattos-1998] MATTOS, M. C.. **Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibroimpacto Devidas a Variações da Folga**. 145 f. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.
- [30] [Mikhlin-1998] MIKHLIN, Y. V.; VAKAKIS, A. F.; SALENGER, G.. Direct and inverse problems encountered in vibro-impact oscillations of a discrete system. **Journal of Sound and Vibration**, 216(2), p.227-250, 1998.
- [31] [Mikhlin-2006] MIKHLIN, Y. V.; RESHETNIKOVA, S. N.. Dynamical interaction of an elastic system and a vibro-impact absorber. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Publishing Corporation, p.1-15, 2006.
- [32] [Mitić-1997] MITIĆ, S.. Dynamics of the Duffing oscillator with impacts. **Scientific Journal Facta Universitatis**, 1(2), p.65-72, 1997.
- [33] [Mook-1976] MOOK, D.; NAYFEH, A.. **Nonlinear Oscillations**. New York: John Wiley & Sons, 1976.
- [34] [Moon-2004] MOON, F. C.. **Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004.
- [35] [Nguyen-2008] NGUYEN, V.-D.; WOO, K.-C.. Nonlinear dynamic responses of new electro-vibroimpact system. **Journal of Sound and Vibration**, 310, p.769-775, 2008.
- [36] [Nordmark-1991] NORDMARK, A. B.. Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator. **Journal of Sound and Vibration**, 145, p.279-297, 1991.

- [37] [Norton-2007] NORTON, R. L.. **Machine design: an integrated approach**. Upper Saddle River: Prentice-hall, 2007.
- [38] [Paoli-2005] PAOLI, L.. An existence result for non-smooth vibro-impact problems. **Journal of Differential Equations**, 211, p.247-281, 2005.
- [39] [Paoli-2001] PAOLI, L.. Time discretization of vibro-impact. **Phil. Trans. R. Soc. Lond. A**, 359, p.2405-2428, 2001.
- [40] [Popp-1998] POPP, K.. Non-smooth mechanical systems - an overview. **Forsch Ingenieurwes**, 64, p.223-229, 1998.
- [41] [Rong-2009] RONG, H.; WANG, X.; XU, W.; FANG, T.. Subharmonic response of a single-degree-of-freedom nonlinear vibroimpact system to a randomly disordered periodic excitation. **Journal of Sound and Vibration**, 327, p.173-182, 2009.
- [42] [Shaw-1983] SHAW, S. W.; HOLMES, P. J.. A periodically forced piecewise linear oscillator. **Journal of Sound and Vibration**, 90(1), p.129-155, 1983.
- [43] [Sinha-2001] SINHA, S. C.; DAVID, A.. Parametric excitation. In: BRAUN, S. G. (Comp.). **Encyclopedia of Vibration**. Oxford: Elsevier, p. 1001-1009, 2001.
- [44] [Sokolov-2007] SOKOLOV, I. J.; BABITSKY, V. I.; HALLIWELL, N. A.. Autoresonant vibro-impact system with electromagnetic excitation. **Journal of Sound and Vibration**, 308, p.375-391, 2007.
- [45] [Sosnovskiy-2007] SOSNOVSKIY, L. A.; SHERBAKOV, S. S.. Vibro-impact in rolling contact. **Journal of Sound and Vibration**, 308, p.489-503, 2007.
- [46] [Strogatz-1994] STROGATZ, S. H.. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. Cambridge: Perseus Books, 1994.
- [47] [Tangasawi-2008] TANGASAWI, O.; THEODOSSIADES, S.; RAHNEJAT, H.;

- KELLY, P.. Non-linear vibro-impact phenomenon belying transmission idle rattle. **Journal Mechanical Engineering Science**, 222, p.1909-1923, 2008.
- [48] [Wolter-2002] WOLTER, C.; TRINDADE, M. A.; SAMPAIO, R.. Reduced-order model for an impacting beam using the karhunen-loève expansion. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, 3(2), p.217-226, 2002.
- [49] [Xie-2005] XIE, J.; DING, W.; DOWELL, E. H.; VIRGIN, L. N.. Hopf-flip bifurcation of high dimensional maps and application to vibro-impact systems. **Acta Mech Sinica**, Springer-Verlag, 21, p.402-410, 2005.
- [50] [Yuan-2007] YUAN, Y.; JIAN-HUA, X.. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of an impact oscillator between two rigid sides. **Applied Mathematics and Mechanics**, 28(8), p.1109-1117, 2007.

# Anexo I

## Equação de $\eta_{cr}^2$ para Topologias com 2 Impactos por Período

$$\begin{aligned}
 \eta_{cr}^2 = & \delta^2 \left\{ -4 \left\{ e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} (\widehat{H} + \widehat{G}) - 2e\omega\omega_d^2 (e+1) e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(3-2r)\right)} \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right) + 2\omega_d^3 \right. \right. \\
 & \left. \left. \operatorname{sen} (2r\pi) \left( e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(1-r)\right)} + e^2 e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(3-r)\right)} \right) \right\} (e+1) \omega \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} (r-1) \right) + \right. \\
 & \left. -4 \left\{ e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(3-r)\right)} (\widehat{H} + \widehat{G}) + 2\omega_d^3 \operatorname{sen} (2r\pi) \left( e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} + e^2 e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}(4-r)\right)} \right) \right\} (e+1) \right. \\
 & \left. e\omega \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right) - 4\omega^2 \omega_d^2 (e+1)^2 \left\{ e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}(1-r)\right)} \left[ \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} (r-1) \right)^2 - 1 \right] + e^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}(2-r)\right)} \left[ \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right)^2 - 1 \right] \right\} - (e+1)^4 e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \left[ \tilde{m} \left( 2 \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right)^2 - 1 \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 4\xi\omega^2 \omega_d \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \cos \left( 4\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right)^2 - \left[ 2\xi\omega^2 \omega_d \left( 2 \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right)^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. - 1 \right) - 2\tilde{m} \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \operatorname{sen} \left( 4\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right) \cos \left( 4\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right) \right\} + (e+1)^2 \\
 & \left\{ \left\{ -\tilde{h} \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right)^2 + \left[ \tilde{p} \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) - \tilde{w} \right] \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) - 2\omega^2 \omega_d^2 (1-e^2) e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \right\} \right. \\
 & \left. \cos \left( 4\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right) - \left\{ \tilde{p} \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right)^2 + \left[ \tilde{h} \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) + \tilde{w} \right] \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 2\xi\omega_d (2 + \omega^2) (e^2 - 1) e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \right\} \operatorname{sen} \left( 4\omega_d \frac{\pi}{\omega} r \right) \right\} - \tilde{k} \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right)^2 + \left\{ \tilde{f} \right. \\
 & \left. \operatorname{sen} \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) + \tilde{w} \left[ (2\xi^2 - 1) (e^2 + 1) + 2e \right] \right\} \cos \left( 2\omega_d \frac{\pi}{\omega} \right) - 2\xi\omega_d (1 - e^2) \tilde{w} \quad \dots \left. \right\} \quad (I.1)
 \end{aligned}$$







sendo

$$\begin{aligned} \widehat{m} &= \left. \begin{aligned} & \left[ (4\xi^2 - 3)e^3 + 4\xi^2 + 3(e^2 + e - 1) \right] \omega^5 + \left[ 4e\xi^2(e^3 + 1) - 3e(e^3 - e^2 - e + 1) \right] \\ & (\omega^4 + 1) + \left[ 16\xi^4 - 20\xi^2 + 12e\xi^2 + e^3 + 3e^2 - 9e + 5 \right] \omega^3 + e(e + 1)(2\xi^2 - 1) \\ & \left[ (4\xi^2 - 3)e^2 + (3 - 2\xi^2)2e - 3 + 4\xi^2 \right] 2\omega^2 \end{aligned} \right\}, \\ \widehat{p} &= \left. \begin{aligned} & \left[ (4\xi^2 - 1)e^3 + 3e(e - 1) - 4\xi^2 + 1 \right] \omega^5 + \left[ 3e^2(e - 1) - e(e^3 - 1) + 4e\xi^2(e^3 - 1) \right] \\ & (\omega^4 + 1) + \left[ e^3 - 3e(e - 1) - 1 - 16\xi^4 - 12\xi^2(e - 1) \right] \omega^3 + (2\xi^2 - 1)(e - 1)e \\ & \left[ (4\xi^2 - 1)e^2 + (2\xi^2 + 1)2e - 1 + 4\xi^2 \right] 2\omega^2 \end{aligned} \right\}, \\ \widehat{f} &= \left. \begin{aligned} & \left[ 3(e^2 + 1) + 2e(2\xi^2 + 1) \right] \omega^5 + \left[ 3e(e^2 + 1) + 2e^2(2\xi^2 + 1) \right] \left[ \omega^4 + 1 + (2\xi^2 - 1)2\omega^2 \right] + \\ & \left[ 4e\xi^2(e + 2) + 3 - e(e + 2) \right] \omega^3 \end{aligned} \right\}, \\ \widehat{s} &= \left[ \xi^2(e^2 + 1) + 2e \right] \left[ \omega^5 + e\omega^4 + 2(2\xi^2 - 1)e\omega^2 + e \right] + \left[ \xi^2(e^2 + 2e + 3) - 2 \right] \omega^3, \\ \widehat{w} &= (e - 1)(2\xi^2 + 1)(\omega^5 + e\omega^4 + e) + \left[ 2e\xi^2 + 1 - e - 6\xi^2 \right] \omega^3 + (4\xi^4 - 1)(e - 1)2e\omega^2 \end{aligned}$$

e com

$$\begin{aligned} \delta &= \left. \begin{aligned} & 2e^{\left(-2\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} \left\{ \cos\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \left[ (8\xi^4 - 8\xi^2 + 1)(e^4 + 1) + 4(2\xi^2 - 1)(e^3 + e) + 6e^2 \right] + \right. \\ & + 4 \left[ (2\xi^2 - 1)(e^2 + 1) + 2e \right] \left[ (e^2 - 1)\xi\omega_d \operatorname{sen}\left(2\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) - (e + 1)^2 \cos\left(\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) \right] + \\ & \left. - 8\xi\omega_d(e - 1)(e + 1)^3 \operatorname{sen}\left(\omega_d\frac{\pi}{\omega}\right) + \left[ 3 + 3e^2 + 2e(4\xi^2 - 1) \right] (e + 1)^2 \right\} - 16\omega_d^4 \\ & \left( e^4 e^{\left(-4\xi\frac{\pi}{\omega}\right)} + 1 \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$