UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

PROPUESTA DE MEJORA SOBRE LA DIDÁCTICA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL AULA

Autora: María José Torrejón Toledo

Tutor: D. José María Cardeñoso Domingo

Puerto Real, Septiembre de 2016

UCA

Universidad de Cádiz

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

PROPUESTA DE MEJORA SOBRE LA DIDÁCTICA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN EL AULA

Autora: María José Torrejón Toledo

Tutor: D. José María Cardeñoso Domingo

Puerto Real, Septiembre de 2016

MÁSTER DE PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ESCUELA DE IDIOMAS
UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

DECLARACIÓN PERSONAL PARA LA PRESENTACIÓN DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER

Dña. María José Torrejón Toledo, con DNI: 15441191A, estudiante del Máster Oficial en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la Especialidad de Matemáticas, impartido en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz, durante el presente curso académico 2015/2016; como autora de este Trabajo Fin de Máster titulado: "Propuesta de mejora sobre la didáctica del límite de una función en el aula"; y que se presenta bajo la tutela de D. José María Cardeñoso Domingo,

DECLARA QUE:

Se trata de un trabajo propio, original e inédito. Así mismo declara saber que el plagio puede conllevar, además de penalización en la evaluación y calificación del trabajo, las medidas administrativas y disciplinarias que la Comisión Académica del Máster determine en el marco de la normativa vigente de la Universidad de Cádiz. No obstante, quiere hacer notar que, como en todo trabajo académico, a lo largo del mismo se incluyen ideas y afirmaciones aportadas por otros autores, acogiéndose en tal caso al derecho de cita.

En Puerto Real, a 13 de septiembre de 2016.

Fdo.: Dña. María José Torrejón Toledo

Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster, trata sobre el análisis, reflexión y propuesta de mejora de la unidad didáctica: Límite de una función. Continuidad y Asíntotas; desarrollada en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales, del IES Paterna; durante el segundo período de prácticas del Máster Oficial de Profesorado en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de Matemáticas. Para ello, se tendrán en cuenta los conocimientos adquiridos en los distintos módulos del Máster, así como las vivencias aportadas por las propias prácticas.

A la hora de incluir las mejoras a la unidad se han tenido dos objetivos claros: por un lado la motivación del alumnado y por otro, hacerles más autónomos y evitar que dependan de las clases particulares, sobre todo teniendo en cuenta el bajo nivel económico de las familias. Por ello, se incluirán diversas estrategias metodológicas y recursos innovadores, tanto nuevos, como algunos ya previstos en la unidad didáctica original; pero que no he podido desarrollar en el aula durante el período de prácticas, como son: la historia, clases invertidas, uso de las Tics, aprendizaje cooperativo, trabajo en grupo y uso de juegos.

Abstract

This Master's Final Work discusses the analysis, reflection and proposals for improvement of the teaching unit: The limit of a function. Continuity and Asymptotes; that has been developed in the classroom of first baccalaureate of Social Sciences, in the Secondary School Education Paterna, during the second period of practice of the Master of Teaching in Secondary Education, specialized in Mathematics. To do this, will be born in mind the knowledge acquired in the different modules of the Master as well as the experiences provided by our own practices.

The improvements, that are included in the unit, have two clear objectives: at first, the student motivation and on the other, to make them more autonomous and avoid relying on private lessons, especially considering the low economic level of the families. Therefore, diverse methodological strategies and resources will be included in the original teaching unit innovative; but I could not develop in the classroom during the probationary period, such as: history, inverted classes, use of ICT, cooperative learning, group work and use of games.

Índice

ANEXOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE TABLAS

1. Introducción

El trabajo académico que nos ocupa, se presenta como Trabajo Fin del Máster (de ahora en adelante TFM) Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, por la especialidad de Matemáticas; ofertado por la Universidad de Cádiz en el presente curso académico 2015/2016.

De entre las dos opciones que se nos ofrecen desde la Coordinación del Máster para esta especialidad, se ha optado por la realización de un *Trabajo monográfico orientado a la mejora educativa*, enfocado a una propuesta de mejora de la Unidad Didáctica: *Límite de una función. Continuidad y Asíntotas*, llevada a cabo en el centro IES Paterna, durante la fase de prácticas.

El hecho de elegir esta modalidad de TFM, se debe al importante papel que juegan las Unidades Didácticas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, como herramientas didácticas que permiten indagar sobre lo que sucede dentro de las aulas, de manera que requieren una planificación rigurosa que guarden concordancia con lo previsto en el Plan de Centro, así como con la Programación Didáctica del departamento en cuestión.

> Podríamos decir que lo que define a una UD es el curso de acción que muestra, la secuencia de tareas en la que se encarnan los contenidos y da sentido a los objetivos. Por eso mismo es una vía muy apropiada para aprender de la práctica (Rodríguez, 1991, p. 5).

La importancia de toda Unidad Didáctica radica no sólo en su planificación, sino que además sirve para establecer un proceso reflexivo, es decir, hay que poner en relación lo previsto y lo hecho y sus consecuencias, con la intención de realizar un análisis crítico que nos lleve a poner en cuestionamiento la planificación prevista, con el objetivo de realizar las mejoras oportunas de cara a una futura intervención en el aula (Dewey, 1989 citado en Rodríguez, 1991).

A la hora de incluir las mejoras a la unidad se han tenido dos objetivos claros: por un lado la motivación del alumnado y por otro, hacerles más autónomos y evitar así que dependan de las clases particulares, sobre todo teniendo en cuenta el bajo nivel económico de las familias.

El concepto de límite es uno de los más importantes del Análisis, ya que a partir del mismo se introducen otros como la continuidad, derivada, integral, etc., por tanto su estudio se hace imprescindible, pues como refleja Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein (2006): "La importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento, así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería)" (p. 11).

La enseñanza del concepto de límite de una función, supone uno de los mayores retos de la educación actual, ya que su aprendizaje conlleva una serie de dificultades relacionadas con un nivel de pensamiento de orden superior como la abstracción, el análisis, demostraciones, etc. Para los alumnos suele ser un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan con facilidad y, por lo tanto, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender (Blázquez y Ortega, 2000).

Hay diversas investigaciones que tratan de estudiar cuáles son las principales dificultades y obstáculos con las que se encuentran los alumnos cuando se topan por primera vez con el concepto de límite, las cuales se clasifican, como bien dice Brousseau (1983, citado en Vrancken et al., 2006), según el origen al que se deban en: dificultades de *origen ontogénico* (debido a las limitaciones del propio sujeto), dificultades de *origen didáctico* (provocadas por el propio sistema de enseñanza) y dificultades de *origen epistemológico* (derivados del rol constitutivo del saber mismo).

Con lo que respecta al concepto de límite, varios autores identifican una serie de lo que Bachelard (1983, citado en Sánchez Gómez y Contreras de la Fuente, 1998) denominó *obstáculos epistemológicos*; es decir, aquellos inherentes al propio concepto. Por un lado Cornu (1983, citado en Vrancken et al., 2006), identifica los siguientes obstáculos epistemológicos:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.

- Los conceptos infinitamente grandes y las cantidades infinitamente pequeñas. (p. 11)

Por otro lado, Sierpinska (1985, citado en Sánchez Gómez y Contreras de la Fuente, 1998) clasifica los obstáculos inherentes a la noción de límite en cinco grupos: "1) obstáculos debidos al *horror infiniti*, 2) obstáculos ligados a la noción de función, 3) obstáculos geométricos, 4) obstáculos lógicos, 5) obstáculo del símbolo" (p.76).

La consideración de los obstáculos con los que se pueden encontrar los alumnos, es vital para detectar los posibles errores que pueden conllevar, es por eso que a la hora de tratar los contenidos en las aulas, debemos incluir una serie de actividades que promuevan el diagnóstico, la detección, corrección y superación de errores, fomentándose así la actitud crítica de los alumnos con respecto a sus propias elaboraciones.

Por otro lado están las concepciones que los propios alumnos tienen sobre los conceptos matemáticos, las cuales designan el modo en el que estos comprenden y utilizan el concepto (Sierra Vázquez, González Astudillo y López Esteban, 2000).

De muchos estudios se desprenden como conclusión que en la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, generalmente se trabajan las representaciones algebraicas, lo cual dificulta la detección de los errores; mientras que las representaciones gráficas se usan de forma muy limitada, cuando en realidad: "Se deberá favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite funcional: gráfica, numérica y simbólica" (Vrancken et al., 2006, p. 12). Pero, ¿qué oculta y qué muestra cada sistema de representación?

- El *sistema verbal* muestra una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de ésta, más vinculada a fenómenos reales, y más próxima al desarrollo cognitivo del alumnado de Educación Secundaria.
- El *sistema algebraico* muestra una concepción formal de límite, un aspecto estático y abstracto. El grado de precisión es inmejorable, si bien muestra poca vinculación con fenómenos reales.
- El *sistema numérico* muestra claramente el aspecto de aproximación del límite, sugiere una idea dinámica, local y vinculada con la realidad (por ejemplo, se puede trabajar la velocidad instantánea como proceso

de límite a partir de la observación de una tabla de espacios recorridos y tiempos), pero muestra cierta desvinculación de tendencias de x e y.

- El *sistema gráfico* es más estático que el numérico y menos formal que el algebraico, recoge el aspecto visual y ayuda a vincular las tendencias de ambas variables (siempre que se entienda la gráfica como vía de relación entre ellas). (Blázquez y Ortega, 2001, p. 230)

Con el fin de hacerles más fácil y ameno el aprendizaje de este concepto a los alumnos, así como para alcanzar los dos objetivos marcados, la unidad didáctica mejorada incluirá distintas estrategias metodológicas, como la clase invertida, el aprendizaje cooperativo y el trabajo en grupo, además de diversos recursos motivacionales, como son la incorporación de la historia en el aula, el uso de las Tics y el uso de juegos.

Como refleja Cantoral et al. (2003, citado en Engler, Gregorini, Vrancken, Müller, Hecklein y Henzenn, 2008):

> Actualmente, se propone como una forma de aprender significativamente, que el alumno reconstruya los conceptos. Que el aprendizaje se base en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas. De esta manera, la función del profesor es la de guiar el aprendizaje, de proponer actividades que los enfrente a las dificultades inherentes al nuevo concepto y de proporcionarles las herramientas para superarlas, es decir incentivar el proceso de pensamiento en el alumno de tal manera que le permita enfrentarse a situaciones nuevas y proponer soluciones. Esto es, darle al alumnos [*sic*] un papel más activo en su propio proceso de apropiación de un concepto, confiriéndole una mayor responsabilidad. (p. 14)

Otra estrategia motivacional será el acercamiento de los contenidos a tratar al mundo que nos rodea; es decir, darle un sentido práctico y útil en la vida, asociándolo a diversos fenómenos cotidianos que lleven implícito la aplicación de dichos contenidos, como pueden ser: la velocidad instantánea, el crecimiento de una población, etc., ya que como refleja Hernández (1992, citado en Azcárate, 1997), la labor de la escuela "tiene que ir más dirigida hacia facilitar las estrategias necesarias a los estudiantes para que ellos puedan interpretar, integrar y transformar dicha información en un conocimiento útil para su intervención en la realidad" (p. 77).

Este trabajo académico tiene la siguiente estructura: en primer lugar abordaremos un análisis crítico de lo vivido en las prácticas, es decir, del contexto, de los problemas y dificultades detectados, cuestionamiento de la unidad desarrollada desde la teoría y planteamiento de las posibles mejoras. A continuación se presentarán los referentes teóricos que sustentarán la unidad didáctica mejorada, para inmediatamente después desarrollar dicha unidad, incluyendo los objetivos que se pretenden alcanzar con su implementación, las competencias que se van a trabajar durante su desarrollo, los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales a tratar, seguido de la metodología que se quiere llevar a cabo, el sentido de las tareas y el proceso de evaluación previsto.

Por último nos centraremos en las conclusiones, donde se realizará una reflexión y análisis crítico sobre las aportaciones de la propuesta presentada; de posibles nuevas mejoras con la incorporación de más historia, así como del uso de otras estrategias metodológicas vistas a lo largo del máster (Aprendizaje Basado en Proyectos u otras estrategias simples de aprendizaje cooperativo) y de necesidades de formación docente, tanto inicial como continua.

2. Análisis crítico de las prácticas, problemas detectados y modificaciones propuestas

2.1. Contexto del centro y del grupo-clase

La unidad didáctica mejorada que se presenta está prevista para ser implantada en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales del IES Paterna, centro de la localidad de Paterna de Rivera.

Como bien nos han mostrado en diversos módulos de este máster, el factor económico y cultural del contexto familiar del alumnado incide de forma manifiesta en aspectos sociales pero también en los educativos. En particular, la situación social, económica y cultural de las familias y la composición social del centro al que asiste el alumnado tienen una clara incidencia sobre los logros escolares, que incluso puede ser más importante que la atribuida al currículo escolar o a los recursos. Esta localidad presenta unos índices socioeconómicos bastante bajos, con una elevada tasa de desempleo y una tasa de paro juvenil de las más altas de Andalucía, con cerca de un 90% del mismo.

En la actualidad el clima de convivencia en el Centro no es todo lo bueno que se pudiera esperar; ya que aunque la mayoría de los conflictos se resuelven fundamentalmente con el diálogo y medidas disciplinarias de carácter menor; en algunos casos se observan serios problemas frente a los que deben tomarse algunas medidas más severa, como la expulsión temporal del Centro, si bien estos casos suelen resultar puntuales.

El tipo de conducta problemática más frecuente y que corresponde generalmente a los alumnos de los tres primeros niveles de la ESO, tiene que ver con falta de educación y de respeto, incumplimiento de deberes o vulneración de derechos de carácter leve. Estos comportamientos se enmiendan fundamentalmente con el diálogo y con la aplicación de las correcciones que el Plan de Convivencia contempla para estos casos. De forma aislada han aparecido casos de alumnos con comportamientos disruptivos en el aula, que impedían que la clase se desarrollara con normalidad, interrumpiendo al profesor, incluso faltándole el respeto. Son alumnos, por otra parte, que en general no han mostrado interés alguno por las materias impartidas, en muchas ocasiones no traen el material necesario a clase, han repetido curso alguna vez a lo largo de su escolaridad, presentan trastornos de aprendizaje y acumulan un significativo retraso escolar. La edad de estos alumnos suele estar entre los 13 y 15 años, y, por lo general, esperan alcanzar la edad que les permita abandonar la enseñanza obligatoria. Los padres de estos alumnos normalmente comunican que sus hijos, casi en todos los casos, presentan una conducta problemática en sus casas. Otros alumnos presentan problemas familiares irresolubles desde el centro.

En relación a las actitudes del alumnado ante el centro y el trabajo escolar, la mayor parte de ellos parecen estar bien adaptados, pero presentan un alto grado de desmotivación por la materia. El objetivo de un alto porcentaje de alumnos de este centro es incorporarse al mundo laboral o hacer un ciclo formativo, por lo que el centro debe incidir en ese punto.

Desde la materia se detectan deficiencias en los aprendizajes instrumentales básicos (errores de cálculo básicos, dificultades en la resolución de problemas básicos, falta de expresión y comprensión oral y escrita) y a esto hay que añadirle que el alumnado tiene la percepción de que la utilidad de esta materia es escasa para la vida cotidiana, así como para la consecución de estudios posteriores.

La mayoría del profesorado del IES Paterna se siente frustrado y totalmente desmotivado, coinciden en que algunas veces tienen que aguantar actitudes y comentarios desagradables por parte de los alumnos, llegándose a sentir indefensos en ocasiones. Comentan que a pesar de que algunos han tenido destino en otros centros con las mismas características, el IES Paterna supera al resto. Con lo que es de esperar que la plantilla de profesorado del centro vaya cambiando de un año para otro. Los que más tiempo llevan en el centro (5-6 años), entre ellos mi tutor de prácticas, tienen como único objetivo coger puntos, para elegir destino definitivo en centros de sus localidades. Por tanto, podríamos decir, que el IES Paterna es un centro *"de paso"*, situación que empeora aún más las condiciones del centro.

Con lo que respecta al grupo-clase donde se ha desarrollado la unidad, consta de 16 alumnos/as (13 alumnas y 3 alumnos), con lo cual no es un grupo grande. El alumnado es bueno, en cuanto a conducta se refiere, las clases de matemáticas se imparten siempre a primera hora, el aula es amplia (ya que es el mismo aula donde se imparten las materias comunes con el resto de alumnos de 1º de bachillerato) y está dotada de una pizarra digital, además de una pizarra blanca, de rotulador; con lo cual, el entorno de trabajo es bueno.

Sin embargo, es importante destacar, el elevado grado de desmotivación que muestra el alumnado con respecto a la materia; así como su bajo nivel (errores básicos de cálculo, dificultades para razonar y usar la lógica, así como para relacionar los contenidos) y falta de hábitos de estudio. Además como se ha detectado en el cuestionario que se le proporcionó a los alumnos y cuyos resultados recogí a modo de evidencia (*Véase Anexo XXIV*), la mayoría se ve en la necesidad de asistir a clases particulares, algo a lo que están muy acostumbrados los estudiantes de esta localidad, pese al bajo nivel económico de las familias y que me gustaría evitar a través de mis propuestas de mejora, ya que uno de los objetivos primordiales serán fomentar la autonomía del alumnado, así como atender las necesidades de cada alumno, de manera individualizada.

2.2. Problemática suscitada durante las prácticas

Para entender un poco mejor cómo se ha desarrollado la unidad didáctica en cuestión (*Véase Anexo XXIII*), a lo largo de la fase de prácticas, quiero reflejar la problemática suscitada durante la realización de las mismas. Mi principal problema ha sido el tutor del centro que se me asignó, ya que no he visto ningún interés, ni implicación por su parte; lo cual ha limitado mi labor y mis expectativas durante la práctica docente.

Cuando me incorporé a mi segundo período de prácticas, mi tutor ya había comenzado la unidad didáctica que había acordado que daría yo y a pesar de que aún le quedaba por dar una parte, no me dejó continuar con la misma, sino que por el contrario, él siguió desarrollando los contenidos, dejándome explicar sólo dos apartados del tema (la continuidad de una función y las asíntotas, aunque este último apartado, me hizo darlo por encima), durante tres sesiones.

A esta situación hay que añadirle que tampoco tuve plena libertad para desarrollar los contenidos según la metodología que yo tenía prevista, ya que mi tutor era quien marcaba los tiempos, quien tenía el control del aula e incluso había veces que comenzaba él la sesión, resolviendo algún ejercicio y luego me invitaba a salir a la pizarra para resolver otro problema que yo tuviese preparado.

Tampoco me ha permitido llevar a cabo el proceso de evaluación de mi unidad, ni tan siquiera pude participar en la elaboración y corrección del examen que les puso a los alumnos, por tanto, no he podido llevar a cabo una actuación plena y completa.

2.3. Cuestionamiento de la unidad y modificaciones propuestas

Como ya bien he reflejado con anterioridad, durante el período de prácticas no pude desarrollar la unidad didáctica en su totalidad, ni según las estrategias metodológicas previstas, por lo que se me hace más difícil el cuestionamiento de la misma, así como de la teoría que la sustenta. Para ello voy a centrarme en cómo ha llevado mi tutor el tratamiento de dicha unidad en el aula, cómo ha sido la actuación de los estudiantes frente a la misma y las dificultades de aprendizaje asociadas, para por último reflexionar y analizar qué aspectos tanto de la actuación de mi tutor, como de mi propia unidad didáctica prevista son susceptibles de mejoras.

En primer lugar, considero que la temporalización llevada a cabo no ha sido lo más adecuada, ya que no ha profundizado en los contenidos, ni los ha reforzado, a pesar de que numerosos estudios han mostrado las dificultades que muestran los alumnos para comprender el concepto de límite de una función, siendo muchos los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes durante su tratamiento en las aulas. Según Sierpinska (1991, citado en Contreras, 2003), hay que "enfrentar a los alumnos a los obstáculos inherentes al concepto mediante situaciones que le faciliten la emergencia de actos de comprensión" (p. 81), sin embargo es algo que no suele darse, sino que por el contrario el concepto de límite suele utilizarse meramente como herramienta para otros objetos, tales como la continuidad o la derivabilidad.

Otros de los puntos a cuestionar sobre cómo ha desarrollado mi tutor del centro la unidad didáctica en cuestión, es que sólo ha tratado el concepto de límite desde el punto de vista algebraico, sin vincular este tipo de representación con otra de tipo gráfico; a diferencia de lo que yo tenía previsto en mi unidad, donde se ha dado gran importancia al tratamiento del concepto de límite desde distintos tipos de representaciones (numérica o algebraicamente, gráficamente o mediante una tabla de valores). Como indica Rico (2000, citado en Blázquez y Ortega, 2001) son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la necesidad de utilizar distintas representaciones de un mismo concepto para facilitar la comprensión del mismo, ya que los sistemas de representación se complementan entre sí, mostrando cada uno de ellos diferentes aspectos del concepto o los mismos pero con mayor o menor claridad porque todos ellos son limitados y necesitan de otros (Romero, 2000 citado en Blázquez y Ortega, 2001).

Como he reflejado en mi unidad didáctica desarrollada (*Véase Anexo XXIII*), durante el período de prácticas detecté una serie de dificultades y errores cometidos por el alumnado; así por ejemplo, mostraron problemas para elegir el trozo de función que debían tomar para el cálculo de los límites laterales, siendo una de las causas principales el hecho de no tener clara la representación de los intervalos mediante desigualdades, lo que me ha hecho reflexionar sobre la necesidad de tratar este aspecto en el aula. Al principio pensé en incluir una actividad sobre el estudio de los intervalos en el cuestionario de detección de ideas previas de la unidad didáctica original (*Véase Anejo I del Anexo XXII*) pero caí en la cuenta de que aunque la finalidad de este cuestionario sea buena, éste no deja de ser un mero cuestionario tradicional, de ahí que una propuesta de mejora de esta unidad, sea cambiar este instrumento de detección de conocimientos previos por una tarea más enriquecedora para el alumnado denominada *Lluvia de ideas* con la que se pretende construir un esquema (*Véase Anexo I*) con ayuda de los alumnos que contenga aquellos conocimientos que se espera que ya conozcan (tipos de funciones elementales y sus características, intervalos, simplificación de fracciones algebraicas, etc.) y que guardan relación con los nuevos conocimientos a tratar en el aula.

Otra de las dificultades detectadas ha sido con respecto al estudio de los tipos de discontinuidad, sobre todo la evitable, ya que tenían conflictos con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite; pero sobre todo cuando este tipo de discontinuidad venía dado por la no existencia de la función en el punto.

En el cálculo de asíntotas se detectaron varios tipos de dificultades, sobre todo a la hora de determinar la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la asíntota y representar las ramas asintóticas, quizás porque no conciben bien la idea de límite en el infinito y porque tienen dificultades para pasar de un sistema de representación a otro; en este caso para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica.

Estas dificultades, entre otras, suelen ser comunes en los estudiantes, ya que de un estudio realizado por Vrancken et al. (2006) para detectar las dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones, llegaron a la conclusión, de que existen tres tipos de dificultades: las *relacionadas con el concepto de función* (dificultades para representar gráficas que sean funciones, dificultades relacionadas con el concepto de dominio de una función y para distinguir entre variable dependiente e independiente); las *relacionadas con el concepto de límite* (para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, para reconocer e interpretar límites laterales, para la manipulación algebraica de las funciones cuyo límite se quiere determinar y para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución) y *dificultades para pasar de un sistema de representación a otro*.

Por último quisiera cuestionar la metodología tradicional llevada a cabo en el aula, tanto por mi tutor como por mí, ya que no tuve otra alternativa; aunque de los cuestionarios que pasé a los alumnos y cuyos resultados fueron recogidos a modo de evidencia (*Véase Anexo XXIV*), he podido conocer que los alumnos no cambiarían la metodología hasta ahora llevada en el aula, quizás porque están acostumbrados al modelo tradicional y no conciben otros modelos nuevos, por miedo al cambio y su adaptación.

También en mi caso me cuesta erradicar el modelo tradicional por completo, de ahí que en mi propuesta original para desarrollar la unidad didáctica combinase la metodología tradicional con el trabajo en grupo, el aprendizaje cooperativo, el uso de las Tics; así como de juegos; es decir, con estrategias metodológicas más innovadoras y motivadoras, que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A pesar de que no he podido implantar mi unidad didáctica original (*Véase Anexo XXII*) durante el período de prácticas, considero que el desarrollo de la misma en el aula hubiera aportado un aprendizaje más enriquecedor al alumnado, aunque según mis observaciones y experiencias en el aula, así como lo aportado en los distintos módulos del MAES, veo necesario realizar una serie de modificaciones sobre la misma con el fin de mejorarla y así poner aún más énfasis en la consecución de los dos objetivos marcados: la motivación y la autonomía de los estudiantes. Para ello dotaremos a esta unidad didáctica mejorada de un sentido, gracias a los referentes teóricos que se desarrollan en el siguiente apartado.

3. Referentes teóricos de la Unidad Didáctica Mejorada

3.1. Teorías del aprendizaje

Existen diversas creencias sobre las matemáticas, su actividad, así como la capacidad de aprenderlas y las concepciones que el docente tenga sobre su naturaleza, condicionará su actuación en el aula. Existen dos concepciones diferenciadas y extremas:

La *concepción idealista o platónica,* que considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma rigurosa y axiomática, sin darle un sentido práctico y considerando las matemáticas como una disciplina autónoma, sin aplicarlas a otras disciplinas. Pero como afirma Azcárate (1997):

> En un mundo donde los medios de comunicación y tecnológicos están a la disposición de gran parte de la población, facilitando el acceso a una cantidad de información impensable que se pueda tratar en la escuela, es absurdo pensar en la escuela como mera transmisora de conocimientos. (p. 77)

La *concepción constructivista*, que considera que debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo, mostrándole primero al alumnado la utilidad o aplicabilidad de las nociones matemáticas y a partir de ahí construyan las estructuras matemáticas.

Según D'Ambrosio (1994, citado en Azcárate, 1997), para muchos profesores, mejorar la enseñanza de las matemáticas, implica articular mejor las propias matemáticas, pero sin embargo, enseñar matemáticas debe estar orientado a formar personas, es decir, a contribuir en el desarrollo personal de los alumnos, capacitándolos autónoma, social, crítica y responsablemente.

El docente juega un papel muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es por eso que debe reflexionar sobre referentes teóricos e investigaciones sólidas sobre el campo de la enseñanza, porque les pueden aportar información relevante sobre la profesión y les pueden ser de gran utilidad para elaborar estrategias de actuación en el aula. Se hace necesario por tanto, recurrir a las teorías psicológicas de la educación para explicarnos cómo se aprende y qué condiciones pedagógicas se requieren para cada una de ellas:

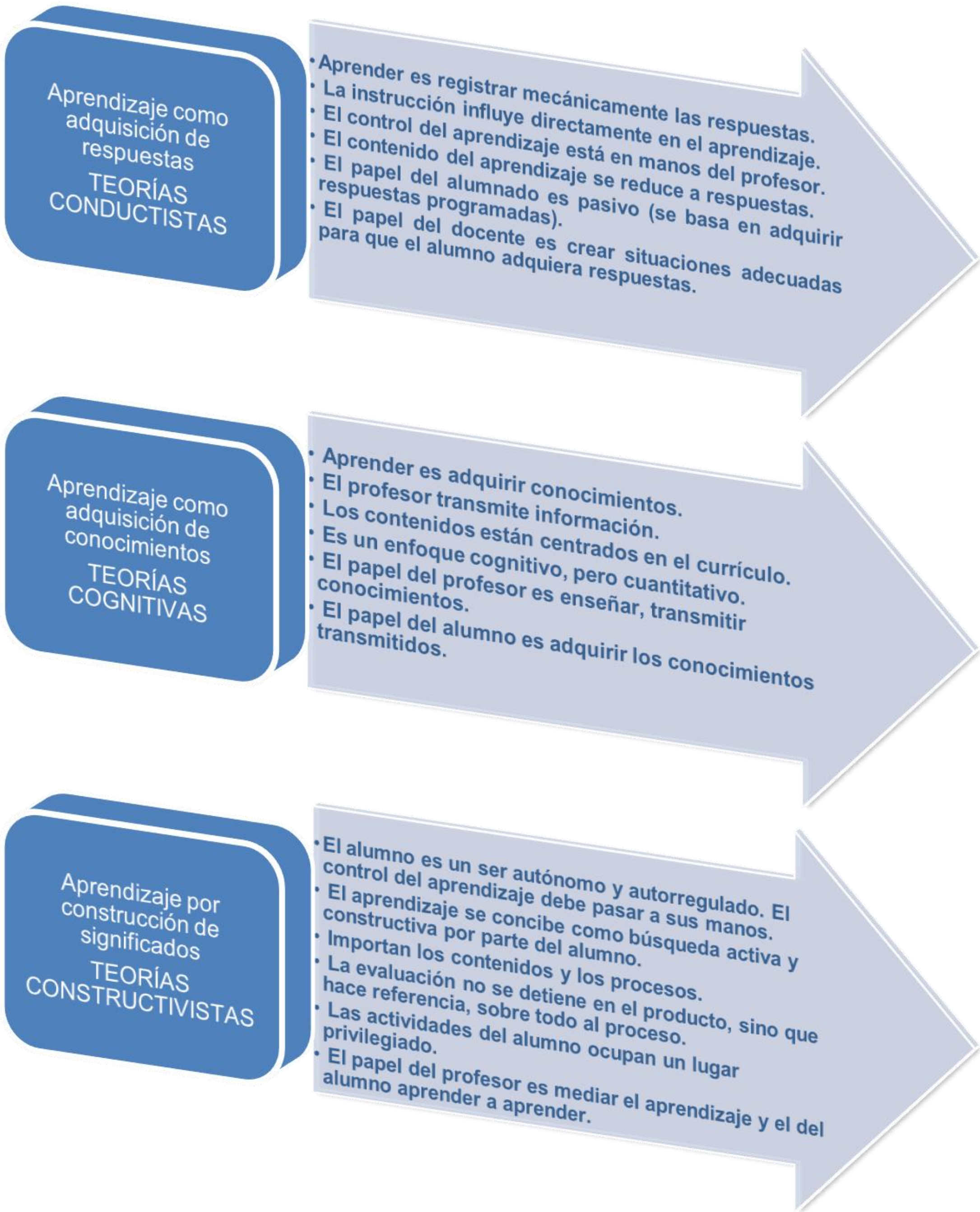


Ilustración 1. Metáforas de aprendizaje escolar. Elaboración propia, adaptado de Mayer (1992) y Beltrán (1996), citado en Navarro, Alcalde, Martín y Crespo (2009).

El constructivismo es uno de los enfoques, que ha tenido y sigue teniendo mayores repercusiones sobre el aprendizaje escolar en todos los niveles educativos. Se fundamenta en la construcción del conocimiento, pero como hemos visto a lo largo de este máster, dentro del constructivismo se distinguen diferentes líneas, en función de los principios explicativos de cada autor.

- *Teoría epistemológica de Piaget*.

Para este autor el conocimiento se construye desde dentro, al interactuar con el medio, estableciendo una relación entre el conocimiento que ya se tiene y la nueva información, lo que conlleva a modificar nuestros *esquemas cognitivos*. Este planteamiento tiene mucha importancia en la enseñanza porque el profesor siempre debe tratar de conectar los conocimientos que imparte con los esquemas que posean los estudiantes que representan su realidad experiencial.

Para Azcárate (1996, citado en Azcárate, s.f.), "los niños llegan a la escuela con unos ciertos conocimientos, ideas e intuiciones que pueden denominarse matemáticas o prematemáticas, que son producto de la interacción espontánea con el medio social y ambiental".

Cuando se le plantea una nueva información al alumno, su respuesta adaptativa funciona a través de dos mecanismos: *la asimilación,* que supone la incorporación de nuevos conocimientos a su esquema cognitivo actual, es decir, a sus esquemas previos, sin modificarlos, sin variar sus creencias *y la acomodación*, que sería el proceso inverso, es decir, es la modificación de los esquemas actuales para dar cabida al nuevo conocimiento y reequilibrar así, el desequilibrio producido por la nueva situación o información.

- *Teoría del aprendizaje verbal significativo de Ausubel*.

Se basa en la necesidad de tener en cuenta los *conocimientos previos* de los alumnos antes de iniciar el aprendizaje de cualquier contenido, ya que si se establecen relaciones entre las ideas previas y la nueva información se facilita la comprensión y por tanto el *aprendizaje significativo*, no mecánico o memorístico.

Así, como refleja Ausubel (1983): "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un sólo principio, enunciaría éste: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente" (p. 2).

- *Teoría del aprendizaje por descubrimiento de Bruner*.

Esta teoría se fundamenta en que el alumnado adquiera los conocimientos por sí sólo, es decir, que el docente no les muestra los contenidos a los estudiantes en su forma final, sino que por el contrario han de ser descubiertos por los mismos de un modo activo y constructivo, mientras que el docente actúa de guía aportándoles el material necesario (lo que Bruner denominaba *andamiaje*).

Los partidarios de esta teoría consideran que el aprendizaje por descubrimiento sirve para: superar las limitaciones del aprendizaje tradicional o mecanicista; estimular al alumnado para que piense por sí mismo; potenciar las estrategias metacognitivas, es decir, aprender cómo aprender; estimular la autoestima y la seguridad; así como para potenciar la solución creativa de los problemas (Universidad Internacional de Valencia, 2015).

- *Teoría del origen sociocultural de los procesos psicológicos superiores de Vygotski.*

Para este autor, el ser humano aprende a pensar, a percibir, a memorizar, etc. a través de la mediación de otros seres humanos. De este modo, formuló la ley de la doble formación de las funciones psicológicas: “en el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero a nivel social, entre personas, interpersonal o interpsicológico y después a nivel individual, en el interior del propio niño, intrapsicológico” (Vygotski, 1978 citado en Doménech, 2012); es decir, que primero el niño aprende las cosas socialmente, en contacto con los demás y después lo internaliza.

Pero la principal de sus atribuciones es su teoría sobre la *Zona de Desarrollo Próximo* (*ZDP*), que no es más que la distancia entre lo que un alumno puede hacer y aprender por sí sólo, sin la ayuda de nadie (*Zona de Desarrollo Real*) y lo que es capaz de hacer y aprender con la ayuda de los demás, ya sean los compañeros o el propio docente, de forma guiada (*Zona de Desarrollo Potencial*). Por tanto la principal implicación educativa que se desprende de esta teoría es una intervención pedagógica del profesor dirigida hacia la ZDP, donde se favorezcan las interacciones dentro del aula (*mediadores sociales*), creando un clima interactivo a través del trabajo en grupo y el trabajo cooperativo y utilizando recursos y materiales didácticos (*mediadores instrumentales*) de apoyo apropiados (Doménech, 2012).

En mi caso, en la unidad didáctica mejorada apostaré por estas teorías de aprendizaje constructivistas. Se propone una forma de aprender significativamente, reconstruyendo los conceptos; es decir, un aprendizaje basado en la actividad creadora, donde sea el alumno quien descubra y proponga formas de resolver los problemas. De este modo mi función como docente será la de guiar y facilitar el aprendizaje, proporcionándoles todas las herramientas necesarias, de manera que el alumno adquiera un papel más activo y tenga una mayor responsabilidad. Por otro lado fomentaré un ambiente de trabajo en el que se favorezca tanto el trabajo en grupo como individual, promoviendo la independencia y la responsabilidad que cada alumno debe tener en su propio aprendizaje y el de sus compañeros de grupo, donde el debate y la discusión matemática tenga un papel privilegiado y se haga partícipe al alumnado del proceso de evaluación, autoevaluando su propio trabajo o coevaluando el de los compañeros.

3.2. Historia de la Matemática

La enseñanza o aprendizaje de las matemáticas ha venido siendo una tarea difícil para el docente, ya que muchos son los alumnos que presentan dificultades con la materia, aunque en cierta medida la principal causa de las mismas sea la metodología llevada a cabo por el docente en las aulas, basada en el uso de una enseñanza tradicional, que utiliza como único recurso los libros de textos, en la que los contenidos vienen presentados de forma rigurosa y axiomática (definición o teorema, demostración y ejemplo), como si no existiera conexión entre los mismos, cuando la realidad es que resulta casi imposible que un conocimiento matemático nazca de una idea absolutamente nueva y sin ninguna conexión con otras ideas desarrolladas en el pasado.

Por esta razón introducir la Historia de la Matemática en el aula resulta una cuestión atractiva, a la vez que necesaria hoy en día, ya que puede ser un buen instrumento para acabar con la percepción negativa que los alumnos tienen sobre la materia y con la idea que estos y estas tienen de que el conocimiento matemático es hermético y cerrado; así como para proporcionar al docente una visión más humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual está muy necesitado.

Como bien se plantea en Doroteo Petit, Navarro Montenegro, Chacón Nieto y Arroyo Guzmán (2007a) hay que tenerse en cuenta el momento y las circunstancias sociales, ambientales, prejuicios del momento, en los que se encuentran inmersos los propios creadores de la historia de las matemáticas, ya que muchos de los conocimientos matemáticos han sufrido una serie de cambios a lo largo de la historia y por lo tanto tener acceso a dicha información resulta necesario para su buen entendimiento en las aulas.

Para un buen uso de la Historia de la Matemática en el aula se hace necesario que los docentes estén formados en ésta y es necesario que sepan realizar una importante y profunda distinción entre usar la Historia de la Matemática dentro de la enseñanza de las matemáticas, y enseñar esa historia como una materia en sí misma (Fauvel, 1991 citado en Lupiáñez, 2002). Así como bien dice Anacona (2003), hay que usar la Historia de la Matemática como recurso didáctico motivador y no como objetivo mismo de la enseñanza; de manera que sea más fácil el entendimiento de las mismas. Pero según señalan De Guzmán (2007) el valor del uso del conocimiento histórico por parte del docente no consiste en que éste tenga una batería de historietas y anécdotas curiosas para entretener a sus alumnos a fin de hacer un alto en el camino, sino que se puede y se debe utilizar, por ejemplo, para entender y hacer comprender una idea difícil del modo más adecuado o para traer a una situación actual problemas históricos que fueron importantes.

No resulta fácil concretar las formas de aplicar la Historia de la Matemática en el ámbito escolar, ya que depende, entre otros muchos factores, del nivel educativo, de los temas y problemas concretos, de los conocimientos históricos del profesor, de su interés por la interdisciplinariedad, de su iniciativa. Una buena manera de utilizarla en las aulas sería como introducción a una unidad didáctica, así como planteándoles a los alumnos problemas todavía abiertos en la actualidad; es decir, que no tienen aún respuesta, para que vean que en el ámbito de las matemáticas no todo está dicho y acabado y aún quedan muchas cosas por descubrir. Por otro lado hay que utilizarla como un *Método Genético*; es decir, un método basado en que "para la perfecta comprensión de un concepto determinado, el alumno ha de repetir a grandes rasgos el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto" (González, 2004, p. 22).

Por tanto, el conocimiento de la historia proporciona una visión dinámica de la evolución de la matemática, lo cual permitirá al estudiante conocer cuáles fueron las circunstancias en las que se hallaba sumergido el matemático de la época que conllevaron a la motivación de las ideas y sus desarrollos en el inicio, porque es precisamente ahí donde se pueden buscar las ideas originales en toda su sencillez, todavía con su sentido de aventura y que muchas veces se hace desaparecer con el paso del tiempo en los textos secundarios.

Pero, ¿cómo podemos introducir la Historia de la Matemática en el aula? De acuerdo con Fauvel (1991, citado en Sierra Vázquez, 1997) algunas formas de uso de la Historia de la Matemática en el aula, pueden ser:

- Mencionar anécdotas matemáticas del pasado.
- Presentar introducciones históricas de los conceptos nuevos para el alumnado.
- Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los distintos conceptos que aparecen en clase.
- Impartir lecciones de Historia de la Matemática.
- Idear ejercicios utilizando textos matemáticos del pasado.
- Fomentar la creación de posters, exposiciones u otros proyectos con el tema histórico en cuestión (aplicaciones Tics).
- Realizar proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
- Usar ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.
- Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje.
- Idear aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
- Idear el orden y estructura de los temas dentro del programa de acuerdo con su desarrollo histórico. (p. 183).

En mi unidad didáctica recurriré a la Historia de la Matemática de forma puntual para darle a conocer a los alumnos determinadas curiosidades matemáticas pasadas relacionadas con algún contenido del tema, así como a la hora de introducir algún concepto.

3.3. ¿Qué concepto de límite y por qué?

Una de las ideas generalizadas de los docentes de matemáticas de Educación Secundaria, es que el uso de un excesivo formalismo en la enseñanza de esta materia en este nivel es inasequible para los alumnos, achacándolo a que no han adquirido la madurez suficiente. Así, centrándonos en el concepto de límite, afirman que a pesar de que un alumno sea capaz de reproducir la definición de límite e incluso resolver ejercicios algorítmicos de cálculo, en muy pocos casos es capaz de explicar e ilustrar la definición y mucho menos de extrapolar y utilizar dicho concepto en distintos contextos del cálculo algorítmico, lo que muestra que ha aprendido dicha definición de memoria, pero realmente no ha comprendido el concepto (Blázquez, 1999).

Esto no significa que hay que obviar el formalismo y evitar que el alumnado utilice un lenguaje riguroso apropiado, sino que hay que encontrar la mejor manera de presentarles el concepto. Para ello en nuestro caso avanzaremos desde la forma más intuitiva a la más formal, sin que pierda su carácter instrumental, pues como dice Brousseau (1986, citado en Blázquez, 1999), presentar un concepto directamente a través de su definición es un fracaso, ya que se muestra como un producto ya acabado, ignorando la génesis del concepto, cuando en realidad "comprender el concepto no es únicamente comprender la definición, sino crear una imagen conceptual rica y coherente" (Blázquez, 1999, p. 174).

Una buena forma de presentarles el concepto de límite a los alumnos es haciéndoles ver que el límite no es sólo una aproximación de las imágenes de la función, sino que siguiendo el pensamiento de Newton y D'Alembert, el límite es la mejor de las aproximaciones; es decir, la aproximación óptima, ya que cualquier otra aproximación del mismo, distinta del propio límite, puede mejorarse con las imágenes de los valores adecuados; luego, sí que es cierto que existe relación entre *aproximarse* y el límite pero hay que distinguir entre ello y *tender*, pues la tendencia requiere que cualquier aproximación, distinta al valor al que se tiende, se puede mejorar.

3.3.1. Desarrollo histórico del concepto de límite

Como bien afirman Tall y Vinner (1981, citado en Medina Mariño, 2001): "La definición de un concepto no garantiza la comprensión del concepto" (p. 45), porque al mostrarles dicha definición al alumnado, se le está presentando el "conocimiento matemático terminado y pulido, con su apariencia perfecta, inequívoca y rigurosa, ocultando los obstáculos y dificultades que hicieron evolucionar la noción hasta llegar a institucionalizarse como concepto matemático" (Medina Mariño, 2001, p. 45). Es por eso que se hace necesario hacer un alto en el camino y buscar las fuentes que muestran la forma en la que se fue produciendo el concepto de límite, mediante un breve desarrollo histórico de dicho concepto.

Siguiendo los trabajos de Bustos González (2013) y Medina Mariño (2001), voy a sintetizar a grandes rasgos la evolución histórica del concepto de límite:

Comenzamos con la Época Griega, donde aparece de forma implícita la noción de límite en un ambiente geométrico-estático. Destacan personajes como Hipócrates (s.V a.C.), quien utiliza el concepto de límite para determinar el área de las *lúnulas*; Eudoxo (408-355 a.C.), quien presenta de manera implícita el concepto de límite en las demostraciones por exhaución. Este método es un procedimiento geométrico de aproximación; es decir, consiste en aproximar una figura a través de otras de las que se pueden medir la correspondiente magnitud, de manera que vamos aproximándonos a la magnitud buscada. Pero quien realmente aplica dicho método es Arquímedes (287-212 a.C.) para demostrar sus resultados referidos a áreas y volúmenes en el caso de la esfera y el cilindro y en la cuadratura de la parábola.

Ya en el Renacimiento (s. XV- XVII), el límite aparece en un ambiente geométrico-dinámico, vinculándolo con problemas físicos y astronómicos que conllevan el cálculo de velocidades, pendientes, áreas, máximos y mínimos. Dentro de este período destacamos a Kepler (1571-1630), quien desarrolló un sistema matemático infinitesimal precursor del cálculo (la base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos) y Cavalieri (1598-1647), quien descompuso las magnitudes en indivisibles de magnitud inferior. Para calcular volúmenes cortaba los cuerpos y medía las áreas de las secciones.

Dentro de esta época destacan dos figuras de gran importancia en cuanto a sus contribuciones al desarrollo del concepto de límite: Leibniz (1646-1716) y Newton (1648-1727). El primero, se preocupó por la claridad de los conceptos y creó un lenguaje de fácil manipulación que perdura en la actualidad. Se dio cuenta de que la pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas. Por su parte Newton, resolvió problemas tales como la determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arcos, centros de gravedad, etc., formulándolos en términos de mecánica utilizando las fluxiones (derivada) como una razón de cambio. Por lo que queda claro que el concepto que nos atañe estaba latente e implícito en los razonamientos de Leibniz y Newton.

En el siglo XVIII los matemáticos se preocuparon por la fundamentación y formalización de los conceptos. Destacan figuras como la de Euler (1707-1743), quien tomó las fluxiones de Newton y el cálculo diferencial de Leibniz y los integró en una rama de las matemáticas, el Análisis. Por otra parte D'Alembert (1717-1783) se basó en los trabajos de Newton para crear la teoría de límites, que no fue reconocida por falta de rigurosidad algebraica.

A finales del siglo XVIII y durante el siglo XIX se caracterizó por la búsqueda formal del rigor, donde destacan figuras como Cauchy, Bolzano y Weierstrass.

Cauchy (1789-1857), adopta el concepto de límite de D'Alembert, siendo su objetivo alejarse de la manipulación de fórmulas y figuras geométricas. Se concentró en tres nociones: variable, función y límite. En su trabajo trató de presentar la naturaleza de los números irracionales mediante la idea de que un número irracional era el límite de fracciones racionales que se le acercaban, pero se dio cuenta que la definición debía ser más precisa desde un punto de vista lógico, ya que asumí la existencia de los irracionales previamente a su construcción por medio de límites.

Bolzano (1781-1848), expuso correctamente todas las ideas necesarias para el desarrollo del cálculo dando una definición de la continuidad basada en la del límite y llegó a admitir la asistencia de los números infinitamente grandes y de los infinitamente pequeños.

Weierstrass (1815-1897), el padre de la formalización y el rigor de las matemáticas, introduce la representación a través de símbolos aritmetizando lo que más pudo. En este momento el concepto de límite tiene una noción matemática que sirve como soporte al cálculo diferencial e integral y al análisis.

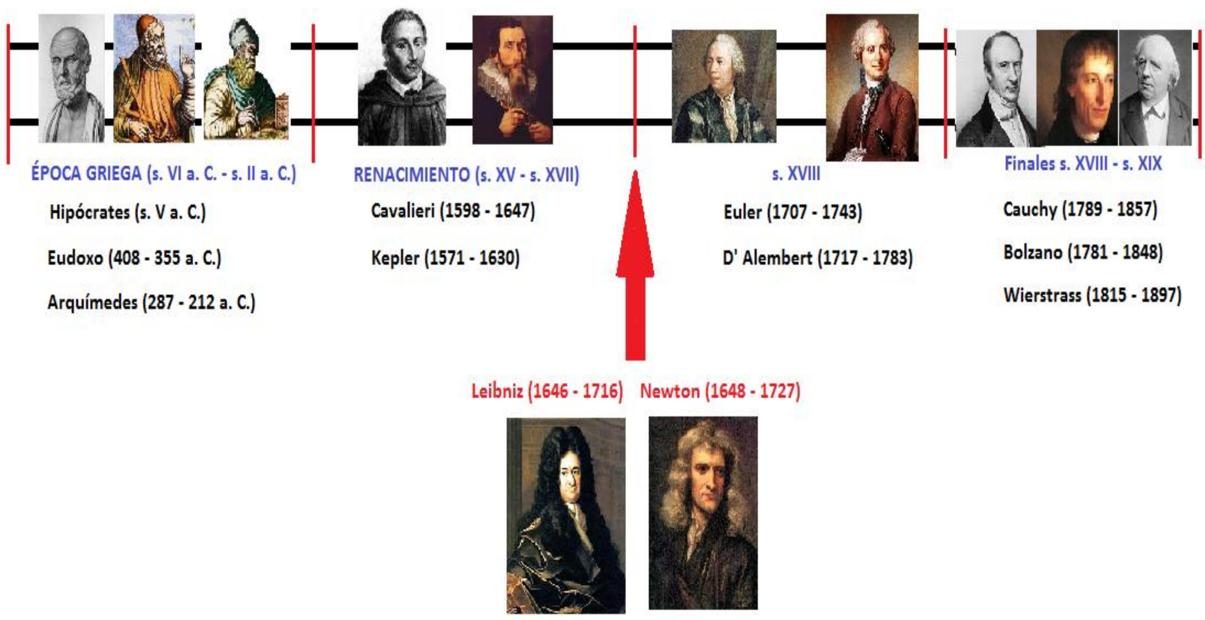


Ilustración 2. Cronología del desarrollo histórico del concepto de límite. Elaboración propia.

3.4. Clase invertida

La clase invertida o Flipped Classroom es un método de enseñanza-aprendizaje basado en la inversión de lo que hasta ahora ha venido siendo una clase tradicional. Consiste en que en el aula se hace lo que se haría en casa y viceversa; es decir, el alumnado asiste desde casa a una lección magistral sin el profesor, mientras que en la clase se pone en práctica la teoría vista en casa con el profesor pero, ¿cómo se asiste a una sesión teórica desde casa?

A través de un vídeo tutorial grabado por el propio docente y que puede ser colgado en internet. En mi caso he creado una aplicación para el teléfono móvil de fácil instalación como se puede ver en el cuadernillo de trabajo individual (*Véase Anexo III*) desde donde los alumnos podrán acceder a dichos vídeos tutoriales con tan sólo hacer un clic en la sección correspondiente. El objetivo que se persigue con el uso de este método es que los alumnos dispongan de más tiempo para hacer ejercicios prácticos en el aula con ayuda del docente y evitar así, en la medida de lo posible, que los estudiantes se vean en la necesidad de asistir a las clases particulares. El alumnado tendrá que ver en casa los vídeos tutoriales, para luego en el aula hacer una reflexión conjunta sobre lo visto y realizar actividades prácticas.

Pero para desarrollar este método es necesaria seguir una estructura, siendo una de las posibles la que refleja Olaizola (2014) y sobre la que basaré mi propuesta:

- Seleccionar o producir el material digital.
- Producir las actividades para comprobar que funcionan correctamente y diagnosticar la comprensión del material.
- Distribuir el material digital.
- Poner en uso dicho material.
- Resolución de dudas y puesta en común.
- Realización de actividades en el aula.

A diferencia de la enseñanza tradicional, en la que el profesor actúa como mero transmisor de conocimientos, a través de este método el docente actúa de guía, siendo el alumno el protagonista del aprendizaje (Jiménez, 2016).

El aula invertida no es un modelo nuevo, sino que se trata de un nuevo enfoque para incrementar el compromiso y la implicación del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera que forme parte de su creación, permite dar un tratamiento más individualizado y además si se aplica bien abarca todas las fases del ciclo de aprendizaje; es decir, de la dimensión cognitiva de Bloom (López, 2014).

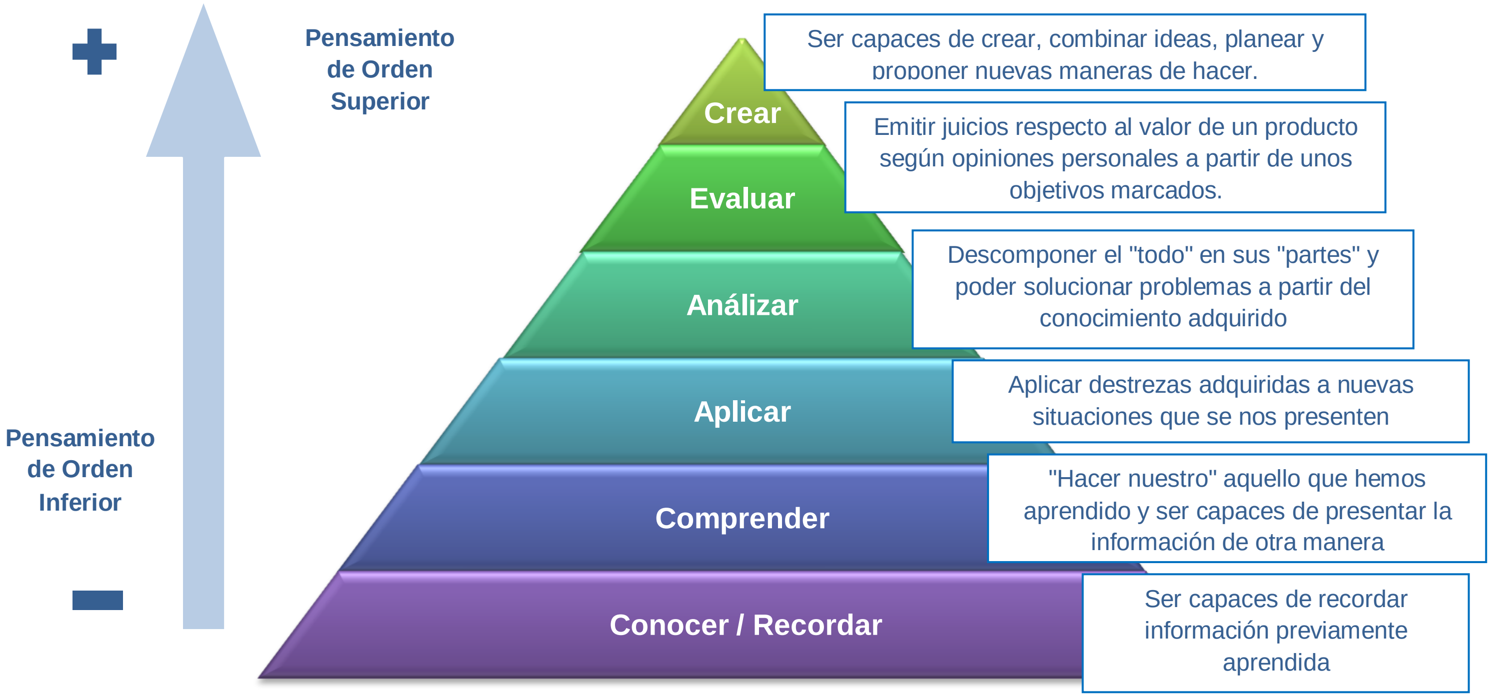


Ilustración 3. Dimensión cognitiva de Bloom actualizada. Elaboración propia.

El aula invertida ofrece una serie de beneficios como son:

- Permite que el docente pueda llevar a cabo actividades más individualizadas con los alumnos en el aula.
- Permite cambiar la distribución lineal del alumnado en el aula, potenciándose así un ambiente colaborativo.
- Refuerza la motivación del alumnado, lo cual fomenta su colaboración o implicación en la tarea.
- Los alumnos pueden acceder a los contenidos en cualquier momento.
- Involucra a las familias en el aprendizaje.
- Fomenta habilidades del alumno como el pensamiento crítico y la resolución de problemas.

Pero por otro lado, según Olaizola (2014), el uso de esta metodología tiene una serie de puntos débiles que hay que tenerse en cuenta para controlarlos: el *espacio y el número de alumnos*, ya que la clase invertida requiere entornos flexibles; los *contenidos y niveles*, pues hay que analizarse si este método es apropiado para los contenidos que se quieren tratar; garantizar que todos los alumnos tengan *acceso a* *los materiales* y el *trabajo del docente*, ya que requiere un mayor trabajo por parte de éste.

3.5. Aprendizaje cooperativo y trabajo en grupo

El aprendizaje no puede reducirse a una metodología tradicional basada en la memorización y el uso de la pizarra, pues las estructuras de aprendizaje cooperativo hacen posible un conocimiento real y verdadero, resultando más ventajoso, beneficioso y enriquecedor que el aprendizaje individualista, ya que desarrolla, entre otras cosas, habilidades sociales (Doroteo Petit, Navarro Montenegro, Chacón Nieto y Arroyo Guzmán, 2007b). Pero para que la cooperación funcione, debe integrar los cinco elementos siguientes:

- *Interdependencia positiva*: Todos los miembros del grupo son necesarios para que la tarea pueda realizarse con éxito.
- *Exigibilidad individual*: Para asegurar la evaluación de los resultados de cada estudiante individualmente, comunicándose estos resultados tanto al grupo como al alumno individualmente.
- *Interacción positiva cara a cara*: Los estudiantes se explican oralmente sus ideas sobre cómo resolver los problemas planteados, las estrategias a seguir, se enseñan unos a los otros lo que saben; es decir, "se ayudan, se asisten, se animan y se apoyan en su esfuerzo para estudiar" (Domingo Peña, 2010, p. 2).
- *Habilidades interpersonales y de trabajo en grupo*: Para un funcionamiento efectivo, como pueden ser: liderazgo, capacidades de decisión, de generar confianza, de comunicación, gestión de conflictos, críticas constructivas, etc., siendo de gran importancia enseñárselas a nuestros alumnos, porque en la mayoría de los casos carecen de ellas.
- *Autoanálisis de grupo*: Deben someterse a actividades de reflexión sobre el trabajo realizado para analizar los objetivos conseguidos y aspectos a mejorar. Esta fase es de vital importancia, ya que durante la misma deben reflexionar sobre lo que han aprendido, siendo éste el momento del constructivismo, donde se intenta encajar el nuevo conocimiento con el ya existente.

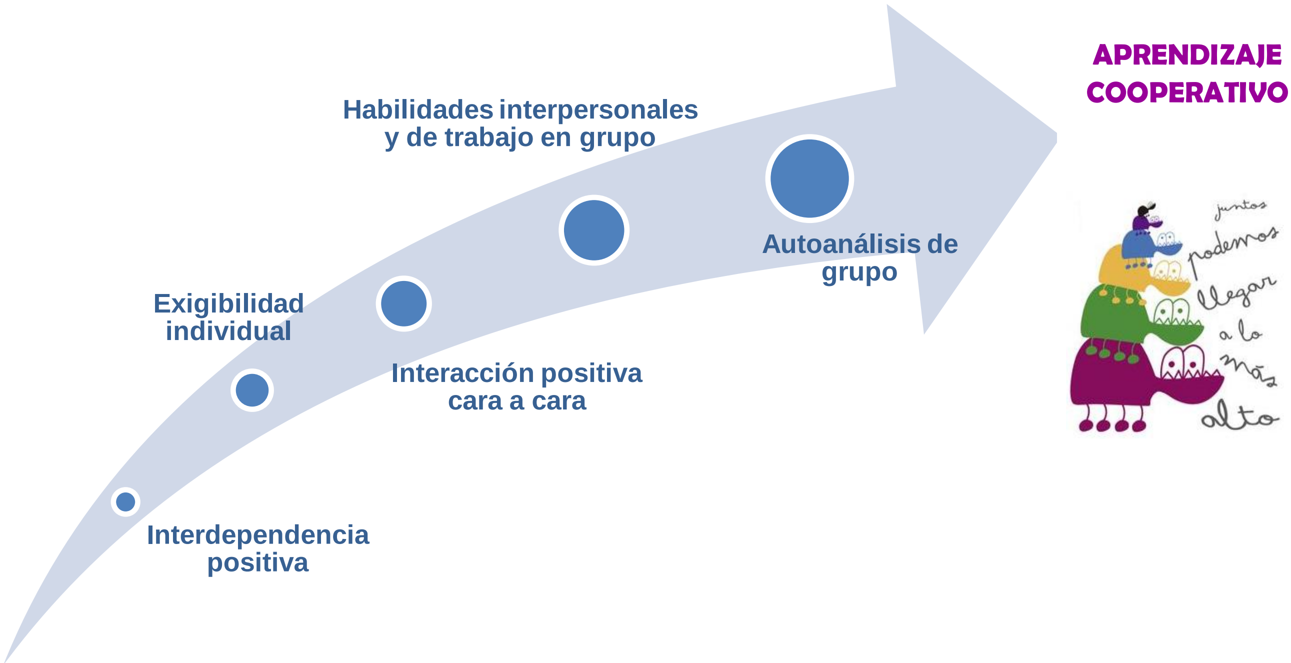


Ilustración 4. Los cinco ingredientes del Aprendizaje Cooperativo. Elaboración propia.

Según Pifarré y Sanuy (2001), en todo proceso de enseñanza-aprendizaje es importante crear espacios de discusión y de reflexión, es decir, de *trabajo en grupo y cooperativo*, porque la oportunidad que tienen los alumnos de ayudarse mutuamente en la resolución de una tarea, de negociar nuevos significados, de desarrollar nuevas estrategias y de construir nuevo conocimiento, puede repercutir positivamente en su aprendizaje.

El aprendizaje cooperativo promueve la comunicación entre los estudiantes, consolida el propio conocimiento al enseñárselo a los compañeros y compañeras de grupo, implica compromiso, hace que el alumno se responsabilice del conocimiento de los demás y no compiten entre ellos, sino que se ayudan unos a los otros. Pero como bien expone Domingo Peña (2010), no hay que entender el aprendizaje cooperativo como una forma que permite a los docentes tener menos trabajo, pues el profesor renuncia a exponer ciertos contenidos, para que los propios estudiantes los aprendan, pero la tarea de preparación, guía de la sesión, evaluación de los resultados, las competencias básicas y el desarrollo de la propia sesión, son elementos que debe controlar y de no regularse con sumo cuidado, pueden llevarle más trabajo aún.

> En el aprendizaje cooperativo el docente es quien planifica la interacción, pero además interviene en mayor o menor medida en el desarrollo del trabajo, orientando, evitando situaciones conflictivas y evaluando por una parte, las capacidades de los estudiantes, sus progresos, y por otra, la experiencia en sí misma, con el fin de mejorar futuras propuestas. (Doroteo Petit et al., 2007b, p. 5)

Así mismo, el trabajo cooperativo, por su propia naturaleza, fomenta el desarrollo de las competencias básicas, sin tener que diseñar sesiones específicas orientadas a su consecución.

Por otro lado, respecto a los alumnos, Hodgson & McConnell (1995) sugieren la necesidad de:

- Que los estudiantes tengan buena voluntad a la hora de participar en el aprendizaje cooperativo.
- Comprensión tanto de los estudiantes como de los docentes sobre los beneficios de este principio de aprendizaje.
- Un sistema de evaluación que facilite la autoevaluación, así como la evaluación entre los distintos agentes (alumnos entre sí, alumno-profesor y profesor-alumno).
- Distribución de poder entre el profesor y los alumnos, que permita a éstos tener control de su propio aprendizaje.

Con respecto a la tarea, Onrubia (1997) establece tres requisitos básicos:

- Que exista una tarea grupal, es decir, una meta específica que los distintos estudiantes que trabajan conjuntamente deben alcanzar como grupo.
- Que la resolución de la tarea requiera necesariamente la contribución de todos y cada uno de los miembros del grupo.
- Que el grupo disponga de todos los recursos necesarios para mantener y hacer progresar la actividad.

Existen diversas estructuras de agrupación cooperativa, como la de *Mapa conceptual a cuatro bandas*, de Kagan (1999, citado en Pujolàs Maset, 2008) y en la que basaré una de las tareas que se le planteará al alumnado. Además utilizaré la técnica cooperativa del Puzle de Aronson, para trabajar con los estudiantes un apartado concreto del tema, como son las indeterminaciones, como ya tenía previsto en mi unidad didáctica original. Aunque se utilicen distintas estructuras de agrupación cooperativa, todas ellas tienen como objetivo principal promover la participación en interacciones estructuradas y equitativa, la interacción del estudiante, la comunicación efectiva y el aprendizaje cooperativo.

A diferencia de mi unidad didáctica original, voy a analizar si las actividades diseñadas tienen en cuenta los cuatro factores propuestos por Johnson, Johnson & Holubec (1994):

- Tener una planificación previa: objetivos previstos, composición de los grupos, asignación de roles, distribución en el aula, etc.
- Explicar al alumnado en qué consiste la actividad académica.
- Coordinar y supervisar la conducta de los alumnos, interviniendo cuando sea necesario.
- Preparar actividades posteriores y evaluar.

Por lo tanto, aplicar en el aula este principio de aprendizaje resulta muy ventajoso no sólo para el estudiante, sino también para el docente ya que, permite hacer tareas de mejor calidad, más complejas y reales, disponer de una estructura de soporte personal y académico, tanto dentro como fuera del aula, favorece la atención a la diversidad, al promover la creación de grupos heterogéneos, donde están en contacto diferentes tipos de personas, con independencia de que tengan más o menos afinidades personales y aumenta las posibilidades de éxito de todos los estudiantes, pues se aprovecha mejor el tiempo académico. En definitiva, tanto los estudiantes como los docentes disfrutan más de las sesiones de clase.

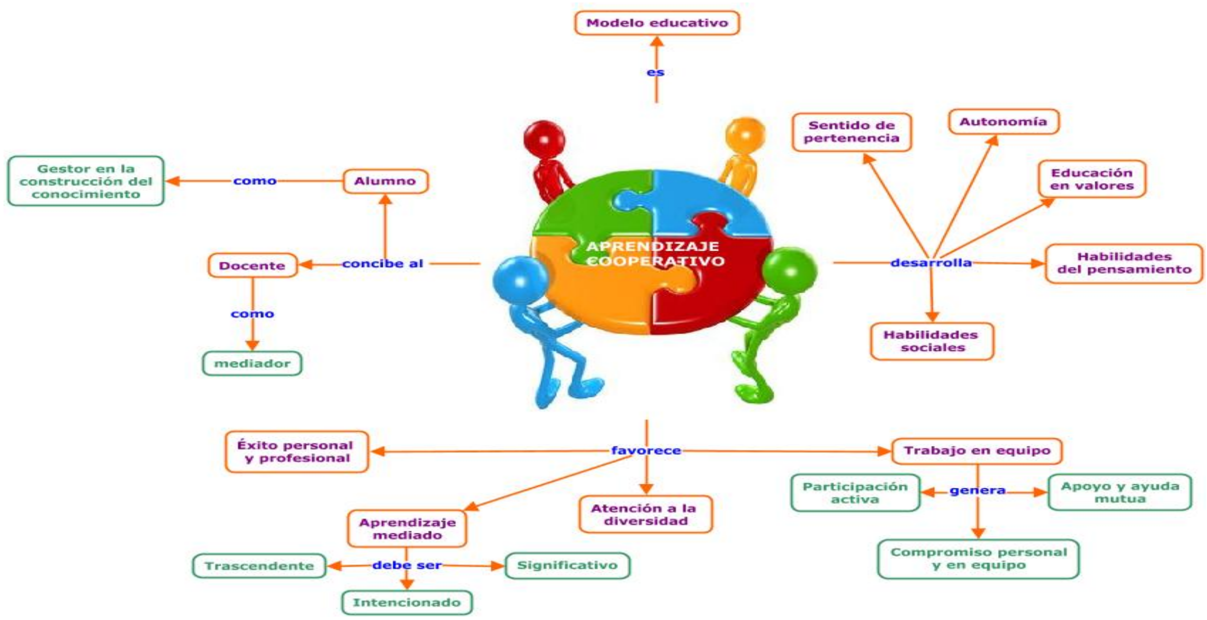


Ilustración 5. Mapa conceptual sobre el Aprendizaje Cooperativo. Elaboración propia.

3.6. Uso de las Tics

En un mundo en continuos y acelerados cambios, donde las nuevas tecnologías ocupan un lugar privilegiado, se hace necesario estar actualizados y propiciar el manejo de recursos tecnológicos en las aulas.

Numerosos estudios han probado que el uso de las Tics en el aula (pizarra digital, ordenadores e Internet), contribuye a una mayor efectividad en el proceso de aprendizaje; a crear otra dinámica pedagógica, dando pie a incorporar nuevas metodologías de aprendizaje, para lograr una enseñanza activa y constructiva; a una mayor participación del alumnado, aumentando la responsabilidad y sensación de autonomía del alumno, ayudándoles a desarrollar nuevas capacidades y ser más creativos; así como a mejorar la motivación, el autoestima del alumnado y los niveles de atención.

Además con el uso de las Tics el docente deja de ser fuente de todo conocimiento y pasa a tomar un papel de guía-orientador, proporcionándole al alumnado las herramientas que necesitan para explorar y elaborar nuevos conocimientos y destrezas (Salinas 1998, citado en Salinas, 2004). Pero para el éxito del proceso se requiere la capacitación del profesorado, por lo que se le ha de ofrecer un proceso de formación que le conduzca a:

- Tener conocimiento y dominio del potencial de las tecnologías.
- Interactuar con la comunidad educativa y social en relación con los desafíos que conlleva la sociedad del conocimiento.
- Ser conscientes de las necesidades formativas de la sociedad.
- Capacidad de planificar el desarrollo de su carrera profesional (Salinas, 2004).

En definitiva, "las Tics otorgan múltiples oportunidades y beneficios: favorecen las relaciones sociales, el aprendizaje cooperativo, el desarrollo de nuevas habilidades, nuevas formas de construcción del conocimiento y el desarrollo de las capacidades de creatividad, comunicación y razonamiento" (Moya Martínez, 2009, p.8).

Aunque en mi unidad didáctica prevista en un principio ya se incluían las Tics, he querido darle un papel más relevante en la presente unidad, utilizando además de *Geogebra* y *CmapTools*, una aplicación de teléfono móvil creada por mí, desde donde los alumnos podrán acceder a distintos vídeos para asistir a las denominadas *Clases invertidas*. Además para que el alumnado disponga de tutorías virtuales, he creado un grupo de WhatsApp a modo de foro de dudas desde donde se podrán comunicar los alumnos entre sí o con el propio docente. Existen dos modalidades de acción tutorial académica, la *reactiva* (puesta en marcha a petición del propio alumno) y la *proactiva* (en la que el profesor la pone en marcha para adelantarse a posibles dudas que les puedan surgir a los estudiantes); pudiendo jugar un papel primordial las Tics, tanto en una como en la otra (Fidalgo, 2010).

3.7. Uso de los juegos

El juego es más que un mero recurso didáctico, a través del cual se puede conseguir un aprendizaje significativo, a la vez que resulta atractivo, entretenido, creativo y motivador para los estudiantes. Se trata de un principio de aprendizaje que ya se valoraba antes de Piaget y que éste potenció clasificándolos a partir de sus principios teóricos en: juegos de ejercicio, juegos simbólicos y juegos de reglas.

Para muchos aunque la matemática pueda ser muchas cosas, nunca deja totalmente de ser un juego, de hecho la matemática y los juegos han cruzado sus caminos muy frecuentemente a lo largo de la historia (De Guzmán Ozámiz, 2007), así por ejemplo, el propio Leibniz (1715, citado en De Guzmán Ozámiz, 1989) decía que: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos. El espíritu se encuentra ahí a sus anchas…" (p. 62).

Con el uso de los juegos pretendo que los alumnos refuercen y afiancen los contenidos vistos en la unidad, además de aportarles, según Doroteo Petit, Navarro Montenegro, Chacón Nieto y Arroyo Guzmán (2007c), las siguientes ventajas:

- Rompe la rutina dentro del aula, no dando espacio al aprendizaje tradicional.
- Desarrolla las capacidades particulares de los estudiantes hacia la Matemática, ya que mediante ellas se aumenta la disposición al aprendizaje.
- Favorece la socialización entre estudiantes, así como con sus docentes.
- Fortalece la creatividad de los estudiantes.
- Desarrolla el espíritu crítico y autocrítico, la disciplina, el respeto, la perseverancia, la cooperación, el compañerismo, la lealtad, la seguridad, la audacia, la puntualidad, entre otros valores y actitudes.
- Propicia el compañerismo, el gusto por la actividad y la solidaridad.

Pero como refleja Caneo (1987, citado en Doroteo Petit et al., 2007c) todo juego debe cumplir una serie de principios, así por un lado debe ser sencillo y fácil de entender; debe provocar el interés de los estudiantes; contribuir a la socialización, haciendo que los estudiantes se expresen sin miedo, ni temores; debe tener en cuenta las diferencias individuales que pudieran existir entre los alumnos y por último debe adecuarse a la edad cronológica y mental de los mismos.

En la unidad didáctica original incluí un único juego denominado Quién tiene, Yo tengo…, basado en las reglas de García Azcárate (s.f.). Para ello me elaboré mis propias tarjetas basadas en el tema en cuestión (*Véase Anexo XIII*), pero en la unidad didáctica mejorada he querido incluir un juego más: Trivial sobre Límites, Continuidad y Asíntotas (*Véase Anexo XIV*) basado en las reglas de García Azcárate (2012) para el que he necesitado crear un tablero de juego, así como tarjetas de color rojo, amarillo, azul y verde; con el propósito de que trabajen aún más los cambios de un sistema de representación a otro.

3.8. Mapas conceptuales

"Los mapas conceptuales son un instrumento que facilita la evaluación formativa del alumnado en diferentes niveles educativos" (Moreira y Novak, 1988 citado en Serradó, Cardeñoso y Azcárate, 2004, p. 91).

Son un instrumento de evaluación que permiten detectar errores conceptuales y facilitan el análisis de los obstáculos que inciden en la construcción del conocimiento; es decir, permiten detectar cómo va evolucionando el conocimiento del propio alumno, logrando aprendizajes significativos. Para Serradó et al. (2004), los docentes deberían planificar actividades que permitan aflorar los obstáculos de los estudiantes; así como diagnosticarlos, siendo precisamente los mapas conceptuales una herramienta que favorecen ambas finalidades (Costamagna, 2001 citado en Serradó et al., 2004).

Según Ojeda, Díaz, González, Pinedo y Hernández (2007) las características esenciales de todo mapa conceptual son:

- *Jerarquización*. Los conceptos deben estructurarse de manera jerárquica, situando los más generales e inclusivos en la parte superior y los más específicos en la parte inferior.
- *Selección*. Deben sintetizar lo más significativo del tema.
- *Impacto visual*. El propio Novak (1998), dice: “Un buen mapa conceptual es conciso y muestra las relaciones entre las ideas principales de un modo

simple y vistoso, sobre la base de la notable capacidad humana para la representación visual".

- El *uso de palabras enlace* (verbos, preposiciones, conjunciones, etc.), dan sentido al mapa.
- Los conceptos iguales que se derivan de una misma idea principal, deben situarse en un mismo nivel.

Estas características serán valorables a través de la rúbrica prevista para evaluar la construcción de un mapa conceptual que deberán elaborar los alumnos al finalizar la unidad didáctica. La actividad se basa en una estrategia de aprendizaje cooperativo conocida como *Mapa conceptual a cuatro bandas*, donde cada grupo deberá realizar un mapa conceptual de alguna de las partes del tema para luego hacer una puesta en común y construir entre todos un único mapa conceptual que englobe todos los contenidos vistos. Para la construcción de dicho mapa se le enseñará a los alumnos a trabajar con la herramienta CmapTools, explicándoles cuáles son los elementos que deben integrar todo mapa conceptual: conceptos, palabras de enlace (palabra de nexo entre dos conceptos) y proposiciones (enlace entre dos conceptos).

Por tanto los mapas conceptuales son una importante fuente de información para que el profesor pueda regular el proceso de enseñanza-aprendizaje; bien atendiendo las necesidades de cada alumno de forma individualizada o bien realizando un cambio más generalizado en el proceso.

4. Presentación de la Unidad Didáctica Mejorada

4.1. Justificación del sentido de la Unidad Didáctica Mejorada.

Como ya se ha hecho manifiesto con anterioridad, el presente documento trata sobre una propuesta de mejora de la unidad didáctica *Límite de una función. Continuidad y Asíntotas*, que se pretendía llevar a cabo en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales durante el período de prácticas. El eje vertebrador de esta unidad mejorada será la motivación y la adquisición de autonomía por parte de los estudiantes, ya que nos encontramos ante un grupo-clase desmotivado, con dificultades para llevar la materia, dependiendo la mayoría del alumnado de las clases particulares, a pesar del bajo nivel económico de las familias y a esto hay que añadirle un clima escolar negativo, marcado por un entorno social problemático y unas condiciones externas difíciles.

Frente a ello se quiere crear un ambiente de trabajo tranquilo y ordenado, fomentando las buenas relaciones, atendiendo las necesidades de cada alumno y alumna de forma individualizada, extrapolando los contenidos a la propia realidad, pero sobre todo haciendo al alumnado partícipe del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Según Azcárate (s.f.), las dificultades que se dan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, son de diversa índole, siendo uno de los tipos aquellas dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas, es por eso que hay que intentar por diversos medios que los estudiantes le encuentren un sentido y vean el placer lúdico que es capaz de proporcionarles, con el objetivo de involucrarlos en ella, de un modo más personal y humano.

Leyendo sobre la inclusión de la sostenibilidad en el currículum, he reflexionado sobre la gran responsabilidad de nuestra labor docente, ya que nuestra actuación debe estar dirigida hacia trabajar por un mundo mejor, formando a nuestros alumnos de manera integral, en todas sus capacidades y para ello como muestran García González, Jiménez Fontana, Azcárate Goded y Navarrete Salvador (2013) en la siguiente figura, hay que tenerse en cuenta una serie de características:

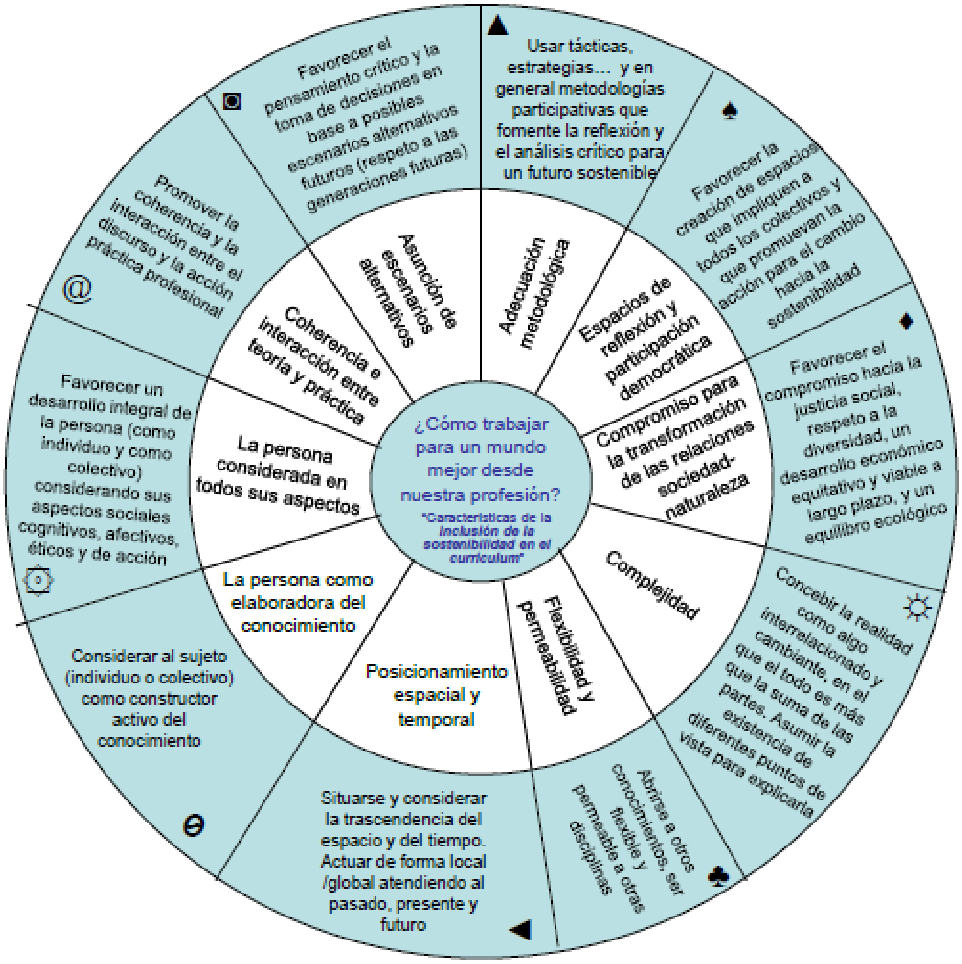


Ilustración 6. Educar en sostenibilidad, grupo de discusión UCA.

Características, que en cierto modo he querido reflejar en el presente trabajo, incluyendo estrategias metodológicas que favorezcan la interacción entre el alumnado, creando espacios de reflexión y debates donde exista una participación democrática y se fomente el espíritu crítico, favoreciendo el desarrollo pleno de los estudiantes, haciendo que sean ellos mismos los que participen en la construcción del conocimiento, entendiendo que los alumnos no son iguales; así como transmitiendo al alumnado la importancia de las Matemáticas en la vida diaria.

"Un sujeto es competente matemáticamente cuando es capaz de utilizar las matemáticas en los diferentes contextos de su vida, personales y profesionales, y resolverlos eficazmente como un ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (Niss, 2004 y OCDE, 2005 citados en Azcárate y Cardeñoso, 2012, p.37).

Por todo esto, he considerado mantener algunos de los principios metodológicas y recursos previstos en mi unidad didáctica original, a pesar de no haberlas podido llevar a la práctica, así como incluir una serie de mejoras:

- Hacer un cambio en la temporalización de la unidad didáctica, pasando de las 18 sesiones previstas en un principio, a 24 sesiones.
- Cambiar el cuestionario de detección de ideas previas (*Véase Anejo I del Anexo XXI*) por la actividad *Lluvia de ideas*, a partir de la cual se llevará a cabo la construcción de un esquema que incluya todos los contenidos que se espera que hayan adquirido los alumnos, con la ayuda de éstos (*Véase Anexo I).*
- Introducir tareas motivacionales sobre algunas curiosidades matemáticas como son la relación entre el número e y la capitalización compuesta, la sucesión de Fibonacci y su relación con el número de oro, la cinta de Möbius, el hotel infinito de Hilbert; así como incluir nuevas actividades que modelizan fenómenos reales (deporte, historia, economía, etc.).
- Investigación sobre la evolución histórica del concepto de límite visto desde las aportaciones de grandes personajes matemáticos (*Véase el Anexo V*).
- Introducción de la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$, pero de manera intuitiva, siendo los propios alumnos los que llegan a deducirla, con la ayuda del docente, para ya en un último momento enunciarles la definición rigurosa.
- Sustitución de las clases tradicionales por las *Clases Invertidas*, lo cual conlleva a su vez el uso de las Tics (en este caso, una aplicación de móvil y un grupo de WhatsApp a modo de foro de dudas).
- Incluir una nueva estrategia de aprendizaje cooperativo, *Mapa conceptual a cuatro bandas*, ya que aunque en mi unidad didáctica original, los grupos debían trabajar con la herramienta CmapTools para elaborar un mapa conceptual sobre una parte concreta del tema, no se contemplaba en la actividad la construcción conjunta de un único mapa conceptual que englobara todos los contenidos de la unidad, mientras que en la presente unidad didáctica mejorada sí se contempla.
- Hacer algunos cambios en la evaluación, incluyendo nuevos instrumentos, nuevos criterios de evaluación y calificación, etc. En el apartado de evaluación que aparece posteriormente se hará un detalle más exhaustivo de la misma.

- Se añadirá un nuevo juego, *Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas* (*Véase el Anexo XIV*), con el que los estudiantes podrán afianzar los conocimientos vistos en la unidad, de manera más lúdica y divertida.

En definitiva, lo que se pretende con este trabajo es mostrar una alternativa diferente a la tradicional para el tratamiento de los límites en el aula, un tema de gran dificultad para los estudiantes de este nivel por ser la primera vez a la que se enfrentan a él y porque requieren un pensamiento de orden superior, como la abstracción, análisis, etc. y con la que podamos lograr un aprendizaje de calidad. Es decir, un aprendizaje *significativo* de manera que sea un proceso de construcción personal, partiendo de las ideas previas del alumnado; *útil* (que le sirva al estudiante en su contexto individual, social o profesional); *aplicado y por tanto duradero*, ya que el conocimiento que no se pone en práctica termina por desaparecer (aprender para aplicar); *productivo o generativo* (aprender para aprender); debe formar al estudiante de manera *integral* (también como persona) y *reflexivo o metacognitivo*, pues conocer cómo aprenden les ayudará a trasferir el conocimiento y mejorar sus puntos débiles (Doménech, 2012).

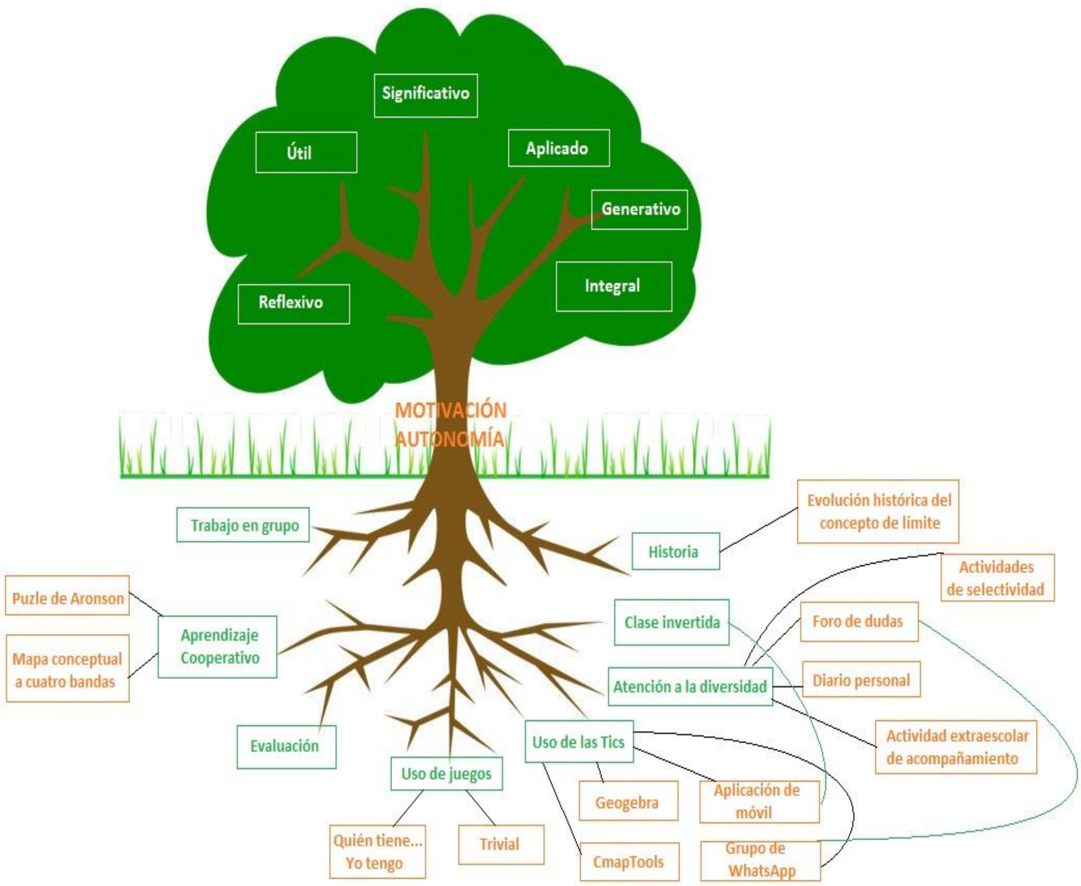


Ilustración 7. Esquema con las mejoras, objetivos de la unidad y finalidad. Elaboración propia.

4.2. Unidad Didáctica Mejorada

En este apartado abordaremos los elementos integradores del currículum; es decir, los objetivos a alcanzar, las competencias a desarrollar, los contenidos a tratar y la metodología que se prevé llevar a cabo a través de esta unidad didáctica mejorada. Para ello se ha tomado como referencia el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato; así como el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

4.2.1. Objetivos

Los objetivos que se pretende que el alumnado alcance con esta unidad didáctica mejorada se ajustan a los expuestos en la unidad didáctica original que se anexa (*Véase Anexo XXII*), tanto los generales de la etapa (Bachillerato), los de la materia (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I), como los específicos, aunque se añaden algunos más (O5 y del O16 al O22, ambos inclusive) que considero necesarios según lo vivido en las prácticas, de acuerdo a la metodología y los recursos que se prevén; así como para potenciar la motivación de los estudiantes y hacerles más autónomos. Por tanto los objetivos específicos son:

- **O1.** Comprender la idea intuitiva de límites, ya sea a través de una tabla de valores o gráficamente y saber diferenciarlos.
- **O2.** Conocer y distinguir límites en un punto, en el infinito, finitos e infinitos.
- **O3.** Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos a través de una tabla, mediante una gráfica o numéricamente.
- **O4.** Comprender el concepto de límite en un punto, sabiendo argumentar la existencia o no del límite de una función.
- **O5.** Conocer y deducir de forma intuitiva la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$.
- **O6.** Calcular el límite de funciones en un punto, de forma gráfica o analítica, sabiendo que en el caso de funciones definidas a trozos, es necesario el cálculo de los límites laterales.
- **O7.** Calcular el límite de funciones en el infinito de forma gráfica y analítica.
- **O8.** Aplicar el cálculo de límites de funciones que modelizan diversos fenómenos.
- **O9.** Operar con el infinito y reconocer indeterminaciones del tipo:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \frac{k}{0}, \infty - \infty, 1^{\infty}$$

- **O10.** Resolver límites en los que se presente algún tipo de indeterminación.
- **O11.** Conocer el concepto de continuidad en un punto, relacionándolo con la idea de límite y en el caso de que no sea continua, identificar la causa de la discontinuidad. Extender el concepto a la continuidad en un intervalo.
- **O12.** Conocer y calcular la continuidad de funciones elementales (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas) y de funciones que modelizan diversos fenómenos.
- **O13.** Conocer el concepto de los diferentes tipos de asíntotas (vertical, horizontal y oblicua), así como, saber calcularlas, estudiar la posición relativa de la gráfica de la función, con respecto a la asíntota y representarlas.
- **O14.** Representar funciones que cumplan características dadas, ya sea en papel o usando Geogebra como herramienta tecnológica.
- **O15.** Saber estructurar y organizar los contenidos teóricos a través de mapas conceptuales, mostrando criterio para seleccionar la información más significativa y relevante, haciendo uso de la herramienta tecnológica CmapTools.
- **O16.** Valorar la importancia de los límites en la realidad, viendo la aplicación de los mismos en otras disciplinas como el Deporte, la Economía, etc.
- **O17.** Mostrar interés por la evolución histórica del concepto de límite.
- **O18.** Conocer la conexión del límite con otros contenidos matemáticos a través de una serie de curiosidades como la relación entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo o la capitalización compuesta y el número *e.*
- **O19.** Trabajar con el grupo de forma responsable, organizada, comunicándose, compartiendo ideas, adquiriendo compromiso con la tarea que se está realizando y atendiendo a las necesidades tanto individuales como grupales.
- **O20.** Mostrar habilidades sociales y comunicativas, fomentar la participación democrática y consensuada y potenciar las relaciones positivas tanto en el grupo como en el aula.
- **O21.** Mostrar capacidad de reflexión y análisis crítico a la hora de resolver problemas.
- **O22.** Mejorar el trabajo autónomo de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, haciéndoles partícipes en la construcción del propio conocimiento.

4.2.2. Competencias

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (*BOE 3-1-2015*), se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, con el objetivo de dar un nuevo enfoque que favorezca los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender. A efectos de este Real Decreto y de la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, en su Anexo I, las competencias básicas del currículo son las siguientes:

- **CL.** Comunicación lingüística.
- **CMCT.** Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
- **CD.** Competencia digital.
- **AAP.** Aprender a aprender.
- **CSC.** Competencias sociales y cívicas.
- **SIEE.** Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
- **CEC.** Conciencia y expresiones culturales.

Las competencias suponen una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, etc., es decir, de *saber, saber hacer y saber ser.*

En la unidad didáctica original se pretendía el desarrollo de las seis primeras competencias básicas, sin embargo en esta nueva unidad se contempla además la competencia en *Conciencia y expresiones culturales*, al incorporar la historia, así como ciertas tareas motivacionales sobre curiosidades matemáticas. Por tanto las competencias claves a desarrollar, a través de los objetivos específicos marcados, así como de las estrategias de aprendizaje utilizadas, serán:

CB	SABER	SABER HACER	SABER SER
CL	El vocabulario y terminología necesaria para comunicarse en función del contexto.	Expresarse de forma oral y escrita en diferentes situaciones comunicativas como son el trabajo en grupo y aprendizaje cooperativo.	Estar dispuesto al diálogo crítico y constructivo, mostrar interés por la interacción con los demás y reconocer y valorar el diálogo como herramienta fundamental para la convivencia.
CM	Conocer los términos y conceptos matemáticos (límite de una función, continuidad, asíntotas, indeterminaciones, etc.), así como métodos y algoritmos matemáticos.	Resolver determinados problemas, analizar gráficos y representaciones matemáticas, analizar si una función es continua o no argumentando en caso de no serlo, el tipo de discontinuidad presentada, así como utilizar y manipular determinadas herramientas.	Que muestren rigor, así como respeto por los datos y su veracidad.
CD	Conocer las características de las aplicaciones empleadas en el aula (Geogebra, CmapTools, etc.)	Representar gráficamente funciones con determinadas características, a través de Geogebra y organizar y estructurar la información a través de mapas conceptuales con la herramienta CmapTools.	Mostrar motivación por el aprendizaje y uso de las nuevas tecnologías.

CB	SABER	SABER HACER	SABER SER
AAP	Conocer las distintas estrategias empleadas para llevar a cabo las tareas.	Establecer estrategias de planificación en la resolución de las tareas, así como de evaluación del resultado obtenido y el proceso llevado a cabo.	Motivarse y mostrar curiosidad por aprender, sentirse partícipe del proceso y resultado de su aprendizaje y mostrar un espíritu crítico.
CSC	Comprender el concepto de respeto, igualdad y tolerancia.	Saber comunicarse de forma constructiva y argumentada con los demás.	Mostrar motivación por participar de forma democrática y consensuada en los debates que se abran en clase, ser tolerantes y respetuosos con las opiniones del resto de compañeros y mostrar interés por problemas de la vida cotidiana.
SIEE	Tener conocimiento sobre el diseño e implementación del plan seguido en la resolución de problemas.	Tener capacidad de análisis, planificación, organización y gestión. Saber comunicarse con el grupo, presentar y representar.	Tener iniciativa, interés a la hora de realizar las tareas, relacionarse con los demás a través del trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo, así como actuar con creatividad.
CEC	Tener conocimiento sobre la evolución histórica del concepto de límite, conocer las aportaciones de grandes personajes matemáticos a la materia; así como anécdotas matemáticas pasadas.	Ser capaz de emplear distintos materiales y recursos para el diseño de las tareas de investigación.	Mostrar interés, respeto y valoración crítica sobre la historia de la matemática.

Tabla 1. Contribución de la unidad didáctica mejorada al desarrollo de las competencias básicas.

Además de las competencias básicas, la presente unidad contribuirá al desarrollo de las ocho subcompetencias matemáticas de Niss:

- **PM.** Pensar matemáticamente.
- **AM.** Argumentar matemáticamente.
- **CM.** Comunicar con las matemáticas y comunicar sobre matemáticas.
- **MM.** Modelar matemáticamente.
- **PyRPM.** Plantear y resolver problemas matemáticos.
- **REM.** Representar entidades matemáticas.
- **USM.** Utilizar símbolos matemáticos.
- **UAyH.** Utilizar ayudas y herramientas.

En la siguiente tabla se muestra la vinculación de los objetivos específicos marcados con esta unidad y dichas subcompetencias:

Objetivos específicos		PM	AM	CM	MM	PyRPM	REM	USM	UAyH
1	Comprender la idea de límites, ya sea a través de una tabla de valores o gráficamente y saber diferenciarlos.	X	X	X		X	X	X	X
2	Conocer y distinguir límites en un punto, en el infinito, finitos e infinitos.	X	X	X		X		X	X
3	Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos a través de una tabla, mediante una gráfica o numéricamente.	X	X	X		X	X	X	X
4	Comprender el concepto de límite en un punto, sabiendo argumentar la existencia o no del límite de una función.	X	X	X		X		X	X
5	Conocer y deducir de forma intuitiva la definición formal de límite ($\varepsilon - \delta$).	X	X	X		X	X	X	X
6	Calcular el límite de funciones en un punto a través de su gráfica o de forma analítica, sabiendo que en el caso de funciones definidas a trozos, es necesario el cálculo de los límites laterales.	X	X	X		X		X	X
7	Calcular el límite de funciones en el infinito de forma gráfica y analítica.	X	X	X		X		X	X
8	Aplicar el cálculo de límites de funciones que modelizan diversos fenómenos.	X	X	X	X	X		X	X
9	Operar con el infinito y reconocer indeterminaciones del tipo: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{k}{0}, \infty - \infty, 1^{\infty}$	X	X	X		X		X	X
10	Resolver límites en los que se presente algún tipo de indeterminación.	X	X	X		X		X	X
11	Conocer el concepto de continuidad en un punto, relacionándolo con la idea de límite y en el caso de que no sea continua, identificar la causa de la discontinuidad. Extender el concepto a la continuidad en un intervalo.	X	X	X		X		X	X
12	Conocer y calcular la continuidad de funciones elementales (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas) y de funciones que modelizan diversos fenómenos.	X	X	X	X	X		X	X
13	Conocer el concepto de los diferentes tipos de asíntotas (vertical, horizontal y oblicua), así como, saber calcularlas, estudiar la posición relativa de la gráfica de la función, con respecto a la asíntota y representarlas.	X	X	X		X		X	X
14	Representar funciones que cumplan características dadas ya sea en papel o usando Geogebra como herramienta tecnológica.	X	X	X		X	X	X	X
15	Saber estructurar y organizar los contenidos teóricos a través de mapas conceptuales, mostrando criterio para seleccionar la información más significativa y relevante, haciendo uso de la herramienta tecnológica CmapTools.	X	X	X		X		X	X

Objetivos específicos		PM	AM	CM	MM	PyRPM	REM	USM	UAyH
16	Valorar la importancia de los límites en la realidad, viendo la aplicación de los mismos en otras disciplinas como el Deporte, la Economía, etc.	X	X	X	X	X		X	X
17	Mostrar interés por la evolución histórica del concepto de límite.	X	X	X				X	X
18	Conocer la conexión del límite con otros contenidos matemáticos a través de una serie de curiosidades como la relación entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo o la capitalización compuesta y el número *e*.	X	X	X		X		X	X
19	Trabajar con el grupo de forma responsable, organizada, comunicándose, compartiendo ideas, adquiriendo compromiso con la tarea que se está realizando y atendiendo a las necesidades tanto individuales como grupales.	X	X	X				X	X
20	Mostrar habilidades sociales y comunicativas, fomentar la participación democrática y consensuada y potenciar las relaciones positivas tanto en el grupo como en el aula.	X	X	X				X	X
21	Mostrar capacidad de reflexión y análisis crítico a la hora de resolver problemas.	X	X	X		X		X	X
22	Mejorar el trabajo autónomo de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, haciéndoles partícipes en la construcción del propio conocimiento.	X	X	X		X		X	X

Tabla 2. Vinculación entre los objetivos a alcanzar y las subcompetencias de Niss.

Para alcanzar estos objetivos plantearemos actividades que fomenten la obtención de los mismos y el desarrollo de las subcompetencias matemáticas de Niss. Así mismo, comentar que algunas de las subcompetencias como: *Pensar matemáticamente*, *Argumentar matemáticamente*, *Comunicar matemáticamente*, *Utilizar símbolos matemáticos* y *Utilizar ayudas y herramientas*, se desarrollaran durante la obtención de todos los objetivos, la primera de ellas, porque es inherente a la propia materia y las dos siguientes porque una parte de la unidad, va a consistir en el trabajo en grupo, así como el trabajo cooperativo, de manera que la argumentación y la comunicación estarán presentes en todo momento; así como el uso de simbología matemática y uso de herramientas como los juegos que les ayudarán en la actividad matemática y su alcance, la aplicación de móvil para la clase invertida y aplicaciones informáticas (*Geogebra y CmapTools*) para la representación de funciones y mapas conceptuales.

4.2.3. Contenidos

Otro de los elementos integradores del currículo son los contenidos o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de las competencias. En la unidad didáctica mejorada se mantienen los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales previstos en la unidad didáctica original (*Véase Anexo XXII*), aunque se añaden algunos nuevos, de acuerdo a los cambios propuestos.

A continuación se muestra el mapa de conceptos, de la unidad didáctica mejorada, donde aparecen sombreados de color amarillo los conceptos nuevos a tratar en el aula, como son: el concepto de sucesión, que lo veremos a través de dos ejemplos muy conocidos de sucesión (la de *Fibonacci* que a su vez conllevará el tratamiento del *número de oro* y *la sucesión de la capitalización compuesta*, a partir de la cual veremos el *número e*). Por otro lado cuando se esté tratando las operaciones con el infinito se aprovechará para ver ciertas curiosidades matemáticas relacionadas con el concepto de infinito: la *Cinta de Möbius* y el *Hotel infinito de Hilbert*. Se añade además como mejora la definición formal de límite; es decir, la definición $\varepsilon - \delta$.

He querido relacionar los conceptos de acuerdo a los objetivos que se pretende que alcance el alumnado; así en primer lugar quiero que éstos sepan identificar los tipos de límites que existen, las indeterminaciones que se pueden derivar de los mismos; así como la relación entre las mismas y los distintos tipos de asíntotas. Por otro lado, se ha querido reflejar la existencia o no de límite, según el estudio de los límites laterales y a su vez se ha conectado la existencia o no de límite con el estudio de la continuidad añadiendo el valor de la función en un punto. En caso de no ser continua la función en un punto, aparecen los distintos tipos de discontinuidad, según la condición que no cumpla la función. Como último paso en la continuidad, se realizará el estudio de la misma pero extendida a un intervalo, lo cual está directamente relacionado con el tipo de función que sea (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales ó logarítmicas).

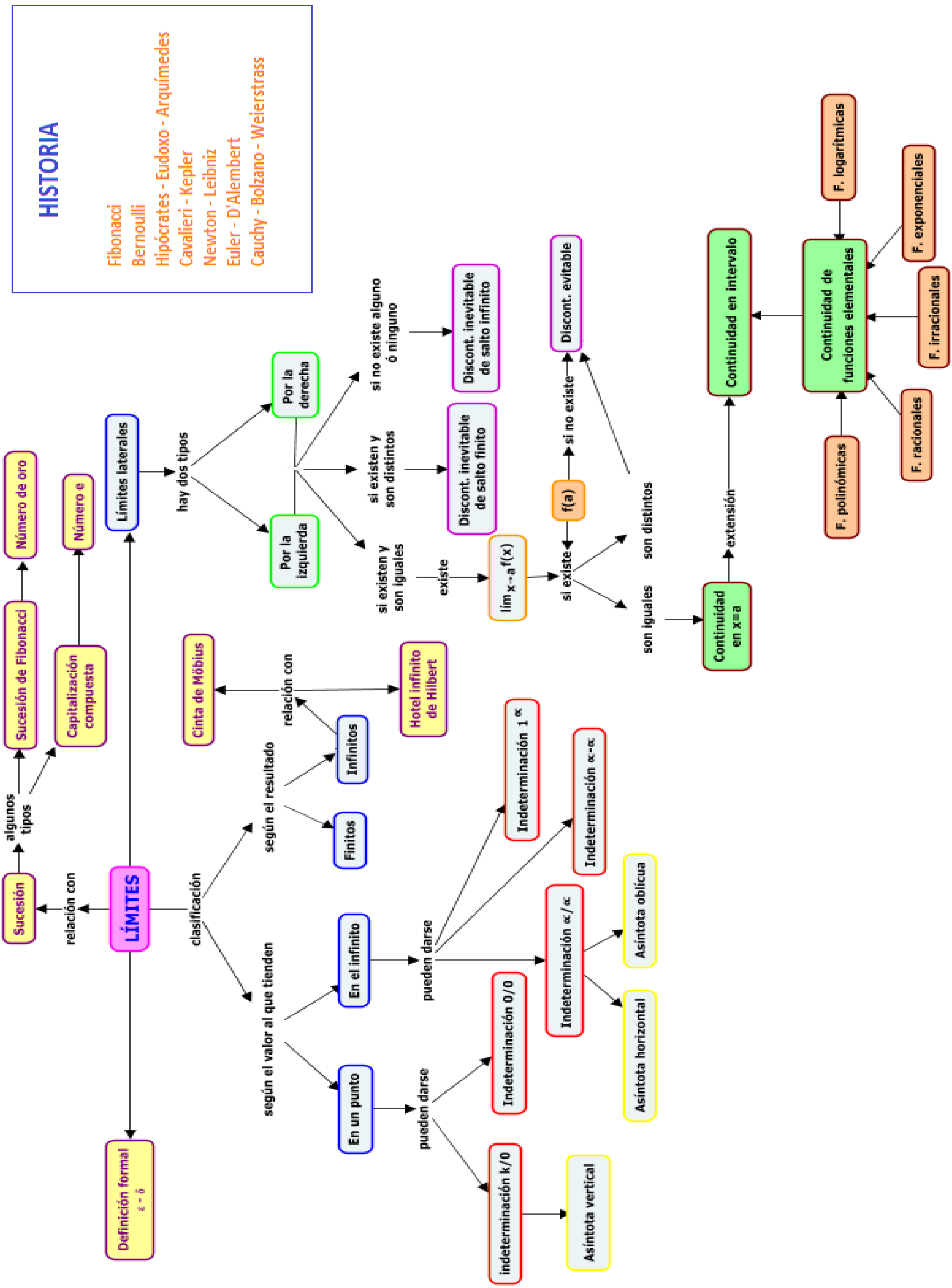


Ilustración 8. Mapa conceptual sobre los contenidos conceptuales a desarrollar en la unidad didáctica mejorada.

Por otro lado, los *contenidos procedimentales* que van a facilitar el logro de los objetivos propuestos son:

- Determinación de los límites laterales de una función en un punto, así como su utilización para determinar la existencia o no del límite de la función en dicho punto.
- Determinación del límite de una función a través de su gráfica ó tabla de valores.
- Utilización del concepto de límite de una función en un punto para discutir la continuidad de la función en dicho punto.
- Determinación de límites indeterminados de funciones.
- Deducción de la definición formal $(\varepsilon - \delta)$, de límite.
- Investigación sobre la evolución histórica del concepto de límite.
- Investigación sobre la relación entre la sucesión de Fibonacci y el número áureo.
- Utilización de la continuidad de funciones elementales para discutir la continuidad de una función dada a trozos.
- Clasificación de las discontinuidades que puede presentar una función.
- Determinación de la continuidad de una función dada por su gráfica.
- Determinación de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función.
- Determinación de la posición relativa de las asíntotas, con respecto a la gráfica de la función, así como la representación de las asíntotas y las ramas asintóticas.
- Utilización de la aplicación Geogebra para representar gráficamente funciones con determinadas características.
- Utilización de la herramienta CmapTools, para construir mapas conceptuales.

Por último, los *contenidos actitudinales* que se trabajarán a lo largo de la presente unidad serán:

- Estar dispuesto al diálogo crítico y constructivo.
- Mostrar rigor y respeto por los datos y su veracidad.
- Mostrar motivación por el aprendizaje, así como por el uso de las nuevas tecnologías.
- Motivarse y mostrar curiosidad por aprender, sentirse partícipe del proceso y resultado de su aprendizaje, así como de la evaluación.
- Desarrollar la capacidad de reflexión crítica y autocrítica.
- Mostrar motivación por participar de forma democrática y consensuada en los debates que se abran en clase, ser tolerantes y respetuosos con las opiniones del resto de compañeros y mostrar interés por problemas de la vida cotidiana.

- Tener iniciativa, interés a la hora de realizar las tareas, relacionarse con los demás a través del trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo, así como actuar con creatividad.

4.2.4. Metodología

La metodología es el conjunto de criterios y decisiones que organizan, de forma global y activa, la acción didáctica en el aula; es decir, el papel que juegan el profesor y los alumnos, utilización de medios y recursos, el tipo de actividades llevadas a cabo, la organización del espacio, los tiempos, agrupamientos, secuenciación o temporalización, los tipos de tareas, etc.

En la unidad didáctica original se pretendía llevar a cabo una metodología mixta, que combinase clases magistrales con el trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo. A pesar de ser una generación que nos cuesta erradicar la enseñanza tradicional, he querido dar un salto con este trabajo, siendo una de las principales mejoras de la unidad la sustitución de la metodología tradicional por las clases invertidas, haciendo uso de una aplicación de móvil creada por mí.

Durante el desarrollo de la unidad didáctica mejorada se distinguirán cuatro momentos diferenciados:

MOMENTO 1. Arrancando motores

Un primer momento, donde realizaré una indagación sobre los conocimientos previos del alumno, como parte fundamental para elaborar estrategias de planificación y actuación dentro del aula, a través de la actividad *Lluvia de ideas (Véase Anexo I)*.

Además al igual que en la unidad didáctica original, se pasará un cuestionario con preguntas personales, con el objetivo de conocer un poco más al alumnado *(Véase el Anexo II)*.

A partir de este momento, estaremos en condiciones de comenzar el desarrollo de los contenidos de la unidad, con una tarea introductoria y motivacional sobre la sucesión de Fibonacci que aparece en el cuadernillo de trabajo individual *(Véase Anexo III)*.

MOMENTO 2. Clases invertidas

Los contenidos teóricos del tema se desarrollarán mediante la estrategia metodológica conocida como *Clase invertida*, de manera que los alumnos deberán ver en sus casas un vídeo con explicaciones teóricas sobre el apartado en cuestión, de la unidad, que se vaya a tratar en el aula, para luego una vez en ella dedicar las sesiones a la realización de ejercicios prácticos, con la ayuda del docente.

Para ello he creado una aplicación de móvil, desde la que los estudiantes podrán acceder a los vídeos explicativos, así como un cuadernillo (*Véase Anexo III)*, donde se recogerán todos los contenidos teóricos, con ejemplos y actividades específicas de cada apartado, actividades motivacionales sobre algunas curiosidades matemáticas, además de una relación final con *actividades de repetición y consolidación* sobre todos los apartados dados en la unidad, con el objetivo de asegurar el aprendizaje y que los alumnos sientan que han interiorizado lo que el profesor les quiere transmitir.

Durante este primer momento, los alumnos trabajarán en el aula de forma individual, haciendo las tareas en sus cuadernos, que luego serán evaluados, aunque se permitirá en todo momento la interacción entre ellos. Las clases se basarán en la realización de actividades del cuadernillo con ayuda del profesor, teniendo siempre en cuenta las dudas que les puedan surgir a los alumnos y planteándoles cuestiones que les hagan debatir, argumentar y razonar. Además se les proporcionará un pequeño cuaderno, a modo de diario personal, en el que podrán ir anotando todas sus sensaciones, dudas sobre el tema, dificultades, cuestiones personales, etc. De este modo podré conocer mucho mejor al alumnado y trabajar con ellos de un modo más individualizado, atendiendo así las necesidades de cada uno.

Además se creará un grupo WhatsApp a modo de foro de dudas desde donde los alumnos podrán comunicarse entre sí y con el propio docente, aunque éste también estará a disposición de su alumnado en la actividad extraescolar de acompañamiento que se desarrolla en el centro los martes y jueves.

Esta metodología se llevará a cabo durante el desarrollo de todos los contenidos, salvo para explicar las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}\ y\ \frac{k}{0}$, que se utilizará una estructura de aprendizaje cooperativo, conocida como Puzle de Aronson (*Véase Anexo IV*); la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$, la cual será deducida de manera intuitiva por el alumnado y requerirá del uso de Geogebra y la tarea sobre la evolución histórica del concepto de límite (*Véase Anexo V*), en la que los alumnos, distribuidos en grupos de cuatro deberán realizar una pequeña investigación.

MOMENTO 3. Trabajo en grupo

Una vez que ya conocen todos los contenidos, dividimos la clase en grupos lo más heterogéneos posibles, de cuatro alumnos, los cuales trabajarán juntos durante todo este momento.

La intención es que trabajen sobre actividades de mayor dificultad, de ampliación y apliquen los límites para resolver problemas que modelizan diversos fenómenos de la vida cotidiana y de otras disciplinas como son la economía, del deporte, etc. Para ello les daré un cuadernillo de trabajo grupal al igual que en la unidad didáctica original, pero modificado, ya que contiene nuevas actividades *(Véase Anexo VIII)*. Dicho cuadernillo deberá ser incluido en un portfolio de trabajo en equipo, el cual será evaluado.

Durante este período, el profesor actuará de guía, a través del diálogo y ofreciendo ayudas, que irá reduciendo y retirando poco a poco, de forma progresiva hasta conseguir que el alumnado actúe de forma autónoma e independiente.

Además, durante esta fase, se les enseñará a manejar un poco el Geogebra (*Véase Anexo IX*); con la finalidad de que aprendan a representar a través de la aplicación, funciones con ciertas características impuestas; así como el programa CmapTools (Véase *Anexo X*), para que sepan hacer mapas conceptuales, que les ayuden a estructurar y organizar los contenidos de forma esquematizada y valoren el uso de esta herramienta no sólo para esta materia, sino para cualquier otra. La actividad grupal que realizarán en CmapTools conllevará al uso de una nueva estructura de aprendizaje cooperativo, conocida como *Mapa conceptual a cuatro bandas*.

Por último, utilizaremos dos juegos didácticos en el aula, para afianzar los conocimientos aprendidos y repasar de cara a la prueba final prevista. Uno de los juegos que voy a llevar a cabo se denomina *Quién tiene, Yo tengo...*, el cual fue creado en la unidad didáctica original (*Véase Anexo XIII*), cuyas reglas como ya comenté con anterioridad encontré en la página de Ana García Azcárate (*Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas*) y en base a dichas reglas diseñé mi propio juego formado por veinte tarjetas. Como mejora, he querido añadir un nuevo juego denominado *Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas* (*Véase Anexo XIV*) cuyas reglas también he encontrado en la página de Ana García Azcárate y para el cual he tenido que diseñar un tablero de juego y una serie de tarjetas de color rojo, verde, amarillo y azul. Ambos juegos llevarán a los alumnos a reflexionar sobre todos los contenidos vistos en clase de manera lúdica.

MOMENTO 4. Evaluación

A diferencia de lo que se tenía previsto en la unidad original, se ha querido llevar a cabo una evaluación más completa y enriquecedora tanto para el alumnado, como para el docente, añadiendo nuevas rúbricas y reestructurando la prueba final.

Este momento lo comprenden dos pequeñas pruebas, una sobre el cálculo de límites (*Véase Anexo VI*) y otra sobre el estudio de la continuidad y el cálculo de asíntotas (*Véase Anexo VII*), ambas previstas para ser llevadas a cabo durante el MOMENTO 2 y una prueba final (*Véase Anexo XV*), sobre aplicación de límites.

Además durante el MOMENTO 3, los alumnos autoevaluarán su propio trabajo, así como el del resto de compañeros (tanto del grupo de trabajo como del grupo-clase) con respecto a la exposición oral (*Véase Anexo XI*) y la construcción del mapa conceptual (*Véase Anexo XII*).

Por último, al igual que se tenía previsto en la unidad didáctica original, los estudiantes realizarán una evaluación propia (autoevaluación) y del resto de compañeros del grupo (coevaluación) sobre el trabajo realizado en grupo, a través de una rúbrica (*Véase Anexo XVI*); así como la evaluación del docente, también mediante una rúbrica (*Véase Anexo XVII*). Por otro lado el docente utilizará dos nuevas rúbricas de evaluación, una para el cuaderno de clase del alumno (*Véase Anexo XVIII*) y otra para el grado de adquisición de las competencias básicas (*Véase Anexo XIX*); además de una ficha de seguimiento del alumno (*Véase Anexo XX*).

4.3. Propuesta de Actividades

Las actividades que se les va a plantear al alumnado van a seguir una progresión en cuanto al grado de dificultad de las mismas. Se mantienen las actividades incluidas en mi unidad didáctica prevista en un principio, pero como propuesta de mejora he incluido actividades nuevas tanto en el cuadernillo de teoría (*Véase el*

Anexo III), como en el cuadernillo de grupo (*Véase el Anexo VIII*). Mi intención a la hora de incluir estas nuevas actividades es la de incrementar aún más la motivación del alumnado y que le encuentren sentido a las Matemáticas, vinculando algunos de los contenidos con otros de carácter anecdótico e histórico con los que guardan relación y que les llevarán en algunos casos a investigar sobre los mismos. Por otro lado, he querido añadir algunas actividades más que les lleven a modelizar fenómenos cotidianos, relacionados con otras disciplinas, como la economía, el deporte, etc.; así como un nuevo juego, Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas, con el que poder afianzar los conocimientos y practicar sobre los distintos sistemas de representación (numérico-algebraico, simbólico, verbal y gráfico).

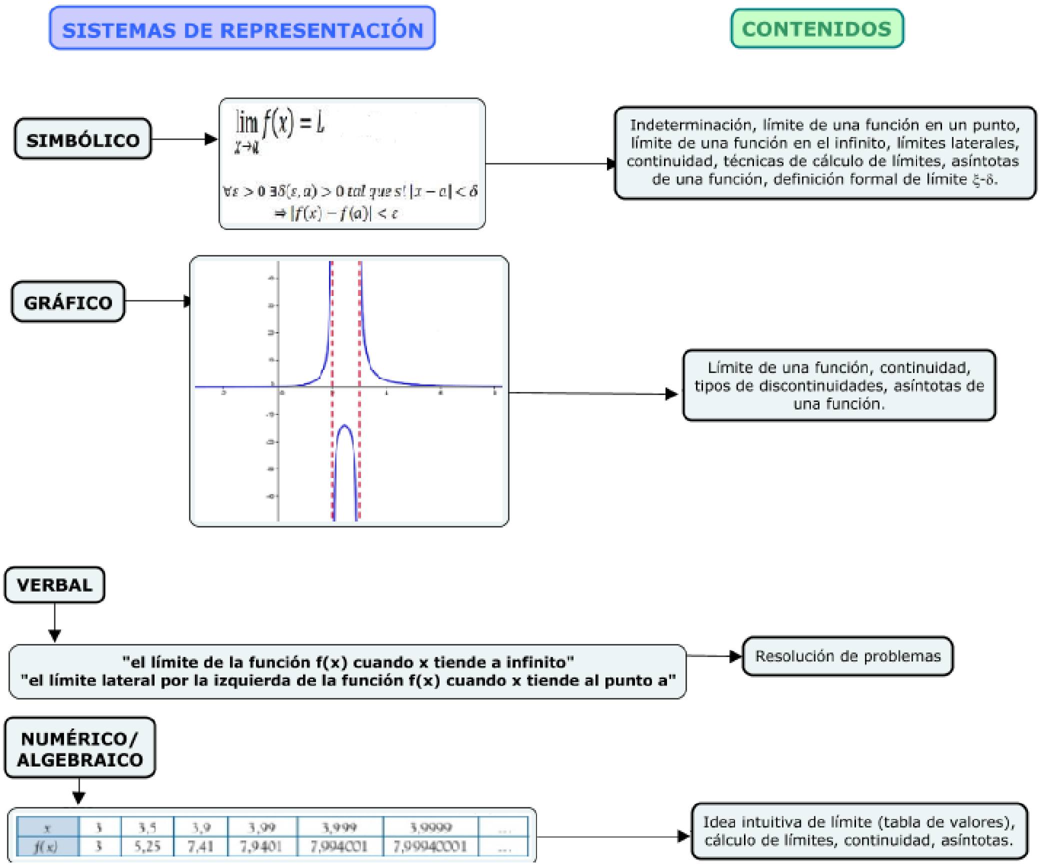


Ilustración 9. Relación entre los contenidos y los sistemas de representación.

4.3.1. Tipología de actividades

A la hora de planificar las actividades que vamos a plantearles a nuestros alumnos, no podemos hacerlo de forma arbitraria. Por el contrario, debemos analizar previamente qué queremos desarrollar, así como en qué momento queremos introducir la actividad. Según la finalidad de las actividades que planteo en la unidad, se clasifican en:

- **Actividades iniciales de introducción-motivación y detección de conocimientos previos**

Dentro de este tipo de actividades destacamos la tarea introductoria del cuadernillo de teoría sobre la sucesión de Fibonacci y su relación con el número áureo; así como el cuestionario para conocer al alumno (*Véase Anexo II*) y la actividad denominada *Lluvia de ideas*, para la detección de los conocimientos previos (*Véase Anexo I*).

- **Actividades de desarrollo**

Estas actividades tienen por objetivo asegurar el aprendizaje y que los alumnos sientan que han interiorizado lo que yo, como docente, les quiero transmitir. A su vez dentro de este tipo realizarán:

- ✓ **Actividades de repetición**
- ✓ **Actividades de consolidación**

Se corresponden con las actividades que aparecen en el cuadernillo de teoría (*Véase Anexo III*)

- ✓ **Actividades de investigación**

Con estas actividades se pretende que el alumno participe en la construcción de su propio conocimiento. Estas actividades se corresponden con el estudio de las indeterminaciones mediante una estrategia de aprendizaje cooperativo basada en el Puzle de Aronson, que ya estaba incluida en la unidad didáctica original (*Véase el Anexo IV*), la investigación sobre las aportaciones de ciertos matemáticos a lo largo de la historia al concepto de límite (*Véase el Anexo V*), así como la actividad que se les plantea en el cuadernillo de teoría sobre la definición formal de límite, siendo ellos mismos los que llegarán a su deducción.

- **Actividades de ampliación / profundización**

Son las que realizarán durante el trabajo en grupo y que aparecen en el cuadernillo grupal. Se trata de una relación con ejercicios de mayor dificultad, donde además, se pretenden que extrapolen los conocimientos vistos a fenómenos cotidianos.

- **Actividades globales o finales**

A través de las cuales se hace a los alumnos reflexionar sobre todos los contenidos desarrollados, de manera que se cuestionen lo que realmente han aprendido, reorganicen sus ideas y las afiancen. Dentro de esta tipología de actividades realizarán:

✓ **Práctica en Geogebra**

Donde tendrán que representar funciones con determinadas características impuestas (*Véase el Anexo IX*).

✓ **Práctica en CmapTools**

Esta práctica, como he mencionado con anterioridad, se llevará a cabo mediante una estructura de aprendizaje cooperativo conocida como *Mapa conceptual a cuatro bandas.* En la misma, cada grupo deberá realizar un mapa conceptual de alguna de las partes del tema para luego hacer una puesta en común y construir entre todos un único mapa conceptual que englobe todos los contenidos vistos (*Véase el Anexo X*).

✓ **Juegos**

Se utilizarán como último paso para repasar todos los contenidos vistos a lo largo de la unidad. Para ello se trabajará con los dos juegos mencionados con anterioridad: *Quién tiene, Yo tengo… (Véase el Anexo XIII)* y *Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas (Véase el Anexo XIV)*.

4.3.2. Secuenciación / Temporalización

Una de las propuestas de mejoras a las que se ha hecho mención con anterioridad es la modificación de la secuenciación de la unidad didáctica como consecuencia de la inclusión de nuevos contenidos, así como de algunos cambios en los principios metodológicos y en la evaluación.

Como se puede observar en la tabla que se muestra a continuación, se pretende que la unidad didáctica mejorada tenga una duración de 24 sesiones, en lugar de las 18 sesiones previstas en un principio en la unidad didáctica original.

Momentos	Sesiones	Descripción
Momento 1. Arrancando motores	1ª Sesión	✓ Cuestionario para conocer al alumno. ✓ Lluvia de ideas. Construcción de un esquema.
	2ª Sesión	✓ Calentando motores. Sucesión de Fibonacci.
Momento 2. Clase invertida	3ª Sesión	✓ Idea intuitiva de límite.
	4ª Sesión	✓ Definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$.
	5ª Sesión	✓ Evolución histórica del concepto de límite.
	6ª Sesión	✓ Límite de una función en un punto. ✓ Límites finitos, infinitos y en el infinito. ✓ Operaciones con el infinito.
	7ª Sesión	✓ Exposición sobre la evolución histórica del concepto de límite. ✓ Límite de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.
	8ª Sesión	✓ Trabajo cooperativo: Puzle de Aronson. Indeterminaciones.
	9ª Sesión	✓ Cálculo de límites indeterminados.

Momentos	Sesiones	Descripción
Momento 2. Clase invertida	10ª Sesión	✓ Indeterminación 1^{∞}. ✓ Relación entre capitalización compuesta y el número e.
	11ª Sesión	✓ Pequeña prueba sobre el cálculo de límites. ✓ Continuidad de una función en un punto.
	12ª Sesión	✓ Tipos de discontinuidades. ✓ Continuidad de funciones elementales.
	13ª Sesión	✓ Extensión de la continuidad a intervalos.
	14ª Sesión	✓ Cálculo de asíntotas.
	15ª Sesión	✓ Pequeña prueba sobre continuidad y asíntotas. ✓ Trabajo en grupo: Cuadernillo de grupo.
Momento 3. Trabajo en grupo	16ª Sesión	✓ Trabajo en grupo: Cuadernillo de grupo.
	17ª Sesión	✓ Trabajo en grupo: Cuadernillo de grupo.
	18ª Sesión	✓ Trabajo en grupo: Práctica con Geogebra.
	19ª Sesión	✓ Trabajo en grupo: Práctica con CmapTools.
	20ª Sesión	✓ Presentación grupal sobre las dos prácticas anteriores. ✓ Rúbrica para evaluar la exposición oral. ✓ Rúbrica para evaluar un mapa conceptual.
	21ª Sesión	✓ Aprendizaje cooperativo: Mapa conceptual a cuatro bandas.
	22ª Sesión	✓ Juegos: Quién tiene…, Yo tengo… y Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas.
Momento 4. Evaluación	23ª Sesión	✓ Prueba o examen final.
	24ª Sesión	✓ Resultados y corrección de errores. ✓ Rúbrica para evaluar al docente. ✓ Rúbrica para evaluar el trabajo en grupo.

Tabla 3. Secuenciación de la unidad didáctica mejorada.

- ***1ª Sesión***

Esta primera sesión estará orientada a recabar información de gran utilidad para conocer aspectos y circunstancias personales que rodean al alumnado y que pueden incidir en el proceso de enseñanza-aprendizaje; así como a la detección de los conocimientos previos que se espera, deben conocer. Para ello se utilizará por un lado un cuestionario con una serie de preguntas para conocer al alumno (*Véase Anexo II*): nacionalidad, profesión de los padres, si asisten a clases particulares, si disponen de ordenador y conexión a internet, etc.; y por otro lado se realizará una actividad denominada *Lluvia de ideas*, que consistirá en la elaboración de un esquema, con ayuda de los alumnos, donde se recojan aquellos conocimientos previos relacionados con la unidad. (*Véase Anexo I*).

- ***2ª Sesión***

En esta sesión se presenta la unidad didáctica, con la planificación prevista, las estrategias metodológicas que se llevarán a cabo, así como la evaluación. Luego se hará entrega a los alumnos del cuadernillo individual, que recoge toda la teoría que vamos a abordar durante la unidad didáctica, acompañada de ejemplos clarificadores, pero a diferencia de la unidad didáctica prevista en un principio, la metodología que se llevará a cabo para desarrollar la mayoría de estos contenidos será la *Clase invertida*, es por ello que en esta sesión se le explicará al alumnado en qué consiste esta nueva metodología, así como las herramientas necesarias para llevarla a cabo (aplicación de móvil y grupo de WhatsApp).

Por último se llevará a cabo la tarea introductoria que aparece en el cuadernillo individual sobre la sucesión de Fibonacci, aunque para ello primero se dividirá la clase en grupos heterogéneos de cuatro alumnos, distribución que se mantendrá para otras tareas posteriores, así como para el momento 3 de trabajo en grupo que se ha explicado con anterioridad en el apartado de metodología.

Antes de finalizar la clase se les pide a los alumnos que una vez hayan instalado la aplicación en casa, vean el vídeo explicativo sobre el primer apartado del tema: *Idea intuitiva de límite.*

- ***3ª Sesión***

En esta sesión cada grupo deberá hacer una breve exposición de unos 5 minutos sobre lo que han encontrado acerca de la sucesión de Fibonacci. Esta tarea deberán incluirla en un portfolio de trabajo en grupo que será evaluado.

Luego se trabajará en el aula sobre la idea intuitiva de límite, para ello realizaremos los dos ejercicios del cuadernillo que vienen al finalizar dicho apartado.

Para terminar la sesión se les hace entrega del diario personal, donde le pedimos que anoten de forma voluntaria, todas las dudas y dificultades con las que se puedan encontrar a lo largo de toda la unidad, sensaciones o cuestiones personales que consideren importante transmitir. Se les informa de que dicho diario será recogido dos veces por semana, los martes y los viernes, así como se les hace hincapié en el uso del grupo de WhatsApp a modo de foro de dudas, se les recuerda que yo como docente estaré a disposición de ellos en la actividad extraescolar de acompañamiento que se desarrolla en el centro los martes y jueves por la tarde para resolver las dudas y dificultades que vayan surgiendo a nivel individual y que se detecten en los diarios y además se les comenta que para aquellos alumnos que completen sin grandes dificultades, todas las tareas y actividades planteadas, tanto a modo individual, como grupal; se les pondrá a su disposición un cuadernillo con actividades propuestas en Selectividad en años anteriores (*Véase Anexo XXI*) y que tienen que ver con la temática vista en el aula; siendo totalmente voluntaria su entrega, en cualquier momento del curso.

- ***4ª Sesión***

Durante esta sesión trabajaremos sobre la definición formal de límite (es decir, la definición $\varepsilon - \delta$). El objetivo de esta sesión es que los alumnos sean capaces de deducir de manera intuitiva dicha definición, antes de que el docente les presente la definición rigurosa. Para ello haremos uso de Geogebra, a la hora de construir tablas de valores.

- ***5ª Sesión***

Con el objetivo de motivar al alumnado y que muestren interés por la materia dedicaremos la sesión a que investiguen sobre la evolución histórica del concepto de límite, a partir de la contribución de importantes personajes matemáticos al tema (*Véase Anexo V*). Para ello distribuimos el aula en los grupos de 4 que ya se han establecido con anterioridad. Esta tarea deberá ser incluida en el portfolio grupal que será posteriormente evaluado.

Al finalizar la sesión se les pedirá al alumnado que consulten los vídeos sobre el límite de una función en un punto y límites laterales, sobre los límites finitos, infinitos y en el infinito y las operaciones con el infinito, ya que este contenido será visto en el aula en la siguiente sesión.

- ***6ª Sesión***

En esta sesión se tratarán los contenidos que se les pidió en la sesión anterior que consultaran en la aplicación de móvil. Para ello se realizará la actividad 1 que aparece al finalizar el apartado 3 del cuadernillo, así como los ejercicios 1 y 2 de la relación final que aparece en el mismo. Además de estas actividades, se tratarán dos curiosidades matemáticas que aparecen en el cuadernillo, relacionadas con el infinito: una sobre el hotel infinito de Hilbert y otra sobre la cinta de Möbius.

Para terminar se les comenta el vídeo que deberán consultar en casa sobre el cálculo de límites de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas, a través de la aplicación de móvil.

- ***7ª Sesión***

La sesión comienza con una breve exposición de cada uno de los grupos sobre la tarea de investigación de la evolución histórica del concepto de límite. Para ello utilizarán los recursos que mejor consideren: Google Drive, PowerPoint, Prezi, etc.

Luego trabajaremos sobre el cálculo de límites de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas, de acuerdo al vídeo que se les pidió en la sesión anterior que consultaran. Para ello realizaremos el ejercicio 12 de la relación final del cuadernillo.

- ***8ª Sesión***

En esta sesión, les planteamos una nueva estrategia metodológica, basada en el aprendizaje cooperativo, a través del Puzle de Aronson. Para ello se vuelven a organizar por grupos y luego se les explica en qué consiste la práctica, como aparece reflejado en el Anexo IV. A través de esta estrategia, se pretende que los alumnos aprendan de forma constructiva y por sí solos, la resolución de distintos tipos de indeterminaciones.

Durante esta sesión, se llevarán a cabo los momentos 1,2, 3 y 4, de los seis de los que consta esta estrategia.

- ***9ª Sesión***

Durante esta sesión, continúan trabajando con las indeterminaciones, a través de los momentos 5 y 6, del Puzle de Aronson. En este último momento, los ejercicios que se les plantearán para que los trabajen en grupo serán:

- ✓ Apartados a) y c) del ejercicio 3 del cuadernillo individual.
- ✓ Apartados a), b) y d) del ejercicio 4 del cuadernillo individual.
- ✓ Apartados a) y c) del ejercicio 5 del cuadernillo individual.
- ✓ Apartados a), c) y p) del ejercicio 6 del cuadernillo individual.
- ✓ Apartados a) y c) del ejercicio 7 del cuadernillo individual.
- ✓ Apartados a) y b) del ejercicio 10 del cuadernillo individual.

Al finalizar la clase se les pide a los alumnos que vean en casa el vídeo explicativo sobre el cálculo de límites indeterminados del tipo 1^{∞}.

- ***10ª Sesión***

En esta sesión, corregiremos en la pizarra los ejercicios que hicieron los alumnos durante el aprendizaje cooperativo y luego volveremos a la distribución inicial del aula, para que los alumnos continúen trabando de manera individual. Durante esta sesión se trabajará sobre la indeterminación, 1^{∞}, mediante el ejercicio 11 del cuadernillo individual; así como se verá una curiosidad matemática que aparece en el cuadernillo individual sobre la capitalización compuesta y el número e.

Para finalizar se les pide al alumnado que vean en casa el vídeo explicativo sobre la continuidad de una función en un punto, para tratarlo el siguiente día en el aula.

- ***11ª Sesión***

En esta sesión se les planteará a los alumnos una pequeña prueba sobre el cálculo de límites, que durará aproximadamente 25 minutos (*Véase Anexo VI)*. El resto de la sesión, se trabajará en el aula la continuidad de una función en un punto a través de los ejercicios 13 y 16 del cuadernillo con el objetivo de que se familiaricen con la definición rigurosa de continuidad de una función en un punto, relacionando dicha definición con la del límite de una función en un punto.

Al finalizar la sesión se les pedirá a los alumnos que consulten en casa el vídeo sobre los tipos de discontinuidad y la continuidad de las funciones elementales.

- ***12ª Sesión***

Esta sesión la dedicaremos a ver ejercicios sobre el estudio de la continuidad en un punto, pero además en caso de no serlo, se analizará el tipo de discontinuidad que presenta, en función de la condición que no cumpla. Por otro lado se trabajará sobre la continuidad de las funciones elementales, a través del ejercicio 15 del cuadernillo. Al igual que en las sesiones anteriores, se le pedirá a los estudiantes que consulten el vídeo sobre el último apartado correspondiente a la continuidad, es decir, el de la extensión de la continuidad a intervalos.

- ***13ª Sesión***

Al comienzo de la sesión, se llevará a cabo la corrección del mini-examen sobre el cálculo de límites para que los alumnos detecten los errores cometidos y luego se trabajará sobre la extensión de la continuidad a intervalos, mediante los ejercicios 14 y 17 del cuadernillo. Al finalizar la sesión se les pide al alumnado que vean el último vídeo que aparece en la aplicación del móvil, sobre el cálculo de asíntotas.

- ***14ª Sesión***

Esta sesión será la última del momento 2 y en ella veremos ejercicios sobre el cálculo de asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas. Para ello trabajaremos con el ejercicio 18 y el ejercicio 21 del cuadernillo.

- ***15ª Sesión***

En esta sesión los alumnos realizarán un mini-examen sobre el estudio de la continuidad y el cálculo de asíntotas. Para ello los alumnos dispondrán de 25 minutos aproximadamente y una vez finalizado comenzará el Momento 3, basado en el trabajo en grupo, donde los alumnos se volverán a distribuir en los grupos de cuatro que se habían establecido anteriormente.

- ***16ª y 17ª Sesión***

Durante estas dos sesiones y parte de la sesión anterior los alumnos trabajarán para hacer las actividades del cuadernillo de grupo (*Véase Anexo VIII*), que luego deberán incluir en un portfolio que entregarán al docente (uno por cada grupo), para ser evaluado. Se pretende de este modo, que trabajen de modo cooperativo, reflexionando, argumentando y debatiendo ideas y estrategias de resolución de problemas de mayor complejidad y profundización, alguno de los cuales modelizan fenómenos de la propia realidad. Además se quiere hacer hincapié en la comunicación, como acción importante en todo proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que no es sólo una acción hacia fuera, sino también hacia dentro, en el sentido de que ayuda a los estudiantes a poner más en orden sus ideas y a completar y perfeccionar las reflexiones ya hechas.

En todo momento, el docente actuará de guía o mediador, orientando a los alumnos en la realización de su trabajo, capacitándolos para que aprendan por sí mismos, para que aprendan a aprender y para que aprendan a pensar.

- ***18ª y 19ª Sesión***

Estas dos sesiones estarán destinadas al uso de las Tics, ofreciendo así, una propuesta metodológica innovadora, teniendo en cuenta que nos encontramos ante una sociedad actual *"tecnológica".*

Llevaremos a cabo una práctica en Geogebra y CmapTools, como ya se tenía previsto en la unidad original, donde se darán unas nociones previas sobre ambos programas (*Véase Anexos IX y X*), para acabar con la realización de una práctica grupal en ambos programas.

Con el Geogebra, deberán dibujar la gráfica de una función a trozos y una función que cumpla ciertas condiciones. Mientras que con CmapTools, se pretende que realicen un mapa conceptual sobre algún apartado de la unidad. Ambas prácticas deberán ser incluidas en el portfolio grupal y ser expuestas al resto de compañeros. En cuanto a la práctica con CmapTools se añade una mejora, pues una vez que cada grupo ha expuesto al resto de compañeros su mapa, se realizará la construcción de un único mapa conceptual que englobe todos los contenidos vistos en la unidad. Esta mejora se basa en una estructura de aprendizaje cooperativo: *Mapa a cuatro bandas*.

Ambas sesiones serán desarrolladas en el aula de informática, para que los alumnos puedan llevar a cabo la práctica grupal, con el uso de los ordenadores del centro y previamente me aseguraré que dispongan de ambos programas; para en caso contrario proceder a su instalación.

- ***20ª Sesión***

En esta sesión cada grupo expondrá al resto de la clase las prácticas llevadas a cabo en Geogebra y CmapTools, con el objetivo de fomentar la comunicación, pero sobre todo que argumenten las razones que les han llevado a dibujar ese tipo de función; es decir, deberán mostrarles de forma razonada que la función que han dibujado cumplen todas las condiciones exigidas. Así de igual modo en el caso de los mapas conceptuales, se les pedirá que ayuden a sus compañeros a entenderlo, teniendo en cuenta que son una herramienta que para interpretarla te la tienen que contar porque sólo quien la construye sabe darle un sentido.

- ***21ª Sesión***

Como ya he comentado anteriormente, una vez expuestos los mapas conceptuales de cada grupo, se llevará a cabo la construcción de un único mapa conceptual entre todo el grupo-clase mediante aprendizaje cooperativo.

Una vez elaborado el mapa resumen, los alumnos deberán autoevaluarse y coevaluarse entre ellos, mediante dos rúbricas. Una para evaluar la exposición oral y otra para evaluar el mapa de conceptos.

- ***22ª Sesión***

Esta última sesión del momento 3, basado en el trabajo en grupo, estará destinada a repasar todos los contenidos vistos a lo largo de la unidad, pero no de un modo tradicional, sino de manera lúdica y divertida con el uso de los juegos: Quién tiene, Yo tengo... (*Véase Anexo XIII*) y Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas (*Véase Anexo XIV*).

- ***23ª Sesión***

Esta sesión estará destinada a la realización de la prueba final (*véase el Anexo XV*), a la que los alumnos deberán enfrentarse de forma individual.

- ***24ª Sesión***

En esta última sesión de la unidad, se llevará a cabo la corrección de la prueba final en la pizarra, para que el alumnado reflexione y detecte los errores que hayan podido cometer en la prueba. Después se les facilitarán dos rúbricas, una para que se evalúen a ellos mismos y a los compañeros del mismo grupo, en cuanto al trabajo en grupo (*Véase Anexo XVI*) y otra para evaluar al propio docente, su actitud y metodología llevada a cabo (*Véase Anexo XVII*).

4.4. Propuesta de Evaluación

Otro elemento de gran importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje porque a su vez él mismo es aprendizaje, es la *evaluación*. Según Azcárate y Cardeñoso (2012), la evaluación no puede ser una tarea puntual y final, como tradicionalmente venía siendo, sino que es un proceso más complejo, que implica dar respuesta a una serie de preguntas, que debería conllevar, el diseño de todo sistema de evaluación.

Evaluar significa aprender, dialogar, motivar, diagnosticar, reorientar; es decir, consiste en mejorar las condiciones que favorecen el aprendizaje, por tanto la evaluación tiene un carácter formativo, diagnóstico y cualitativo.

La evaluación que se pretende llevar a cabo durante el desarrollo de esta unidad didáctica, implicará tanto al docente como al alumnado en todas las etapas del proceso, ya que sólo de este modo, será auténtica (Tellez, 1996 citado en Azcárate, 2006). Así, por un lado el docente utilizará mecanismos de heteroevaluación, mientras que los alumnos se autoevaluarán, se coevaluarán entre ellos y evaluarán la propia práctica docente.

Para evaluar si los alumnos han alcanzado los objetivos previstos y han desarrollado las competencias a lo largo de toda la unidad didáctica, se establecerán determinados criterios de evaluación y calificación; así como se utilizarán diversos instrumentos que aporten información relevante.

A continuación se muestra un mapa resumen explicativo sobre el proceso de evaluación que se llevará a cabo en la unidad didáctica mejorada.

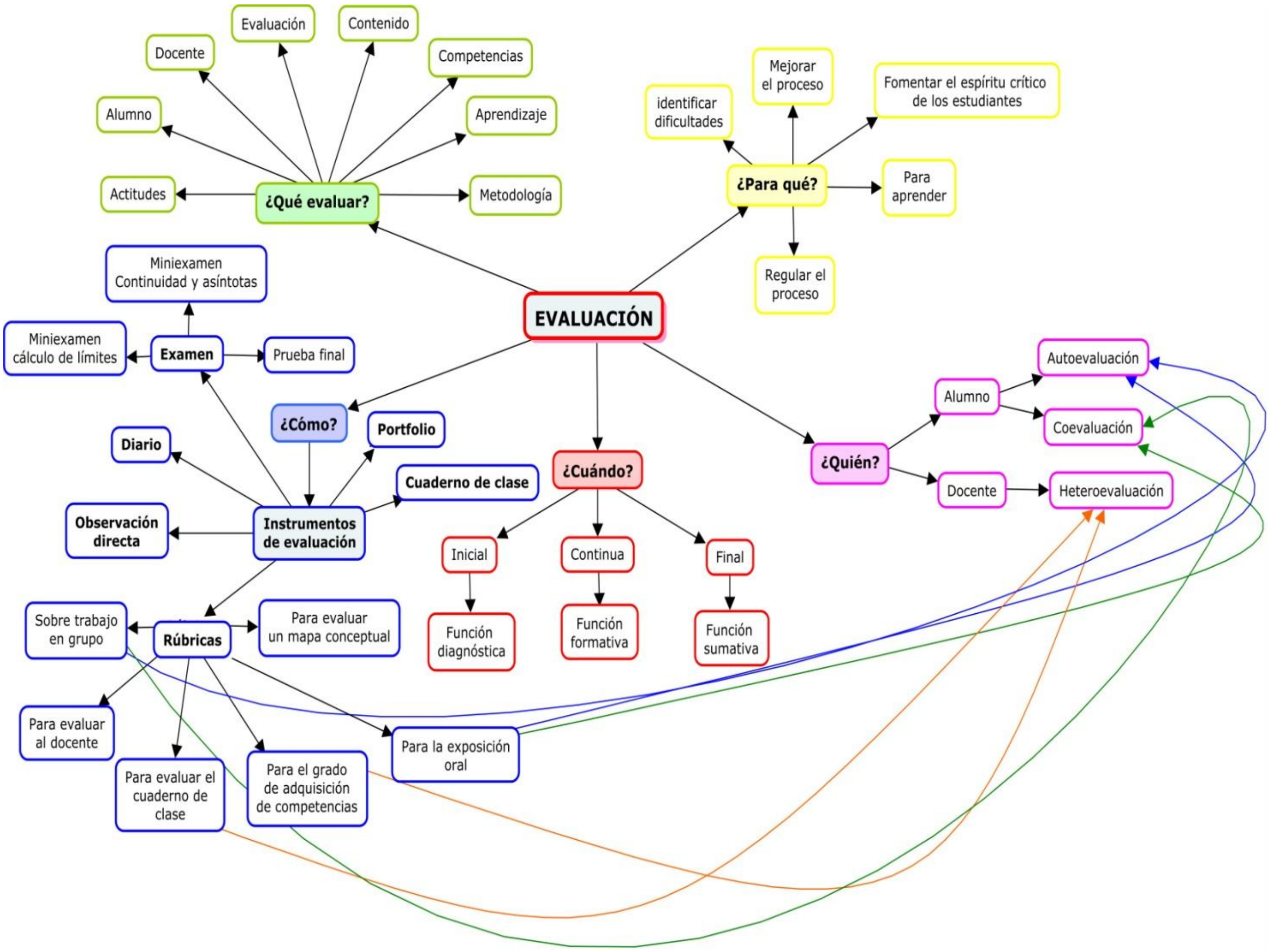


Ilustración 10. Mapa conceptual sobre las preguntas claves en el proceso de evaluación. Elaboración propia.

Las mejoras más significativas realizadas sobre la unidad didáctica original, con respecto a la evaluación son: la sustitución del cuestionario inicial de detección de ideas previas por la actividad *Lluvia de ideas*, la incorporación de nuevas rúbricas y criterios de evaluación y una modificación de los criterios de calificación, ya que se le dará un mayor peso al trabajo diario, tanto individual como grupal, los debates y exposiciones pasan a tener peso en la ponderación; así como la valoración positiva del grupo de trabajo; todo ello en detrimento del peso de la prueba final.

4.4.1. Instrumentos de evaluación

Los instrumentos que utilizaremos para evaluar el proceso serán:

- **I1*. Actividad Lluvia de ideas***

Se utilizará al comienzo del proceso, para saber los conocimientos previos del alumno y detectar posibles errores o concepciones alternativas.

- **I2. *Observación directa***

Se llevará a cabo la observación directa del trabajo diario del alumno, su participación tanto en la corrección de las tareas individuales, como en el trabajo en grupo, así como la actitud positiva, esfuerzo y compromiso con el propio proceso de aprendizaje. Para llevar el control, se utilizará una ficha de seguimiento en la que se valorarán dichos parámetros.

- **I3. *Rúbrica para evaluar la exposición oral***

Mediante esta rúbrica se pretende que cada alumno autoevalúe la exposición oral de su propio grupo de trabajo, así como del resto de grupos (coevaluación).

- **I4. *Rúbrica para evaluar la construcción de un mapa conceptual***

A través de esta rúbrica el alumnado evaluará el mapa conceptual construido por cada uno de los grupos, inclusive el de su grupo de trabajo.

- **I5. *Rúbrica para evaluar el trabajo en grupo***

Esta rúbrica tiene por objetivo que cada alumno se evalúe a sí mismo (autoevaluación) y al resto de compañeros de grupo (coevaluación), con respecto al trabajo en grupo.

- **I6. *Rúbrica para evaluar la acción docente y la metodología llevada a cabo***

Con esta rúbrica el alumnado evaluará de manera individual la acción docente; es decir, las actitudes, metodología llevada a cabo, etc.

- **I7. *Rúbrica para evaluar el cuaderno de clase***

Esta rúbrica será utilizada por el docente para evaluar el cuaderno de clase del alumno. Dicho cuaderno se recogerá semanalmente para ver cómo el alumnado está desarrollando el proceso de enseñanza-aprendizaje, en relación con las actividades planteadas en el aula.

- **I8. *Rúbrica para la apreciación del grado de desarrollo de las competencias básicas***

Con esta rúbrica el docente valorará el grado de desarrollo de las competencias básicas de cada alumno.

- **I9. *Portfolio grupal o carpeta de aprendizaje***

A través del portfolio grupal, se pretende evaluar el trabajo realizado en grupo. Esta carpeta de aprendizaje deberá contener la tarea introductoria sobre la sucesión de Fibonacci, la tarea de investigación sobre la evolución histórica del concepto de límite, las actividades planteadas en el cuadernillo de grupo, la práctica realizada durante el aprendizaje cooperativo (Puzle de Aronson), la práctica en Geogebra y la práctica en la que tienen que construir un *mapa conceptual* en CmapTools. Los mapas conceptuales son a su vez otro instrumento de evaluación, que proporciona información al docente, sobre el aprendizaje del alumnado y su propia intervención, lo cual le permite promover la interacción crítica, tras su análisis y confrontación con las argumentaciones del alumno (Azcárate, 2006).

- **I10. *Diario personal del alumno***

Este instrumento de evaluación, será de gran utilidad, ya que permitirá al docente detectar las dificultades, dudas y sensaciones de cada alumno y alumna y será utilizado para atender las necesidades de cada uno, de manera individualizada. Por otro lado, resulta valioso para el alumnado ya que contribuye a un desarrollo personal de naturaleza reflexiva, que le permite ser consciente no sólo del conocimiento adquirido, sino además del proceso y las dificultades encontradas.

- **I11. *Mini-examen sobre el cálculo de límites***

Pequeña prueba donde se les planteará a los estudiantes una serie de cuestiones referentes al cálculo de límites.

- **I12. *Mini-examen sobre el estudio de la continuidad y el cálculo de asíntotas***

Pequeña prueba donde los alumnos deberán resolver determinadas cuestiones sobre el estudio de la continuidad y el cálculo de asíntotas.

- ***I13. Prueba final***

Tendrá lugar al final del proceso y la resolución de la misma implicará el planteamiento de cuestiones y situaciones en las que el alumno deberá aplicar los conocimientos adquiridos.

- **I14. *Ficha de seguimiento del alumnado***

En esta ficha el docente irá anotando la valoración cuantitativa de cada uno de los criterios de calificación, así como las observaciones que considere oportunas de cada alumno.

4.4.2. Criterios de evaluación

A la hora de establecer los criterios de evaluación de esta unidad, se ha tenido en cuenta tanto la consecución de los objetivos como la mejora en el desarrollo de las competencias básicas. Se han mantenido los criterios de evaluación de la unidad didáctica original, pero a éstos se le añaden otros de acuerdo a los nuevos objetivos incluidos en la unidad mejorada. Además, si queremos evaluar desde la sostenibilidad, hay que tenerse en cuenta no sólo aspectos matemáticos, ya que como se ha comentado con anterioridad, se pretende formar al alumnado de manera integral, por tanto hay que incluir criterios para evaluar la adquisición de determinados valores como el respeto, responsabilidad, etc.

A continuación se muestra una tabla donde aparecen relacionados los criterios de evaluación, los objetivos y las competencias básicas:

Criterios de evaluación	Objetivos	Competencias
Conoce la idea intuitiva de límite, gráficamente, a través de una tabla de valores o analíticamente.	O1 y O3	*CMCT*
Utiliza el concepto de límite de una función, aplicándolo en el cálculo de límites en un punto y argumenta su existencia o no en dicho punto.	O3, O4, O6	*CL, CMCT*
Deduce la definición formal de límite $(\varepsilon - \delta)$	O5	*CL, CMCT, AAP*
Distingue entre límites finitos, infinitos, en el infinito y en un punto.	O2	*CMCT*
Aplica los procesos para resolver las indeterminaciones.	O7, O9 y O10	*CMCT*
Utiliza el concepto de continuidad de una función, aplicándolo en el estudio de la continuidad de una función en un punto y argumenta el porqué la función es continua o no.	O4 y O11	*CL, CMCT*
Reconoce y argumenta el tipo de discontinuidad que presenta una función en un punto concreto.	O11	*CL, CMCT*
Distingue los distintos tipos de funciones elementales y conoce la continuidad de las mismas.	O12	*CMCT*
Utiliza la continuidad de las funciones elementales para estudiar la continuidad de una función definida a trozos, en un intervalo.	O11 y O12	*CL, CMCT*
Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.	O11 y O14	*CMCT, CD*
Utiliza el concepto de asíntota vertical, horizontal y oblicua para calcularlas, estudiar la posición relativa de la gráfica con respecto a las mismas y representar las ramas.	O13	*CMCT*
Representa gráficamente funciones que cumplen ciertas características vistas en la unidad, ya sea en papel o con el uso de Geogebra.	O14	*CMCT, CD, AAP, SIEE*
Utiliza y maneja herramientas tecnológicas, como CmapTools, para construir mapas conceptuales.	O15	*CMCT, CD, AAP, SIEE*
Modeliza diversos fenómenos, resuelve problemas de la vida cotidiana y extrae conclusiones.	O8	*CL, CMCT, AAP, CSC,SIEE*
Valora la importancia del límite en la realidad y conoce su relación con otros contenidos matemáticos.	O16 y O18	*CEC, SIEE, AAP*
Muestra interés por la evolución histórica del concepto de límite.	O17	*AAP, CD, CEC, CL*
Muestra empatía, diálogo y colaboración.	O20	*CL, SIEE, AAP*
Muestra autonomía, capacidad de reflexión y análisis crítico a la hora de resolver problemas.	O21 y O22	*AAP, CL, CMCT*
Trabaja de manera cooperativa y responsable, participando con respeto y democráticamente en la toma de decisiones.	O19 y O20	*AAP, CL, SIEE*
Muestra respeto por la diversidad	O19 y O20	*AAP*
Fomenta una cultura de paz en el aula.	O20	*AAP, SIEE*

Tabla 4. Relación entre los criterios de evaluación, objetivos y competencias básicas.

4.4.3. Criterios de calificación

La calificación final que conseguirán los alumnos en esta unidad didáctica, vendrá dada a través de la media ponderada de los siguientes aspectos:

- ***Trabajo individual*** (10% - 1 pto sobre 10). Será evaluado a través de la observación directa y la rúbrica de evaluación del cuaderno de clase que contiene las actividades del cuadernillo individual.
- ***Trabajo grupal*** (30% - 3 ptos sobre 10). Será evaluado a través del portfolio grupal, matizándose la nota en función de los resultados de la rúbrica sobre la construcción del mapa conceptual y la observación directa.
- ***Debates y exposiciones*** (10% - 1 pto sobre 10). Para evaluar este aspecto, se utilizará la observación directa y la rúbrica de evaluación de la exposición oral.
- ***Mini-examen sobre el cálculo de límites*** (7,5% - 0,75 ptos sobre 10). La valoración de esta pequeña prueba, se corresponderá con los resultados obtenidos en la realización de la misma.
- ***Mini-examen sobre el estudio de la continuidad y el cálculo de asíntotas*** (7,5% - 0,75 ptos sobre 10). La valoración de esta pequeña prueba, se corresponderá con los resultados obtenidos en la realización de la misma.
- ***Prueba final sobre aplicación de límites*** (30% - 3 ptos sobre 10). Esta parte de la nota se corresponderá con el resultado obtenido en la prueba final.
- ***Valoración positiva del grupo*** (5% - 0,5 ptos sobre 10). Se evaluará a través de los resultados extraídos de la rúbrica de evaluación del trabajo en grupo.

5. Conclusiones e implicaciones educativas y para la futura formación docente

5.1. Valoración crítica de lo que aporta la propuesta presentada

Es la primera vez que me enfrento a la realización de un trabajo académico de estas características y la experiencia ha sido satisfactoria, ya que como trabajo de cierre del MAES me ha permitido hacer una reflexión y un análisis sobre todos los contenidos adquiridos en el máster, a través de los distintos módulos, tanto comunes como específicos.

Por otro lado he aprendido a realizar un trabajo consolidado y fundamentado, apoyándome en referentes teóricos, para lo cual he tenido que indagar e investigar en diferentes bases de datos, porque una de las cosas esenciales que he sacado en claro en este máster, es que toda propuesta didáctica debe tener un sentido y estar bien justificada, haciendo un uso razonado y responsable de las citas, con los aspectos formales y de estilo que ello conlleva.

Considero que a través de la propuesta presentada consigo abordar los dos objetivos fundamentales que tenía previsto: la motivación y la autonomía de los alumnos, gracias al uso de diversas estrategias metodológicas como el trabajo cooperativo, el trabajo en grupo, la sustitución de las clases tradicionales por clases invertidas; así como el uso de recursos Tics (Geogebra, CmapTools, grupo WhatsApp y la aplicación para el móvil) y de juegos matemáticos.

Además en todo momento se tienen en cuenta las posibles dificultades o problemas a nivel, tanto académico como personal del alumnado y se atienden las necesidades de cada uno, de manera individualizada, pues como refleja Tomlinson (2005), el docente tiene que pensar y planificar en función de *múltiples caminos hacia el aprendizaje*, para distintas necesidades y no en términos de lo *normal* y lo *diferente*. Esto se logra mediante el diario que se le proporciona al alumno, la participación en la actividad extraescolar de acompañamiento y el grupo de WhatsApp.

También se intenta extrapolar los contenidos a la realidad, mediante determinados problemas que modelizan fenómenos cotidianos, para que el alumnado le encuentre un sentido a la materia. Se le otorga un papel privilegiado a la comunicación y la sociocognición, porque aprender es aprender de otros, se consigue mejor en comunicación con otros, de modo que la información se trasforma en conocimiento.

Por último quiero hacer mención al proceso de evaluación presentado, orientado tanto al alumnado como al docente, ya que como dice Álvarez Méndez (2010), la evaluación tiene una función formativa, que debe actuar al servicio de quienes aprenden y de quienes enseñan, pues sólo tiene sentido para quienes quieren hacer de su trabajo docente una enseñanza de calidad, de manera que, a través de su práctica puedan obtener datos de referencia para mejorar no sólo el aprendizaje de los alumnos, sino también para mejorar su propia práctica docente, de ahí que se sugiera el portfolio como instrumento de evaluación.

5.2. Valoración de posibles nuevas mejoras

A pesar de hacer una serie de mejoras a la unidad didáctica dotándola de diversas estrategias metodológicas, así como del uso de distintos recursos, resulta obvio que podrían realizarse nuevas mejoras sobre la misma.

Así por un lado, se podría haber incluido otra aplicación de los límites, el cálculo de la función derivada, así como de la derivada de una función en un punto, explicando la interpretación geométrica y llegando a la ecuación de la recta tangente.

Por otro lado, se podría haber introducido más historia, dada la importancia de la misma, ya que introducir la Historia y la Epistemología de las Matemáticas en el aula resulta una cuestión atractiva, a la vez que necesaria. Además, a lo largo del máster, en distintos módulos tanto comunes, como específicos nos han mostrado otras estrategias metodológicas que quizás serían aplicables a la unidad. Así por un lado está el Aprendizaje Basado en Proyectos, a través del cual se estimula a los estudiantes a interrogarse sobre las cosas, a no conformase con la primera respuesta, problematizando así la realidad. Como refleja Pereira Baz (2014), todo aprendizaje por proyectos debe contemplar una serie de aspectos: debe partir de una pregunta guía que lleve a resolver un problema cercano y real, dar autonomía a los estudiantes, abordar contenidos y competencias del currículo, llevar a cabo una investigación e innovación, revisión y retroalimentación, presentación pública del trabajo (comunicación) y por supuesto, debe desembocar en un producto (que es lo verdaderamente importante en el proceso). Por otro lado, se podrían llevar a cabo otras estrategias de aprendizaje cooperativo ideadas por diversos autores y reflejadas en Pujolàs Maset (2008) como son: el folio giratorio, lápices al centro, cadena de preguntas, el saco de dudas, etc.

Por último, se podría hacer uso de una plataforma virtual, como por ejemplo Moodle, donde se cree un curso sobre la unidad didáctica en cuestión. El hecho de no contemplarlo entre mis propuestas de mejora se debe a que no todo los alumnos disponen de internet en sus casas, con lo cual no estarían en igualdad de oportunidades.

5.3. Valoración de necesidades futuras de formación docente

A la hora de hacer una reflexión y análisis de cuáles son mis necesidades futuras de formación para la práctica docente voy a centrarme en los principales problemas y preocupaciones del profesorado, según Veenam (1984, citado en Azcárate y Cuesta, 2005), ya que detecto carencias en cada uno de estos ámbitos.

- ***La disciplina de la clase.***

Es una de mis principales preocupaciones porque no estamos preparados para afrontar conflictos dentro del aula y saber actuar frente a actitudes problemáticas que puedan suscitarse. En mi caso, he llevado a cabo las prácticas en un centro donde la convivencia se hace difícil precisamente por la falta de disciplina del alumnado, donde continuamente se dan situaciones disruptivas en el aula, por lo que viendo esta realidad, me cuestiono si realmente estamos preparados para enfrentarnos a tales circunstancias o si seré capaz de desenvolverme ante tales problemas.

- ***La motivación de los estudiantes.***

Algo que resulta primordial en todo proceso de enseñanza-aprendizaje y que tanto cuesta a los profesores fomentar, ya que se hace difícil identificar cuáles son los puntos de interés de los estudiantes. A lo largo de todo el máster se nos ha enseñado diversas técnicas innovadoras, pero carecemos de una formación práctica de las mismas, que es lo que verdaderamente importa. A esto hay que añadirle que nuestra generación ha sido formada bajo un sistema de enseñanza tradicional, con lo que para nosotros esta metodología es la más habitual y nos cuesta desprendernos de ella.

En cuanto al uso de las Tics, también carecemos de formación, ya que a no ser que elijas la optativa que se oferta en el máster sobre el uso de las Tics, no se nos da formación alguna sobre esta temática. Con lo cual soy consciente que de cara a mi futura práctica docente, necesito realizar cursos de formación sobre el tema, porque estamos ante una sociedad que sufre cambios vertiginosos y el sistema educativo debería ir adaptándose a ellos de forma casi inmediata, pues las demandas sociales tienen una duración relativamente corta y responden a un momento concreto de la evolución de la sociedad (Martínez Sánchez, 2003).

- ***Los diferentes niveles del alumnado, así como el tratamiento de los problemas individuales de los estudiantes.***

Entender y atender la diversidad es algo fundamental para conseguir una enseñanza de calidad y forma parte inherente de la función docente, ya que nuestra labor no sólo debe basarse en la transmisión de conocimientos, sino que además deberíamos conocer el contexto social, económico y cultural de los estudiantes.

En todos los módulos del máster se nos ha hablado de la importancia de la atención a la diversidad y la inclusividad, pero sin embargo carecemos de las pautas y nociones necesarias para reconocer y enfrentarnos a casos específicos, sobre los que debamos aplicar adaptaciones curriculares que nos lleven a la elaboración de materiales adaptados.

- ***La evaluación de los alumnos.***

En este aspecto detecto aún más necesidades, ya que ni siquiera he podido evaluar durante la fase de prácticas, con lo que no tengo experiencia alguna y no he podido reflexionar y hacer un análisis del proceso de evaluación que yo tenía previsto. A esto hay que añadirle que ya fuera de la Educación Secundaria Obligatoria se ha de constatar el aprendizaje matemático adquirido por los alumnos, por lo que hay que aplicarse el sistema de las ocho subcompetencias de Niss a este conocimiento y hacer un inventario de indicadores para la evaluación de los mismos.

- ***La relación con los padres.***

Otra de las preocupaciones de todo docente es la relación con las familias, ya sea como tutor o como miembro del equipo educativo, pues tienen un peso muy importante en el proceso, de hecho como dice Garreta (2010): "una buena educación exige el conocimiento del medio en el que viven los alumnos, así como la representación de éste en la vida escolar" (p. 48). Según Riart (1999), podemos definir y caracterizar la figura del profesor tutor como un docente capacitado en base a las siguientes consideraciones: debe poseer actitudes, debe poseer conocimientos adecuados al ejercicio de su actividad profesional y tener una madurez afectiva y personal adecuada. Por tanto, la relación con las familias, requiere de una actuación responsable, la cual iremos adquiriendo conforme pongamos en prácticas nuestras habilidades tutoriales en la práctica docente futura.

- ***La organización de la clase, los materiales y recursos y la metodología llevada a cabo en el aula.***

En este sentido también se detecta necesidades de formación en cuanto a la planificación de unidades didácticas, sobre todo a la hora de hablar por competencias, algo que es totalmente nuevo para nosotros. Por otro lado, pienso que no estamos preparados para cambiar sobre la marcha la estrategia metodológica prevista cuando se detecta que no se ajusta a lo planificado o a lo que se esperaba de ella. Lo mismo ocurre con la temporalización de las sesiones, ya que tendemos a quedarnos cortos o excedernos en el número de las mismas, pues resulta difícil organizar la clase encontrando los ritmos adecuados.

Por tanto, queda claro que la formación inicial que nos aporta el MAES es sólo una pincelada de lo que nos depara esta apasionante profesión, con lo que se hace necesario una formación permanente y continuada para adaptarnos a una sociedad cambiante y exigente.

La realización de este máster es sólo el comienzo de este largo camino en el que debemos estar comprometidos con la profesión, asumir la responsabilidad que conlleva y ofrecer a la sociedad lo mejor de nosotros. Ahora sólo nos queda reflexionar sobre cuál es el papel como docente que queremos adoptar, llevarlo a la práctica, enriquecernos de cada una de las experiencias vividas y hacer un alto en el camino, tantas veces como haga falta, para analizar el punto en el que nos encontramos y si hiciese falta reinventarnos.

6. Referencias bibliográficas

Álvarez Méndez, J. (2010). El currículum como marco de referencia para la evaluación educativa. En J. Gimeno Sacristán (Ed.), *Saberes e incertidumbres sobre el currículum* (pp. 355-372). Madrid: Morata.

Anacona, M. (2003). Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA*, 8 (1), 30-46.

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF,* 1, 1-10. Recuperado de http://delegacion233.bligoo.com.mx/media/users/20/1002571/files/240726/Aprendizaje_significativo.pdf

Azcárate, P. (1997). ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual?. *Investigación en la Escuela*, 32, 77-86.

Azcárate, P. & Cuesta, J. (2005). El profesorado novel de secundaria y su práctica. Estudio de un caso en las áreas de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 23 (3), 393-402.

Azcárate, P. (2006). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de matemáticas. En J.M. Chamoso & J. Durán (Coords.), *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas* (pp. 187-220). España: Ministerio de Educación y Ciencia, Colección Aulas de Verano.

Azcárate, P. & Cardeñoso, J.M. (2012).Evaluación de la competencia matemática. *Investigación en la Escuela,* 78, 31-42.

Azcárate, P. (s.f.). El aprendizaje matemático y las dificultades en el aprendizaje.

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 167-184). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Recuperado de http://www4.uva.es/didamatva/investigacion/Publicaciones/concept_limite_educ_secund.pdf

Blázquez, S. & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 4 (3), 219-236.

Bustos González, Indira (2013). *Propuesta didáctica: La enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del Geogebra*. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Contreras, A. (2003). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 71-85.

De Guzmán Ozámiz, M. (1989). Juegos y Matemáticas. *Revista SUMA,* 4, 61-64.

De Guzmán Ozámiz, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58.

Doménech, F. (2012). La enseñanza y el aprendizaje en la situación educativa. *Psicología Educativa: su aplicación al contexto de la clase.* Castellón: Universidad Jaume I. Recuperado de http://www3.uji.es/~betoret/Instruccion/Aprendizaje%20y%20DPersonalidad/Curso%2012-13/Apuntes%20Tema%205%20La%20ensenanza%20y%20el%20aprendizaje%20en%20la%20SE.pdf

Domingo Peña, J. (2010). El aprendizaje cooperativo y las competencias. *Revista d'innovació docent universitària: RIDU*, 2, 1-9.

Doroteo Petit, F.E., Navarro Montenegro, I.E., Chacón Nieto, E.J. & Arroyo Guzmán, D.J. (2007a). *Naturaleza, Evolución e Importancia de la Matemática*, 1(1). Recuperado de https://onedrive.live.com/?cid=C4A3C791CB71D587&id=C4A3C791CB71D587%21161&parId=C4A3C791CB71D587%21160&o=OneUp

Doroteo Petit, F.E., Navarro Montenegro, I.E., Chacón Nieto, E.J. & Arroyo Guzmán, D.J. (2007b). Importancia y concepto del Aprendizaje Cooperativo. *El Aprendizaje Cooperativo y la Matemática*, 1(4), 5-15. Recuperado de https://onedrive.live.com/?cid=C4A3C791CB71D587&id=C4A3C791CB71D587%21164&parId=C4A3C791CB71D587%21160&o=OneUp

Doroteo Petit, F.E., Navarro Montenegro, I.E., Chacón Nieto, E.J. & Arroyo Guzmán, D.J. (2007c). Juegos y Pasatiempos para el Aprendizaje de la Matemática. *Materiales Educativos y el Aprendizaje de la Matemática*, 1(5), 19-28. Recuperado de https://onedrive.live.com/?cid=C4A3C791CB71D587&id=C4A3C791CB71D587%21165&parId=C4A3C791CB71D587%21160&o=OneUp

Engler, A., Gregorini, M.I., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M. & Henzenn, N. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM),* 10 (36), 11-21. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/36%20Engler.pdf

Fidalgo, A. (2010, Febrero 24). Tutorías académicas con TIC: Guías de uso [Web blog post]. *Innovación Educativa*. Recuperado de https://innovacioneducativa.wordpress.com/2010/02/24/tutorias-academicas-con-tic-guias-de-uso/

García Azcárate, A. (s.f.). Juegos "Quién tiene?. Yo tengo… [Web blog post]. *Juegos y matemáticas: Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas.* Recuperado de http://anagarciaazcarate.wordpress.com/juegos-quien-tiene-yo-tengo/

García Azcárate, A. (2012, Noviembre 20). Pequeño trivial de funciones [Web blog post]. *Juegos y matemáticas: Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas.* Recuperado de http://anagarciaazcarate.wordpress.com/2012/11/20/pequeno-trivial-de-funciones/

García González, E., Jiménez Fontana, R., Azcárate Goded, P. & Navarrete Salvador, A. (2013). Estudio de la inclusión de sostenibilidad en las propuestas metodológicas de la Universidad de Cádiz. *I Encuentro Universitario de Sostenibilización Curricular: Diseñando la educación para una sociedad sostenible.* Cádiz: Universidad de Cádiz. Recuperado de http://universidadeuropea.es/myfiles/pageposts/encuentrosostenibilidad/pdf/Estudio_de_la_inclusion_de_sostenibilidad_en_las_propuestas_metodologicas_de_la_universidad_de_cadiz.pdf

Garreta, J. (2010). La participación de las familias en la escuela. En R. Feito (Coord.), *Sociología de la Educación Secundaria* (pp. 47-63). Barcelona: Graó.

González Urbaneja, P. M. (2004, Febrero). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA*, 45, 17-28.

Hodgson, V. & McConnell, D. (1995). Co-operative learning and development networks. *Journal of Computer Assisted Learning*, 11(4), 210-224.

Jiménez, F.J. (2016, Enero 22). Un profesor del siglo XXI no puede dar clases como uno del siglo XIX. *Eldiario.es: Periodismo a pesar de todo.* Recuperado de http://www.eldiario.es/andalucia/cadiz/Lucero_0_475602681.html

Johnson, D.W., Johnson R.T. & Holubec, E.J. (1994). *Cooperative learning in the classroom.* Virginia: Association for Supervision and Curriculum Development.

López (2014, Julio 7). Aula invertida: Otra forma de enseñar y aprender [Web blog post]. *Nubemia: Tu academia en la nube*. Recuperado de http://www.nubemia.com/aula-invertida-otra-forma-de-aprender/

Lupiáñez Gómez, J. L. (2002, Junio). Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática. *Revista SUMA*, 40, 59-63.

Martínez Sánchez, F. (2003). Tecnología y enseñanza: una relación compleja en el nuevo siglo. *Comunicar: Revista científica iberoamericana de comunicación y educación,* 21, 15-21.

Medina Mariño, A.C. (2001). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Tecné, episteme y didaxis: Revista de la Facultad de Ciencias y Tecnología*, 9, 44-59.

Moya Martínez, A. (2009, Noviembre). Las nuevas tecnologías en la educación. *Revista digital: Innovación y Experiencias Educativas*, 24, 1-9, Artículo 37. Extraído el 15 de Julio, 2016 de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_24/ANTONIA_M_MOYA_1.pdf

Navarro Guzmán, J.I., Alcalde Cuevas, C., Martín Bravo, C. & Crespo Sierra, M.T. (2009). Diversos modelos de aprendizaje. En C. Martín & J.I. Navarro (Coords.), *Psicología del desarrollo para docentes* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.

Novak, J.D. (1998). *Conocimientos y aprendizaje: Los mapas conceptuales como herramientas facilitadoras para escuelas y empresas*. Madrid: Editorial Alianza.

Ojeda, A., Díaz, F.E., González, L., Pinedo, P. & Hernández, M.E. (2007). Los mapas conceptuales: Una poderosa herramienta para el aprendizaje significativo. *Revista Cubana de Información en Ciencias de la Salud (ACIMED)*, 15 (5). Recuperado de http://bvs.sld.cu/revistas/aci/vol15_05_07/aci09507.htm

Olaizola, A. (2014). La clase invertida: Usar las TIC para "dar vuelta" a la clase.

Onrubia, J. (1997). Escenarios cooperativos. *Cuadernos de pedagogía,* 255, 65-70.

Pereira Baz, M.A. (2014, Enero 31). Ocho claves del aprendizaje por proyectos. *Centro Nacional de Desarrollo Curricular en Sistemas no Propietarios.* Recuperado de http://cedec.educalab.es/es/noticias-de-portada/1559-8-claves-del-aprendizaje-por-proyectos

Pifarré, M. & Sanuy J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (2), 297-308.

Pujolàs Maset, P. (2008). Algunas estructuras cooperativas simples. *Introducción al aprendizaje cooperativo*, 18-22. Grupo de Investigación sobre Atención a la Diversidad (GRAD), Departamento de Pedagogía, Facultad de Educación de la Universidad de Vic. Recuperado de http://www.mecd.gob.es/dms-static/f4d240d3-55ad-474f-abd7-dca54643c925/2009-ponencia-jornadas-antiguas-pere-pdf.pdf

Riart, J. (1999). La orientación y la tutoría. En P. Arnaiz, y J. Riart (Comps.), *La tutoría: de la reflexión a la práctica* (pp. 21-30). Barcelona: EUB.

Rodríguez Romero, M.M. (1991, Abril-Junio). Las Unidades Didácticas y el Aprendizaje del Profesor. *Signos. Teoría y práctica de la Educación,* 3, 4-13. Recuperado de http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_3/nr_33/a_549/549.html

Salinas, J. (2004, Noviembre). Innovación docente y el uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *Revista Universidad y Sociedad del Conocimiento,* 1 (1), 1-16, Artículo 3. Extraído el 18 de Julio, 2016 de http://www.uoc.edu/rusc/dt/esp/salinas1104.pdf

Sánchez Gómez C. & Contreras de la Fuente, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto del límite de una función: Una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias,* 16 (1), 73-84.

Serradó, A., Cardeñoso, J.M. & Azcárate, P. (2004). Los mapas conceptuales y el desarrollo profesional del docente. En Cañas, Novak y González (Eds.), *Proceedings of First International Conference on Concept Mapping* (pp. 91-101). Pamplona, Spain: Dirección de Publicaciones de la Universidad Pública de Navarra.

Sierra Vázquez, M. (1997). Notas de Historia de las Matemáticas para el Currículo de Secundaria. En L. Rico (Comp.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 179-194). Barcelona: Horsori.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M.T. & López Esteban, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 3 (1), 71-85.

Tomlinson, C.A. (2005). El fundamento de la enseñanza diferenciada en aulas con estudiantes con habilidades diversas. En C.A. Tomlinson (Ed.), *Estrategias para trabajar con la diversidad en el aula* (pp. 27-40). Buenos Aires: Paidós.

Universidad Internacional de Valencia (2015, Marzo 9). El aprendizaje por descubrimiento de Bruner. *Universidad Internacional de Valencia (VIU)*. Recuperado de http://www.viu.es/el-aprendizaje-por-descubrimiento-de-bruner/

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D. & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)*, 8 (29), 9-19. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

Normativa de referencia

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

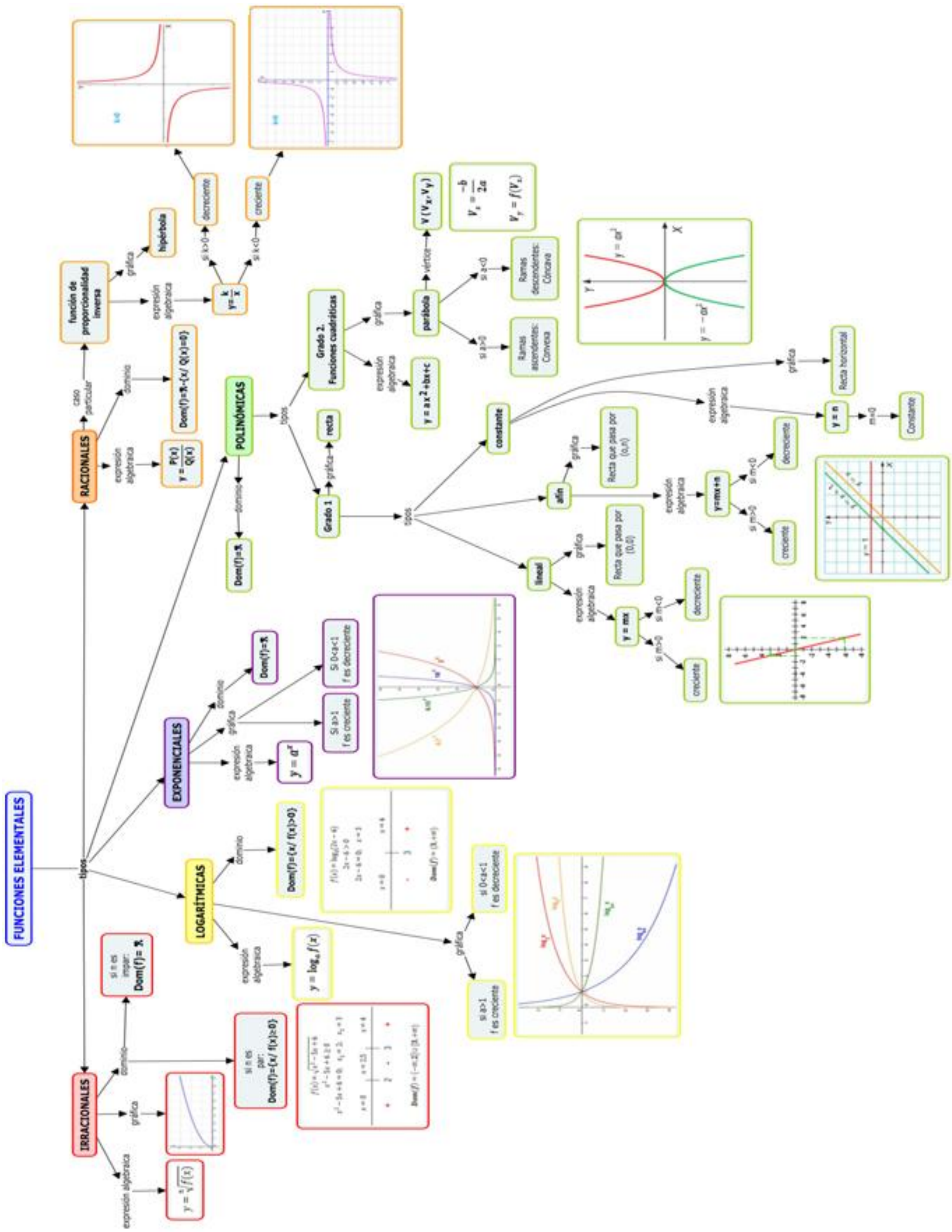
Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

ANEXOS

- **Anexo I. Actividad introductoria *Lluvia de ideas*, que sustituye al cuestionario inicial.**
- **Anexo II. Cuestionario para conocer al alumno (ya previsto en la UD original).**
- **Anexo III. Cuadernillo de trabajo individual modificado.**
- **Anexo IV. Aprendizaje Cooperativo: Puzle de Aronson sobre indeterminaciones (ya previsto en la UD original).**
- **Anexo V. Tarea sobre investigación de la evolución histórica del concepto de límite.**
- **Anexo VI. Mini examen sobre cálculo de límites.**
- **Anexo VII. Mini examen sobre estudio de la continuidad y cálculo de asíntotas.**
- **Anexo VIII. Cuadernillo de trabajo grupal modificado.**
- **Anexo IX. Práctica en Geogebra (ya prevista en la UD original).**
- **Anexo X. Práctica en CmapTools (ya prevista en la UD original, pero se añade la estructura de Aprendizaje Cooperativo: Mapa conceptual a cuatro bandas).**
- **Anexo XI. Rúbrica para evaluar la exposición oral.**
- **Anexo XII. Rúbrica para evaluar un mapa conceptual.**
- **Anexo XIII. Juego Quién tiene..., Yo tengo... (ya previsto en la UD original).**
- **Anexo XIV. Juego Trivial sobre límites, continuidad y asíntotas.**
- **Anexo XV. Prueba final sobre aplicación de límites.**
- **Anexo XVI. Rúbrica para autoevaluar y coevaluar el trabajo en grupo (ya prevista en la UD original).**
- **Anexo XVII. Rúbrica para evaluar al docente y la metodología llevada a cabo (ya prevista en la UD original).**
- **Anexo XVIII. Rúbrica para evaluar el cuaderno de clase.**
- **Anexo XIX. Rúbrica para evaluar el grado de adquisición de las competencias básicas.**
- **Anexo XX. Ficha de seguimiento del alumnado.**
- **Anexo XXI. Ejercicios de selectividad.**
- **Anexo XXII. Unidad didáctica original.**
  - **Anejo I. Cuestionario inicial de detección de ideas previas.**
  - **Anejo II. Cuadernillo de trabajo individual original.**
  - **Anejo III. Cuadernillo de trabajo en grupo original.**
  - **Anejo IV. Prueba final original.**
- **Anexo XXIII. Unidad didáctica desarrollada.**
- **Anexo XXIV. Resultados del cuestionario inicial para conocer al alumnado realizado durante las prácticas.**

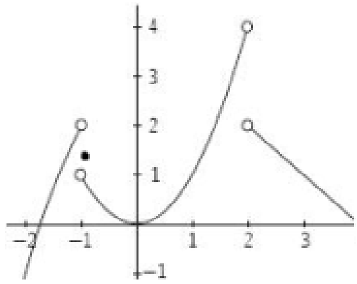
ANEXO I. EJEMPLO DE ESQUEMA QUE QUEDARÍA COMO RESULTADO DE LA ACTIVIDAD INICIAL: *LLUVIA DE IDEAS.*



FUNCIONES A TROZOS

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-4 & si \quad x\leq -2 \\ x+1 & si \quad -2<x<3 \\ 2.5 & si \quad 3\leq x<10 \end{cases} \quad \text{intervalos} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,-2] \\ (-2,3) \\ [3,+\infty) \end{cases}$$

$$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$



$$\text{intervalos} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,-1) \\ \{-1\} \\ (-1,2) \\ (2,+\infty) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 1 & x=2 \\ 4 & x>2 \end{cases} \quad \text{intervalos} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,2) \\ \{2\} \\ (2,+\infty) \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\leq 1 \\ x & 1<x\leq 3 \\ -x+6 & 3<x\leq 6 \\ 0 & 6<x \end{cases} \quad \text{intervalos} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,1] \\ (1,3] \\ (3,6] \\ (6,+\infty) \end{cases}$$

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-3}{x+2}$

$$x^2-5x+6=0; \quad x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$$x_1=3 \quad ; \quad x_2=2$$

b) $\dfrac{x^3-3x^2-10x}{x^2+2x}=\dfrac{x(x^2-3x-10)}{x(x+2)}=\dfrac{x(x-5)(x+2)}{x(x+2)}=\dfrac{x-5}{1}=x-5$

$$x^2-3x-10=0; \quad x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{3\pm 7}{2}$$

$$x_1=5 \quad ; \quad x_2=-2$$

MÁSTER EN PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

UCA
Universidad de Cádiz

ANEXO II. Cuestionario inicial para conocer al alumnado

El presente cuestionario consta de una serie de preguntas a través de las cuales se pretende conocer un poco mejor al alumnado y recabar información de interés para el desempeño de la práctica docente en el centro. Así pues, la información que se recoja del mismo será meramente confidencial.

1. Nombre y Apellidos: ....

2. Edad: .... Curso/Nivel: ....

3. Lugar de nacimiento: .... Lugar de residencia: ....

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: ....

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: ....

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: ....
....

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: ....
....

8. ¿Cómo te ha ido el último curso con la asignatura de matemáticas? ¿Tienes pendiente las matemáticas de años anteriores? ....
....

9. Tus asignaturas preferidas son: ....

¿Por qué? ....

10. Las asignaturas más difíciles para ti son: ....

¿Por qué? ....

11. ¿Qué opinas de la asignatura de matemáticas? ¿Cambiarías algo de la metodología llevada a cabo hasta ahora? ....

....

....

12. ¿Tienes claro lo que se te va a exigir en la asignatura? ....

....

....

13. ¿Te ves en la necesidad de asistir a clases particulares? En caso afirmativo explica por qué:

....

....

....

14. ¿Dispones de ordenador y conexión a internet en casa? ....

....

15. Otras cuestiones personales que consideres importantes mencionar sobre la materia en cuestión, el profesor o el centro: ....

....

....

....

....

Límite de una función. Continuidad y asíntotas

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CONTENIDOS

0. Arrancando motores

1. Idea intuitiva de límite de una función en un punto y en el infinito.

2. Deducción de la definición formal de límite haciendo uso de Geogebra.

3. Límite de una función en un punto. Límites laterales.

4. Límites finitos, infinitos y en el infinito.

5. Cálculo de límites. Indeterminaciones.

- **1.1.** Cálculo de límites de funciones polinómicas.
- **1.2.** Cálculo de límites de funciones exponenciales.
- **1.3.** Cálculo de límites de funciones logarítmicas.
- **1.4.** Cálculo de límites de funciones racionales. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}, \frac{k}{0}\ y\ \frac{0}{0}$
- **1.5.** Cálculo de límites de funciones irracionales. Indeterminación $\infty - \infty$
- **1.6.** Indeterminación 1^{∞}

6. Continuidad de una función. Relación con el límite de una función en un punto.

- **6.1.** Continuidad de una función en un punto.
- **6.2.** Tipos de discontinuidad.
- **6.3.** Continuidad de funciones elementales.
- **6.4.** Continuidad de una función en un intervalo.

7. Asíntotas de una función.

- **1.1.** Asíntota vertical.
- **1.2.** Asíntota horizontal.
- **1.3.** Asíntota oblicua.

EJERCICIOS

0. Arrancando motores

¿Qué esconde la sucesión de Fibonacci?

La sucesión de Fibonacci es una de las sucesiones más famosas en Matemáticas, la cual viene dada por la siguiente lista infinita de números naturales:

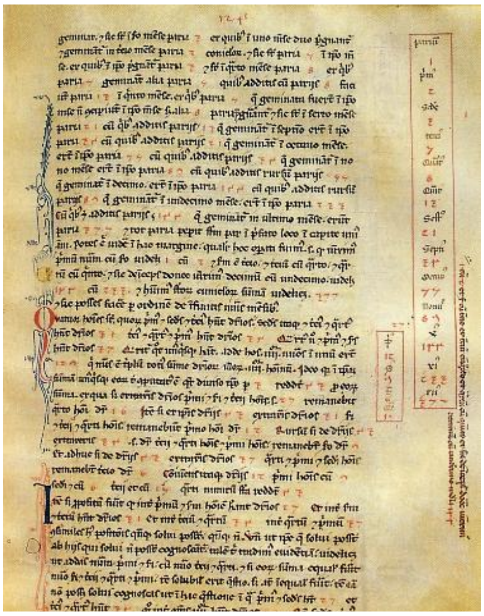
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … ,

Leonardo de Pisa (Fibonacci) 1170-1250

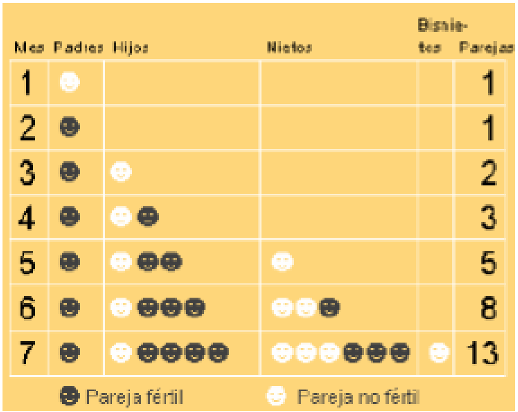
donde cada término de la sucesión se obtiene sumando los dos anteriores.

Esta sucesión fue dada a conocer en occidente por Leonardo de Pisa, quien la presentó como solución al siguiente problema que planteó en su obra *Liber Abaci:*

Una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil. Cada vez engendra una pareja de conejos que, a su vez, tras ser fértiles engendran cada mes una pareja de conejos. ¿Cuántas parejas habrá después de un número determinado de meses?



Página del *Liber Abaci* de Fibonacci donde se muestra la sucesión de Fibonacci en el recuadro de la



Investiga sobre la espiral de Fibonacci , el número de oro y el rectángulo áureo.

Para ello podéis ayudaros de los siguientes vídeos:

https://www.youtube.com/watch?v=yDyMSliKsxI

https://www.youtube.com/watch?v=0d4o57I3rn4

Busca en el campo artístico, en el diseño, en la naturaleza, etc., donde aparezca el número de oro.

Antes de comenzar …

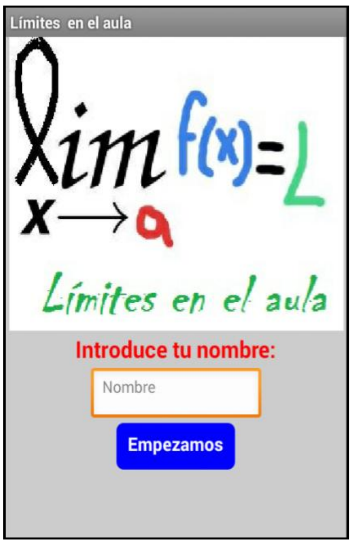
Para dar comienzo al tema, antes debemos instalar una aplicación para el teléfono móvil. A continuación os muestro las instrucciones a seguir para la obtención de dicha aplicación.

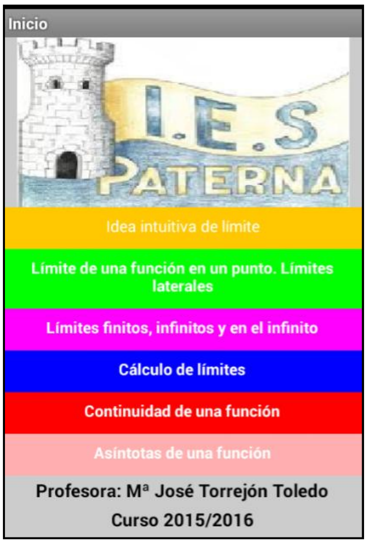
1. Descargar una aplicación lectora de código QR en vuestro teléfono a través de Play Store.
2. Una vez descargada, leer el siguiente código QR que se muestra a continuación y dar el permiso para que se produzca la instalación de la aplicación.

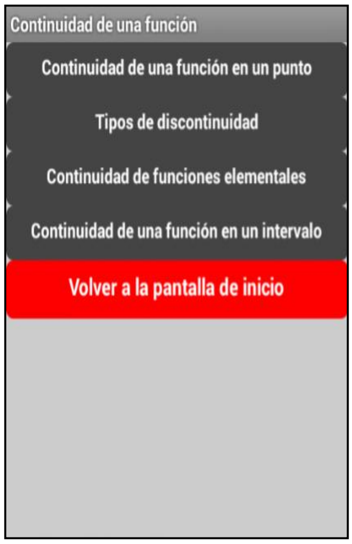
Barcode link for Clase

3. Una vez instalada la nueva aplicación denominada **Clase** os deberá aparecer un nuevo icono en vuestro teléfono como el siguiente:

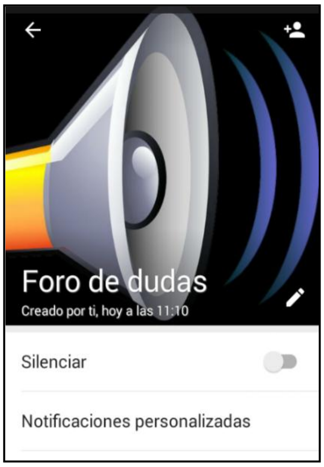
4. Ya estamos listos para usar la aplicación.







¿Cómo nos comunicaremos fuera de clase?



Para facilitar la comunicación entre el docente y el alumnado y el propio alumnado entre sí, se ha creado un grupo WhatsApp, denominado Foro de Dudas donde se atenderán todas aquellas dudas que puedan surgir durante la realización de los ejercicios fuera del aula. Este grupo funcionaría a modo de tutoría virtual, aunque también se atenderán las necesidades de cada alumno de forma individualizada en la actividad extraescolar de acompañamiento en horario de martes y jueves de 4 a 6 de la tarde.

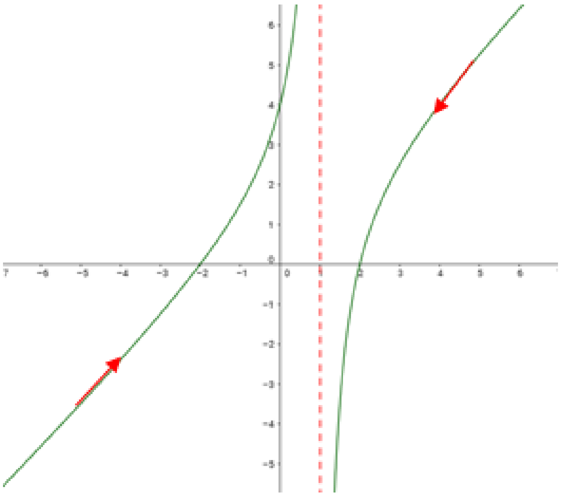
1. Idea intuitiva de límite de una función en un punto y en el infinito

NOCIÓN DE LÍMITE

Consulta el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=eCB_Jr_VKyg

Gráficamente:

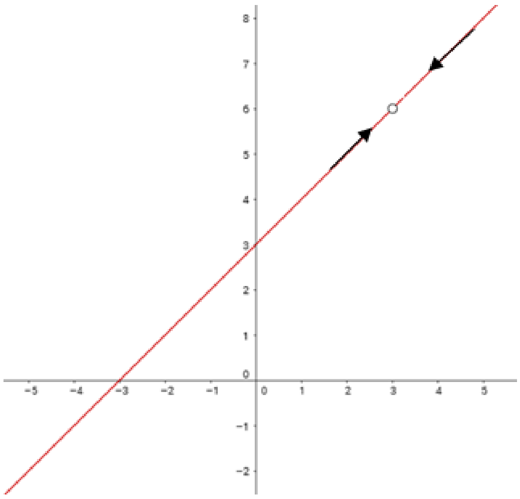


$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$



$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

Mediante una tabla de valores:

Dada la función, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, podemos deducir el valor del límite de la misma cuando *x tiende a 2 (x→2)*, a partir de una tabla, tomando valores muy próximos por la izquierda y por la derecha del punto. (**Observación:** hemos tomado ese punto porque para ese valor la función no está definida)

$x \to 2^-$	1,9	1,99	1,999	1,99999...
f(x)				

$x \to 2^+$	2,1	2,01	2,001	2,00001...
f(x)				

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \end{cases}$$

- **Analíticamente:** No es más que sustituir el valor al que tiende x, en la función. Así por ejemplo:

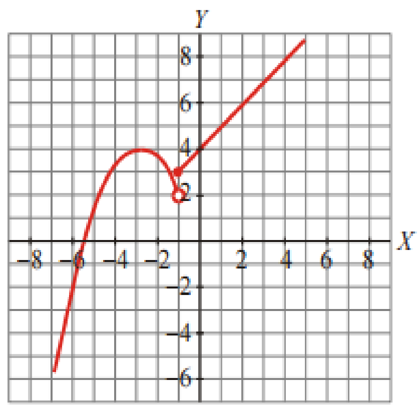
a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2}{5x} = \frac{3^3+2}{5\cdot 3} = \frac{30}{15} = \mathbf{2}$

b) $\lim_{x\to -1} x^5 - x^3 + 5 = (-1)^5 - (-1)^3 + 5 = -1 + 1 + 5 = \mathbf{5}$

AHORA TÚ...

1. A partir de las siguientes gráficas de funciones, calcula:

a)



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

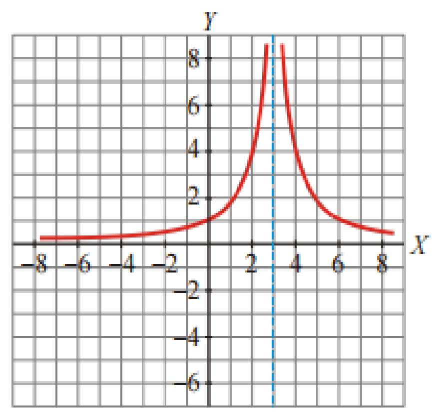
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -5} f(x)$

b)



$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$

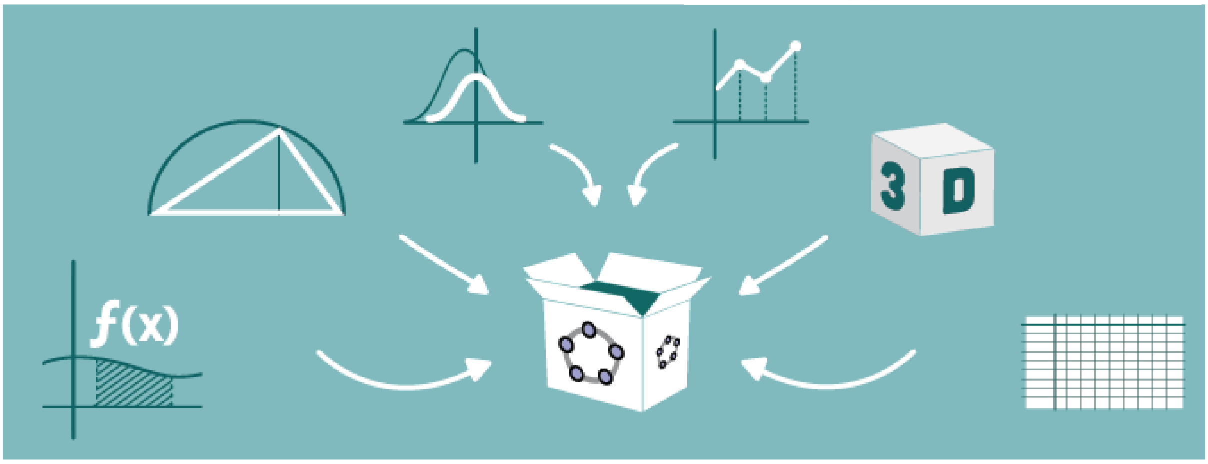
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$, determina el límite de la misma en el punto x=1, a partir de una tabla de valores.

2. Deducción de la definición formal de límite haciendo uso de Geogebra

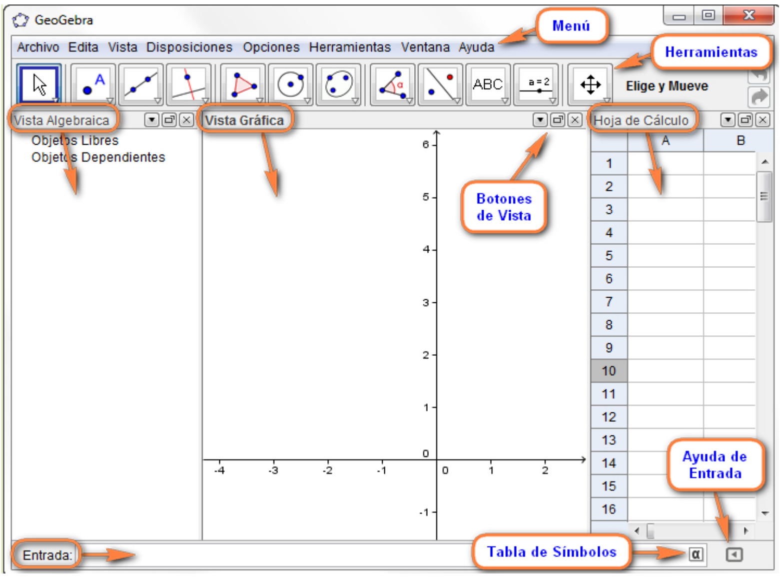
GeoGebra: Herramienta esencial para las matemáticas en la ESO

Se trata de una calculadora gráfica para álgebra, cálculo, estadística y 3D.



ZONAS DE GEOGEBRA

- **Barra de Menú**
- **Barra de Herramientas**
- **Barra de entrada**
- **Vista Algebraica**
- **Vista Gráfica**
- **Hoja de Cálculo**

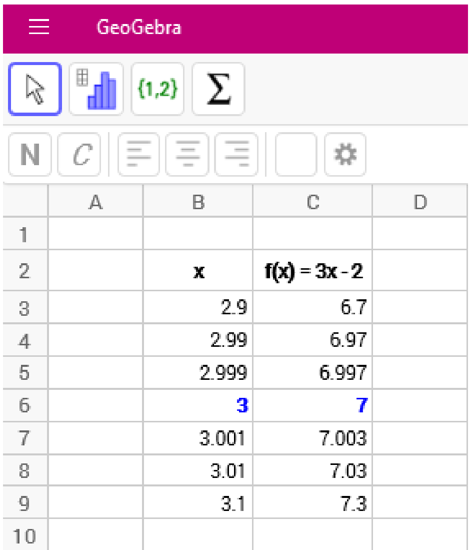


Software libre descargable desde: **https://www.geogebra.org/download**

GeoGebra ofrece múltiples usos que nos ayudarán en el tratamiento del concepto de límite mediante la definición formal en términos de $\varepsilon - \delta$.

Primero utilizaremos el software para construir una tabla de valores y así deducir el valor del límite de la función de manera intuitiva y partir de ello introduciremos la definición formal de límite. Veamos el siguiente ejemplo:

Dada la función $f(x) = 3x - 2$, veamos hacia dónde se aproxima el límite de la misma cuando x tiende a 3; es decir, $\lim_{x\to 3} f(x)$. Para ello construimos la tabla de valores a través de la Hoja de Cálculo de GeoGebra.



	A	B	C	D
1				
2		x	f(x) = 3x - 2	
3		2.9	6.7	
4		2.99	6.97	
5		2.999	6.997	
6		3	7	
7		3.001	7.003	
8		3.01	7.03	
9		3.1	7.3	
10				

Se puede establecer una correspondencia entre los valores de x que equidistan de $x = 3$, de manera que:

$$\begin{array}{ccc} 2{,}9 < x < 3{,}1 & \text{entonces} & 6{,}7 < f(x) < 7{,}3 \\ 2{,}99 < x < 3{,}01 & \text{entonces} & 6{,}97 < f(x) < 7{,}03 \\ 2{,}999 < x < 3{,}001 & \text{entonces} & 6{,}997 < f(x) < 7{,}003 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Las expresiones anteriores se pueden escribir como:

$$\begin{array}{ccc} -0{,}1 < x-3 < 0{,}1 & \text{entonces} & -0{,}3 < f(x)-7 < 0{,}3 \\ -0{,}01 < x-3 < 0{,}01 & \text{entonces} & -0{,}03 < f(x)-7 < 0{,}03 \\ -0{,}001 < x-3 < 0{,}001 & \text{entonces} & -0{,}003 < f(x)-7 < 0{,}003 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Pero a su vez, la expresión $-0{,}1 < x - 3 < 0{,}1$ es equivalente a la expresión $|x - 3| < 0{,}1$ y la expresión $-0{,}3 < f(x) - 7 < 0{,}3$ es equivalente a la expresión $|f(x) - 7| < 0{,}3$; por lo tanto las expresiones anteriores se pueden plantear así:

$$\begin{array}{ccc} |x-3| < 0.1 & \text{entonces} & |f(x)-7| < 0.3 \\ |x-3| < 0.01 & \text{entonces} & |f(x)-7| < 0.03 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Como los valores 0,1; 0,01; 0,001; ... y 0,3; 0,03; 0,003; ... han sido generados de forma arbitraria, las desigualdades anteriores quedan representadas por:

$$|x-3| < \delta \text{ entonces } |f(x)-7| < \varepsilon, \text{donde } \varepsilon \ y \ \delta \text{ son valores arbitrarios.}$$

Definición formal de límite:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \,/\, si\ |x-a| < \delta\ \ \forall x \to\ |f(x)-L| < \varepsilon$$

Podríamos tomar un ε tan pequeño como se quiera y siempre encontraríamos un δ.

AHORA TÚ...

Dada la función $f(x) = 5x + 3$, deduce mediante una tabla de valores el valor del límite de dicha función cuando x tiende a 2 con ayuda de GeoGebra.

Luego toma un valor de ε tan pequeño como quieras y encuentra el valor de δ correspondiente.

3. Límite de una función en un punto. Límites laterales

Definición: Decimos que existe el límite de una función, *f(x)*, en un punto *x=a*, si se cumple:

a) Que existe el **límite lateral por la izquierda**, es decir, $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = l^-$
b) Que existe el **límite lateral por la derecha**, es decir, $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = l^+$
c) Ambos son iguales, es decir, $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l^- = l^+ = L$

Si ocurre esto entonces, el límite global de la función en *x=a* será:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = L}$$

Ejemplo

Determina el límite de la siguiente función en los puntos x = 1 y x = 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{2} & si\ \ x \le 1 \\ 5x^2 - 4 & si\ \ 1 < x < 5 \\ 20x & si\ x \ge 5 \end{cases}$$

Como estamos ante una función a trozos, es necesario estudiar los límites laterales de la misma en cada uno de los puntos.

¿$\exists \lim_{x \to 1} f(x)$?

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{2} = \frac{1^2+1}{2} = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (5x^2 - 4) = 5 \cdot 1^2 - 4 = 1$$

Conclusión: Como los dos límites laterales existen y son iguales, entonces existe el límite global de la función en x = 1, siendo

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

¿$\exists \lim_{x \to 5} f(x)$?

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (5x^2 - 4) = 5 \cdot 5^2 - 4 = 121$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} 20x = 20 \cdot 5 = 100$$

Conclusión: En este caso los dos límites laterales existen, pero no son iguales, entonces no existe el límite global de la función en x = 5, es decir:

$$\nexists \lim_{x \to 5} f(x)$$

AHORA TÚ...

1. Calcula, si existen, el límite de las siguientes funciones en el punto que se indica:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \ \ x \leq 1 \\ -x + 4 & si \ \ x > 1 \end{cases} \qquad \text{en } x = 1$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 4 & si \ \ x < -2 \\ 2 - x^2 & si \ x \geq -2 \end{cases} \qquad \text{en x = -2}$$

4. Límite finito, infinito y en el infinito

- **Límite finito:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

- **Límite infinito:**

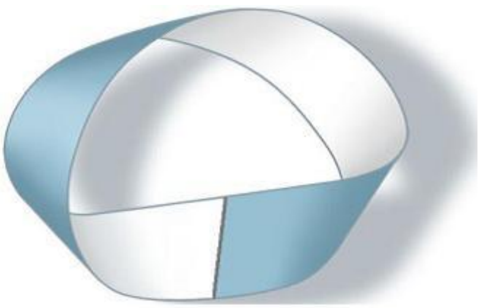
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

- **Límite en el infinito:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Curiosidades con el infinito: La cinta de Möbius y el Hotel infinito de Hilbert.

La **cinta de Möbius** es una superficie que por sus sorprendentes propiedades ha sido y es utilizada en campos tan dispares como la Matemática, el Arte, la Ingeniería, la Magia, la Ciencia, la Arquitectura, la Música, etc., ya sea de manera explícita o simplemente como una metáfora. Simboliza la naturaleza cíclica de muchos procesos, la eternidad, el **infinito**.



La cinta de Möbius fue descubierta por los matemáticos alemanes **August Ferdinand Möbius** y **Johann Benedict Listing** en 1858.

Para construir dicha cinta se toma una tira de papel y se pegan los extremos, pero antes de ello debemos darle media vuelta a uno de ellos.

El **hotel infinito de Hilbert** es una paradoja inventada por el matemático alemán David Hilbert, basada en el siguiente planteamiento:
Si tenemos un hotel matemático con infinitas habitaciones todas completas y viniera una persona a alojarse, ¿podrías alojarla?, ¿por qué?. Y si viniera un número infinito de personas?

Consulta el siguiente vídeo, https://www.youtube.com/watch?v=_5x-j0zRv5w

5. Cálculo de límites. Indeterminaciones

OPERACIONES CON EL INFINITO

$\infty + n^{\text{o}} = \infty$	$\infty - n^{\text{o}} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación
$\infty \cdot n^{\text{o}} = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$ Indeterminación
$\infty^n = \infty$	$\sqrt[n]{\infty} = \infty$	$\frac{n^{\text{o}}}{0}$ Indeterminación
$\frac{\infty}{n^{\text{o}}} = \infty$	$\frac{n^{\text{o}}}{\infty} = 0$	1^{∞} Indeterminación
$\frac{0}{n^{\text{o}}} = 0$	$\infty^m - \infty^n = \begin{cases} \infty & si\ m \neq n \\ \infty - \infty \quad \text{Indeterminación} & si\ m = n \end{cases}$	

5.1. Cálculo de límites de funciones polinómicas

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = P(\pm\infty) = \pm\infty \ (Término\ de\ mayor\ grado)$$

Ejemplo

Calcula el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -2} (-x^3 + 5x^2 - 7) = -(-2)^3 + 5(-2)^2 - 7 = 8 + 20 - 7 = 21$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^5 - 2x^3 + 3x^2) = -(-\infty)^5 - 2(-\infty)^3 + 3(-\infty)^2 = +\infty$$

5.2. Cálculo de límites de funciones exponenciales

$$\lim_{x \to c} a^x = a^c$$

Si a>1	***Si 0<a<1***
$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Ejemplo

Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x\to+\infty} 3^{x+2} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} 5^{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{2})^{x-2} = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = (\frac{1}{3})^{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} 4^{-x+1} = 4^{-2+1} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

Recuerda:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

5.3. Cálculo de límites de funciones logarítmicas

$$\lim_{x\to c} (\log_a f(x)) = \log_a f(c)$$

Si a>1

$\lim_{x\to 0^+} (\log_a f(x)) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} (\log_a f(x)) = +\infty$

Si 0<a<1

$\lim_{x\to 0^+} (\log_a f(x)) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} (\log_a f(x)) = -\infty$

Ejemplo

Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x\to+\infty} (\log_2 x^2) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} (\log_{1/3}(-3x+2)) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} (\log(2x+1)) = -\infty$

$\lim_{x\to +\infty} (\log_{1/2}(-3x+2)) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} (\log_2 x^2) = \log_2 2^2 = 2$

5.4. Cálculo de límites de funciones racionales. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ y $\frac{k}{0}$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ con } Q(a) \neq 0$$

Ejemplo → $\lim_{x\to -1} \frac{2x-1}{2-x^2} = \frac{2\cdot(-1)-1}{2-(-1)^2} = \frac{-3}{1} = -3$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } grad\,(P(x)) > grad\,(Q(x)) \\ 0 & \text{si } grad\,(P(x)) < grad\,(Q(x)) \\ \frac{a}{b} & \text{si } grad\,(P(x)) = grad\,(Q(x)) \end{cases}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^3-2x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}}_{\text{simplificando}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+3}{3x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{3}=\frac{-2(-\infty)}{3}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4x^2}{2x^2+x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2}=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+5x^2}{2x^2+\sqrt{9x^4+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{2x^2+3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{5x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

Miramos el término de mayor grado dentro de la raíz y le hacemos la raíz, en este caso: $\sqrt{9x^4}=3x^2$. Luego miramos fuera de la raíz. Si hay términos de mayor grado, tomamos dicho término y si hay términos de igual grado, los sumamos. En nuestro caso $2x^2+3x^2=5x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$$

Existen dos casos:

a) Cuando no aparecen raíces: Esta indeterminación se resuelve factorizando el numerador y el denominador y simplificando.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-3}=\frac{2-2}{2-3}=\frac{0}{-1}=\mathbf{0}$$

Factorizamos el numerador: : $x^2-4x+4=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm0}{2}$$

x=2 →(x-2)

x=2→(x-2)

Factorizamos el denominador: $x^2-5x+6=0$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

x=3 →(x-3)

x=2→(x-2)

b) Cuando aparecen raíces: En este caso hay que multiplicar por el conjugado y simplificar.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}=$$

$$=\lim_{\boldsymbol{x}\to \boldsymbol{1}}\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{1})(\sqrt{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{1})}{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)=2\cdot 2=\mathbf{4}$$

Indeterminación $\boldsymbol{\frac{k}{0}}$

En este caso hay que calcular los límites laterales.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x^2-4}=\left[\frac{7}{0}\right]=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+3}{x^2-4}=\frac{2\cdot 1{,}999+3}{(1{,}999)^2-4}=\frac{+}{-}=-\infty\\ \\ \lim_{x\to 2^+}\frac{2x+3}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2{,}001+3}{(2{,}001)^2-4}=\frac{+}{+}=+\infty\end{cases}$$

5.5. Cálculo de límites de funciones irracionales. Indeterminación $\infty-\infty$

Indeterminación $\infty-\infty$

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\infty}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)=\infty-\infty$$

Existen dos casos:

a) Cuando no aparecen radicales: Se resuelve haciendo m.c.m. Consiste en transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2}=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-1)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2-x^2-3x-2x-6}{2(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-8}{2x+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$$

b) Cuando aparecen radicales: Se resuelven aplicando el conjugado.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = [\infty-\infty] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3-x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

5.6. Indeterminación 1^{∞}

Indeterminación 1^{∞}

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)^{g(x)} = [1^{\infty}] = e^{\lim_{x\to\mp\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty} [\frac{5x-2}{5x+3}]^{3x} = [1^{\infty}] = e^{\lim_{x\to+\infty} 3x(\frac{5x-2}{5x+3}-1)} = e^0 = \mathbf{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{5x-2-5x-3}{5x+3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5}{5x+3} = \frac{-5}{+\infty} = 0$$

Un poco de historia …

Jacob Bernoulli descubrió la constante ***e***, calculando aproximaciones de la fórmula $(1+\frac{1}{n})^n$ estudiando el interés compuesto. Jacob Bernoulli estudió una situación como la siguiente:

Supongamos que un banco ofrece un interés del 100% anual. Si se depositan 100 €, al año la suma habrá aumentado en 100 €:

100 · (1 + 1,0) = 100 · 2

Ahora, si la capitalización se realiza semestralmente, al año el capital será de:

$$100\left(1+\frac{1,0}{2}\right)^2 = 100 \ \cdot 2,25$$

Y si se hace cada cuatro meses, dos meses o mensualmente, el monto al año será, respectivamente:

$$100\left(1+\frac{1{,}0}{3}\right)^{3} = 100\ \cdot 2{,}3704$$

$$100\left(1+\frac{1{,}0}{6}\right)^{6} = 100\ \cdot 2{,}5216$$

$$100\left(1+\frac{1{,}0}{12}\right)^{12} = 100\ \cdot 2{,}6130$$

Bernoulli notó que la sucesión de números 2,25; 2,3704; 2,5216; 2,6130; . . . ; obtenida a partir de la expresión $(1+\frac{1}{n})^{n}$, iba aumentando, pero a su vez se aproximaba a un límite que no superaba. Si la capitalización era semanal (n = 52) o diaria (n = 360), los números obtenidos diferían en un poco más de dos centésimos: 2,692596954 y 2,714516025. Para valores de n más grandes la diferencia entre dos números consecutivos era del orden de los milésimos, luego diezmilésimos, y así siguiendo. Luego, la sucesión no se estabiliza en ningún valor, pero se aproxima o *converge* a un número cuyas primeras cifras son 2,71182818... . Sus cifras decimales no son periódicas, por lo que no se trata de un número racional sino de un número *irracional*.

6. Continuidad de una función. Relación con el límite de una función en un punto

6.1. Continuidad de una función en un punto.

Definición: Decimos que una función, *f(x)*, es continua en un punto *x=a*, si se cumple:

a) Que existe $f(a)$.
b) Que existe el límite f(x), cuando x → a; es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

c) Que ambos sean iguales; es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Observación: Decimos que $\nexists$ *si el resultado es* $\pm\infty$

Ejemplo

Estudia la continuidad de f(x) en el punto x=0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si\ x \leq 0 \\ 2x + 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. ¿ ∃ *f(0)* ?

$$f(0) = 0^2 + 2 = 2$$

2. ¿$\exists \lim_{x\to 0} f(x)$?

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2+2) = 0^2 + 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+1 = 2\cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

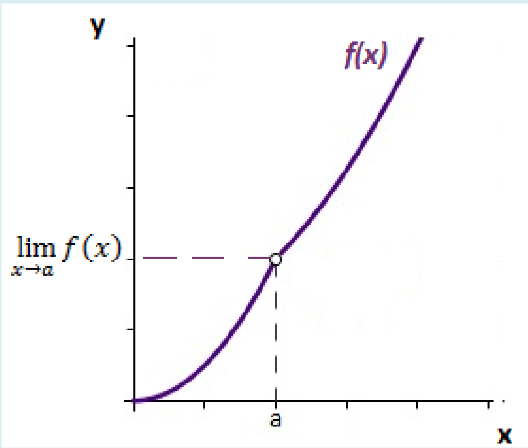
Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces, $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

Conclusión: La función **no** es continua en el punto *x=0*

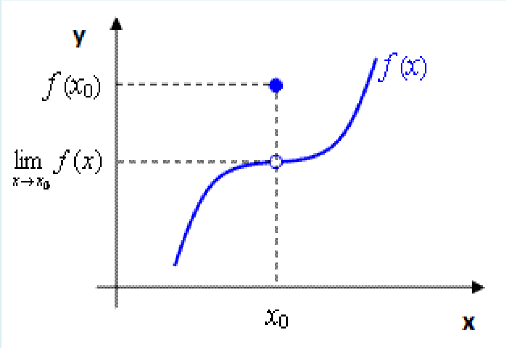
6.2. Tipos de discontinuidad.

1. *Discontinuidad evitable*: En este tipo de discontinuidad, $\exists \lim_{x\to a} f(x)$, pero ocurren alguno de los siguientes casos:

a) $\nexists f(a)$

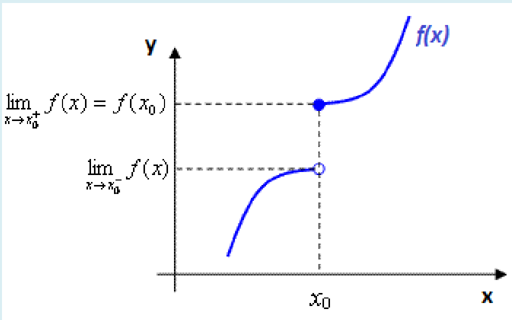


b) $\exists\, f(a)\ y\ \exists \lim_{x\to a} f(x)\,, pero\ f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$

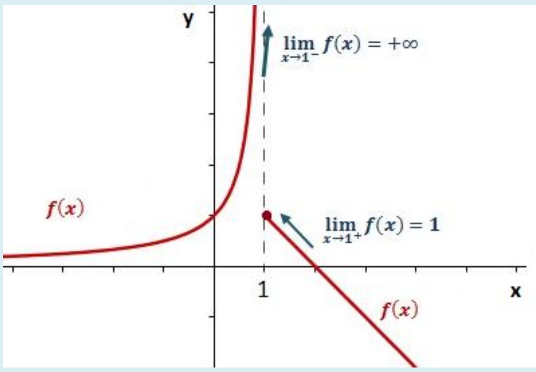


2. ***Discontinuidad inevitable***: Este tipo de discontinuidad se da cuando $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$. Dependiendo de porqué no exista distinguimos dos casos:

a) **Discontinuidad de salto finito**. Se da cuando:
$\exists \lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ pero $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$



b) **Discontinuidad de salto infinito**. Se da cuando:
$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x)$ y/ó $\nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$



Observación. Cuando decimos que $\nexists$ *es que sale* $\pm\infty$

6.3. Continuidad de funciones elementales.

Para estudiar la continuidad de las funciones elementales, no es más que hacer lo mismo que cuando estudiamos su dominio. Así:

- **Funciones polinómicas:** $\boldsymbol{f(x) = P(x)}$

  Son continuas en R.

  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = -x^7 + 3x^5 - 2x + 5}$

  La función f(x) es continua en **R**

- **Funciones racionales:** $\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$

  Son continuas en todo R menos en los puntos donde se anula el denominador; es decir: R-{x/ Q(x)=0}

  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^3-2x}{5x-20}}$

  Igualamos a cero el denominador: $\boldsymbol{5x - 20 = 0}$; $\boldsymbol{x = 4}$

  La función f(x) es continua en **R - {4}**

- **Funciones irracionales:** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{p(x)}}$

  Tenemos dos casos:

  ✓ Si *n es impar*, f es continua en R

  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[5]{x^2+3}}$

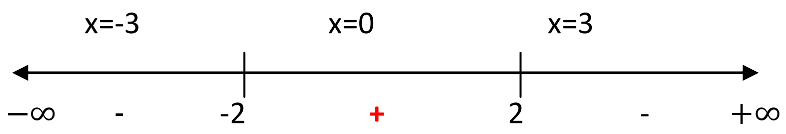
  La función es continua en **R**

  ✓ Si *n es par*, f es continua en los puntos donde el radicando es igual o mayor que cero; es decir: {x/ p(x) ≥ 0}

  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4 - x^2}}$

  Igualamos a cero el radicando: $\boldsymbol{4 - x^2 = 0}$; $\boldsymbol{4 = x^2}$; $\boldsymbol{x = \pm\sqrt{4} = \pm 2}$

  Representamos los valores en la recta real para estudiar el signo:



  $\boldsymbol{4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5}$

  $\boldsymbol{4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4}$

  $\boldsymbol{4 - 3^2 = 4 - 9 = -5}$

  Luego *f(x)* es continua en el intervalo: **[-2,2]**

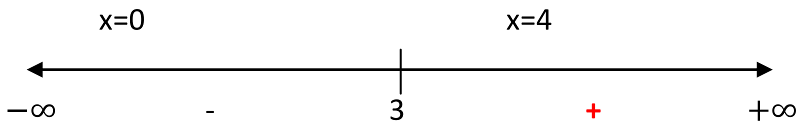
- **Funciones logarítmicas:** $\boldsymbol{f(x) = \log_a p(x)}$

  Las funciones logarítmicas son continuas en todos los valores de x para los que p(x) es positivo; es decir: {x/ p(x)>0}

  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \log_3(2x - 6)}$

  Igualamos a cero lo que está dentro del logaritmo: $\boldsymbol{2x - 6 = 0}$; $\boldsymbol{x = 3}$

  Representamos el valor en la recta real para estudiar el signo:



$\mathbf{2 \cdot 0 - 6 = -6}$
$\mathbf{2 \cdot 4 - 6 = 2}$
Luego *f(x)* es continua en el intervalo: **(3, +∞)**

- **Funciones exponenciales:** $\boldsymbol{f(x) = a^x}$
  Las funciones exponenciales son continuas en todo R
  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = 3^{x+2}}$
  La función *f(x)* es continua en **R**

6.4. Continuidad de una función en un intervalo.

Consiste en estudiar la continuidad de cada uno de los trozos, según el tipo de función elemental que sea y en los puntos conflictivos, estudiarla a través de la definición de la continuidad en un punto.

Ejemplo

Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ 2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

- $(-\infty, 1)$ $\quad f_1(x) = \frac{1}{x}$ $(función\ racional)$.
  $Da\ problemas\ en\ x\ = 0, por\ tanto\ f_1\ (x)\ es\ continua\ en\ (-\infty, 0) \cup (0,1)$

  ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en x = 0?

  f(0)= $\frac{1}{0}$ *, por lo tanto en x=0 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.*

Observación:

Cuando se presentan discontinuidades, en las funciones racionales, pueden ser de dos tipos:

- Si al sustituir *f(a)=*$\frac{k}{0}$ *, decimos que la discontinuidad es inevitable de salto infinito.*
- Si al sustituir *f(a)=*$\frac{0}{0}$ *, decimos que la discontinuidad es evitable.*

- $(1, +\infty)$ $\quad f_2(x) = 2x - 1$ $(función\ polinómica)$

No da problemas en ningún punto, por tanto $f_2\ (x)$ es continua en todo el intervalo (1,+ ∞)

- <u>*Continuidad en x=1*</u>

1. ¿ ∃ *f(1)* ?

$$f(1)=2\cdot 1-1=1$$

2. ¿∃ $\lim_{x\to 1} f(x)$?

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x-1 = 2\cdot 1-1 = 1 \end{cases}$$

Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, entonces, ∃ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

3. Como *f(1)*= $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, *entonces f es continua en x=1*

Conclusión: ***La función f(x) es continua en R-{0}***

7. Asíntotas de una función

7.1. Asíntota vertical

Decimos que una función *f(x)*, tiene una asíntota vertical en ***x=a***, si se cumple:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$$

Ejemplo

Estudia si la siguiente función tiene asíntota vertical:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

Para ello igualamos el denominador a cero; es decir:

$$x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Por lo tanto nuestras posibles asíntotas verticales son:

$$x=1\ \ y\ \ x=-1$$

Veamos que efectivamente son asíntotas:

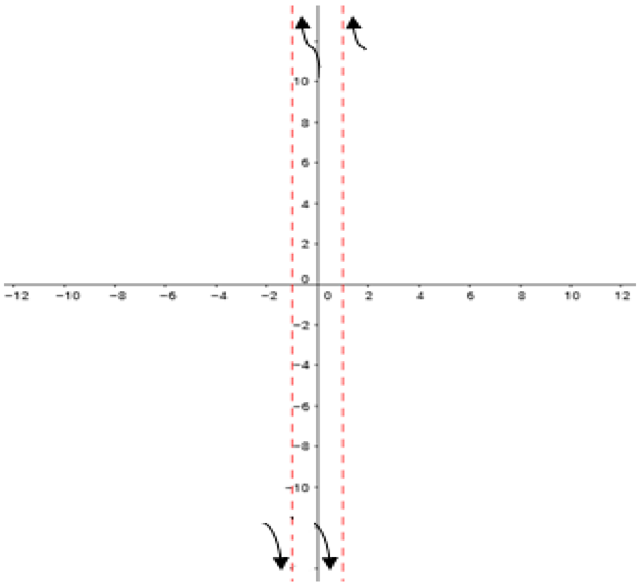
$$\begin{cases} \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \frac{2\cdot(-1{,}001)}{(-1{,}001)^2-1} = \frac{-}{+} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \frac{2\cdot(-0{,}999)}{(-0{,}999)^2-1} = \frac{-}{-} = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \frac{2\cdot(0{,}999)}{(0{,}999)^2-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \frac{2\cdot(1{,}001)}{(1{,}001)^2-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

Como se cumple que $\lim_{x\to -1} f(x) = \mp\infty$, entonces, hay una asíntota vertical en ***x = -1***

Como se cumple que $\lim_{x\to 1} f(x) = \mp\infty$, entonces, hay una asíntota vertical en ***x = 1***

- Posición relativa de la gráfica con respecto a la asíntota



7.2. Asíntota horizontal

Decimos que una función *f(x)*, tiene una asíntota horizontal en ***y=b***, si se cumple:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$$

Observación: Si una función tiene asíntota horizontal, entonces, no tiene asíntota oblicua.

Ejemplo

Estudia si la función siguiente tiene asíntota horizontal:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

Para ello estudiamos el $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Si obtenemos un número, hay asíntota horizontal y en caso contrario no hay.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} 2 = 2$$

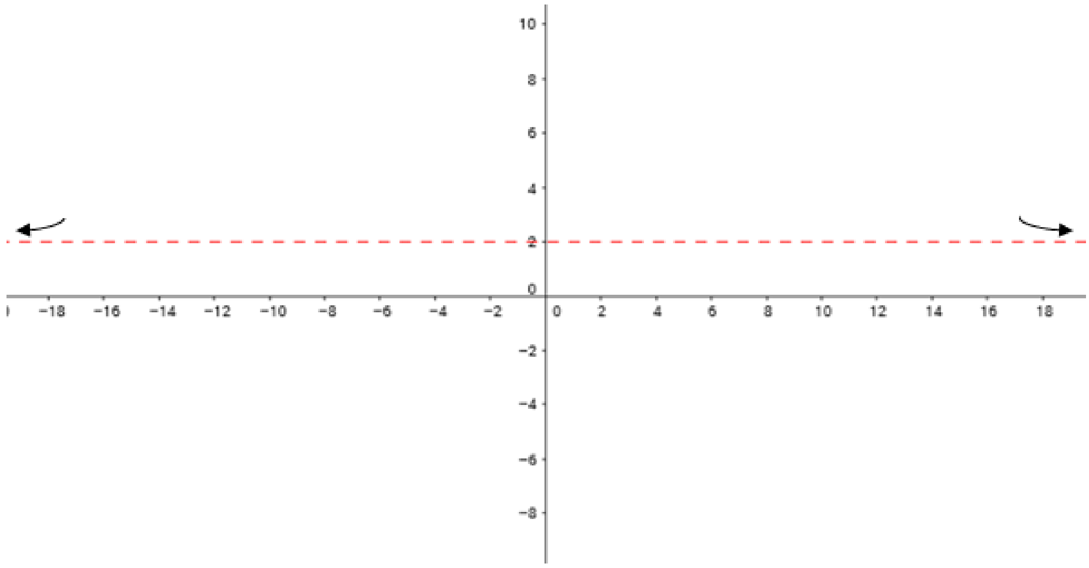
Por lo tanto la función tiene una asíntota horizontal en ***y = 2***

- Posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la asíntota

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} - 2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3-2x^2+2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x^2-1} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$(la gráfica de la función está por encima de la asíntota)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} - 2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3-2x^2+2}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2-1} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$(la gráfica de la función está por encima de la asíntota)

Por lo tanto,



7.3. Asíntota oblicua

Decimos que una función *f(x)*, tiene una asíntota oblicua en ***y=mx+n***, si se cumple:

$$\boldsymbol{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\boldsymbol{n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)}$$

Ejemplo

Estudia si la función siguiente tiene asíntota oblicua:

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+3}$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^3+1}{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{x(x^2+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{x^3+3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

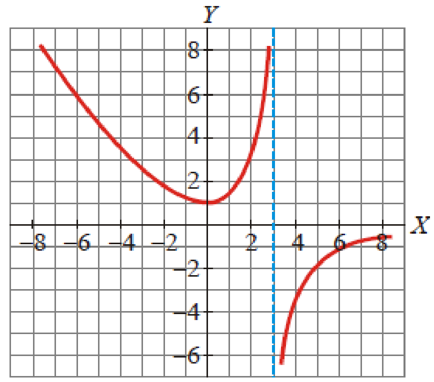
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x^3+1}{x^2+3} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1-2x^3-6x}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-6x}{x^2+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6}{x} = 0$$

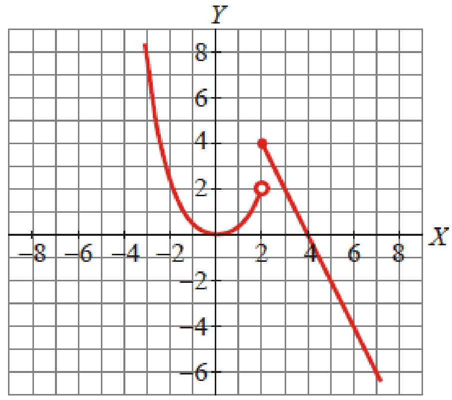
Por lo tanto la función tiene una asíntota oblicua en $\boldsymbol{y=2x}$

EJERCICIOS

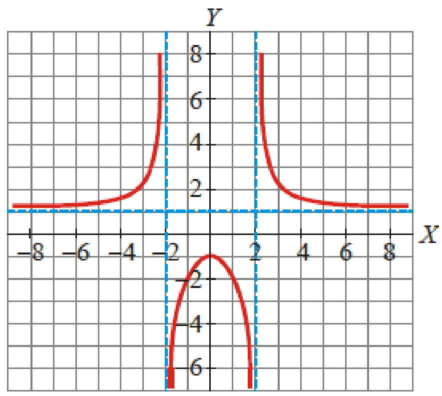
1. *A partir de la gráfica de f(x), calcula:*



a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \to 0} f(x)$



a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \to 0} f(x)$



a) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \to 0} f(x)$

2. *Calcula los límites indicados de la función:*

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 4^-} g(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 6^+} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} g(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$ f) $\lim\limits_{x \to 4^+} g(x)$

3. *Encuentra el valor de:*

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3} \right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{5x^2+1}{x} + \dfrac{3 - x^2}{x+2} \right)$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2 - 2x} - \dfrac{2x^2+1}{2x-4} \right)$

4. *Halla el valor de los siguientes límites en el infinito:*

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 5x + 7}{2x^2 + x + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 10x}{-x^2 + 2x^3 - x + 3}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4 + x - 2x^3}{2x^2 - 3x + 11}$ d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2 + 3x + 21}{5x^2 - 4x^3 + 2x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x + 5}$ i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + x - 12}{x^2 - x^3 + 2}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 6x^3 - x + 1}{4x^2 + 5x - 2}$ j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + x - 6x^4 + x^3}{3x + 2x^2 - 3}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3 + 3x - 1}{6x^2 - 3x^3 + x}$

5. *Determina los siguientes límites:*

$\boldsymbol{a)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2-3}+2x^2}{5x+3}}$ $\boldsymbol{c)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{25x^2-3}+2x}{\sqrt{1-4x^4}+3x}}$

$\boldsymbol{b)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+\sqrt{9x^2-3}}{16x-2}}$ $\boldsymbol{d)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-5x^2+8}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x}}}$

6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-x\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right]$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ l) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

7. Calcula los siguientes límites, aplicando el método de resolución apropiado a cada caso, dependiendo del tipo de indeterminación:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-6x^2+12x-8}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$ l) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^3+x}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

8. Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$$

determina los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

9. Resuelve los límites:

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$ d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}$

c) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$ f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

10. Determina los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+6}{x-2}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2+2x}{8-2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{9-x^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1}$

11. Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+3}$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x}\right)^{\frac{x}{2}}$

12. Calcula los siguientes límites de funciones exponenciales y logarítmicas:

a) $\lim_{x\to+\infty} 3^{-x}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{1}{5}}(x-1)\right)$

b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\log_2(2x+1)\right)$

c) $\lim_{x\to-\infty}(5)^{x+2}$

g) $\lim_{x\to 0^+}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+3)\right)$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}$

e) $\lim_{x\to e}\left(\ln x^2\right)$

13. Estudia la continuidad de las siguientes funciones, en el punto conflictivo, detectando el tipo de discontinuidad, en caso de no serlo:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<2 \\ 2x-1 & \text{si } 2\le x<4 \\ 5 & \text{si } 4\le x \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2x+1} & x\le -1 \\ x^2+2 & x>-1 \end{cases}$

14. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones y en caso de discontinuidad, determinar de qué tipo es:*

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 0 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \operatorname{Ln} x & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

15. *Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:*

a) $y=\dfrac{1}{x+3}$

b) $y=\dfrac{x+2}{x^2-x+12}$

c) $y=\sqrt{4+x}$

d) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$

e) $y=\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$

f) $y=\sqrt{x-5}$

g) $y=\sqrt{x^2-2x-8}$

h) $y=\sqrt{x^2-2x+8}$

16. *Razona si la siguiente función es continua en $x=3$ y en $x=0$:*

$$y=\begin{cases} 2^x-1 & \text{si } x\geq 3 \\ \dfrac{12}{x}+3 & \text{si } x<3 \end{cases}$$

17. *Investiga si las siguientes funciones son continuas:*

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x+5}{2}} & \text{si } x<-1 \\ 0 & \text{si } x=-1 \\ x+1 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{2-x} & \text{si } x<1 \\ 5 & \text{si } x=1 \\ 2^{x+1}+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

18. *Determina las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición relativa de la gráfica con respecto a ellas:*

a) $f(x) = \dfrac{2-6x}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2+2x}{x+1}$

c) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x-5}$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-5x+6}$

f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3-7x+1}{2x^2-5x^3}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3-7x+1}{2x^2-8}$

i) $f(x) = \dfrac{x^3-7x+1}{2x^2+8}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3-7x+1}{2x+8}$

19. *Halla las asíntotas de estas funciones y la posición de las ramas:*

a) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12-8}{x^2+x-6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}$

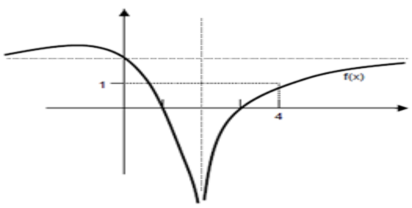
f) $f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4}$

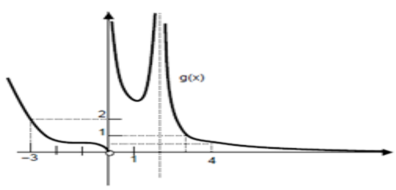
20. *Comprueba si la recta $y = x+3$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2+5x}{x+2}$. En caso afirmativo determina la posición relativa que ocupa una respecto de la otra.*

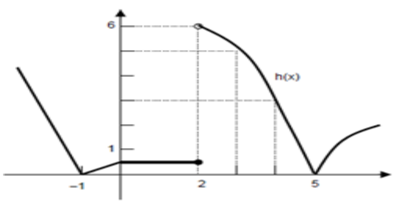
21. *Dadas las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación:*

a) Calcular sus límites cuando $x \to 0, x \to 2, x \to 3, x \to 4, x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.

b) ¿Cuáles son las asíntotas en cada gráfica?







ANEXO IV. PUZLE COOPERATIVO DE ARONSON

A continuación, se presenta una técnica de aprendizaje cooperativo, conocida como el Puzle de Aronson, cuyo práctica en el aula, tiene la siguiente secuenciación:

1. Se divide la clase en grupos de 3 personas (en nuestro caso de 4, porque la clase estará dividida en grupos de 4 personas), que llamamos GRUPO BASE.
2. Asignamos a cada persona del grupo un número: 1, 2, 3 y 4; de manera que a cada una de ellas se le reparte un documento distinto, como el que se adjunta más abajo.
3. Cada persona del grupo, trabaja de forma individual sobre su documento (es decir, los del nº 1 trabajaran sobre la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, los del nº 2 sobre la indeterminación $\frac{0}{0}$, los del nº 3 sobre la indeterminación $\frac{k}{0}$ y los del nº 4, sobre la indeterminación $\infty - \infty$. Cada miembro tiene que estudiar sobre el mecanismo a seguir para la resolución de su indeterminación.
4. Una vez que cada alumno ha trabajado de forma individual, se agrupan los miembros de cada grupo base, que tienen asignado el mismo número, es decir, todos los alumnos del nº 1, todos los del 2, los del 3 y los del 4, formando lo que llamamos los GRUPOS DE EXPERTOS, para poner sus resultados en común, debatir y especializarse más sobre el tema.
5. A continuación, cada alumno regresa a su grupo base, para compartir con sus compañeros lo aprendido, de manera que este proceso se repite cuatro veces, en las que cada uno toma un rol diferente, rotando los papeles sucesivamente: expone-comparte, gestiona-organiza y aprendiz-crítico (en nuestro caso al ser grupos de 4, dos alumnos adquieren el papel de gestionar y organizar, al mismo tiempo).

   PROCESO 1. Expone 1, Gestiona 2, Gestiona 3 y Crítico 4

   PROCESO 2. Expone 4, Gestiona 1, Gestiona 2 y Crítico 3

   PROCESO 3. Expone 3, Gestiona 4, Gestiona 1 y Crítico 2

   PROCESO 4. Expone 2, Gestiona 3, Gestiona 4 y Crítico 1

6. Una vez que todos terminan de exponer lo aprendido, hacen en grupo actividades sobre el cálculo de límites indeterminados.

INDETERMINACIÓN $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\infty & \text{si } grad\,(P(x)) > grad\,(Q(x))\\ 0 & \text{si } grad\,(P(x)) < grad\,(Q(x))\\ \frac{a}{b} & \text{si } grad\,(P(x)) = grad\,(Q(x))\end{cases}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^3-2x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$$

simplificando

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+3}{3x^2+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{3}=\frac{-2(-\infty)}{3}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4x^2}{2x^2+x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2}=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+5x^2}{2x^2+\sqrt{9x^4+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{2x^2+3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{5x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

Miramos el término de mayor grado dentro de la raíz y le hacemos la raíz, en este caso: $\sqrt{9x^4}=3x^2$. Luego miramos fuera de la raíz. Si hay términos de mayor grado, tomamos dicho término y si hay términos de igual grado, los sumamos. En nuestro caso $2x^2+3x^2=5x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{+\infty}=0$$

INDETERMINACIÓN $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$$

Existen dos casos:

a) Cuando no aparecen raíces: Esta indeterminación se resuelve factorizando el numerador y el denominador y simplificando.

Ejemplo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x-3} = \frac{2-2}{2-3} = \frac{0}{-1} = \mathbf{0}$$

Factorizamos el numerador: : $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2}$$

x=2 →(x-2)
x=2→(x-2)

Factorizamos el denominador: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

x=3 →(x-3)
x=2→(x-2)

b) Cuando aparecen raíces: En este caso hay que multiplicar por el conjugado y simplificar.

Ejemplo

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\boldsymbol{x} - \mathbf{1})(\boldsymbol{x} + \mathbf{1})(\sqrt{\boldsymbol{x}} + \mathbf{1})}{\boldsymbol{x} - \mathbf{1}} = \lim_{x \to 1} (x + 1)\left(\sqrt{x} + 1\right) = 2 \cdot 2 = \mathbf{4}$$

INDETERMINACIÓN $\frac{k}{0}$

En este caso hay que calcular los límites laterales.

Ejemplo

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x^2-4}=\left[\frac{7}{0}\right]=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{2x+3}{x^2-4}=\frac{2\cdot 1{,}999+3}{(1{,}999)^2-4}=\frac{+}{-}=-\infty\\[2ex] \lim_{x\to 2^+}\frac{2x+3}{x^2-4}=\frac{2\cdot 2{,}001+3}{(2{,}001)^2-4}=\frac{+}{+}=+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{1-x^2}=\left[\frac{-3}{0}\right]=\begin{cases}\lim_{x\to -1^-}\frac{2x-1}{1-x^2}=\frac{2\cdot(-1{,}001)-1}{1-(-1{,}001)^2}=\frac{-}{-}=+\infty\\[2ex] \lim_{x\to -1^+}\frac{2x-1}{1-x^2}=\frac{2\cdot(-0{,}999)-1}{1-(-0{,}999)^2}=\frac{-}{+}=-\infty\end{cases}$$

INDETERMINACIÓN $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = \infty - \infty$$

Existen dos casos:

a) Cuando no aparecen radicales: Se resuelve haciendo m.c.m. Consiste en transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2} = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-1)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2-x^2-3x-2x-6}{2(x+3)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-8}{2x+6} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty$$

b) Cuando aparecen radicales: Se resuelven aplicando el conjugado.

Ejemplo

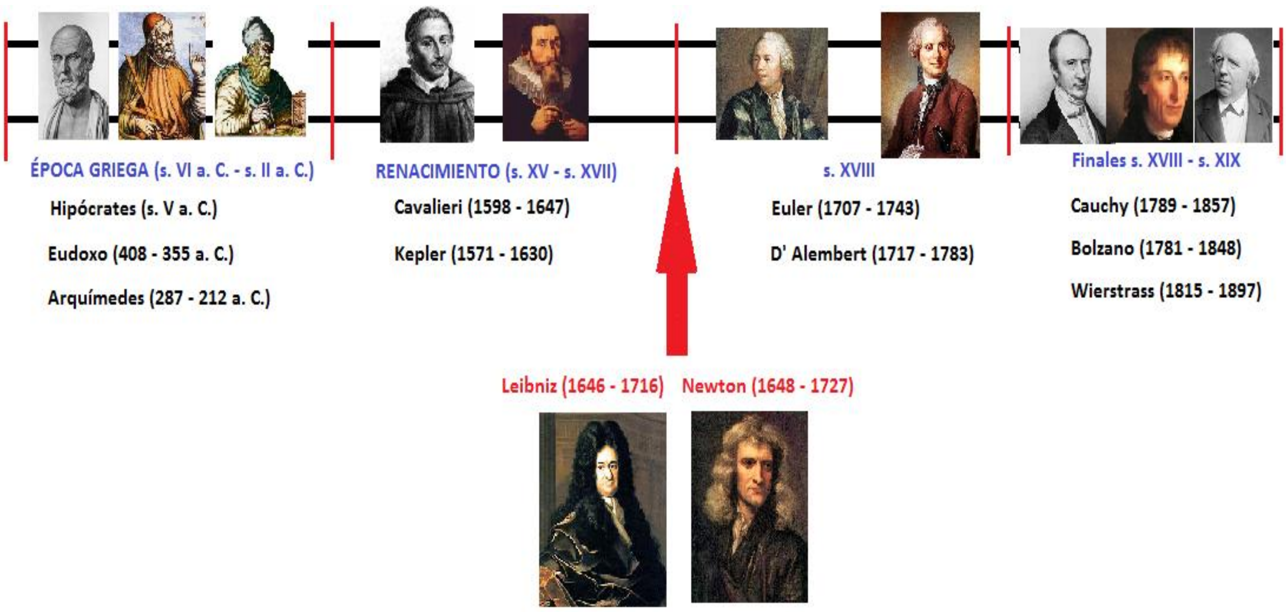
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1} = [\infty-\infty] =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

ANEXO V. TAREA SOBRE INVESTIGACIÓN DE LA EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Son muchos los matemáticos que han contribuido a lo largo de la historia en la evolución del concepto de límite y para el estudio del mismo resulta muy enriquecedor conocer las concepciones históricas que lo envuelven. En la siguiente línea del tiempo, se encuentran diferenciadas cuatro épocas, en cada una de las cuales se destaca la figura de célebres matemáticos.

Cada grupo deberá centrarse en un período concreto e investigar sobre las aportaciones de dichos matemáticas a la temática que nos compete.

- **GRUPO 1.** Época Griega (s. VI a.C. - s. II a.C.)
- **GRUPO 2.** Renacimiento (s. XV - s. XVII) y Leibniz (1646-1716)
- **GRUPO 3.** Newton (1648-1727) y s. XVIII
- **GRUPO 4.** Finales del s. XVIII y s. XIX



ANEXO VI. MINIEXAMEN SOBRE EL CÁLCULO DE LÍMITES

IES PATERNA 1º Bachillerato
Departamento de Matemáticas Curso 2015/2016

Nombre: ______________________________ Fecha: ______________

1. [7 puntos] Realiza los siguientes límites:

a) [1 pto] $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^5-2x+1}}$

b) [1 pto] Siendo $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$, calcula:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \lim_{x\to 3} f(x) \text{ y } \lim_{x\to-1} f(x)$$

c) [1 pto] $\lim_{x\to+\infty}(\frac{3x^2-4x}{x+2} - 3x)$

f) [1 pto] $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3} - x^2)$

d) [1 pto] $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+2x} - \sqrt{3x^2+4x})$

g) [1 pto] $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x-1}{3x-2})^x$

e) [1 pto] $\lim_{x\to-\infty}(\frac{-2x+5}{-2x+3})^{\frac{2x}{3}}$

2. [3 puntos] Razona si existe o no el límite en cada caso. En el caso de tener límite, calcúlalo:

a) [1,5 pto]

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & si \quad x \le 1 \\ 4 & si \quad 1 < x \le 4 \\ (x-4)^2+2 & si \quad x > 4 \end{cases} \qquad en\ x = 1\ y\ x = 4$$

b) [1,5 pto]

$$f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4} \qquad en\ x = -2$$

ANEXO VII. MINIEXAMEN SOBRE CONTINUIDAD Y CÁLCULO DE ASÍNTOTAS

IES PATERNA
Departamento de Matemáticas

1º Bachillerato
Curso 2015/2016

Nombre: ____ Fecha: _______________

1. [3 pto] Calcula el valor de *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en R:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & si \quad x \leq -2 \\ \frac{x+3}{4} & si \quad -2 < x \leq 1 \\ bx + 2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

2. [3 pto] Estudia la continuidad de la siguiente función y en caso de existir un punto de discontinuidad, indica de qué tipo es:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 5x & si \quad x < -3 \\ \frac{2x-4}{x^2-5x+6} & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{2x-8} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

3. [4 pto] Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ y estudia la posición relativa de la gráfica de la misma con respecto a las asíntotas. Represéntalas.

Cuadernillo de trabajo en grupo

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
IES PATERNA
Curso 2015/2016

Mª José Torrejón Toledo

EJERCICIOS

1. *Dada la función*

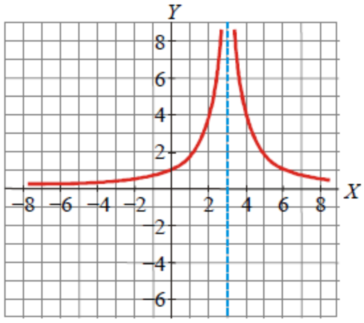
$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & si \quad x \leq 0 \\ -ax + b & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Determinar el valor de a y b para que $f(x)$ *sea continua en todo su dominio.*

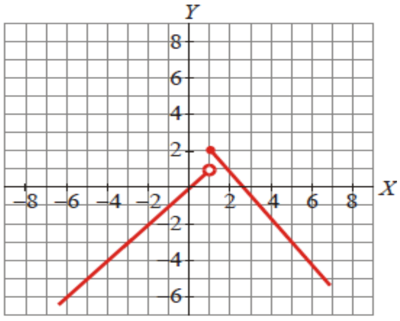
2. *Comprueba si la recta* $y = x + 3$, *es una asíntota oblicua de la función* $y = \frac{x^2+5x}{x+2}$.

En caso afirmativo, decide la posición que ocupa una respecto de la otra.

3. *A partir de la gráfica de* $f(x)$, *señala si es continua o no en* $x = 0$ *y en* $x = 3$. *En el caso de no ser continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta.*



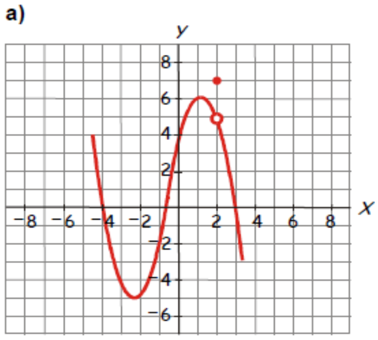
4. *La siguiente gráfica corresponde a la función* $f(x)$:



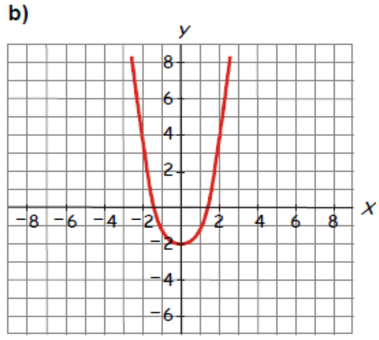
Di si es continua o no en $x = 1$ *y en* $x = 2$. *Si en alguno de los puntos no es continua, indica el tipo de discontinuidad.*

5. $¿Son\ continuas\ las\ siguientes\ funciones\ en\ x = 2?$

a)



b)



$Si\ alguna\ de\ ellas\ no\ lo\ es, indica\ la\ razón\ de\ la\ discontinuidad.$

6. *Hallar una función f(x) que cumpla a la vez:*

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty\ y\ \lim_{x \to \infty} f(x) = 4$$

7. *Razona.*

- ***a)*** *¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Razonar la respuesta con ejemplos.*
- ***b)*** *¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, poner algún ejemplo.*
- ***c)*** *El denominador de una determinada función se anula en x=a. ¿Presenta necesariamente una asíntota vertical en x=a? Poner ejemplos.*
- ***d)*** *¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?*
- ***e)*** *Si* $\lim_{x \to 2} f(x) = 5, ¿podemos\ afirmar\ que\ f(x) es\ continua\ en\ x = 2?$

8. *Calcular cuánto debe vales a para que la siguiente función sea continua* $\forall R$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

9. *Determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua y f(2)=3*

$$f(x) = \begin{cases} \text{Ln}\, x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < \infty \end{cases}$$

10. *Determina el valor de a y b para que f(x) sea continua* $\forall R$

a) $$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \text{si } x\leq -2\\ ax+2 & \text{si } -2<x<2\\ x^2+b & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases}-x^2+a & \text{si } x<-1\\ x^2-4 & \text{si } -1\leq x<2\\ \ln(x-b) & \text{si } x\geq 2\end{cases}$$

c) $$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & \text{si } x\leq 1\\ ax+3 & \text{si } 1<x\leq 2\\ bx^3-2 & \text{si } x>2\end{cases}$$

11. *Calcular los valores del parámetro a para que se verifiquen las siguientes igualdades:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3ax^3-5x+1}{10x^3+5}=-1$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax+1}-x=2$

12. *Completa la tabla para la función.*

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

a) *Comprueba que su límite cuando* $x\to 3$ *es* 4*; es decir:* $lim_{x\to 3} f(x)=4$

b) *¿Cuánto vale f(3)? Haz una representación de la función con Geogebra.*

c) *¿Qué diferencia hay entre las gráficas de f(x) y de y=x+1?*

13. *Dibuja una función que sea continua, salvo en x=-1, que tenga un salto infinito y que tenga en x=3 un salto finito.*

14. *Dibuja una función cuyo dominio sea* $[0,+\infty)$*, y que presente un punto de discontinuidad evitable en x=4.*

15. *Demuestra que la recta de ecuación* $y = \frac{b}{a}x$ *es una asíntota de la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

16. *¿Qué ocurrirá con las raíces de la ecuación* $ax^2 + bx + c = 0$*, si el coeficiente a tiende a cero y los coeficientes b y c son constantes, siendo b≠0?*

17. *Escribe una función racional para cada caso.*

a) *Que tenga* $x = 2$ *y* $x = -3$ *como únicas asíntotas.*

b) *Sus únicas asíntotas son* $x = -2$ *e* $y = 3$.

c) *Sus asíntotas son* $x = 4$ *e* $y = 2x - 1$.

18. *Dibuja una función continua que cumpla que f(x) es negativa si x>3 y es positiva si x<3.*

a) *¿Cuánto vale* $lim_{x\to 3} f(x)$? ¿Y $f(3)$?

b) *¿Hay un posible resultado? Razona la respuesta.*

19. *Representa tres funciones que cumplan que* $lim_{x\to 3} f(x) = 5$ *y cada una de estas condiciones:*

a) *f(3) = 5*

b) *f(3) no existe.*

c) *f(3) = 2*

20. *Realiza la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.*

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$

21. *Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

22. *Escribe, en cada caso, un polinomio, P(x), para obtener los resultados indicados cuando calculamos el límite.*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{8x^2 + 6x - 1}{P(x)}$$

a) 4 b) 5 c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 1

MATEMÁTICAS EN NUESTRA VIDA

23. *Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:*

$$v(t) = \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t - 1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y v(t) es el volumen de agua expresado en m^3.

Averigua hacia donde se aproxima el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1 h.

24. *Un comerciante vende camisetas a un grupo de estudiantes que están organizando un viaje de estudios. Para ello llama al proveedor para hacer el pedido de las camisetas y éste se las suministra según la función:*

$$f(n) = \frac{4{,}27n + 7{,}74}{n}$$

donde n es el número de camisetas vendidas y f(n) el precio en euros por camiseta. Sabiendo que el comerciante a su vez se las vende a los estudiantes por 8 euros la unidad. ¿Cuál es el beneficio por camiseta según las camisetas vendidas? ¿Cuántas camisetas ha de vender para obtener un beneficio superior a 3,20 euros la unidad? ¿Cuánto cobra el proveedor si el comerciante pide 10.000 unidades?

25. *Se ha estimado que la población de zorros en una finca se rige por la fórmula:*

$$z = 100\frac{6t^2 + 3}{2 + t^2}$$

donde z representa el número de zorros y t es el tiempo transcurrido, en meses.

El veterinario de la finca ha observado que, en los primeros seis meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá a estabilizarse la población o si tenderá a disminuir.

26. *El servicio de traumatología de un hospital va a implantar un nuevo sistema que pretende reducir a corto plazo las listas de espera.*

Se prevé que a partir de ahora la siguiente función, $P(t)$ indicará en cada momento t, en meses, el porcentaje de pacientes que podrá ser operado sin necesidad de entrar en lista de espera.

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50, & si\ 0 \leq t \leq 10 \\ \dfrac{38t - 100}{0{,}4t}, & si\ t > 10 \end{cases}$$

Pasando mucho tiempo, ¿cuál será este porcentaje?

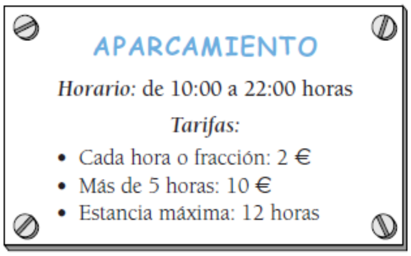
27. *Un cierto comercial de cierto producto recibe, como sueldo mensual, una cantidad fija de 600 € más una comisión que depende de la expresión $x^2 - x + 1$, donde x representa el número de artículos que vende.*

El comercial tiene que correr con sus propios gastos que son de 50 € más 3 € por cada producto vendido. Obtén la función que recoge el sueldo mensual del vendedor. ¿Es una función continua?

28. *La famosa fórmula $M = \frac{mc}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ se debe a Einstein, y expresa la masa M de un cuerpo en función de su velocidad v, siendo c la velocidad de la luz (300.000 km/s).*

Calcula el límite de la masa M cuando v tiende a c. A la vista de ese resultado, ¿crees que un cuerpo puede alcanzar esa velocidad?

29. *Representa mediante una función definida a trozos la tarifa de un aparcamiento.*



a) *Estudia su continuidad.*

b) *Clasifica los puntos de discontinuidad, si los tuviera.*

30. *En una empresa se ha comprobado que el número de unidades diarias producidas depende de los días trabajados, de acuerdo con la siguiente función:*

$$N(t) = \frac{30t}{t+4} \quad (donde\ t\ viene\ expresado\ en\ días)$$

a) *¿Cuántas unidades se producen el primer día? ¿Y el décimo?*

b) *Representar la función N(t). ¿Qué ocurre si el período de producción se hace muy grande?*

31. *EL RÉCORD DE LOS 100 METROS LISOS*

Según un artículo publicado en el diario El País que podéis consultar en el siguiente enlace: ***http://sociedad.elpais.com/sociedad/2009/08/06/actualidad/1249509617_850215.html*** *dos economistas de la universidad de Tilburg (Holanda) han calculado, usando métodos estadísticos hasta cuánto se puede rebajar el récord de los 100 metros, la prueba reina del atletismo de velocidad. ¿Qué relación existe entre este artículo y lo visto en la unidad?.*

Investiga cómo han ido evolucionando los récord a lo largo del tiempo y luego represéntalos en una gráfica. ¿Hacia dónde tiende dicho valor?

32. CALENTANDO UN CUERPO

La evolución del enfriamiento de un cuerpo en el tiempo se comporta asintóticamente, tendiendo la temperatura de dicho cuerpo a la temperatura ambiente.

Supongamos que la temperatura, en grados centígrados, que experimenta un pollo a lo largo del tiempo, en minutos, desde que se mete en el horno es:

$$f(x) = 200e^{\left(-\frac{x-30}{100}\right)^2} + 24$$

a) *Representa la función gráficamente con ayuda de GeoGebra.*

b) *¿Dónde se alcanza la temperatura máxima? ¿Por qué crees que en ese momento comienza a disminuir?*

c) *¿Cuál es la temperatura ambiente de la habitación donde está el pollo?*

33. CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

La fórmula de la capitalización compuesta viene dada por la expresión:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

donde, $\boldsymbol{C_0}$ *, es el capital inicial,* $\boldsymbol{C_n}$ *es el capital final o montante, es decir, la suma del capital inicial,* C_0 *, más los intereses,* ***I*** *, producidos en el tiempo que dura la operación,* ***n****, es el tiempo que dura la operación en años e* ***i****, el tipo de interés anual pactado.*

Cada grupo debe investigar el tipo de interés anual que ofrece un banco en concreto de entre los siguientes: Unicaja, BBVA, La Caixa y Santander, al realizar un depósito en dicha entidad.

Una vez conocido el tipo de interés, si se deposita una cantidad de 3.000 €, al tipo de interés pactado y el tiempo que dura el depósito es de un año, un semestre, un cuatrimestre, un trimestre, un bimestre, un mes, una semana, un día, etc. ¿Hacia dónde tiende el montante de la operación?

Observación: *Debe existir una correlación entre el tanto unitario de interés y el tiempo; es decir, si el tanto de interés es anual, el tiempo debe venir expresado en años, si el tanto es mensual, el tiempo debe estar expresado en meses, y así sucesivamente. Llamamos* i_k *al tanto unitario k-esimal, donde k, significa el número de partes en las que se fracciona un año, es decir:*

i_2*: tanto unitario de interés semestral (k=2)*

i_3*: tanto unitario de interés cuatrimestral (k=3)*

i_4*: tanto unitario de interés trimestral (k=4),* *y así sucesivamente.*

En capitalización compuesta la equivalencia entre el tanto unitario anual, i, y el tanto unitario k-esimal, i_k, *viene dada por la siguiente expresión:*

$$1 + i = (1 + i_k)^k$$

34. *EL CALENDARIO ACTUAL*

El calendario actual es usado desde que el papa Juan I encargó al monje Dionisio el Exiguo, en el siglo VI, que estudiara la fecha de nacimiento de Jesucristo para contar los años desde esta fecha. Este monje después de estudiar la Biblia y otros documentos, determinó que Jesucristo había nacido al comenzar el día 25 de diciembre del año 753 de la fundación de Roma, así que a ese año se le denominó año 1 antes de Cristo y al año siguiente, año 754 de la fundación de Roma, se le denominó año 1 después de Cristo, y de esta manera se ha continuado contando los años hasta nuestros días.

Para determinar a qué siglo pertenece un año específico se puede definir la siguiente función a trozos, recurriendo a la función parte entera E [x].

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{x-1}{100}\right] + 1 & si\ x \geq 0 \\ \\ \left[\dfrac{x-1}{100}\right] & si\ x < 0 \end{cases}$$

LEE Y COMPRENDE

1. *¿A qué se le denominó año 1 d. C.?*

2. *¿Qué acontecimiento marcaba el inicio del calendario que se usaba en Roma antes del implantado por el papa Juan I?*

INTERPRETA

3. *¿Qué valor hay que sustituir en la función para calcular el siglo al que pertenece el año 325 a.C.?*

4. *¿A qué siglo pertenece el año 1616 d. C.? ¿Y el año 325 a.C.?*

5. *¿En qué siglo se fundó la ciudad de Roma?*

REFLEXIONA

6. *El año cero no existe. Relaciona esta afirmación con el hecho de definir la función siglo mediante una función definida a trozos.*

7. *¿Cuándo comenzó el siglo XXI?*

APLICA

8. *Estudia la continuidad de la función siglo y di qué tipo de discontinuidades presenta.*

9. *Construye la gráfica de la función siglo considerando que x toma valores reales.*

10. *Analiza la continuidad de la función siglo en x = 2000, utiliza para ello los límites laterales.*

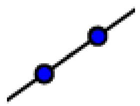
ANEXO IX. PRÁCTICA EN GEOGEBRA

GeoGebra

Recuerda:

Crear nuevos objetos algebraicos

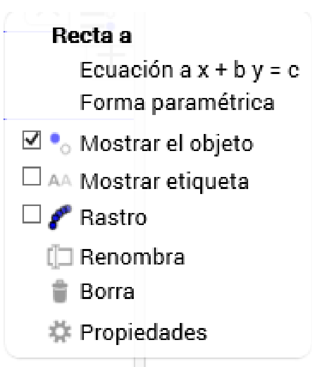
Es posible crear nuevos objetos (puntos, rectas, funciones, etc.) tanto con las *herramientas Gráficas* disponibles en la *barra de herramientas*, o bien ingresando sus ecuaciones o coordenadas en la *entrada algebraica* y presionando *Enter*.

y = 3 x + 1	Ingresa la ecuación lineal y = 3*x + 1 en la *entrada algebraica* y presiona *Enter*.
f(x) = x^2 + 2	Ingresa f(x) = x^2 + 2 en la *entrada algebraica* y presiona *Enter*.
B = (2, 1)	Ingresa B = (2, 1) en la *entrada algebraica* y presiona *Enter* para crear un punto nuevo. Crea otro punto C = (-1, 3)
	Selecciona la herramienta *Recta* de la *barra de herramientas* y cliquea dos veces en la *vista gráfica* o en los dos puntos existentes, *B* y *C*, para construir una recta.

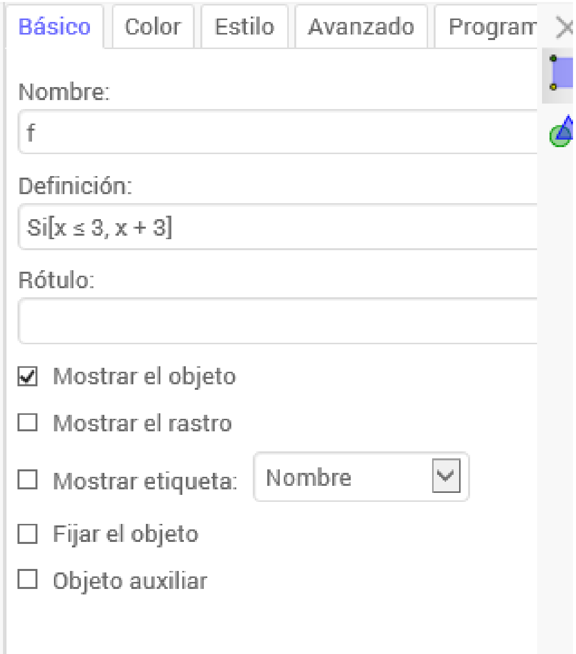
Pista: Haz clic en el ícono del teclado para abrir un **teclado virtual**.

Eliminar o cambiar la apariencia de los objetos

Pulsando el botón derecho sobre el objeto que se desea eliminar o cambiar la apariencia, nos sale un desplegable:



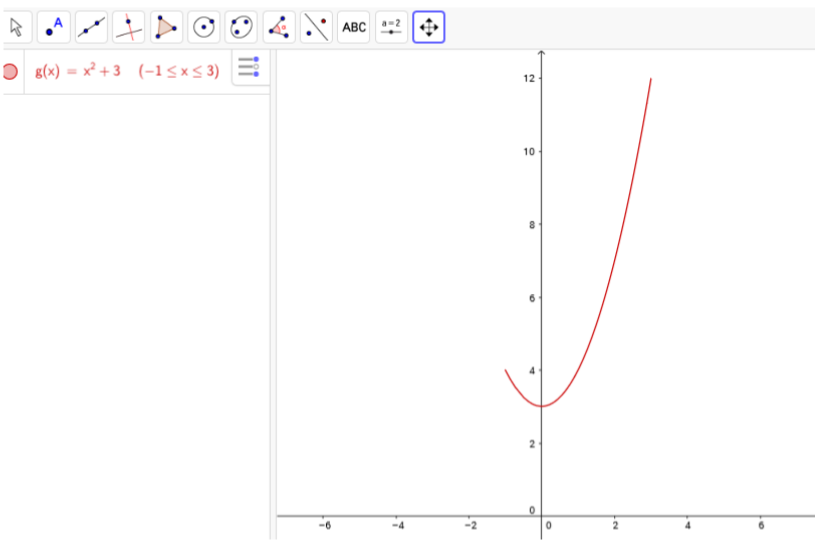
Como bien indica el icono Borra , pulsando sobre el mismo eliminamos el objeto. Si lo que queremos es cambiar la apariencia, pinchamos en Propiedades y nos vuelve a salir un desplegable en la parte derecha de la pantalla:



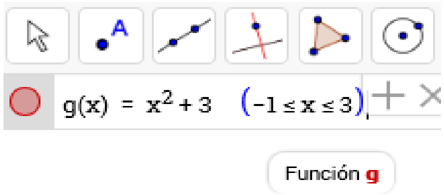
Crear funciones a trozos

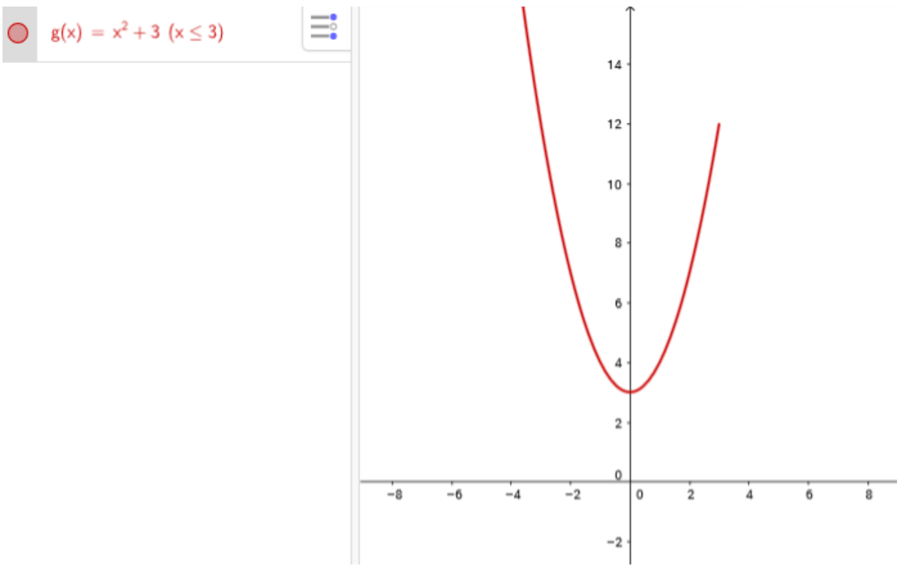
Para definir funciones a trozos con Geogebra, utilizamos la función: Función[<Función>, <Valor inicial>, <Valor final>]. Para ello escribimos en la barra de entrada situada en la parte inferior.

Por ejemplo, si introducimos *Función*[x^2+3,-1,3], obtenemos:

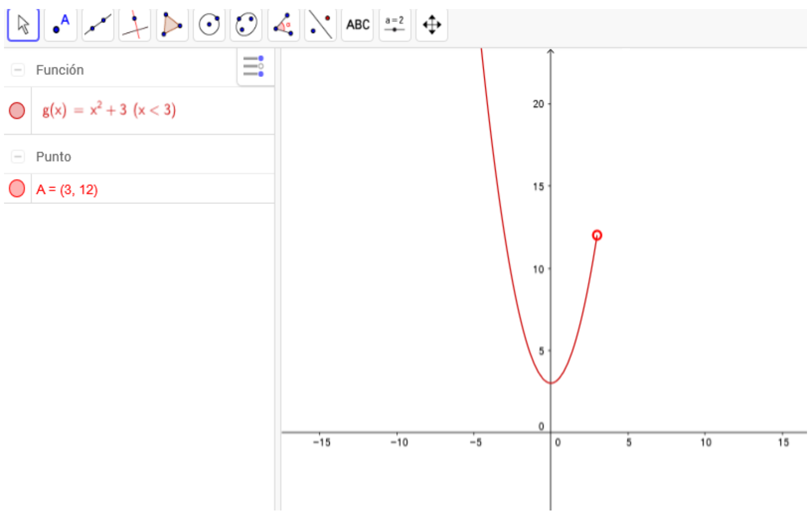


Si lo que queremos es que la función vaya desde $-\infty$, en lugar desde -1, hacemos los cambios sobre el intervalo que te muestra. Es decir:





Si el extremo de un intervalo no está incluido, Geogebra no te representa el punto abierto en la gráfica. Para ello, hay que definir el punto y a través de las propiedades cambiar la apariencia del mismo para que nos lo muestre sin rellenar.



PRÁCTICAS A REALIZAR POR GRUPOS:

Grupo 1

- Representar en Geogebra, una función a trozos, donde cada trozo sea una función elemental distinta.
- Representar una función que presente una asíntota horizontal en *y=-2*, una asíntota vertical en *x=2*.

Grupo 2

- Representar en Geogebra, una función a trozos, donde cada trozo sea una función elemental distinta.
- Representar una función cuyo $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 5$ y tenga una discontinuidad de salto infinito en *x = 2*.

Grupo 3

- Representar en Geogebra, una función a trozos, donde cada trozo sea una función elemental distinta.
- Representar una función cuyo $\lim_{x\to -5^-} f(x) = +\infty$ y tenga una asíntota vertical en *x = 0.*

Grupo 4

- Representar en Geogebra, una función a trozos, donde cada trozo sea una función elemental distinta.
- Representar una función cuyo $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 6$ y $f(2) = -2$

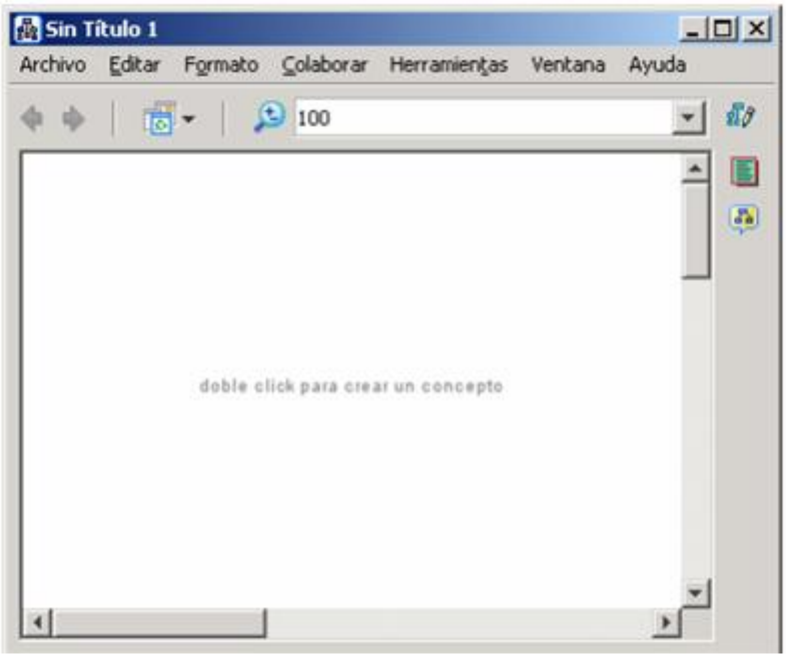
ANEXO X. PRÁCTICA SOBRE CONSTRUCCIÓN DE MAPAS CONCEPTUALES CON LA HERRAMIENTA CMAPTOOLS

CmapTools

Nociones básicas:

Abrir un nuevo Cmap:

Para crear un nuevo mapa conceptual, se debe seleccionar la opción "Nuevo Cmap" del menú "Archivo", ya sea desde la ventana "Vistas - CmapTools" o desde una ventana de edición que ya esté abierta. En ambos casos, se abre una ventana de edición con un mapa en blanco y con el nombre "Sin titulo 1", tal como la mostrada en la Figura . Esta ventana es la ventana donde se editan de los mapas conceptuales

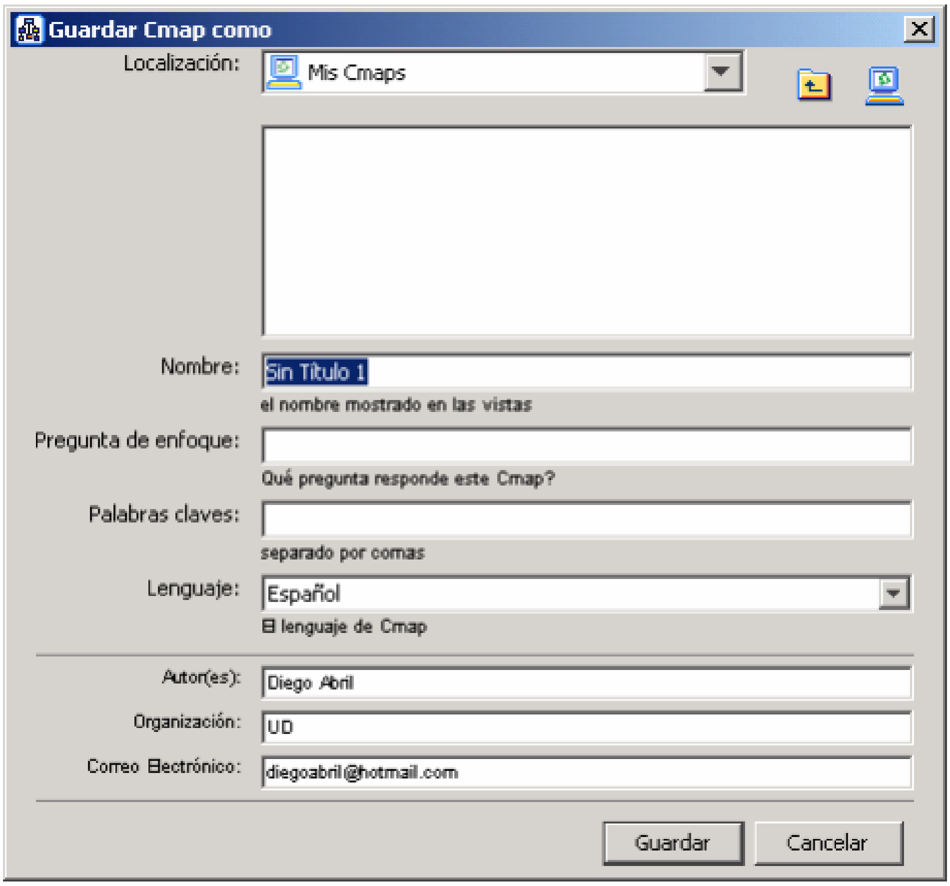


Abrir un Cmap existente:

Para abrir un mapa conceptual, se debe seleccionar el mapa que desea abrir en la ventana "Vistas - CmapTools" y luego seleccionar la opción "Abrir" del menú "Archivo" y el mapa se abrirá en otra ventana. También puede hacer doble clic sobre el mapa que desea abrir o dar "Enter" sobre el mapa seleccionado. Esto abre la ventana de edición para trabajar en el mapa.

Guardar un Cmap:

Una vez editado el mapa conceptual (para más detalles ir a la sección 3), se debe salvar el archivo correspondiente, para esto se selecciona la opción "Guardar Cmap" del menú "Archivo". Si se quieren guardar los cambios en un nuevo mapa, la opción a seleccionar es "Guardar Cmap Como". La primera vez que se guarde un mapa o cuando se seleccione "Guardar Cmap Como", aparecerá la ventana mostrada en la Figura 6. Aquí se deberán completar los diferentes campos, aunque no todos son necesarios.



Edición de un Cmap:

- **Elementos de un mapa conceptual:**

En CmapTools el símbolo usado para representar un Concepto es un rectángulo con puntas redondeadas y el usado para representar un enlace es una línea (con o sin puntas de flecha) que unen los conceptos. Ambos tipos de símbolos se etiquetan con palabras para conformar la idea que representan.

En la ventana de edición de mapas conceptuales se adicionan, editan y organizan los diferentes elementos que van a conformar el mapa .

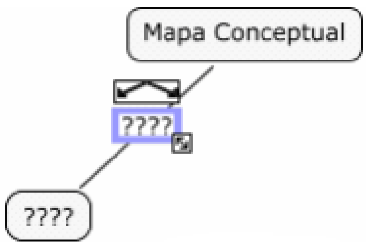
- ## Adicionar un concepto:

En la ventana de edición de mapas se puede agregar un concepto de dos formas: dando doble clic en cualquier punto del mapa, o dando clic con botón derecho y seleccionando la opción "`Nuevo Concepto`" del menú conceptual que aparece. Aparecerá una forma con signos de interrogación dentro, tal como la mostrada en la Figura .

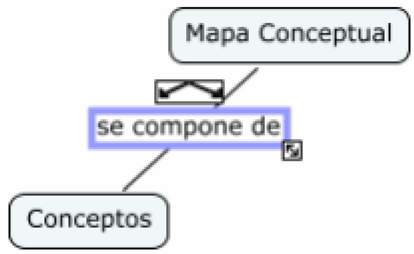
Ahora se debe hacer doble clic con el botón izquierdo del ratón sobre las interrogaciones para modificar el contenido e introducir el texto del nuevo concepto.

- ## Crear proposición desde un concepto:

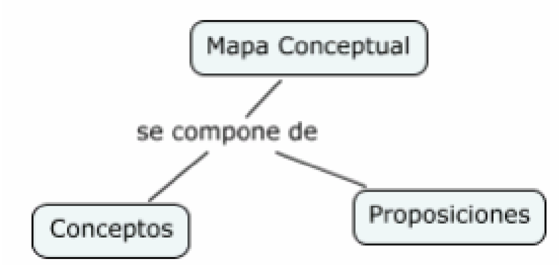
Una proposición es un enlace entre dos conceptos. Para crear una proposición a partir de ur solo concepto, primero se debe seleccionar el concepto (dando clic con el botón izquierdc sobre él). Al seleccionarse, el concepto aparece resaltado con un borde azul y con un cuadrc con 2 flechas en la parte superior. Con el botón izquierdo del ratón se hace clic sobre el cuadro de las flechas y se arrastra el ratón. Al soltar el ratón aparecerá un nuevc concepto y entre los conceptos (el que se tenía y el que se crea al soltar el puntero) habrá ur enlace, con una etiqueta formada por signos de interrogación, tal como se muestra en la Figura



Haciendo doble clic sobre las interrogaciones, tanto del concepto como de la proposición, se tendrá la posibilidad de editar cada uno de ellos.



Como se puede notar, sobre el recuadro en el que se escribe el enlace también hay flechas por si se quieren agregar conceptos a la proposición con el mismo enlace. Esto es útil para cuando las proposiciones tienen más de un elemento, por ejemplo, si se quiere complementar la proposición así: "(Un) Mapa Conceptual se compone de Conceptos y Proposiciones", esto se ve en la Figura



- **Eliminar elementos existentes:**

Un elemento (concepto o enlace) se puede quitar del mapa al seleccionarlo y oprimir la tecla "`Delete`" o hacer clic sobre el con el botón derecho del ratón y seleccionar la opción "`Borrar`" del menú. La diferencia esta en que al borrar un enlace, solo se borra el enlace y al borrar un concepto se borran tanto el concepto como todos los enlaces asociados a él.

PRÁCTICA A REALIZAR POR GRUPOS

Grupo 1

- Realiza un mapa conceptual sobre la continuidad y tipos de discontinuidad.

Grupo 2

- Realiza un mapa conceptual sobre los tipos de indeterminaciones, intentando relacionarlo con el cálculo de asíntotas.

Grupo 3

- Realiza un mapa conceptual sobre los diferentes tipos de límites vistos (en un punto, finitos, infinitos, en el infinito, de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Grupo 4

- Realiza un mapa conceptual sobre la continuidad de las funciones elementales.

ANEXO XI. RÚBRICA PARA EVALUAR LA EXPOSICIÓN ORAL

Nombre: ………………………………………………………………………………… Grupo: ………………………

Indicadores	1	2	3	4
Realizan una introducción efectiva del tema y captan la atención e interés de la clase.				
Hacen referencia a las ideas principales que se incluyen en la presentación, siendo ésta clara, organizada y fácil de seguir.				
Explicación de forma clara y fluida.				
Demuestran dominio del tema.				
Las ideas y argumentos están bien fundamentados en los recursos presentados.				
La presentación es interesante, amena, demuestra creatividad y originalidad.				
Muestran interés para comunicarse con los compañeros.				
Existe una introducción, desarrollo y una conclusión del tema.				

1. Nada; 2. Poco; 3. Adecuado; 4. Excelente

Indicadores	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Realizan una introducción efectiva del tema y captan la atención e interés de la clase.				
Hacen referencia a las ideas principales que se incluyen en la presentación, siendo una presentación clara, organizada y fácil de seguir.				
Explicación de forma clara y fluida.				
Demuestran dominio del tema.				
Las ideas y argumentos están bien fundamentados en los recursos presentados.				
La presentación es interesante, amena, demuestra creatividad y originalidad.				
Muestran interés para comunicarse con los compañeros.				
Existe una introducción, desarrollo y una conclusión del tema.				
TOTAL				

ANEXO XII. RÚBRICA PARA EVALUAR UN MAPA CONCEPTUAL

Nombre: .... Nº de Grupo: ....

	4	3	2	1
Identificación del tema principal	El tema aparece identificado claramente en el mapa y expresado de manera clara y precisa.	El tema aparece bien identificado aunque hay algunas imprecisiones en la manera de explicarlo.	El tema aparece expresado en el mapa conceptual pero no es fácil de identificar y no está bien expresado.	No aparece identificado el tema en el mapa conceptual.
Contenidos/ conceptos	Todos los conceptos y contenidos claves aparecen en el mapa y además se añaden otros que los complementan.	Aparecen todos los conceptos y contenidos claves pero no otros de otros temas relacionados.	No están todos los conceptos claves aunque sí la mayor parte de ellos.	No están reflejados la mayor parte de los conceptos claves.
Organización y estructura	Los conceptos presentados aparecen de una manera clara y lógica, así como conectados con mediante elementos gráficos (flechas, símbolos, etc.) y palabras-conectores.	Los conceptos presentados aparecen ordenados de manera clara y conectados por elementos gráficos (flechas, símbolos, etc.) exclusivamente.	Los conceptos aparecen ordenados de manera clara pero se establecen muy pocas relaciones entre ellos.	Los elementos están totalmente desordenados.
Formato	Es visualmente atractivo, permite la consulta rápida de los conceptos y los identifica claramente	Identifica los conceptos y es de consulta sencilla, aunque no es muy atractivo visualmente.	Aparecen todos los conceptos identificados aunque la consulta no es sencilla.	Es muy difícil de consultar y no aparecen identificados los conceptos.

Indicadores	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Identificación del tema principal				
Contenidos/ Conceptos				
Organización y estructura				
Formato				
TOTAL				

ANEXO XIII. JUEGO QUIÉN TIENE, YO TENGO...

Desarrollo del juego:

- Se reparte una tarjeta por alumno.
- Empieza cualquier alumno leyendo la pregunta del anverso de su tarjeta.
- Todos los alumnos miran sus tarjetas del lado de las respuestas y contesta el alumno que posee la tarjeta con la solución a la pregunta.
- Dando la vuelta a su tarjeta, este alumno lee a su vez la pregunta en el anverso de su tarjeta.
- Se sigue de la misma forma, hasta que se cierre la cadena cuando todos los alumnos han contestado.

Soluciones:

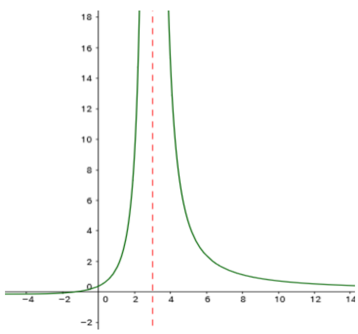
Una función que presenta una asíntota vertical en x = -3

$$f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 3}{x^2 - 9}$$

Una función cuyo límite cuando $x \rightarrow -2$ sea $\frac{-5}{4}$

$$f(x) = \frac{5x + 10}{x^2 - 4}$$

Una función que tenga una discontinuidad de salto infinito en x =3



Una función que sea continua en x=1

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & si \quad 1 \leq x \\ 5x-4 & si \quad 1 < x \leq 3 \\ 2^x & si \quad x > 3 \end{cases}$$

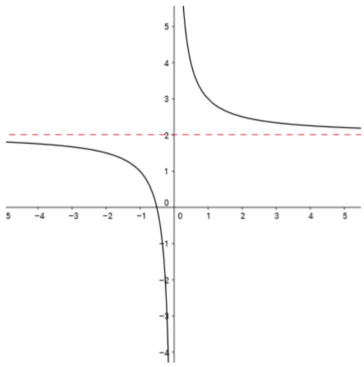
Una función con discontinuidad inevitable de salto finito en x = -3

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \;\; x < -3 \\ \dfrac{15}{2x+1} & si \;\; x \geq -3 \end{cases}$$

Una función cuyo límite cuando $x \to +\infty$ de 5

$$f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 - x} + 2x}{x+2}$$

Una función cuyo límite cuando $x \to -\infty$ sea 2



Una función tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

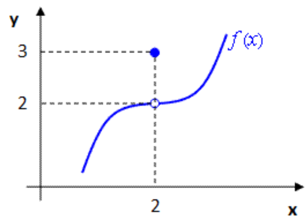
Una función continua en R - {0,5}

$$f(x) = \frac{5x+1}{x^2-5x}$$

Una función con asíntota vertical en *x=5* y asíntota oblicua en *y=2x+10*

$$f(x) = \frac{4x^2+5}{2x-10}$$

Una función con una discontinuidad evitable en *x=2*



Una función con una discontinuidad evitable en *x=-1*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & si \;\; x \leq -1 \\ 5x+3 & si \;\; x > -1 \end{cases}$$

Una función con una asíntota vertical en *x=3* y una asíntota horizontal en $y = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \frac{x}{2x-6}$$

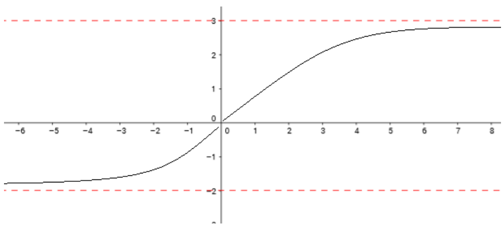
Una función que sea continua para a=3

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+a & si \;\; x \leq 1 \\ 5^x & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

Una función que sea continua para a=2

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+8a & si\ \ x<0 \\ \ln(x+1)+16 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$$

Una función cuyos $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$



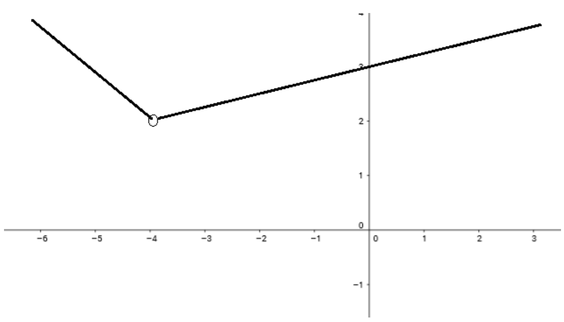
Una función cuyo $\lim_{x\to+\infty} f(x)=e$

$$f(x)=(\frac{5x+8}{5x-2})^{x/2}$$

Una función cuyo $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

$$f(x)=(\frac{2x^2+1}{2x^2-5})^{2x}$$

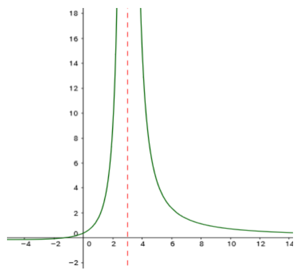
Una función cuyo $\lim_{x\to-4} f(x)=2$

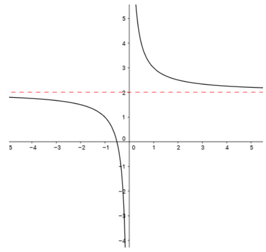
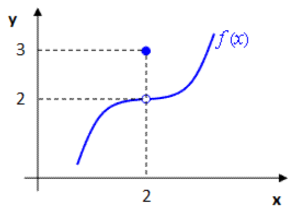


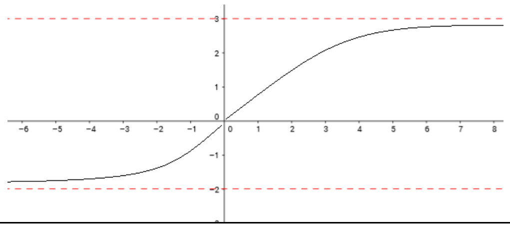
Una función cuyo $\lim_{x\to 0} f(x) = 5$

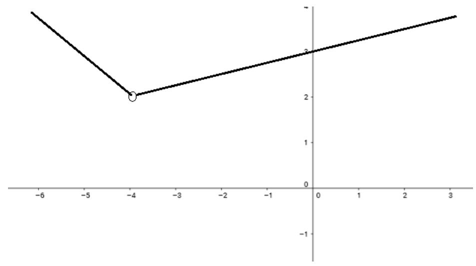
$$f(x) = \frac{2x^3 - 4x + 5}{3^x}$$

Tarjetas:

¿QUIÉN TIENE? Una función que presenta una asíntota vertical en x = -3	**YO TENGO** $f(x) = \frac{5x+10}{x^2-4}$
¿QUIÉN TIENE? Una función cuyo límite cuando $x \to -2$ sea $\frac{-5}{4}$	**YO TENGO** 
¿QUIÉN TIENE? Una función que tenga una discontinuidad de salto infinito en x =3	**YO TENGO** $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & si \quad 1 \leq x \\ 5x-4 & si \quad 1 < x \leq 3 \\ 2^x & si \quad x > 3 \end{cases}$
¿QUIÉN TIENE? Una función que sea continua en x=1	**YO TENGO** $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \ x < -3 \\ \frac{15}{2x+1} & si \ x \geq -3 \end{cases}$

¿QUIÉN TIENE? Una función con discontinuidad inevitable de salto finito en x = -3	**YO TENGO** $f(x) = \frac{\sqrt{9x^2 - x} + 2x}{x+2}$
¿QUIÉN TIENE? Una función cuyo límite cuando $x \to +\infty$ de 5	**YO TENGO** 
¿QUIÉN TIENE? Una función cuyo límite cuando $x \to -\infty$ sea 2	**YO TENGO** $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$
¿QUIÉN TIENE? Una función tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$	**YO TENGO** $f(x) = \frac{5x+1}{x^2 - 5x}$
¿QUIÉN TIENE? Una función continua en R - {0,5}	**YO TENGO** $f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x - 10}$
¿QUIÉN TIENE? Una función con asíntota vertical en *x=5* y asíntota oblicua en *y=2x+10*	**YO TENGO** 

¿QUIÉN TIENE? Una función con una discontinuidad evitable en *x=2*	**YO TENGO** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & si\ \ x \leq -1 \\ 5x+3 & si\ \ x > -1 \end{cases}$
¿QUIÉN TIENE? Una función con una discontinuidad evitable en *x=-1*	**YO TENGO** $f(x) = \frac{x}{2x-6}$
¿QUIÉN TIENE? Una función con una asíntota vertical en *x=3* y una asíntota horizontal en $y = \frac{1}{2}$	**YO TENGO** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a & si\ \ x \leq 1 \\ 5^x & si\ \ x > 1 \end{cases}$
¿QUIÉN TIENE? Una función que sea continua para a=3	**YO TENGO** $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 8a & si\ \ x < 0 \\ \ln(x+1) + 16 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$
¿QUIÉN TIENE? Una función que sea continua para a=2	**YO TENGO** 
¿QUIÉN TIENE? Una función cuyos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$	**YO TENGO** $f(x) = (\frac{5x+8}{5x-2})^{x/2}$

¿QUIÉN TIENE? Una función tal que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = e$	**YO TENGO** $f(x) = (\frac{2x^2+1}{2x^2-5})^{2x}$
¿QUIÉN TIENE? Una función tal que: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$	**YO TENGO** 
¿QUIÉN TIENE? Una función tal que: $\lim_{x \to -4} f(x) = 2$	**YO TENGO** $f(x) = \frac{2x^3-4x+5}{3^x}$
¿QUIÉN TIENE? Una función tal que: $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$	**YO TENGO** $f(x) = \frac{2x^3-2x+3}{x^2-9}$

ANEXO XIV. TRIVIAL SOBRE LÍMITES, CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS

Reglas del juego

- Juego para 3 o 4 parejas de alumnos. En nuestro caso, formaremos 4 grupos de 4 alumnos cada uno de ellos.
- Comienza el grupo que haya conseguido el resultado mayor al lanzar el dado.
- El primer grupo lanzará el dado y avanzará tantas casillas como puntos haya obtenido.
- Al llegar a la casilla, el grupo deberá tomar una tarjeta del tipo que se indica en una de sus esquinas; es decir, **Roja**, Amarilla, **Azul** o **Verde** y contestar a la pregunta que aparece en ella.
- Si el grupo contesta adecuadamente, se quedará en la casilla. En caso contrario, deberá regresar a la casilla de la que procede.
- En ambos casos, tanto si acierta como si no, pasa el turno al siguiente grupo.
- Para ganar hay que volver a la casilla de SALIDA con una tirada exacta o no.

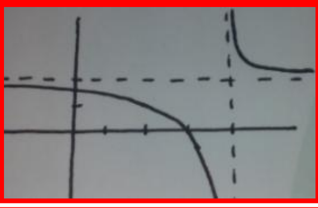
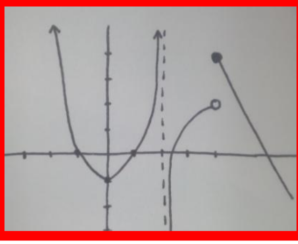
Material necesario

- Un tablero como se muestra a continuación.
- Ocho tarjetas rojas, ocho tarjetas amarillas, ocho tarjetas verdes y doce tarjetas azules.
- Una ficha por grupo.
- Un dado.

Tarjetas verdes

¿Existe el $\lim_{x\to 1} f(x)$?	¿Presenta alguna asíntota la función representada? En caso afirmativo, ¿de qué tipo es y cuál es su expresión?
¿En qué punto presenta la función representada una discontinuidad de salto finito?	¿Hay algún punto en el que la función representada muestre una discontinuidad evitable?
Calcula: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	Calcula: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$
¿Presenta en algún punto una discontinuidad de salto infinito la función representada?	¿Cuál es el dominio de la función?

Tarjetas rojas

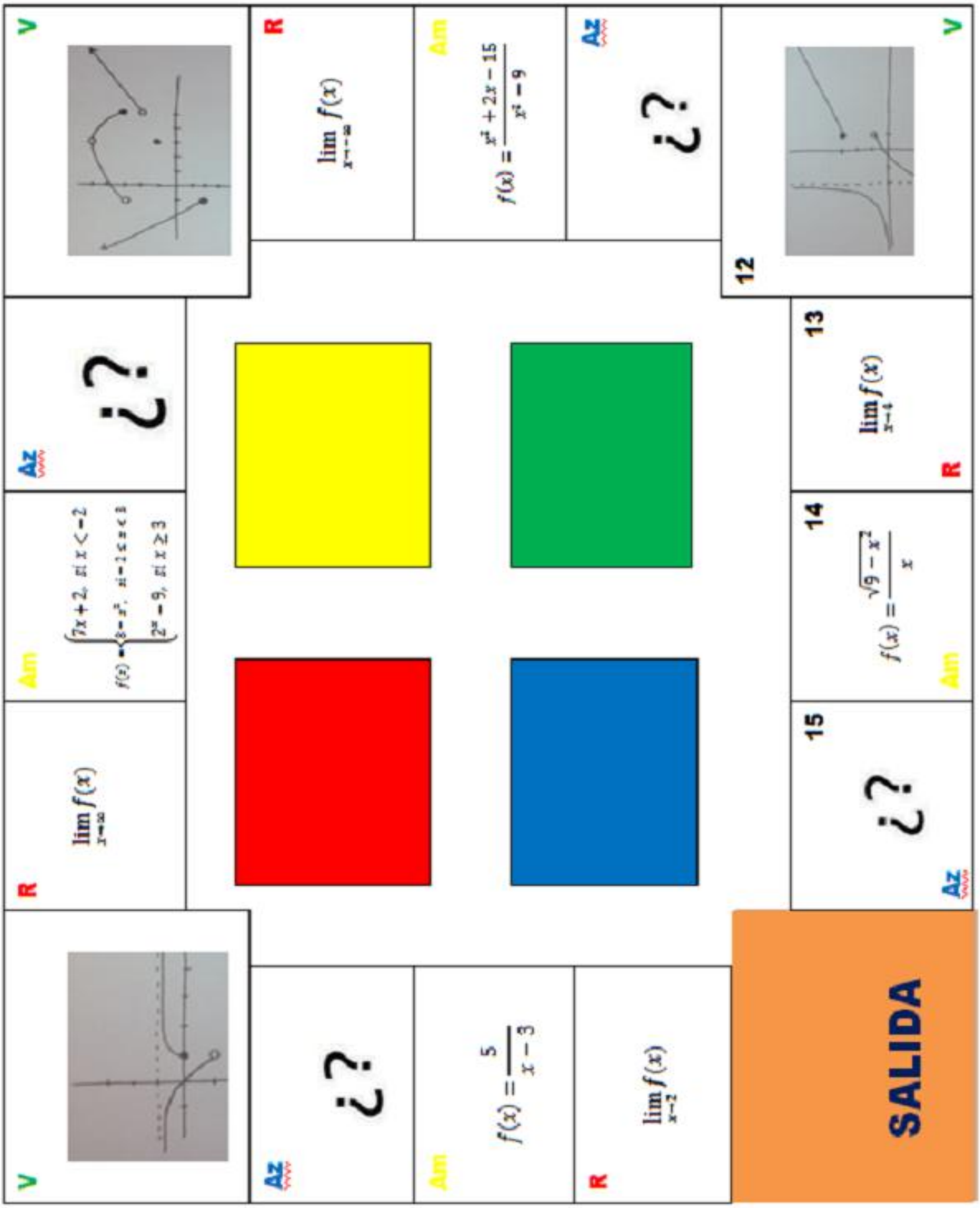
¿Cuánto vale el límite de la casilla para $f(x) = (\frac{2x-1}{2x+3})^{3x+1}$	Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 5x^2+1, & si\ x \leq 2 \\ 6x-3, & si\ 2 < x \leq 4 \\ 21, & si\ x > 4 \end{cases}$ calcula el límite de la casilla. ¿Existe dicho límite?
Para la función: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{3x-6}$	Toma la función $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}$ y calcula el límite de la casilla.
¿Cuánto vale el límite que se indica en la casilla en el caso de la siguiente función:  ?	Calcula el límite indicado en la casilla de la siguiente función: 
¿Qué tipo de límite es?	Para la función $f(x) = \frac{3x+1}{2x-4}$, ¿se trata de un límite finito, infinito ó en el infinito?

Tarjetas amarillas

La función de la tarjeta, ¿tiene asíntota vertical? En caso afirmativo calcúlala.	Para la función de la tarjeta, ¿existe $\lim_{x\to 3} f(x)$?
Para la función de la tarjeta, calcula $\lim_{x\to -\infty} f(x)$	Para la función de la tarjeta, calcula $\lim_{x\to -2} f(x)$
¿Es continua la función en x=3? En caso contrario indica qué tipo de discontinuidad presenta.	Estudia la continuidad de la función en R.
Calcula $\lim_{x\to -3} f(x)$	La función de la tarjeta, ¿tiene asíntota horizontal u oblícua?

Tarjetas azules

¿Por qué se da la discontinuidad evitable?	Si dada una función *f(x),* se tiene que *f(3)=6,* $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$ *y* $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$, ¿qué podríamos decir de la misma?	Cuando una función tiene asíntota horizontal, ¿qué podemos afirmar de dicha función?
¿Cuándo en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, el resultado da un número?	¿Cuándo en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, el resultado da 0?	¿Cuándo en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, el resultado da ∞?
¿Qué debe cumplirse para que una función *f(x),* tenga una asíntota vertical en x=2?	¿Qué debe cumplirse para que una función *f(x),* tenga una asíntota horizontal en y= -3?	¿Cuándo tiene una función racional asíntota horizontal?
El límite de una función *f(x)* en x=a existe si se cumple:	Para que una función sea continua en x=a debe cumplirse:	Si dada una función *f(x)* se cumple que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$, ¿qué podemos decir de la función?


SALIDA
12
13
14
15
V
R
Am
Az
¿?
$f(x)=\frac{5}{x-3}$
$f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x^2-9}$
$f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$
$\lim_{x\to 2} f(x)$
$\lim_{x\to\infty} f(x)$
$\lim_{x\to -\infty} f(x)$

ANEXO XV. PRUEBA FINAL SOBRE APLICACIÓN DE LÍMITES

IES PATERNA 1º Bachillerato
Departamento de Matemáticas Curso 2015/2016

Nombre: ____ Fecha: ______________

1. [2 pto] Dibuja en cada caso una función que cumpla las siguientes características:

a) Tenga una discontinuidad evitable en x=-1 y una asíntota vertical en *x =1.*

b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$

c) Tenga una discontinuidad inevitable de salto finito en *x=1* y una asíntota horizontal en $y = 4$.

2. [2 pto] Sea la función $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$, con a, b y c números reales. Calcúlalos sabiendo que:

a) La gráfica de f presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$.

b) La gráfica de f presenta en $x = 1$ una asíntota vertical.

c) El punto (6,3) pertenece a la gráfica de f.

3. [2 pto] Esboza la gráfica de una función que cumpla:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$

c) Tiene una asíntota horizontal $y = 2$ en $-\infty$ y una asíntota vertical en $x = 1$.

4. [2 pto] Tres parejas de una especie en peligro de extinción se introducen en un parque natural para intentar su recuperación. Los estudios indican que la población , n, aumentará de acuerdo con la función:

$$n(t) = 6 + \frac{300t^2}{t^2+100}$$, donde t es el tiempo en años.

a) Si la población crítica a partir de la cual se considera que la repoblación ha tenido éxito se logra cuando se superan los 50 ejemplares; calcula cuándo se alcanza dicho nivel crítico.

b) ¿Cuál es el comportamiento de la población para t=10, 20, 40 y 60 años? ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estos resultados?

5. [2 pto] El número de ordenadores que tiene en stock una pequeña empresa viene dada por la fórmula:

$$N(t) = 10(3[\tfrac{t+3}{3}] - t),$$

donde el tiempo t, se mide en semanas. Esboza la gráfica de la función y estudia su continuidad. ¿Cada cuánto tiempo debe reponer su mercancía la empresa?

ANEXO XVI. RÚBRICA PARA EVALUAR EL TRABAJO EN GRUPO

Nombre: .... Nº de Grupo: ....

Indicadores	4	3	2	1
Interacción con los compañeros	Casi siempre escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros. Trata de mantener la unión de los miembros trabajando en grupo.	Usualmente escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros. No causa problemas en el grupo.	A veces escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros, pero algunas veces no es un buen miembro del grupo.	Raramente escucha, comparte y apoya el esfuerzo de otros. Frecuentemente no es un buen miembro del grupo.
Aportaciones al grupo	Proporciona siempre ideas útiles cuando participa en el grupo y en la discusión en clase. Es un líder definido que contribuye con mucho esfuerzo.	Por lo general proporciona ideas útiles cuando participa en el grupo y en la discusión en clase. Un miembro fuerte del grupo que se esfuerza.	Algunas veces proporciona ideas útiles cuando participa en el grupo y en la discusión en clase. Un miembro satisfactorio del grupo que hace lo que se le pide.	Rara vez proporciona ideas útiles cuando participa en el grupo y en la discusión en clase. Puede negarse a participar.
Concentración en el trabajo	Se mantiene concentrado en el trabajo que se necesita hacer. Muy autodirigido.	La mayor parte del tiempo se concentra en el trabajo que se necesita hacer. Otros miembros del grupo pueden contar con esta persona.	Algunas veces se concentra en el trabajo que se necesita hacer. Otros miembros del grupo deben algunas veces regañarle y recordarle que se mantenga concentrado.	Raramente se concentra en el trabajo que se necesita hacer. Deja que otros hagan el trabajo.
Actitud	Nunca critica públicamente el trabajo de otros miembros del grupo. Siempre tiene una actitud positiva hacia el trabajo.	Rara vez critica públicamente el trabajo de otros miembros del grupo. A menudo tiene una actitud positiva hacia el trabajo.	Ocasionalmente critica en público el trabajo de otros miembros del grupo. A veces presenta una actitud negativa hacia el trabajo.	Con frecuencia critica en público el trabajo de otros miembros del grupo. A menudo tiene una actitud negativa hacia el trabajo.
Resolución de problemas	Busca y sugiere soluciones a los problemas.	Mejora soluciones sugeridas por otros.	No sugiere soluciones, pero está dispuesto a tratar soluciones propuestas por otros.	No trata de resolver problemas o ayudar a otros a resolverlos. Deja a otros hacer el trabajo.
Control de la eficacia del grupo	Repetidamente controla la eficacia del grupo y hace sugerencias para que sea más efectivo.	Repetidamente controla la eficacia del grupo y trabaja para que el grupo sea más efectivo.	Ocasionalmente controla la eficacia del grupo y trabaja para que sea más efectivo.	Rara vez controla la eficacia del grupo y no trabaja para que éste sea más efectivo.

Indicadores	Compañero/a 1	Compañero/a 2	Compañero/a 3	Autoevaluación
NOMBRE:				
Interacción con los compañeros				
Aportaciones al grupo				
Concentración en el trabajo				
Actitud				
Resolución de problemas				
Control de la eficacia del grupo				
TOTAL				

ANEXO XVII: RÚBRICA PARA EVALUAR AL DOCENTE

A continuación aparecen una serie de cuestiones e ítems, para evaluar de forma anónima, la actuación del docente en el aula (aspectos sobre la metodología llevada a cabo, papel del docente, etc.), con el objetivo de mejorar futuras intervenciones en el aula. La valoración irá del 0 al 5, donde 0 significa NS (no se tiene evidencia), 1 totalmente en desacuerdo, 2 en desacuerdo, 3 de acuerdo, 4 bastante de acuerdo y 5 totalmente de acuerdo.

Asignatura: .... Curso: ....

Ítems	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Explica de forma clara los contenidos de la unidad.						
Presenta y expone las clases de manera organizada y estructurada.						
Relaciona los contenidos con situaciones de la vida cotidiana.						
Resuelve las dudas relacionadas con los contenidos del tema y atiende las necesidades de cada alumno.						
Los alumnos participan de manera espontánea y fluida (clima de trabajo adecuado)						
El trabajo cooperativo y en grupo es una estrategia metodológica que ocupa un papel relevante.						
El alumno tiene un papel protagonista dentro del aula, teniéndose en cuenta sus motivaciones e intereses.						
Se procura que el alumno vaya tomando conciencia de los nuevos aprendizajes.						
Promueve la investigación.						
El profesor participa de forma activa.						
Muestra compromiso y entusiasmo durante su práctica docente.						
Se utiliza y promueve el uso de las Tics como forma de acceso a la sociedad del conocimiento.						
Proporciona todo el material necesario.						
Asiste de forma regular y puntual a clase.						
La actuación del docente se ajusta a lo acordado en la planificación inicial propuesta.						
Utiliza diversos instrumentos de evaluación.						
Nos hace partícipes del proceso de evaluación.						
Asiste regularmente a la actividad extraescolar de acompañamiento para atender las dudas.						
Fomenta la reflexión, argumentación y el debate.						
Se fomenta la toma de conciencia crítica.						

¿Cómo ha sido tu experiencia de trabajo en grupo?¿Te has sentido a gusto?

____

____

____

¿Qué parte te ha resultado más fácil? ______________________________

¿Qué parte te ha resultado más difícil? ______________________________

¿Qué aspectos cambiarías del trabajo en el aula?

____

____

____

Aspectos a mejorar del docente:

____

____

____

Reflexión personal sobre la experiencia:

____

____

____

Otros aspectos de interés que desees destacar:

____

____

____

ANEXO XVIII. RÚBRICA PARA EVALUAR EL CUADERNO INDIVIDUAL DE CLASE

Nombre: ....

INDICADORES	4	3	2	1
Presentación y orden	Aparecen copiados todos los enunciados de las actividades, aparecen separados cada uno de los apartados o secciones de la unidad, los enunciados están siempre escritos con bolígrafo y el cuadernillo está limpio, sin manchas ni dibujos.	Faltan algunos enunciados, los apartados o secciones de la unidad están separados casi todos, la mayoría de los enunciados están escritos con bolígrafo y el cuadernillo no está completamente limpio, ya que aparecen algunos dibujos o manchas.	Copia algún enunciado, separa sólo algunos apartados, la mayoría de los enunciados no están escrito con bolígrafo y contiene bastantes dibujos que hacen que el cuadernillo no esté limpio.	No copia los enunciados de las actividades, no separa las actividades por apartados, no escribe los enunciados con bolígrafo y carece de limpieza y buena presentación.
Contenido (Tareas y actividades)	El cuaderno contiene todas las actividades y tareas completas. Además contiene todas las explicaciones teóricas y notas aclaratorias.	La mayoría de la tarea está hecha y contiene algunas explicaciones teóricas y notas aclaratorias.	Tiene sólo algunas tareas hechas y a penas incluye explicaciones teóricas o notas aclaratorias.	Tiene la tarea sin hacer y no incluye explicaciones ni notas aclaratorias.
Caligrafía	La letra es clara y legible.	La letra es bastante clara aunque a veces cuesta leerla.	Escribe con letra poco clara, lo que dificulta su lectura.	La letra no es nada clara ni legible.
Autocorrección	Tiene todas las actividades corregidas.	Tiene la mayoría de las actividades corregidas aunque le faltan algunas de ellas.	Tiene algunas actividades corregidas.	Las actividades no están corregidas.

INDICADORES	PUNTUACIÓN
Presentación y orden	
Contenido (tareas y actividades)	
Caligrafía	
Autocorrección	
TOTAL:	

ANEXO XIX. RÚBRICA PARA LA APRECIACIÓN SOBRE EL GRADO DE ADQUISICIÓN DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS

Nombre: ....

COMPETENCIAS	1	2	3	4	Observaciones
- Competencia lingüística (CL)					
Fluidez y riqueza expresiva.					
Uso del vocabulario específico tanto de forma oral como escrita.					
Presentación clara y ordenada.					
Participación y respeto hacia los demás cuando se está debatiendo.					
Escucha a los demás de manera activa.					
- Competencia matemática (CM)					
Conoce los términos y conceptos matemáticos.					
Conoce los métodos y algoritmos matemáticos.					
Analiza gráficos y representaciones matemáticas.					
Formula y resuelve problemas determinados.					
Describe e interpreta los resultados.					
Muestra rigor; así como respeto por los datos y su veracidad.					
- Competencia digital (CD)					
Conoce las características de las aplicaciones y herramientas digitales empleadas en el aula.					
Representa gráficamente funciones con Geogebra.					
Estructura la información mediante mapas conceptuales con CmapTools.					
Muestra interés y motivación por el aprendizaje y uso de las nuevas tecnologías.					
Presentación multimedia de un contenido: PowerPoint, Prezi, GoogleDrive.					
- Aprender a aprender (AAP)					
Establece estrategias de planificación en la resolución de tareas.					
Evaluación del proceso y los resultados obtenidos.					
Muestra motivación y curiosidad por aprender.					
Valora su participación en el proceso.					
Muestra espíritu crítico y reflexivo.					
- Competencias sociales y cívicas (CSC)					
Comunicación de forma constructiva y argumentada.					

COMPETENCIAS	1	2	3	4	Observaciones
Muestra tolerancia y respeto con las opiniones del resto de compañeros.					
Muestra interés por problemas de la vida cotidiana.					
Colabora y tiene compromiso con las tareas grupales.					
Acepta a todos los miembros del grupo.					
Participa de manera democrática en los debates.					
- Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor (SIEE)					
Tiene capacidad de análisis, planificación, organización y gestión.					
Sabe comunicarse con el grupo, presentar y representar.					
Muestra iniciativa e interés a la hora de realizar las tareas.					
Se relaciona cooperativamente y en grupo con los demás.					
Actúa con creatividad.					
- Conciencia y expresiones culturales (CEC)					
Emplea distintos materiales y recursos para el diseño de las tareas de investigación.					
Tiene conocimiento sobre la evolución histórica del concepto de límite y la aportación de grandes personajes matemáticos a la materia.					
Muestra interés, respeto y valoración crítica sobre la historia de la matemática.					
Uso de la observación, experimentación e investigación.					

1. Nada; 2. Poco; 3. Adecuado; 4. Excelente

ANEXO XX. FICHA DE SEGUIMIENTO DEL ALUMNO

Nº	Alumno/a	Cuaderno individual	Portfolio grupal	Debate/ Exposiciones	Valoración positiva del grupo	Mini exam. 1	Mini exam. 2	P. final	TOTAL
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									

ANEXO XXI. EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular los siguientes límites:

a) $lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$

b) $lim_{x \to 0}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la función: *f(x)* = $\begin{cases} 2x^2 - 3x + m & si\ x \leq 1 \\ \ln x & si\ x > 1 \end{cases}$

determinar el valor de m para que la función *f(x)* sea continua en toda la recta real.

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función *f(x)* = $\frac{3x^2-3x}{1-x^2}$.

a) Encontrar los puntos de discontinuidad de f.

b) Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

c) Estudiar si *f* tiene alguna asíntota vertical.

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Se considera la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+1}{x} & si\ x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & si\ x < -1 \end{cases}$

a) Estudiar el dominio y la continuidad de *f*.

b) Hallar las asíntotas de la gráfica de *f*.

Ejercicio 5. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular los siguientes límites.

a) $lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$ b) $lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

Ejercicio 6. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x-2 & si\ x < -1 \\ a-2x^2 & si -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{b}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$

determinar los valores de *a* y *b* para que *f(x)* sea continua en toda la recta real.

Ejercicio 7. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{-x^3+1}{2x^2+2x-12}$. Se pide:

a) Especificar su dominio.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular las asíntotas si las hubiera.

Ejercicio 8. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea la función $f(x) = \frac{x^5-x^6}{1-x^6}$. Se pide:

a) Encuentra los puntos de discontinuidad de *f*.

b) Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidad es evitable.

c) Estudiar si *f* tiene alguna asíntota vertical.

ANEXO XXII. UNIDAD DIDÁCTICA ORIGINAL.

1. Marco teórico de referencia

Hasta ahora, el trabajo matemático que se ha venido desarrollando en las escuelas es irreal, sin producir un aprendizaje útil para la vida. Muchos son los alumnos y alumnas que consideran "que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil" (De Guzmán Ozámiz, 2007), por tanto se hace necesario romper con la idea preconcebida y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, de que la matemática es una ciencia cerrada, en la que todo está dicho y los contenidos que se enseñan son productos aislados y acabados; cuando la realidad es que resulta casi imposible que un conocimiento matemático nazca de una idea absolutamente nueva y sin ninguna conexión con otras ideas desarrolladas en el pasado.

Existen diversas creencias sobre las matemáticas, su actividad, así como la capacidad de aprenderlas y las concepciones que el docente tenga sobre su naturaleza, condicionará su actuación en el aula. Existen dos concepciones diferenciadas y extremas:

- La *concepción idealista o platónica,* que considera que el alumno debe adquirir primero las estructuras fundamentales de las matemáticas de forma rigurosa y axiomática, sin darle un sentido práctico y considerando las matemáticas como una disciplina autónoma, sin aplicarlas a otras disciplinas. Pero como afirma Azcárate (1997):

  > En un mundo donde los medios de comunicación y tecnológicos están a la disposición de gran parte de la población, facilitando el acceso a una cantidad de información impensable que se pueda tratar en la escuela, es absurdo pensar en la escuela como mera transmisora de conocimientos.

- La *concepción constructivista*, que considera que debe haber una estrecha relación entre las matemáticas y sus aplicaciones a lo largo de todo el currículo, mostrándole primero al alumnado la utilidad o aplicabilidad de las nociones matemáticas y a partir de ahí construyan las estructuras matemáticas.

Según D'Ambrosio (1994, citado en Azcárate, 1997), para muchos profesores, mejorar la enseñanza de las matemáticas, implica articular mejor las propias matemáticas, pero sin embargo, enseñar matemáticas debe estar orientado a formar personas, es decir, a contribuir en el desarrollo personal de los alumnos, capacitándolos autónoma, social, crítica y responsablemente.

El docente juega un papel muy importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, es por eso que debe reflexionar sobre referentes teóricos e investigaciones sólidas sobre el campo de la enseñanza, porque les pueden aportar información relevante sobre la profesión y les pueden ser de gran utilidad para elaborar estrategias de actuación en el aula.

Se hace necesario por tanto, recurrir a las teorías psicológicas de la educación para a través de ellas conocer algunas de sus aplicaciones pedagógicas:

Aprendizaje como adquisición de respuestas (*Teoría conductista*)

- ✓ Aprender es registrar mecánicamente las respuestas.
- ✓ La instrucción influye directamente en el aprendizaje.
- ✓ El control del aprendizaje está en manos del profesor.
- ✓ El contenido del aprendizaje se reduce a respuestas.
- ✓ El papel del alumnado es pasivo (se basa en adquirir respuestas programadas).
- ✓ El papel del docente es crear situaciones adecuadas para que el alumno adquiera respuestas.

Aprendizaje como adquisición de conocimientos (*Teorías cognitivas*)

- ✓ Aprender es adquirir conocimientos.
- ✓ El profesor transmite información.
- ✓ Los contenidos están centrados en el currículo.
- ✓ Es un enfoque cognitivo, pero cuantitativo.
- ✓ El papel del profesor es enseñar, transmitir conocimientos.
- ✓ El papel del alumno es adquirir los conocimientos transmitidos.

Aprendizaje por construcción de significados (*Teoría constructivista*)

- ✓ Ausubel, Bruner, teorías socohistóricas y psicología cognitivo-instruccional.
- ✓ El alumno es un ser autónomo y autorregulado. El control del aprendizaje debe pasar a sus manos.
- ✓ El aprendizaje se concibe como búsqueda activa y constructiva por parte del alumno.
- ✓ Importan los contenidos y los procesos.

- ✓ La evaluación no se detiene en el producto, sino que hace referencia, sobre todo al proceso.
- ✓ Las actividades del alumno ocupan un lugar privilegiado.
- ✓ El papel del profesor es mediar el aprendizaje y el del alumno aprender a aprender.

(*) *Metáforas del aprendizaje escolar*. Adaptado de Mayer (1992) y Beltrán (1996), citado en Navarro, Alcalde, Martín & Crespo (2009).

El constructivismo es uno de los enfoques, que ha tenido y sigue teniendo mayores repercusiones sobre el aprendizaje escolar en todos los niveles educativos. Se fundamenta en la construcción del conocimiento, pero dentro del constructivismo se distinguen diferentes líneas, en función de los principios explicativos de cada autor. Para explicar las características principales de las teorías constructivistas, me basaré en Doménech (s.f.):

- <u>*Teoría epistemológica de Piaget*</u>: Para este autor el conocimiento se construye desde dentro, al interactuar con el medio, estableciendo una relación entre el conocimiento que ya se tiene y la nueva información, lo que conlleva a modificar nuestros *esquemas cognitivos*. Este planteamiento tiene mucha importancia en la enseñanza porque el profesor siempre debe tratar de conectar los conocimientos que imparte con los esquemas que posean los estudiantes que representan su realidad experiencial.

  Para Azcárate (1996, citado en Azcárate, s.f.), "los niños llegan a la escuela con unos ciertos conocimientos, ideas e intuiciones que pueden denominarse matemáticas o prematemáticas, que son producto de la interacción espontánea con el medio social y ambiental".

  Cuando se le plantea una nueva información al alumno, su respuesta adaptativa funciona a través de dos mecanismos: *la asimilación,* que supone la incorporación de nuevos conocimientos a su esquema cognitivo actual, es decir, a sus esquemas previos, sin modificarlos, sin variar sus creencias *y la acomodación*, que sería el proceso inverso, es decir, es la modificación de los esquemas actuales para dar cabida al nuevo conocimiento y reequilibrar, así, el desequilibrio producido.
- <u>*Teoría del aprendizaje verbal significativo de Ausubel*</u>: Se basa en la necesidad de tener en cuenta los *conocimientos previos* de los alumnos antes de iniciar el aprendizaje de cualquier contenido, ya que si se establecen

relaciones entre las ideas previas y la nueva información se facilita la comprensión y por tanto el *aprendizaje significativo*, no mecánico o memorístico.

Así, como refleja Ausubel (1983): "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un sólo principio, enunciaría éste: El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

- *Teoría del origen sociocultural de los procesos psicológicos superiores de Vygotski*: Para este autor, el ser humano aprende a pensar, a percibir, a memorizar, etc. a través de la mediación de otros seres humanos. De este modo, formuló la ley de la doble formación de las funciones psicológicas: “en el desarrollo cultural del niño toda función aparece dos veces: primero a nivel social, entre personas, interpersonal o interpsicológico y después a nivel individual, en el interior del propio niño, intrapsicológico” (Vygotski, 1978; p. 94, citado en Doménech, s.f.); es decir, que primero el niño aprende las cosas socialmente, en contacto con los demás y después lo internaliza.

  Otras de sus grandes atribuciones es su teoría sobre la *Zona de Desarrollo Próximo* (**ZDP**), que no es más que la distancia entre lo que un alumno puede hacer y aprender por sí sólo, sin la ayuda de nadie (*Zona de Desarrollo Real*) y lo que es capaz de hacer y aprender con la ayuda de los demás, ya sean los compañeros o el propio docente, de forma guiada (*Zona de Desarrollo Potencial*).

  Las principales implicaciones educativas que se desprenden de la teoría Vygotskiana, son:

  - La intervención pedagógica del profesor debe ir dirigida hacia la ZDP.
  - El papel del profesor en la enseñanza es el de mediador o guía.
  - Favorecer las interacciones dentro del aula, tanto entre profesor-estudiante como entre estudiante-estudiante (*mediadores sociales*). La distribución del mobiliario puede facilitar o dificultar estas interacciones. La principal forma de crear un clima interactivo es a través del ***trabajo cooperativo***.

- La capacidad de aprender del estudiante aumenta si se utilizan recursos y materiales didácticos de apoyo apropiados (*mediadores instrumentales*).

Mi unidad didáctica estará basada en una mezcla de aprendizaje por procesamiento de la información y cognitiva y el aprendizaje por construcción de significados, ya que como se reflejará en el apartado de metodología, voy a dividir mi intervención en el aula en dos momentos diferenciados: uno de trabajo individual, basado en una metodología más tradicional, en el que me basaré fundamentalmente en la transmisión de conocimiento, pero siempre teniendo en cuenta las dificultades y las dudas que les puedan surgir a los alumnos y otro momento de trabajo en grupo, donde el papel del alumno será aprender a aprender, en interacción con los demás y el del docente de guía o mediador.

Según Pifarré & Sanuy (2001), en todo proceso de enseñanza-aprendizaje es importante crear espacios de discusión y de reflexión, es decir, de *trabajo en grupo y cooperativo*, porque la oportunidad que tienen los alumnos de ayudarse mutuamente en la resolución de una tarea, de negociar nuevos significados, de desarrollar nuevas estrategias y de construir nuevo conocimiento, puede repercutir positivamente en su aprendizaje.

El aprendizaje cooperativo promueve la comunicación entre los estudiantes, consolida el propio conocimiento al enseñárselo a los compañeros y compañeras de grupo, implica compromiso, hace que el alumno se responsabilice del conocimiento de los demás y no compiten entre ellos, sino que se ayudan unos a los otros. Pero como bien expone Domingo Peña (2010), no hay que entender el trabajo cooperativo como una forma que permite a los docentes tener menos trabajo, pues el profesor renuncia a exponer ciertos contenidos, para que los propios estudiantes los aprendan, pero la tarea de preparación, guía de la sesión, evaluación de los resultados, las competencias básicas y el desarrollo de la propia sesión, son elementos que debe controlar y de no regularse con sumo cuidado, pueden llevarle más trabajo aún.

Además el trabajo cooperativo, fomenta el desarrollo de las competencias básicas, por su propia naturaleza, sin tener que diseñar sesiones específicas orientadas a su consecución.

La enseñanza del cálculo, constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje conlleva una serie de dificultades relacionadas con un nivel de pensamiento de orden superior como la abstracción, el análisis, demostraciones, etc.

Hay diversas investigaciones que tratan de estudiar cuáles son las principales dificultades y obstáculos con las que se encuentran los alumnos cuando se topan por primera vez con el concepto de límite, las cuales se clasifican según el origen al que se deban en:

- Dificultades de origen ontogénico: debido a las limitaciones del propio sujeto.
- Dificultades de origen didáctico: provocadas por el propio sistema de enseñanza.
- Dificultades de origen epistemológico: derivados del rol constitutivo del saber mismo.

Según Vrancken, Gregorini, Engler, Müller & Hecklein (2006): "La importancia de la enseñanza del concepto de límite radica en que puede ser usado como objeto de conocimiento, así como herramienta o útil para otros objetos (continuidad, derivabilidad, entre otros) u otras ciencias (Física, Química, Ingeniería)." Por lo tanto merece la pena hacer un alto en el camino y tratar de indagar en estudios que se hayan podido realizar en cuanto a la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite y su tratamiento en las aulas.

La consideración de los obstáculos con los que se pueden encontrar los alumnos, es vital para detectar los posibles errores que pueden conllevar, es por eso que se deberían incluir actividades que promuevan el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores, fomentándose así la actitud crítica de los alumnos con respecto a sus propias producciones.

De muchos estudios se desprenden como conclusión que en la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, generalmente se trabajan las representaciones algebraicas, lo cual dificulta la detección de los errores; mientras que las representaciones gráficas se usan de forma muy limitada, cuando en realidad "se debe favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite funcional: gráfica, numérica y simbólica" (Vrancken et al., 2006).

Es por eso que en esta unidad didáctica para explicar la idea intuitiva de límite, se utiliza la representación gráfica, analítica y las tablas de valores.

Vrancken et al. (2006), realizan un estudio con el objetivo de detectar dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones. Analizando los errores, llegan a la conclusión de que las dificultades asociadas al concepto de límite son:

- Dificultades relacionadas con el concepto de función.
  - Dificultades para representar gráficas que sean funciones.
  - Dificultades relacionadas con el concepto de dominio de una función.
  - Dificultades para distinguir entre variable independiente y dependiente.
- Dificultades relacionadas con el concepto de límite.
  - Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
  - Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.
  - Dificultades para la manipulación algebraica de las leyes de las funciones cuyo límite se quiere determinar.
  - Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro.
  - Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

En muchas de las actividades que se les van a plantean a los estudiantes en esta unidad, se pretende fomentar el paso de un sistema de representación a otro. No nos basta con que los alumnos y alumnas sepan calcular límites determinados e indeterminados, la continuidad de una función o sus asíntotas, sino que además queremos que tengan clara la idea intuitiva de límite de una función, sobre todo gráficamente, de manera que se les planteen diversas características que cumpla una función y sean capaces de deducir su gráfica o que por el contrario sepan analizar la gráfica de una función y a partir de ella deduzcan límites tanto en un punto, como en el infinito, la continuidad de una función en un punto ó en caso de no serlo explicar el tipo de discontinuidad que presenta; así como las asíntotas y posición relativa de la gráfica con respecto a las mismas.

2. Objetivos

1.1. Objetivos generales de la etapa según el Real Decreto 1105/2014

El Bachillerato tiene como finalidad proporcionar al alumnado formación, madurez intelectual y humana, conocimientos y habilidades que les permitan desarrollar funciones sociales e incorporarse a la vida activa con responsabilidad y competencia. Asimismo, capacitará al alumnado para acceder a la educación superior y contribuirá a desarrollar en los alumnos las capacidades que les permitan:

- Ejercer la ciudadanía democrática, desde una perspectiva global, y adquirir una conciencia cívica responsable, inspirada por los valores de la Constitución española así como por los derechos humanos, que fomente la corresponsabilidad en la construcción de una sociedad justa y equitativa.
- Consolidar una madurez personal y social que les permita actuar de forma responsable y autónoma y desarrollar su espíritu crítico. Prever y resolver pacíficamente los conflictos personales, familiares y sociales.
- Fomentar la igualdad efectiva de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, analizar y valorar críticamente las desigualdades y discriminaciones existentes, y en particular la violencia contra la mujer e impulsar la igualdad real y la no discriminación de las personas por cualquier condición o circunstancia personal o social, con atención especial a las personas con discapacidad.
- Afianzar los hábitos de lectura, estudio y disciplina, como condiciones necesarias para el eficaz aprovechamiento del aprendizaje, y como medio de desarrollo personal.
- Dominar, tanto en su expresión oral como escrita, la lengua castellana y, en su caso, la lengua cooficial de su Comunidad Autónoma.
- Expresarse con fluidez y corrección en una o más lenguas extranjeras.
- Utilizar con solvencia y responsabilidad las tecnologías de la información y la comunicación.
- Conocer y valorar críticamente las realidades del mundo contemporáneo, sus antecedentes históricos y los principales factores de su evolución. Participar de forma solidaria en el desarrollo y mejora de su entorno social.

- Acceder a los conocimientos científicos y tecnológicos fundamentales y dominar las habilidades básicas propias de la modalidad elegida.
- Comprender los elementos y procedimientos fundamentales de la investigación y de los métodos científicos. Conocer y valorar de forma crítica la contribución de la ciencia y la tecnología en el cambio de las condiciones de vida, así como afianzar la sensibilidad y el respeto hacia el medio ambiente.
- Afianzar el espíritu emprendedor con actitudes de creatividad, flexibilidad, iniciativa, trabajo en equipo, confianza en uno mismo y sentido crítico.
- Desarrollar la sensibilidad artística y literaria, así como el criterio estético, como fuentes de formación y enriquecimiento cultural.
- Utilizar la educación física y el deporte para favorecer el desarrollo personal y social.
- Afianzar actitudes de respeto y prevención en el ámbito de la seguridad vial.

1.2. Objetivos generales de la materia según el Real Decreto 1467/2007

La enseñanza de las Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales en el bachillerato tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

- Aplicar a situaciones diversas los contenidos matemáticos para analizar, interpretar y valorar fenómenos sociales, con objeto de comprender los retos que plantea la sociedad actual.
- Adoptar actitudes propias de la actividad matemática como la visión analítica o la necesidad de verificación. Asumir la precisión como un criterio subordinado al contexto, las apreciaciones intuitivas como un argumento a contrastar y la apertura a nuevas ideas como un reto.
- Elaborar juicios y formar criterios propios sobre fenómenos sociales y económicos, utilizando tratamientos matemáticos. Expresar e interpretar datos y mensajes, argumentando con precisión y rigor y aceptando discrepancias y puntos de vista diferentes como un factor de enriquecimiento.
- Formular hipótesis, diseñar, utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas que permitan enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia, confianza en sí mismo y creatividad.

- Utilizar un discurso racional como método para abordar los problemas: justificar procedimientos, encadenar una correcta línea argumental, aportar rigor a los razonamientos y detectar inconsistencias lógicas.
- Hacer uso de variados recursos, incluidos los informáticos, en la búsqueda selectiva y el tratamiento de la información gráfica, estadística y algebraica en sus categorías financiera, humanística o de otra índole, interpretando con corrección y profundidad los resultados obtenidos de ese tratamiento.
- Adquirir y manejar con fluidez un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos. Incorporar con naturalidad el lenguaje técnico y gráfico a situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente.
- Utilizar el conocimiento matemático para interpretar y comprender la realidad, estableciendo relaciones entre las matemáticas y el entorno social, cultural o económico y apreciando su lugar, actual e histórico, como parte de nuestra cultura.

1.3. Objetivos específicos

Con el diseño de la presente unidad didáctica, se pretende que una vez finalizada ésta, los alumnos alcancen una serie de capacidades, de manera que contribuyan a la consecución de los objetivos generales de la materia y éstos, a su vez, a los de la etapa correspondiente.

- **O1.** Comprender la idea intuitiva de límites, ya sea a través de una tabla de valores o gráficamente y saber diferenciarlos.
- **O2.** Conocer y distinguir límites en un punto, en el infinito, finitos e infinitos.
- **O3.** Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos a través de una tabla, mediante una gráfica o numéricamente.
- **O4.** Comprender el concepto de límite en un punto, sabiendo argumentar la existencia o no del límite de una función.
- **O5.** Calcular el límite de funciones en un punto, de forma gráfica o analítica, sabiendo que en el caso de funciones definidas a trozos, es necesario el cálculo de los límites laterales.
- **O6.** Calcular el límite de funciones en el infinito de forma gráfica y analítica.
- **O7.** Aplicar el cálculo de límites de funciones que modelizan diversos fenómenos.

- **O8.** Operar con el infinito y reconocer indeterminaciones del tipo:

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{k}{0}, \infty - \infty,\ 1^{\infty}$$

- **O9.** Resolver límites en los que se presente algún tipo de indeterminación.
- **O10.** Conocer el concepto de continuidad en un punto, relacionándolo con la idea de límite y en el caso de que no sea continua, identificar la causa de la discontinuidad. Extender el concepto a la continuidad en un intervalo.
- **O11.** Conocer y calcular la continuidad de funciones elementales (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas) y de funciones que modelizan diversos fenómenos.
- **O12.** Conocer el concepto de los diferentes tipos de asíntotas (vertical, horizontal y oblicua), así como, saber calcularlas, estudiar la posición relativa de la gráfica de la función, con respecto a la asíntota y representarlas.
- **O13.** Representar funciones que cumplan características dadas, ya sea en papel o usando Geogebra como herramienta tecnológica.
- **O14.** Saber estructurar y organizar los contenidos teóricos a través de mapas conceptuales, usando la herramienta tecnológica CmapTools.

2. Competencias

2.1. Competencias claves según el Real Decreto 1105/2014.

El Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (*BOE 3-1-2015*), se basa en la potenciación del aprendizaje por competencias, con el objetivo de dar un nuevo enfoque que favorezca los propios procesos de aprendizaje y la motivación por aprender.

A efectos de este Real Decreto y de la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, en su anexo I, las competencias claves del currículo son las siguientes:

- **<u>Comunicación lingüística</u>** (*CL*). Esta competencia se refiere a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, de representación, interpretación y comprensión de la realidad, de construcción y comunicación del conocimiento y de organización y autorregulación del pensamiento, las emociones y la conducta.

- **Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología** (***CMCT***). La primera alude a las capacidades para aplicar el razonamiento matemático para cuestiones de la vida cotidiana; la competencia en ciencia se centra en las habilidades para utilizar los conocimientos y metodología científicos para explicar la realidad que nos rodea; y la competencia tecnológica, en cómo aplicar estos conocimientos y métodos para dar respuesta a los deseos y necesidades humanos.
- **Competencia digital** (***CD***). Fomenta la capacidad de buscar, seleccionar y utilizar información en medios digitales, además de permitir que el alumnado se familiarice con los diferentes códigos, formatos y lenguajes en los que se presenta la información científica (datos estadísticos, representaciones gráficas, modelos geométricos...). La utilización de las tecnologías de la información y la comunicación en el aprendizaje de las ciencias para comunicarse, recabar información, retroalimentarla, simular y visualizar situaciones, para la obtención y el tratamiento de datos, etc., es un recurso útil en el campo de las matemáticas que contribuye a mostrar una visión actualizada de la actividad científica.
- **Aprender a aprender** (***AAP***). Es una de las principales competencias, ya que implica que el alumno desarrolle su capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizar sus tareas y tiempo, y trabajar de manera individual o colaborativa para conseguir un objetivo.
- **Competencias sociales y cívicas** ***(CSC***). Hacen referencia a las capacidades para relacionarse con las personas y participar de manera activa, participativa y democrática en la vida social y cívica.
- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor** (***SIEE***). Implica las habilidades necesarias para convertir las ideas en actos, como la creatividad o las capacidades para asumir riesgos y planificar y gestionar proyectos.
- **Conciencia y expresiones culturales** ***(CEC***). Hace referencia a la capacidad para apreciar la importancia de la expresión a través de la música, las artes plásticas y escénicas o la literatura.

Las competencias suponen una combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, etc., es decir, de *"saber", "saber hacer" y "saber ser".*

Con esta unidad didáctica, pretendemos que los alumnos desarrollen las competencias claves recogidas en la siguiente tabla, a través de los objetivos específicos marcados, así como de las estrategias de aprendizaje utilizadas.

COMPETENCIAS	SABER	SABER HACER	SABER SER
Comunicación lingüística	El vocabulario y terminología necesaria para comunicarse en función del contexto.	Expresarse de forma oral y escrita en diferentes situaciones comunicativas como son el trabajo en grupo y aprendizaje cooperativo.	Estar dispuesto al diálogo crítico y constructivo, mostrar interés por la interacción con los demás y reconocer y valorar el diálogo como herramienta fundamental para la convivencia.
Competencia matemática	Conocer los términos y conceptos matemáticos (límite de una función, continuidad, asíntotas, indeterminaciones, etc.), así como métodos y algoritmos matemáticos.	Resolver determinados problemas, analizar gráficos y representaciones matemáticas, analizar si una función es continua o no argumentando en caso de no serlo, el tipo de discontinuidad presentada, así como utilizar y manipular determinadas herramientas.	Que muestren rigor, así como respeto por los datos y su veracidad.
Competencia digital	Conocer las características de las aplicaciones empleadas en el aula (Geogebra, CmapTools, etc.)	Representar gráficamente funciones con determinadas características, a través de Geogebra y organizar y estructurar la información a través de mapas conceptuales con la herramienta CmapTools.	Mostrar motivación por el aprendizaje y uso de las nuevas tecnologías.
Aprender a aprender	Conocer las distintas estrategias empleadas para llevar a cabo las tareas.	Establecer estrategias de planificación en la resolución de las tareas, así como de evaluación del resultado obtenido y el proceso llevado a cabo.	Motivarse y mostrar curiosidad por aprender, sentirse partícipe del proceso y resultado de su aprendizaje y mostrar un espíritu crítico.
Competencias sociales y cívicas	Comprender el concepto de respeto, igualdad y tolerancia.	Saber comunicarse de forma constructiva y argumentada con los demás.	Mostrar motivación por participar de forma democrática y consensuada en los debates que se abran en clase, ser tolerantes y respetuosos con las opiniones del resto de compañeros y mostrar interés por problemas de la vida cotidiana.
Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor	Tener conocimiento sobre el diseño e implementación del plan seguido en la resolución de problemas.	Tener capacidad de análisis, planificación, organización y gestión. Saber comunicarse con el grupo, presentar y representar.	Tener iniciativa, interés a la hora de realizar las tareas, relacionarse con los demás a través del trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo, así como actuar con creatividad.

2.2. Competencias matemáticas de NISS.

Niss 1993 citado por Meavilla (s.f.), propone la siguiente definición de competencia matemática: *"Habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extramatemáticos en los que las Matemáticas juegan o podrían jugar su papel."*

Además de las competencias claves anteriores, voy a analizar de qué manera contribuye esta unidad didáctica en el desarrollo de las ocho competencias matemáticas de Niss. Para ello voy a construir una tabla, donde se puede observar la vinculación de los objetivos específicos marcados con esta unidad y dichas competencias.

1. Pensar matemáticamente (PM)
2. Argumentar matemáticamente (AM)
3. Comunicar con las matemáticas y comunicar sobre matemáticas(CM)
4. Modelar matemáticamente (MM)
5. Plantear y resolver problemas matemáticos (PyRPM)
6. Representar entidades matemáticas (REM)
7. Utilizar los símbolos matemáticos (USM)
8. Utilizar ayudas y herramientas (UAyH)

Objetivos específicos		PM	AM	CM	MM	PyRPM	REM	USM	UAyH
1	Comprender la idea de límites, ya sea a través de una tabla de valores o gráficamente y saber diferenciarlos.	x		x			x	x	x
2	Conocer y distinguir límites en un punto, en el infinito, finitos e infinitos.	x		x				x	x
3	Distinguir los dos tipos de límites laterales e intuirlos a través de una tabla, mediante una gráfica o numéricamente.	x		x			x	x	x
4	Comprender el concepto de límite en un punto, sabiendo argumentar la existencia o no del límite de una función.	x	x	x				x	x

5	Calcular el límite de funciones en un punto a través de su gráfica o de forma analítica, sabiendo que en el caso de funciones definidas a trozos, es necesario el cálculo de los límites laterales.			X		X		X	X
6	Calcular el límite de funciones en el infinito de forma gráfica y analítica.			X		X		X	X
7	Aplicar el cálculo de límites de funciones que modelizan diversos fenómenos.	X	X	X	X	X		X	
8	Operar con el infinito y reconocer indeterminaciones del tipo: $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{k}{0}, \infty - \infty, 1^{\infty}$			X		X		X	X
9	Resolver límites en los que se presente algún tipo de indeterminación.	X		X				X	X
10	Conocer el concepto de continuidad en un punto, relacionándolo con la idea de límite y en el caso de que no sea continua, identificar la causa de la discontinuidad. Extender el concepto a la continuidad en un intervalo.	X	X	X				X	X
11	Conocer y calcular la continuidad de funciones elementales (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas) y de funciones que modelizan diversos fenómenos.	X	X	X	X	X		X	X
12	Conocer el concepto de los diferentes tipos de asíntotas (vertical, horizontal y oblicua), así como, saber calcularlas, estudiar la posición relativa de la gráfica de la función, con respecto a la asíntota y representarlas.	X	X	X		X		X	X
13	Representar funciones que cumplan características dadas ya sea en papel o usando Geogebra como herramienta tecnológica.	X	X	X			X	X	X
14	Saber estructurar y organizar los contenidos teóricos a través de mapas conceptuales, usando la herramienta tecnológica CmapTools.	X	X	X				X	X

(*) Observación. Para alcanzar estos objetivos plantearemos problemas que fomenten la obtención de los mismos y el desarrollo de las subcompetencias matemáticas de Niss. Así mismo, comentar que las subcompetencias de "Comunicar matemáticamente", "Utilizar símbolos matemáticos" y "Utilizar ayudas y herramientas", se desarrollaran durante la obtención de todos los objetivos, ya que una parte de la unidad, va a consistir en el trabajo en grupo, de manera que la comunicación estará presente en todo momento, así como el uso de simbología matemática y uso de herramientas como los juegos que les ayudarán en la actividad matemática y su alcance o aplicaciones informáticas para la representación de funciones y mapas conceptuales.

3. Contenidos

Otro de los elementos integradores del currículo son los contenidos o conjuntos de conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes que contribuyen al logro de los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa y a la adquisición de las competencias.

Según Coll (1992) los contenidos podrían definirse como el “conjunto de saberes o formas culturales cuya asimilación y apropiación por parte de los alumnos se considera esencial para su desarrollo y socialización".

3.1. Contenidos mínimos según el Real Decreto 1105/2014

Según lo dispuesto en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, Boletín Oficial del Estado (3 de enero de 2015), núm. 3, p. 384, los contenidos mínimos enmarcados dentro del Bloque 3. Análisis, que se trabajarán a lo largo de esta unidad son:

- Idea intuitiva de límite de una función en un punto.
- Cálculo de límites sencillos.
- El límite como herramienta para el estudio de la continuidad de una función.
- Aplicación al estudio de las asíntotas.

Por otro lado está el bloque de "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", que es un bloque común a los dos cursos de bachillerato y transversal, ya que debe desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenido, siendo el eje fundamental de la asignatura, por basarse en procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático como: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos.

Por tanto, a lo largo de la presente unidad didáctica los alumnos abordaran también contenidos de este bloque, como:

- Planificación del proceso de resolución de problemas.
- Estrategias y procedimientos puestos en práctica, como por ejemplo suponer el problema resuelto.

- Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos escritos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema.
- Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad.
- Desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Utilización de medios o herramientas tecnológicas para la elaboración y creación de representaciones gráficas de funciones a través de Geogebra ó Algeo; así como para la elaboración de mapas conceptuales con CmapTools, donde se recojan de forma ordenada, estructurada y resumida los contenidos abordados.

3.2. Contenidos conceptuales

Los contenidos conceptuales corresponden al área del saber, es decir, los hechos, fenómenos y conceptos que los estudiantes pueden aprender. Están conformados por conceptos, principios, leyes, enunciados, teoremas y modelos.

En esta unidad didáctica abarcaremos los siguientes contenidos conceptuales:

- Límite de una función en un punto. Límites laterales.
- Límites finitos, infinitos y en el infinito.
- Indeterminaciones:
    - Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$
    - Indeterminación $\infty - \infty$
    - Indeterminación $\frac{0}{0}$
    - Indeterminación $\frac{k}{0}$
    - Indeterminación 1^{∞}
- Continuidad de una función en un punto.
- Tipos de discontinuidad:
    - Discontinuidad evitable.
    - Discontinuidad inevitable de salto finito.
    - Discontinuidad inevitable de salto infinito.
- Continuidad de funciones elementales:
    - Polinómicas.

- Racionales.
- Irracionales.
- Exponenciales.
- Logarítmicas.

- Asíntotas:
  - Asíntota vertical.
  - Asíntota horizontal.
  - Asíntota oblicua.

3.3. Contenidos procedimentales

Los contenidos procedimentales constituyen un conjunto de acciones que facilitan el logro de un fin u objetivo propuesto. A través de estos contenidos, el alumno desarrolla su capacidad para "saber hacer". Estos contenidos abarcan habilidades intelectuales, motrices, destrezas, estrategias y procesos que impliquen una secuencia de acciones.

Los contenidos procedimentales que los alumnos van a adquirir, a través de esta unidad son:

- Determinación de los límites laterales de una función en un punto, así como su utilización para determinar la existencia o no del límite de la función en dicho punto.
- Determinación del límite de una función a través de su gráfica ó tabla de valores.
- Utilización del concepto de límite de una función en un punto para discutir la continuidad de la función en dicho punto.
- Determinación de límites indeterminados de funciones.
- Utilización de la continuidad de funciones elementales para discutir la continuidad de una función dada a trozos.
- Clasificación de las discontinuidades que puede presentar una función.
- Determinación de la continuidad de una función dada por su gráfica.
- Determinación de las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de una función.

- Determinación de la posición relativa de las asíntotas, con respecto a la gráfica de la función, así como la representación de las asíntotas y las ramas asintóticas.
- Utilización de la aplicación Geogebra para representar gráficamente funciones con determinadas características.
- Utilización de la herramienta CmapTools, para construir mapas conceptuales.

3.4. Contenidos actitudinales

Los contenidos actitudinales constituyen los valores, normas, creencias y actitudes conducentes al equilibrio personal y a la convivencia social. La actitud es considerada como una propiedad individual que define el comportamiento humano y se relaciona directamente con el ser.

Los contenidos actitudinales que se trabajarán a lo largo de esta unidad didáctica son:

- Estar dispuesto al diálogo crítico y constructivo.
- Mostrar rigor y respeto por los datos y su veracidad.
- Mostrar motivación por el aprendizaje, así como por el uso de las nuevas tecnologías.
- Motivarse y mostrar curiosidad por aprender, sentirse partícipe del proceso y resultado de su aprendizaje, así como de la evaluación.
- Desarrollar la capacidad de reflexión crítica y autocrítica.
- Mostrar motivación por participar de forma democrática y consensuada en los debates que se abran en clase, ser tolerantes y respetuosos con las opiniones del resto de compañeros y mostrar interés por problemas de la vida cotidiana.
- Tener iniciativa, interés a la hora de realizar las tareas, relacionarse con los demás a través del trabajo en grupo y el aprendizaje cooperativo, así como actuar con creatividad.

3.5. Ideas y conocimientos previos

Las ideas previas o concepciones alternativas no han de verse como un impedimento para el aprendizaje, sino como un punto de partida necesario, con el que se ha de contar para construir nuevo conocimiento y planificar estrategias de aprendizaje (Furió, Solbes & Carrascosa, 2006, pp. 44-77).

Según lo establecido en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, los alumnos que cursan las Matemáticas de la opción A, deben haber adquirido los siguientes conocimientos al finalizar el curso:

- *Bloque 1. Números.*
  - Interpretación y utilización de los números y las operaciones en diferentes contextos, eligiendo la notación y precisión más adecuadas en cada caso.
  - Intervalos. Significado y diferentes formas de expresar un intervalo.
  - Representación de números en la recta numérica.
- *Bloque 3. Álgebra.*
  - Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos.
  - Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.
- *Bloque 3. Funciones y gráficas.*
  - Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
  - Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis.

Por otro lado, los alumnos de 1º de bachillerato, previamente a esta unidad, han dado dos temas sobre funciones. Uno en el que han visto el concepto de función, operaciones con funciones (suma, resta, producto, cociente, composición e inversa) y todas sus características (dominio, recorrido, monotonía, curvatura, extremos relativos, puntos de inflexión, simetría y periodicidad) y otro tema en el que han visto la representación de las funciones elementales y sus características (polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas). Por tanto, los conocimientos previos, que se supone, han de haber adquirido los alumnos, con anterioridad a esta unidad didáctica y que están relacionados con la misma son:

- Conocer el concepto de función.
- Hallar el valor de una función en un punto.
- Conocer, distinguir, representar gráficamente y hallar el dominio de los distintos tipos de funciones elementales:
  - Polinómicas.
  - Racionales.
  - Irracionales.
  - Exponenciales.
  - Logarítmicas.

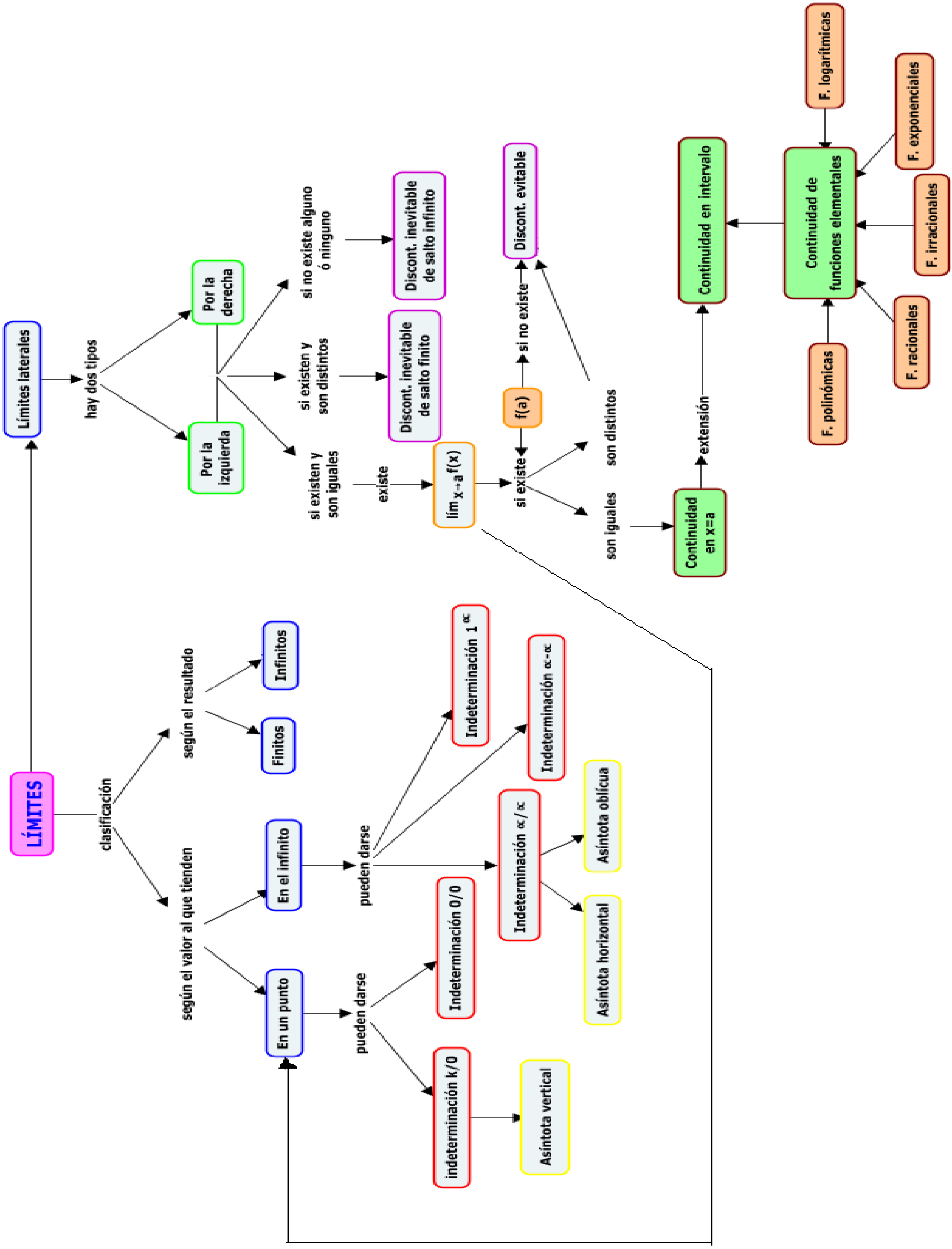
3.6. Posibles dificultades

Durante el desarrollo de esta unidad didáctica los alumnos se pueden encontrar con una serie de dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, así como a la simbología empleada y a la relación de los contenidos.

Las dificultades y errores más significativos a la hora de llevar a cabo la unidad son:

- **D1.** Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- **D2.** Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales. Considerar a^+ y a^- puntos diferentes.
- **D3.** Errores de tipo algebraico y numérico en el manejo de las funciones cuyo límite se quiere determinar.
- **D4.** Conflicto con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite.
- **D5.** Dificultad para concebir la idea de límite en el infinito.
- **D6.** Dificultades para comprender que la indeterminación, no implica que el límite de la función no exista y se pueda obtener.
- **D7.** Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o al revés.
- **D8.** Dificultad para distinguir diferentes tipos de discontinuidades.
- **D9.** Dificultad para extrapolar el uso de los límites en diversas situaciones de la vida cotidiana.

3.7. Mapa de conceptos



4. Metodología

La metodología es el conjunto de criterios y decisiones que organizan, de forma global y activa, la acción didáctica en el aula, como son: el papel que juegan el profesor y los alumnos, utilización de medios y recursos, el tipo de actividades llevadas a cabo, la organización del espacio, los tiempos, agrupamientos, secuenciación o temporalización, los tipos de tareas, etc.

En mi caso, voy a llevar a cabo una metodología mixta, en cuanto al modelo de aprendizaje. Para ello voy a considerar dos momentos diferenciados dentro del aula:

Momento 1. Tradicional

Un primer momento, basado en una metodología más tradicional, donde primero realizaré una indagación sobre los conocimientos previos del alumno, como parte fundamental para elaborar estrategias de planificación y actuación dentro del aula, a través de un cuestionario inicial *(Anejo I).*

Además de este cuestionario inicial, pasaré otro cuestionario con preguntas personales, con el objetivo de conocer un poco más al alumno *(Anexo II)*.

A partir de este momento, estaremos en condiciones de comenzar el desarrollo de los contenidos de la unidad. Para ello elaboraré un cuadernillo, donde se recogerán todos los contenidos teóricos, con ejemplos y actividades específicas de cada apartado, además de una relación final con *actividades de repetición y consolidación* sobre todos los apartados dados en la unidad, con el objetivo de asegurar el aprendizaje y que los alumnos sientan que han interiorizado lo que el profesor les quiere transmitir *(Anejo II).*

Durante este primer momento, los alumnos trabajarán de forma individual, haciendo las tareas en sus cuadernos, que luego serán evaluados. Las clases se basarán en las explicaciones del docente, pero siempre teniendo en cuenta las dudas que les puedan surgir a los alumnos y planteándoles cuestiones que les hagan debatir, argumentar y razonar. Además se les proporcionará un pequeño cuaderno, a modo de diario personal, en el que podrán ir anotando todas sus sensaciones, dudas sobre el tema, dificultades, cuestiones personales, etc. De este modo podré conocer mucho mejor al alumnado y trabajar con ellos de un modo más individualizado, atendiendo así las necesidades de cada uno.

Igualmente, si el centro me lo permitiera, estaría a disposición del alumnado en horario extraescolar, en el Plan de Acompañamiento.

Esta metodología se llevará a cabo durante el desarrollo de todos los contenidos, salvo para explicar las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \frac{0}{0}\ y\ \frac{k}{0}$, que se utilizará una metodología basada en aprendizaje cooperativo, a través del Puzle de Aronson (*Anexo IV*).

Momento 2. Trabajo en grupo, aprendizaje cooperativo y juegos

Una vez que ya conocen todos los contenidos, dividimos la clase en grupos lo más heterogéneos posible, de cuatro alumnos, los cuales trabajarán juntos durante todo este momento o fase.

La intención es que trabajen sobre actividades de mayor dificultad, de ampliación y apliquen los límites para resolver problemas sobre diversos fenómenos de la vida cotidiana. Para ello les daré una relación de problemas *(Anejo III)*, que deberán incluir en un portfolio de trabajo en equipo, el cual será evaluado.

Durante este período, el profesor actuará de guía, a través del diálogo y ofreciendo ayudas, que irá reduciendo y retirando poco a poco, de forma progresiva hasta conseguir que el alumnado actúe de forma autónoma e independiente.

Además, durante esta fase, se les enseñará a manejar un poco el Geogebra (*Anexo IX*); con la finalidad de que aprendan a representar a través de la aplicación, funciones con ciertas características impuestas; así como el programa CmapTools (*Anexo X*), para que sepan hacer mapas conceptuales, que les ayuden a estructurar y organizar los contenidos de forma esquematizada y valoren el uso de esta herramienta no sólo para esta materia, sino para cualquier otra.

Por último, utilizaremos un juego didáctico en el aula (*Anexo XIII*), para afianzar los conocimientos aprendidos y repasar para la prueba final que será llevada a cabo. El juego que voy a llevar a cabo se denomina Quién tiene, Yo tengo..., cuyas reglas he encontrado en la página de Ana García Azcárate (*Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas*) y en base a dichas reglas he diseñado mi propio juego formado por veinte tarjetas, que llevarán a los alumnos a reflexionar sobre todos los contenidos vistos en clase.

Momento 3. Evaluación

Este momento lo comprenden la prueba final (*Anejo IV*), la evaluación propia (autoevaluación) y del resto de compañeros del grupo (coevaluación) del trabajo realizado en grupo, a través de una rúbrica (*Anexo XVI*) y la evaluación del docente, también mediante una rúbrica (*Anexo XVII*).

5. Secuenciación

La unidad didáctica se pretende llevar a cabo durante 18 sesiones, según lo establecido en la siguiente tabla:

Momento 1	**1ª SESIÓN**	➢ **Cuestionario para conocer al alumno.** ➢ **Cuestionario inicial para descubrir los conocimientos previos.**
	2ª SESIÓN	➢ **Idea intuitiva de límite.**
	3ª SESIÓN	➢ **Límite de una función en un punto.** ➢ **Límites finitos, infinitos y en el infinito.** ➢ **Operaciones con el infinito.**
	4ª SESIÓN	➢ **Límite de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas.**
	5ª SESIÓN	➢ **Trabajo cooperativo: Puzle de Aronson. Indeterminaciones.**
	6ª SESIÓN	➢ **Trabajo cooperativo: Puzle de Aronson. Indeterminaciones.**
	7ª SESIÓN	➢ **Indeterminación** 1^{∞}
	8ª SESIÓN	➢ **Continuidad de una función en un punto.** ➢ **Tipos de discontinuidades.**
	9ª SESIÓN	➢ **Continuidad de funciones elementales.** ➢ **Extensión de la continuidad a intervalos.**
	10ª SESIÓN	➢ **Cálculo de asíntotas: vertical, horizontal y oblicua.**
Momento 2	**11ª SESIÓN**	➢ **Trabajo en grupo: Cuadernillo de grupo.**
	12ª SESIÓN	➢ **Trabajo en grupo: Cuadernillo de grupo.**
	13ª SESIÓN	➢ **Trabajo en grupo: Práctica con Geogebra.**
	14ª SESIÓN	➢ **Trabajo en grupo: Práctica con CmapTools.**
	15ª SESIÓN	➢ **Presentación al resto de grupos de sus prácticas en Geogebra y CmapTools.**
	16ª SESIÓN	➢ **Juego Quién tiene, yo tengo... para repasar**
Momento 3	**17ª SESIÓN**	➢ **Prueba o examen final.**
	18ª SESIÓN	➢ **Resultados y corrección de errores.** ➢ **Rúbrica para que el alumnado evalúe al docente.** ➢ **Rúbrica para evaluar el trabajo en grupo.**

1ª Sesión

Esta primera sesión estará destinada a recabar información de gran utilidad para conocer algunos aspectos y circunstancias personales que rodean al alumnado y que pueden incidir en el proceso de enseñanza-aprendizaje; así como aquellos conocimientos previos que se espera, deben conocer.

Para ello utilizaré un cuestionario con una serie de preguntas para conocer al alumno (*Véase el Anexo II*): nacionalidad, profesión de los padres, si asisten a clases particulares, si disponen de ordenador y conexión a internet, etc.; y por otro lado utilizaré un cuestionario de evaluación inicial, sobre conocimientos previos (*Véase Anejo I*).

Una vez realizados ambos cuestionarios, se presenta la unidad didáctica, con la planificación prevista, las estrategias metodológicas que se pretende llevar a cabo, así como los criterios de evaluación.

2ª Sesión

En esta sesión, se hará entrega a los alumnos del cuadernillo individual, que recoge toda la teoría (*Véase Anejo II*) que vamos a abordar durante la unidad didáctica, acompañada de ejemplos clarificadores; para luego presentarles la idea intuitiva de límite, a través de una gráfica, numéricamente ó mediante una tabla de valores.

Para llevar a cabo las explicaciones, se utilizan los ejemplos que aparecen en el cuadernillo y después les pedimos a los alumnos que realicen los dos ejercicios que vienen al finalizar el apartado, para luego corregirlos en la pizarra.

Para terminar la sesión se les hace entrega del diario personal, donde le pedimos que anoten de forma voluntaria, todas las dudas y dificultades con las que se puedan encontrar a lo largo de toda la unidad, sensaciones o cuestiones personales que consideren importante transmitir. Se les informa de que dicho diario será recogido dos veces por semana, los martes y los viernes.

- **Recursos:** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

3ª Sesión

Al comienzo de la sesión y de ahora en adelante en el resto de sesiones, se hace un breve repaso de lo visto en días anteriores, para afianzar los conocimientos y resolver dudas generalizadas (las dudas y dificultades que vayan surgiendo de manera individual y que se detecten en los diarios de los alumnos, serán tratadas en la actividad extraescolar de acompañamiento, los martes y jueves por la tarde.

Luego, se explican nuevos contenidos del cuadernillo: la definición y cálculo de límite de una función en un punto, límites laterales, los diferentes tipos de límites (infinitos, finitos y en el infinito) y operaciones con el infinito.

Se les manda para casa el ejercicio 1 que aparece al final del apartado 2 del cuadernillo, así como los ejercicios 1 y 2 de la relación final del mismo (*véase el anexo III*).

- **Recursos:** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

4ª Sesión

Para comenzar se corrigen los ejercicios mandados en la sesión anterior. Dicha corrección será llevada a cabo por los propios alumnos. Para fomentar la participación y garantizar que todos intervengan en el aula, se llevará un control , de manera que no sean siempre los mismos alumnos los que salen a la pizarra e independientemente de si el alumno ó la alumna que le toque salir, ha realizado o no el ejercicio.

Después se explicará el cálculo de límites de funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas y les pedimos que hagan en clase el ejercicio 12 de la relación final del cuadernillo, para luego proceder a corregirlo en la pizarra.

- **Recursos:** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

5ª Sesión

En esta sesión, les planteamos una nueva estrategia metodológica, basada en el aprendizaje cooperativo, a través del Puzle de Aronson.

Antes de comenzar a trabajar, dividimos la clase en grupos de 4 alumnos, lo más heterogéneos posible y que se mantendrán en la segunda fase o momento que he determinado en el apartado de metodología, a partir del cual y en adelante trabajaran por grupos.

Una vez establecido los grupos, se les explica en qué consiste la práctica, como aparece reflejado en el *Anexo IV*. A través de esta estrategia, se pretende que los alumnos aprendan de forma constructiva y por sí solos, la resolución de distintos tipos de indeterminaciones.

Durante esta sesión, se llevarán a cabo los momentos 1,2, 3 y 4, de los seis de los que consta esta estrategia.

6ª Sesión

Durante esta sesión, continúan trabajando con las indeterminaciones, a través de los momentos 5 y 6, del Puzle de Aronson. En este último momento, los ejercicios que se les plantearán para que los trabajen en grupo serán:

- Apartados a) y c) del ejercicio 3 del cuadernillo individual.
- Apartados a), b) y d) del ejercicio 4 del cuadernillo individual.
- Apartados a) y c) del ejercicio 5 del cuadernillo individual.
- Apartados a), c) y p) del ejercicio 6 del cuadernillo individual.
- Apartados a) y c) del ejercicio 7 del cuadernillo individual.
- Apartados a) y b) del ejercicio 10 del cuadernillo individual.

7ª Sesión

En esta sesión, corregiremos en la pizarra los ejercicios que hicieron los alumnos durante el aprendizaje cooperativo y luego volveremos a la distribución inicial del aula, para que los alumnos continúen trabando de forma individual, para luego explicarles el último tipo de indeterminación, 1^{∞}, siguiendo con la misma estrategia metodológica.

Para finalizar les mandaré el ejercicio 11 del cuadernillo individual.

- **<u>Recursos:</u>** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

8ª Sesión

Comenzaríamos la sesión corrigiendo el ejercicio sobre la indeterminación 1^{∞} y luego empezaría a desarrollar el apartado de la continuidad, tratando los dos primeros puntos: la continuidad de una función en un punto y los tipos de indeterminaciones.

El objetivo fundamental de esta sesión es que se familiaricen con la definición rigurosa de continuidad de una función en un punto, relacionando dicha definición con la del límite de una función en un punto, así como, en caso de no ser continua, con el tipo de discontinuidad asociada, en función de la condición que no cumpla. Por otro lado, se le dará mucha importancia a que los alumnos detecten a partir de la gráfica de una función, el tipo de discontinuidad que presenta.

Al finalizar la clase les mandaré los ejercicios 13 y 16 del cuadernillo de trabajo.

- **Recursos:** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

9ª Sesión

Al igual que en las sesiones anteriores, empezaríamos corrigiendo los ejercicios en la pizarra y resolviendo posibles dudas.

Después desarrollamos los dos subapartados que quedan de la parte de continuidad; es decir, la continuidad de las funciones elementales y la extensión de la continuidad a un intervalo.

La finalidad es que los alumnos sepan estudiar la continuidad de una función en todo R, analizando el tipo de función que es y para aquellos puntos que generen problemas, lo estudien a partir de la definición de continuidad de una función en un punto, vista en la sesión anterior.

Al finalizar la clase se les plantearán los ejercicios 14, 15 y 17 del cuadernillo.

- **Recursos:** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

10ª Sesión

Esta sesión será la última de la primera fase o momento definido en el apartado de metodología como *"Tradicional"* y en ella se corregirán los ejercicios anteriores y se explicará el último apartado del tema: Cálculo de asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).

Además en la clase se resolverán algunos apartados del ejercicio 18 y el ejercicio 21, dejando para casa el resto de ejercicios que tienen que ver con el cálculo de asíntotas.

- **Recursos:** Pizarra blanca con rotuladores ó pizarra digital.

11ª y 12ª Sesión

Comenzamos con el segundo momento, basado en el trabajo en grupo, donde los alumnos se volverán a distribuir en los grupos de cuatro que se habían establecido para desarrollar el Puzle de Aronson.

Durante estas dos sesiones los alumnos trabajarán para hacer las actividades del cuadernillo de grupo (*Véase el Anejo III*), que luego deberán incluir en un portfolio que entregarán al docente (uno por cada grupo), para ser evaluado.

Se pretende de este modo, que trabajen de modo cooperativo, reflexionando, argumentando y debatiendo ideas y estrategias de resolución de problemas de mayor complejidad y profundización, alguno de los cuales modelizan fenómenos de la propia realidad.

Además se quiere hacer hincapié en la comunicación, como acción importante en todo proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que no es sólo una acción hacia fuera, sino también hacia dentro, en el sentido de que ayuda a los estudiantes a poner más en orden sus ideas y a completar y perfeccionar las reflexiones ya hechas.

En todo momento, el docente actuará de guía o mediador, orientando a los alumnos en la realización de su trabajo, capacitándolos para que aprendan por sí mismos, para que aprendan a aprender y para que aprendan a pensar.

13ª y 14ª Sesión

Estas dos sesiones estarán destinadas al uso de las Tics, ofreciendo así, una propuesta metodológica innovadora, teniendo en cuenta que nos encontramos ante una sociedad actual *"tecnológica".*

Llevaremos a cabo una práctica en Geogebra y CmapTools, donde se darán unas nociones previas sobre ambos programas (*Véanse los Anexos IX y X*), para acabar con la realización de una práctica grupal en ambos programas.

Con el Geogebra, deberán dibujar la gráfica de una función a trozos y una función que cumpla ciertas condiciones. Mientras que con CmapTools, se pretende que realicen un mapa conceptual sobre algún apartado de la unidad. Ambas prácticas deberán ser incluidas en el portfolio grupal y ser expuestas al resto de compañeros.

Ambas sesiones serán desarrolladas en el aula de informática, para que los alumnos puedan llevar a cabo la práctica grupal, con el uso de los ordenadores del centro y previamente me aseguraré que dispongan de ambos programas; para en caso contrario proceder a su instalación.

- **Recursos:** Pizarra digital, para que vayan viendo cómo se manejan los programas, mientras el docente va explicando las nociones básicas de cada uno de ellos y los ordenadores.

15ª Sesión

En esta sesión cada grupo expondrá al resto de la clase las prácticas llevadas a cabo en Geogebra y CmapTools, con el objetivo de fomentar la comunicación, pero sobre todo que argumenten las razones que les han llevado a dibujar ese tipo de función; es decir, deberán mostrarles de forma razonada que la función que han dibujado cumplen todas las condiciones exigidas. Así de igual modo en el caso de los mapas conceptuales, se les pedirá que ayuden a sus compañeros a entenderlo, teniendo en cuenta que son una herramienta que para interpretarla te la tienen que contar porque sólo quien la construye sabe darle un sentido.

- **Recursos:** Pizarra digital para proyectar el documento que van a exponer, ya sea en PowerPoint, Prezi, etc.

16ª Sesión

Esta última sesión del momento 2, basado en el trabajo en grupo, estará destinada a repasar todos los contenidos vistos a lo largo de la unidad, pero no de un modo tradicional, sino utilizando el juego Quién tiene, Yo tengo... (*Véase el Anexo XIII*).

17ª Sesión

Esta sesión estará destinada a la realización de la prueba final (*Véase el Anejo IV*), a la que los alumnos deberán enfrentarse de forma individual.

18ª Sesión

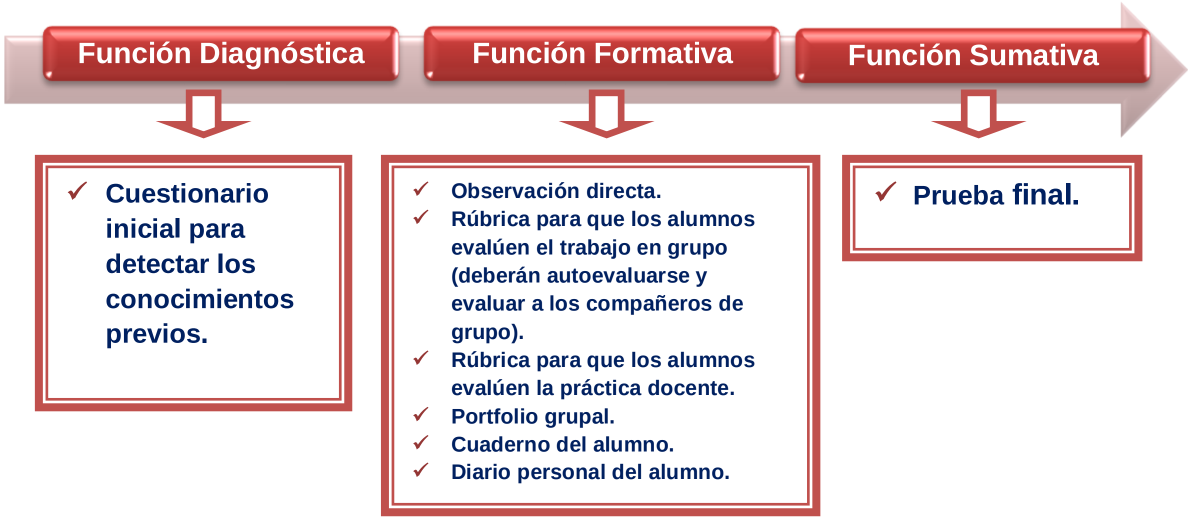
En esta última sesión de la unidad, se llevará a cabo la corrección de la prueba final en la pizarra, para que el alumnado reflexione y detecte los errores que hayan podido cometer en la prueba. Después se les facilitarán dos rúbricas, una para que se evalúen a ellos mismos y a los compañeros del mismo grupo, en cuanto al trabajo en grupo (*Véase el Anexo XVI*) y otra para evaluar al propio docente, su actitud y metodología llevada a cabo (*Véase el Anexo XVII*).

6. Evaluación

La evaluación que se pretende llevar a cabo durante el desarrollo de esta unidad didáctica, implicará tanto al docente como al alumnado, ya que sólo de este modo, será auténtica. Así, por un lado el docente utilizará mecanismos de heteroevaluación, mientras que los alumnos se autoevaluarán, se coevaluarán entre ellos y evaluarán la propia práctica docente.

Para evaluar si los alumnos han alcanzado los objetivos previstos y han desarrollado las competencias a lo largo de toda la unidad didáctica, se establecerán determinados criterios de evaluación y se utilizarán diversos instrumentos que aporten información relevante.

Clasificaremos los *instrumentos* según el tipo evaluación realizada, atendiendo a su *función:*



- ***Cuestionario inicial***: Se utilizará al comienzo del proceso, para saber los conocimientos previos del alumno y detectar posibles errores o concepciones alternativas.
- ***Observación directa***: Se llevará a cabo la observación directa del trabajo diario del alumno, su participación tanto en la corrección de las tareas individuales, como en el trabajo en grupo, así como la actitud positiva, esfuerzo y compromiso con el propio proceso de aprendizaje. Para llevar el control, se utilizará una ficha de seguimiento en la que se valorarán dichos parámetros.
- ***Rúbricas***: Se utilizarán dos rúbricas que serán entregadas a los alumnos el último día, una de las cuales tiene como objetivo que el alumnado se evalúe a sí mismo (autoevaluación) y a sus compañeros de grupo (coevaluación); y otra en la que deberán evaluar la acción docente (actitud, estrategias metodológicas, etc.)
- ***Portfolio grupal o carpeta de aprendizaje:*** A través del portfolio grupal, se pretende evaluar el trabajo realizado en grupo. Esta carpeta de aprendizaje deberá contener las actividades planteadas en el cuadernillo de grupo, la práctica realizada durante el aprendizaje cooperativo (Puzle de Aronson), la práctica en Geogebra y la práctica en la que tienen que construir un *mapa conceptual* en CmapTools. Los mapas conceptuales son a su vez otro instrumento de evaluación, que proporciona información al docente, sobre el aprendizaje del alumnado y su propia intervención, lo cual le permite promover la interacción crítica, tras su análisis y confrontación con las argumentaciones del alumno (Azcárate, 2007).

- ***Cuaderno del alumno***: Se recogerá semanalmente, para ver cómo está desarrollando el proceso de enseñanza-aprendizaje, en relación con las tareas y actividades planteadas en clase.
- ***Diario personal***: Este instrumento de evaluación, será de gran utilidad, ya que permitirá al docente detectar las dificultades, dudas y sensaciones de cada alumno y alumna y será utilizado para atender las necesidades de cada uno, de manera individualizada. Por otro lado, resulta valioso para el alumnado ya que contribuye a un desarrollo personal de naturaleza reflexiva, que le permite ser consciente no sólo del conocimiento adquirido, sino además del proceso y las dificultades encontradas.
- ***Prueba final***: Tendrá lugar al final del proceso y la resolución de la misma implicará el planteamiento de cuestiones y situaciones en las que el alumno deberá aplicar los conocimientos adquiridos.

6.1. Criterios de evaluación

Criterios de evaluación	Objetivos	Competencias
Conoce la idea intuitiva de límite, gráficamente, a través de una tabla de valores o analíticamente.	**O1 y O3**	***CMCT***
Utiliza el concepto de límite de una función, aplicándolo en el cálculo de límites en un punto y argumenta su existencia o no en dicho punto.	**O3, O4, O5**	***CL, CMCT***
Distingue entre límites finitos, infinitos, en el infinito y en un punto.	**O2**	***CMCT***
Aplica los procesos para resolver las indeterminaciones.	**O6,O8 y O9**	***CMCT***
Utiliza el concepto de continuidad de una función , aplicándolo en el estudio de la continuidad de una función en un punto y argumenta el porqué la función es continua o no.	**O4 y O10**	***CL, CMCT***
Reconoce y argumenta el tipo de discontinuidad que presenta una función en un punto concreto.	**O10**	***CL, CMCT***
Distingue los distintos tipos de funciones elementales y conoce la continuidad de las mismas.	**O11**	***CMCT***
Utiliza la continuidad de las funciones elementales para estudiar la continuidad de una función definida a trozos, en un intervalo.	**O10 y O11**	***CL, CMCT***

Conoce las propiedades de las funciones continuas y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.	**O10 y O13**	***CMCT, CD***
Utiliza el concepto de asíntota vertical, horizontal y oblicua para calcularlas, estudiar la posición relativa de la gráfica con respecto a las mismas y representar las ramas.	**O12**	***CMCT***
Representa gráficamente funciones que cumplen ciertas características vistas en la unidad, ya sea en papel o con el uso de Geogebra.	**O13**	***CMCT*, CD, AAP, SIEE**
Utiliza y maneja herramientas tecnológicas, como CmapTools, para construir mapas conceptuales.	**O14**	***CMCT*, CD, AAP, SIEE**
Modelizan diversos fenómenos, resuelve problemas de la vida cotidiana y extrae conclusiones.	**O7**	***CL, CMCT, AAP, CSC,SIEE***

6.2. Criterios de calificación

La calificación final que conseguirán los alumnos en esta unidad didáctica, vendrá dada a través de la media ponderada de los siguientes aspectos:

- Prueba final: 60%
- Trabajo en grupo: 20%
- Trabajo individual: 15%
- Actitud y participación: 5%

7. Atención a la diversidad

Entender y atender a la diversidad forma parte inherente de la función docente, ya que la labor de todo docente no sólo debe basarse en la transmisión de conocimientos. El objetivo primordial debe ser inculcarle al alumnado unos valores, educarlos para desenvolverse en la vida y ser mejores personas (Echeita & Sandoval, 2013).

Por tanto, el docente debe usar un currículo abierto y dinámico en función de las necesidades, flexible a los cambios sociales, metodológicos y estructurales, que garantice el desarrollo de las competencias necesarias para desenvolverse en la sociedad actual.

Centrándonos en el aula donde se pretende llevar a cabo el desarrollo de esta unidad, el alumnado carece de adaptaciones curriculares de algún tipo (no significativas, significativas ó altas capacidades). Lo único a contemplar en cuanto a la atención a la diversidad, es que como ya comenté con anterioridad, cada alumno va a disponer de un diario personal, donde anotará las incidencias que considere oportunas (dificultades, sensaciones, problemas personales, etc.), con el objetivo de conocer de modo individualizado las necesidades personales de cada alumno y alumna y así poder atenderlas.

Por otro lado, para aquellos alumnos y alumnas que completen sin grandes dificultades, todas las tareas y actividades planteadas, tanto a modo individual, como grupal; se les pondrá a su disposición un cuadernillo con actividades propuestas en Selectividad (*Anexo XXI*) en años anteriores y que tienen que ver con la temática vista en el aula; siendo totalmente voluntaria su entrega, en cualquier momento del curso.

8. Bibliografía

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*.

Azcárate, P. (1997). ¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, 32, 77-86.

Azcárate, P. (2007). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de Matemáticas. *Enfoques actuales en la Didáctica de las Matemáticas. Madrid. MEC, Colección Aulas de Verano*.

Azcárate, P. (s.f.). El aprendizaje matemático y las dificultades en el aprendizaje.

Coll, C., Pozo, J. I., Sarabia, B., & Valls, E. (1992). *Los contenidos en la reforma: enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes*.

Doménech Betoret, F. (s.f.). Tema 5: La enseñanza y el aprendizaje en la situación educativa.

Domingo Peña, J. (2010). El aprendizaje cooperativo y las competencias. *Revista d'innovació docent universitària: RIDU*, (2), 1-9.

Echeita, G., & Sandoval, M. (2013). Claves de la Equidad como reto de la educación del Siglo XXI. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 53, 1–36.

Furió, C., Solbes, J., & Carrascosa, J. (2006). Las ideas alternativas sobre conceptos científicos: tres décadas de investigación. Resultados y perspectivas. *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales*, 48, 64-77.

De Guzmán Ozámiz, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista iberoamericana de educación*, 43, 19-58.

Meavilla, V. (s.f.). Cómo evaluar las competencias matemáticas de nuestros alumnos de ESO.

Navarro Guzmán, J.I., Alcalde Cuevas, C., Martín Bravo, C. & Crespo Sierra, M.T. (2009). Diversos modelos de aprendizaje. *Psicología del desarrollo para docentes* (pp. 21-40). Madrid: Pirámide.

Pifarré, M. & Sanuy J. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (2), 297-308.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D.; Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de educación Matemática (SOAREM)*. Año 8, Nº 29, 9-19. Recuperado de www.soarem.org.ar

Normativa de referencia

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

ANEJOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Anejo I. Cuestionario de evaluación inicial.

Anejo II. Cuadernillo de teoría y ejercicios individual.

Anejo III. Cuadernillo de actividades para trabajar en grupo.

Anejo IV. Examen final.

ANEJO I. CUESTIONARIO SOBRE CONOMIENTOS PREVIOS

1º BACHILLERATO MAT. CCSS.

Nombre: .... Fecha: ....

1. Estudia el dominio de las siguientes funciones e indica qué tipo de funciones son:

a) $f(x) = 3x^5 - 4x + 1$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+9}$

c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{3x + x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

f) $f(x) = 3^{2x+3}$

g) $f(x) = \ln(5x - 120)$

h) $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x+5}}$

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-5x-6}{x^2-4} =$

b) $\frac{x^3-2x^2-10x}{x^2+2x} =$

c) $\frac{2x^2+x-1}{2x^3-x^2-2x+1} =$

3. Relaciona y esboza en cada caso la gráfica de la función:

a) Función lineal.	$y = 2x^2 + 8x + 1$
b) Función constante.	$y = \frac{-2}{x}$
c) Función afín.	$y = 2x - 1$
d) Función cuadrática.	$y = \log(x + 3)$
e) Función de proporcionalidad inversa.	$y = 5^x$
f) Función exponencial.	$y = -2$
g) Función logarítmica con base.	$y = -5x$

Límite de una función. Continuidad y asíntotas

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

IES PATERNA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

CONTENIDOS

1. Idea intuitiva de límite de una función en un punto y en el infinito.

2. Límite de una función en un punto. Límites laterales.

3. Límites finitos, infinitos y en el infinito.

4. Cálculo de límites. Indeterminaciones.

   5.1. Cálculo de límites de funciones polinómicas.
   5.2. Cálculo de límites de funciones exponenciales.
   5.3. Cálculo de límites de funciones logarítmicas.
   5.4. Cálculo de límites de funciones racionales. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}, \frac{k}{0}\ y\ \frac{0}{0}$
   5.5. Cálculo de límites de funciones irracionales. Indeterminación $\infty - \infty$
   5.6. Indeterminación 1^{∞}

5. Continuidad de una función. Relación con el límite de una función en un punto.

   5.1. Continuidad de una función en un punto.
   5.2. Tipos de discontinuidad.
   5.3. Continuidad de funciones elementales.
   5.4. Continuidad de una función en un intervalo.

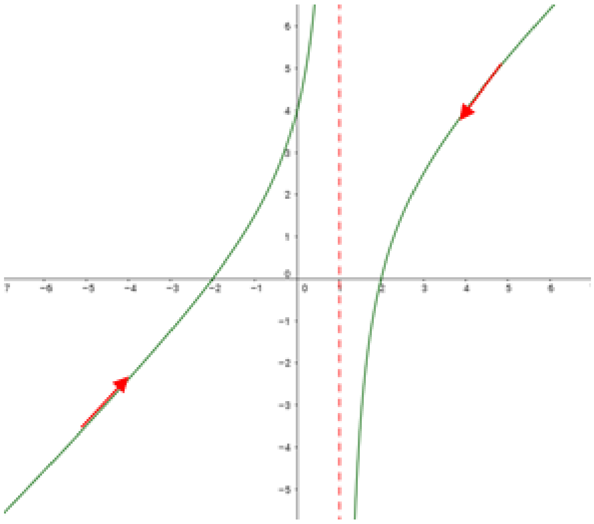
6. Asíntotas de una función.

   7.1. Asíntota vertical.
   7.2. Asíntota horizontal.
   7.3. Asíntota oblicua.

EJERCICIOS

1. Idea intuitiva de límite de una función en un punto y en el infinito

Gráficamente:

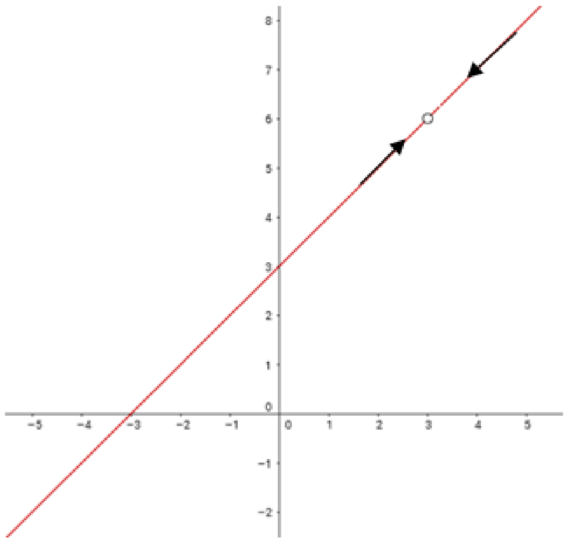


$$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$



$$\lim_{x \to 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

Mediante una tabla de valores:

Dada la función, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, podemos deducir el valor del límite de la misma cuando *x tiende a 2 (x→2)*, a partir de una tabla, tomando valores muy próximos por la izquierda y por la derecha del punto. (**Observación:** hemos tomado ese punto porque para ese valor la función no está definida)

$x \to 2^-$	1,9	1,99	1,999	1,99999...
f(x)				

$x \to 2^+$	2,1	2,01	2,001	2,00001...
f(x)				

$$\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \end{cases}$$

Analíticamente: No es más que sustituir el valor al que tiende x, en la función. Así por ejemplo:

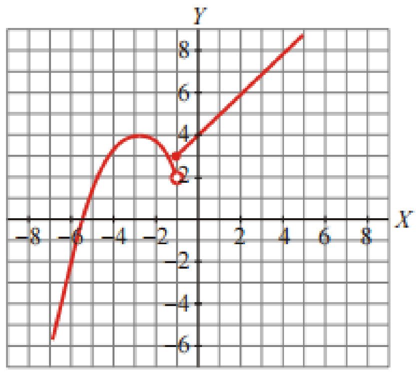
c) $\lim_{x\to 3} \frac{x^3+2}{5x} = \frac{3^3+2}{5\cdot 3} = \frac{30}{15} = \mathbf{2}$

d) $\lim_{x\to -1} x^5 - x^3 + 5 = (-1)^5 - (-1)^3 + 5 = -1 + 1 + 5 = \mathbf{5}$

AHORA TÚ...

1. A partir de las siguientes gráficas de funciones, calcula:

a)



$\lim_{x\to -\infty} f(x)$

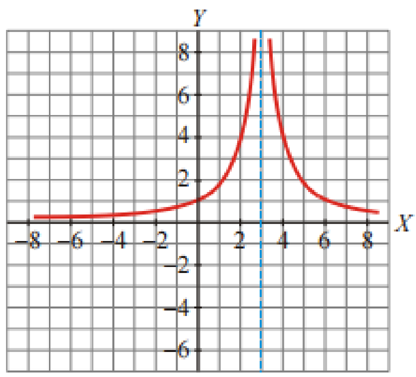
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim_{x\to -5} f(x)$

b)



$\lim_{x\to -\infty} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

$\lim_{x\to -3^-} f(x)$

$\lim_{x\to -3^+} f(x)$

$\lim_{x\to 0} f(x)$

2. Dada la función $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$, determina el límite de la misma en el punto x=1, a partir de una tabla de valores.

2. Límite de una función en un punto. Límites laterales.

Definición: Decimos que existe el límite de una función, *f(x)*, en un punto *x=a*, si se cumple:

a) Que existe el **límite lateral por la izquierda**, es decir, $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = l^-$
b) Que existe el **límite lateral por la derecha**, es decir, $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = l^+$
c) Ambos son iguales, es decir, $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l^- = l^+ = L$

Si ocurre esto entonces, el límite global de la función en *x=a* será:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Ejemplo

Determina el límite de la siguiente función en los puntos x = 1 y x = 5

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{2} & si\ \ x \le 1 \\ 5x^2-4 & si\ \ 1 < x < 5 \\ 20x & si\ x \ge 5 \end{cases}$$

Como estamos ante una función a trozos, es necesario estudiar los límites laterales de la misma en cada uno de los puntos.

¿$\exists \lim_{x\to 1} f(x)$?

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{2} = \frac{1^2+1}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (5x^2-4) = 5\cdot 1^2 - 4 = 1$$

Conclusión: Como los dos límites laterales existen y son iguales, entonces existe el límite global de la función en x = 1, siendo

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

¿$\exists \lim_{x\to 5} f(x)$?

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} (5x^2-4) = 5\cdot 5^2 - 4 = 121$$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} 20x = 20 \cdot 5 = 100$$

Conclusión: En este caso los dos límites laterales existen, pero no son iguales, entonces no existe el límite global de la función en x = 5, es decir:

$$\nexists \lim_{x \to 5} f(x)$$

AHORA TÚ...

1. Calcula, si existen, el límite de las siguientes funciones en el punto que se indica:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x \leq 1 \\ -x + 4 & si \;\; x > 1 \end{cases}$$ en x =1

b)

$$g(x) = \begin{cases} 3x + 4 & si \;\; x < -2 \\ 2 - x^2 & si \; x \geq -2 \end{cases}$$ en x =-2

3. Límite finito, infinito y en el infinito

❖ **Límite finito:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

❖ **Límite infinito:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

❖ **Límite en el infinito:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

4. Cálculo de límites. Indeterminaciones.

OPERACIONES CON EL INFINITO

$\infty + n^{\text{o}} = \infty$	$\infty - n^{\text{o}} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación
$\infty \cdot n^{\text{o}} = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{0}$ Indeterminación
$\infty^{n} = \infty$	$\sqrt[n]{\infty} = \infty$	$\frac{n^{\text{o}}}{0}$ Indeterminación
$\frac{\infty}{n^{\text{o}}} = \infty$	$\frac{n^{\text{o}}}{\infty} = 0$	1^{∞} Indeterminación
$\frac{0}{n^{\text{o}}} = 0$		

$$\infty^{m} - \infty^{n} = \begin{cases} \infty & si\ m \neq n \\ \infty - \infty \quad \text{Indeterminación} & si\ m = n \end{cases}$$

4.1. Cálculo de límites de funciones polinómicas

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = P(\pm\infty) = \pm\infty \ (Término\ de\ mayor\ grado)$$

Ejemplo

Calcula el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -2} (-x^3 + 5x^2 - 7) = -(-2)^3 + 5(-2)^2 - 7 = 8 + 20 - 7 = 21$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^5 - 2x^3 + 3x^2) = -(-\infty)^5 - 2(-\infty)^3 + 3(-\infty)^2 = +\infty$$

4.2. Cálculo de límites de funciones exponenciales

$$\lim_{x \to c} a^{x} = a^{c}$$

Si a>1	***Si 0<a<1***
$\lim_{x \to -\infty} a^{x} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} a^{x} = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} a^{x} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} a^{x} = 0$

Ejemplo

Calcula los siguientes límites:

Recuerda:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$\lim_{x\to+\infty} 3^{x+2} = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} 5^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{2})^{x-2} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} 3^{-x} = 3^{-\infty} = (\frac{1}{3})^{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{x\to 2} 4^{-x+1} = 4^{-2+1} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$

4.3. Cálculo de límites de funciones logarítmicas

$$\lim_{x\to c} (\log_a f(x)) = \log_a f(c)$$

Si a>1

$\lim_{x\to 0^+} (\log_a f(x)) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (\log_a f(x)) = +\infty$

Si 0<a<1

$\lim_{x\to 0^+} (\log_a f(x)) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} (\log_a f(x)) = -\infty$

Ejemplo

Calcula los siguientes límites:

$\lim_{x\to+\infty} (\log_2 x^2) = +\infty$ $\lim_{x\to 0^+} (\log_{1/3}(-3x+2)) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} (\log(2x+1)) = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} (\log_{1/2}(-3x+2)) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2} (\log_2 x^2) = \log_2 2^2 = 2$

4.4. Cálculo de límites de funciones racionales. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ y $\frac{k}{0}$

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}, \text{ con } Q(a) \neq 0$$

Ejemplo → $lim_{x\to-1} \frac{2x-1}{2-x^2} = \frac{2\cdot(-1)-1}{2-(-1)^2} = \frac{-3}{1} = -3$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \infty & \text{si } grad\,(P(x)) > grad\,(Q(x)) \\ 0 & \text{si } grad\,(P(x)) < grad\,(Q(x)) \\ \frac{a}{b} & \text{si } grad\,(P(x)) = grad\,(Q(x)) \end{cases}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^3-2x^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

simplificando

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+3}{3x^2+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3}{3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{3} = \frac{-2(-\infty)}{3} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4x^2}{2x^2+x-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{2} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+5x^2}{2x^2+\sqrt{9x^4+1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{2x^2+3x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x^2}{5x^2} = \lim_{x\to-\infty}1 = 1$$

Miramos el término de mayor grado dentro de la raíz y le hacemos la raíz, en este caso: $\sqrt{9x^4} = 3x^2$. Luego miramos fuera de la raíz. Si hay términos de mayor grado, tomamos dicho término y si hay términos de igual grado, los sumamos. En nuestro caso $2x^2+3x^2 = 5x^2$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}}{3x+\sqrt{x^4-5}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$$

Existen dos casos:

c) <u>Cuando no aparecen raíces</u>: Esta indeterminación se resuelve factorizando el numerador y el denominador y simplificando.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-3} = \frac{2-2}{2-3} = \frac{0}{-1} = \mathbf{0}$$

Factorizamos el numerador: : $x^2-4x+4=0$

$$x = \frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2} = \frac{4\pm0}{2}$$

x=2 →(x-2)
x=2→(x-2)

Factorizamos el denominador: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

x=3 →(x-3)
x=2→(x-2)

d) Cuando aparecen raíces: En este caso hay que multiplicar por el conjugado y simplificar.
Ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} =$$

$$= \lim_{\boldsymbol{x \to 1}} \frac{(\boldsymbol{x - 1})(\boldsymbol{x + 1})(\sqrt{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{1})}{\boldsymbol{x - 1}} = \lim_{x \to 1} (x + 1)\left(\sqrt{x} + 1\right) = 2 \cdot 2 = \mathbf{4}$$

Indeterminación $\boldsymbol{\frac{k}{0}}$

En este caso hay que calcular los límites laterales.
Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x+3}{x^2-4} = \left[\frac{7}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{2 \cdot 1{,}999+3}{(1{,}999)^2-4} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x \to 2^+} \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{2 \cdot 2{,}001+3}{(2{,}001)^2-4} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$$

4.5. Cálculo de límites de funciones irracionales. Indeterminación $\infty - \infty$

Indeterminación $\infty - \infty$

$$\lim_{\boldsymbol{x \to \infty}} \left(\boldsymbol{f(x) - g(x)}\right) = \infty - \infty$$

Existen dos casos:

c) Cuando no aparecen radicales: Se resuelve haciendo m.c.m. Consiste en transformarla en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x+3}-\frac{x+2}{2}=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2(x^2-1)-(x+2)(x+3)}{2(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2-x^2-3x-2x-6}{2(x+3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x-8}{2x+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$$

d) Cuando aparecen radicales: Se resuelven aplicando el conjugado.
Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=[\infty-\infty]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3-x+1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}}=\frac{4}{+\infty}=0$$

4.6. Indeterminación 1^{∞}

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\mp\infty} f(x)^{g(x)}=[1^{\infty}]=e^{\lim_{x\to\mp\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}}$$

Ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{5x-2}{5x+3}\right]^{3x}=[1^{\infty}]=e^{\lim_{x\to+\infty}3x\left(\frac{5x-2}{5x+3}-1\right)}=e^0=\mathbf{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}3x\left(\frac{5x-2-5x-3}{5x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{5x+3}=\frac{-5}{+\infty}=0$$

5. Continuidad de una función. Relación con el límite de una función en un punto.

5.1. Continuidad de una función en un punto.

Definición: Decimos que una función, *f(x)*, es continua en un punto *x=a*, si se cumple:

a) Que existe $f(a)$.
b) Que existe el límite f(x), cuando x $\rightarrow a$; es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

c) Que ambos sean iguales; es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Observación: Decimos que $\nexists$ *si el resultado es* $\pm\infty$

Ejemplo

Estudia la continuidad de f(x) en el punto x=0

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & si\ x \leq 0 \\ 2x+1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

1. ¿ ∃ *f(0)* ?

f(0)= $0^2 + 2 = 2$

2. ¿∃ $\lim_{x\to 0} f(x)$?

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+2) = 0^2+2 = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x+1 = 2\cdot 0+1 = 1 \end{cases}$$

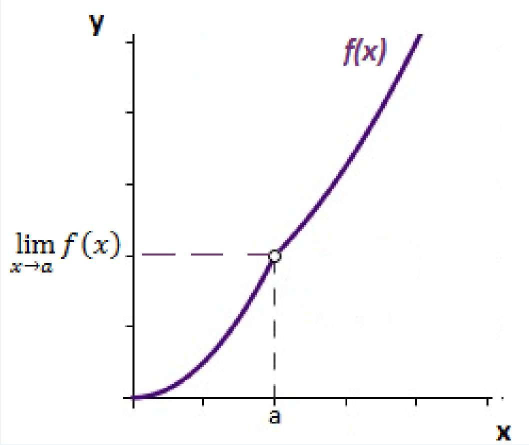
Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, entonces, $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$

Conclusión: La función **no** es continua en el punto *x=0*

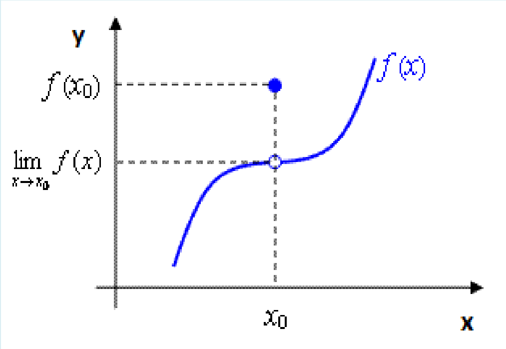
5.2. Tipos de discontinuidad.

1. *Discontinuidad evitable*: En este tipo de discontinuidad, $\exists \lim_{x \to a} f(x)$, pero ocurren alguno de los siguientes casos:

a) $\nexists f(a)$

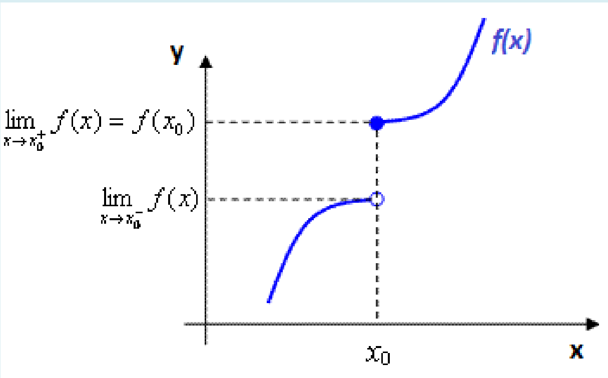


b) $\exists f(a)\ y\ \exists \lim_{x \to a} f(x), pero\ f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

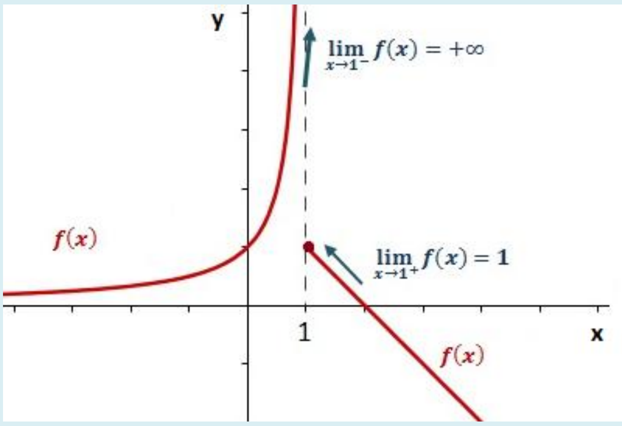


2. *Discontinuidad inevitable*: Este tipo de discontinuidad se da cuando $\nexists \lim_{x \to a} f(x)$. Dependiendo de porqué no exista distinguimos dos casos:

a) **Discontinuidad de salto finito**. Se da cuando:
$\exists \lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\exists \lim_{x \to a^+} f(x)$ pero $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$



b) **Discontinuidad de salto infinito**. Se da cuando:
$\nexists \lim_{x\to a^-} f(x)$ y/ó $\nexists \lim_{x\to a^+} f(x)$



Observación. Cuando decimos que $\nexists$ *es que sale* $\pm\infty$

5.3. Continuidad de funciones elementales.

Para estudiar la continuidad de las funciones elementales, no es más que hacer lo mismo que cuando estudiamos su dominio. Así:

- **Funciones polinómicas:** $\boldsymbol{f(x) = P(x)}$
  Son continuas en R.
  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = -x^7 + 3x^5 - 2x + 5}$
  La función f(x) es continua en **R**

- **Funciones racionales:** $\boldsymbol{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}}$
  Son continuas en todo R menos en los puntos donde se anula el denominador; es decir: R-{x/ Q(x)=0}
  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^3-2x}{5x-20}}$
  Igualamos a cero el denominador: $\boldsymbol{5x - 20 = 0}$; $\boldsymbol{x = 4}$
  La función f(x) es continua en **R - {4}**

- **Funciones irracionales:** $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[n]{p(x)}}$
  Tenemos dos casos:
  - ✓ Si *n es impar*, f es continua en R
    Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 3}}$
    La función es continua en **R**

  - ✓ Si *n es par*, f es continua en los puntos donde el radicando es igual o mayor que cero; es decir: {x/ p(x) ≥ 0}
    Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{4 - x^2}}$

Igualamos a cero el radicando: $\mathbf{4 - x^2 = 0}$; $\mathbf{4 = x^2}$; $\boldsymbol{x = \pm\sqrt{4} = \pm 2}$
Representamos los valores en la recta real para estudiar el signo:

x=-3 x=0 x=3

$-\infty$ - -2 + 2 - $+\infty$

$\mathbf{4 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5}$
$\mathbf{4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4}$
$\mathbf{4 - 3^2 = 4 - 9 = -5}$
Luego *f(x)* es continua en el intervalo: **[-2,2]**

- **Funciones logarítmicas:** $\boldsymbol{f(x) = \log_a p(x)}$
  Las funciones logarítmicas son continuas en todos los valores de x para los que p(x) es positivo; es decir: {x/ p(x)>0}
  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = \log_3(2x - 6)}$
  Igualamos a cero lo que está dentro del logaritmo: $\mathbf{2x - 6 = 0}$; $\boldsymbol{x = 3}$
  Representamos el valor en la recta real para estudiar el signo:

  x=0 x=4

  $-\infty$ - 3 + $+\infty$

  $\mathbf{2 \cdot 0 - 6 = -6}$
  $\mathbf{2 \cdot 4 - 6 = 2}$
  Luego *f(x)* es continua en el intervalo: **(3, +∞)**
- **Funciones exponenciales:** $\boldsymbol{f(x) = a^x}$
  Las funciones exponenciales son continuas en todo R
  Ejemplo→ $\boldsymbol{f(x) = 3^{x+2}}$
  La función *f(x)* es continua en **R**

5.4. Continuidad de una función en un intervalo.

Consiste en estudiar la continuidad de cada uno de los trozos, según el tipo de función elemental que sea y en los puntos conflictivos, estudiarla a través de la definición de la continuidad en un punto.

Ejemplo

Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si\ x \leq 1 \\ 2x - 1 & si\ x > 1 \end{cases}$$

- $(-\infty, 1)$ $f_1(x) = \frac{1}{x}$ $(función\ racional)$.

$Da\ problemas\ en\ x\ = 0, por\ tanto\ f_1\ (x)\ es\ continua\ en\ (-\infty, 0) \cup (0,1)$

¿Qué tipo de discontinuidad presenta en x = 0?

f(0)=$\frac{1}{0}$ *, por lo tanto en x=0 hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.*

Observación:

Cuando se presentan discontinuidades, en las funciones racionales, pueden ser de dos tipos:

- Si al sustituir *f(a)=*$\frac{k}{0}$ *, decimos que la discontinuidad es inevitable de salto infinito.*
- Si al sustituir *f(a)=*$\frac{0}{0}$ *, decimos que la discontinuidad es evitable.*

- $(1, +\infty)$ $f_2(x) = 2x - 1\ (función\ polinómica)$

  No da problemas en ningún punto, por tanto $f_2\ (x)$ *es continua en todo el intervalo (1,+* ∞)

- Continuidad en x=1

  1. ¿∃ *f(1)* ?

  f(1)=$2 \cdot 1 - 1 = 1$

  2. ¿∃ $\lim_{x\to 1} f(x)$?

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{cases}$$

  Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, entonces, ∃ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

  3. Como *f(1)*= $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, *entonces f es continua en x=1*

***Conclusión:* La función f(x) es continua en R-{0}**

6. Asíntotas de una función.

6.1. Asíntota vertical

Decimos que una función *f(x)*, tiene una asíntota vertical en ***x=a***, si se cumple:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

Ejemplo

Estudia si la siguiente función tiene asíntota vertical:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

Para ello igualamos el denominador a cero; es decir:

$$x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Por lo tanto nuestras posibles asíntotas verticales son:

$$x=1 \ \ y \ \ x=-1$$

Veamos que efectivamente son asíntotas:

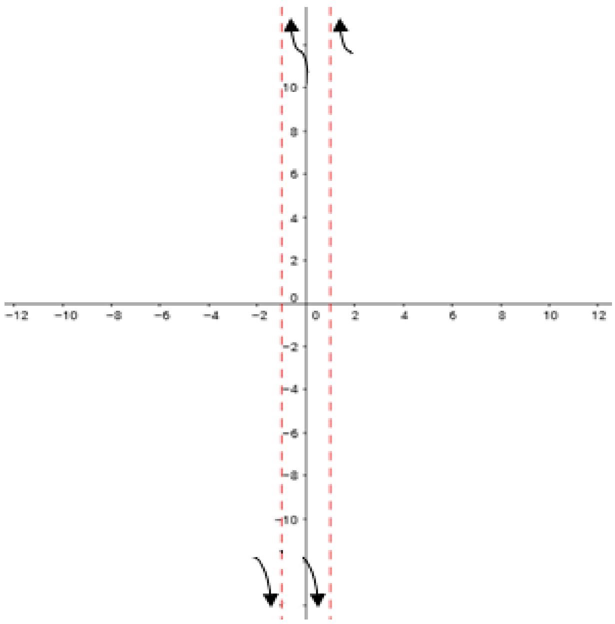
$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \frac{2\cdot(-1{,}001)}{(-1{,}001)^2-1} = \frac{-}{+} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{2x}{x^2-1} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = \dfrac{2\cdot(-0{,}999)}{(-0{,}999)^2-1} = \dfrac{-}{-} = +\infty \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \frac{2\cdot(0{,}999)}{(0{,}999)^2-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x^2-1} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = \dfrac{2\cdot(1{,}001)}{(1{,}001)^2-1} = \dfrac{+}{+} = +\infty \end{array} \right.$$

Como se cumple que $\lim_{x\to -1} f(x) = \mp$, entonces, hay una asíntota vertical en ***x = -1***

Como se cumple que $\lim_{x\to 1} f(x) = \mp$, entonces, hay una asíntota vertical en ***x = 1***

- <u>Posición relativa de la gráfica con respecto a la asíntota</u>



6.2. Asíntota horizontal

Decimos que una función *f(x)*, tiene una asíntota horizontal en ***y=b***, si se cumple:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \boldsymbol{f(x) = b}$$

Observación: Si una función tiene asíntota horizontal, entonces, no tiene asíntota oblicua.

Ejemplo

Estudia si la función siguiente tiene asíntota horizontal:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1}$$

Para ello estudiamos el $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. Si obtenemos un número, hay asíntota horizontal y en caso contrario no hay.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} 2 = 2$$

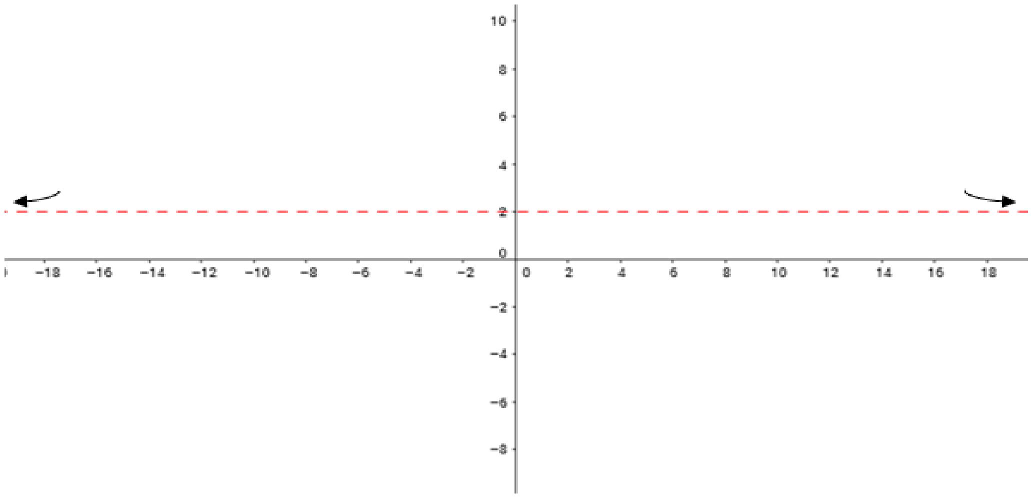
Por lo tanto la función tiene una asíntota horizontal en ***y = 2***

- <u>Posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la asíntota</u>

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} - 2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2+3-2x^2+2}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2-1} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$(la gráfica de la función está por encima de la asíntota)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3}{x^2-1} - 2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2+3-2x^2+2}{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2-1} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$(la gráfica de la función está por encima de la asíntota)

Por lo tanto,



6.3. Asíntota oblicua

Decimos que una función *f(x)*, tiene una asíntota oblicua en ***y=mx+n***, si se cumple:

$$\boldsymbol{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$\boldsymbol{n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)}$$

Ejemplo

Estudia si la función siguiente tiene asíntota oblicua:

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+3}$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x^3+1}{x^2+3}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{x(x^2+3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1}{x^3+3x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

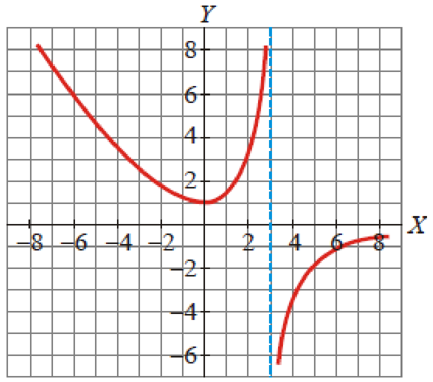
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (\frac{2x^3+1}{x^2+3} - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+1-2x^3-6x}{x^2+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-6x}{x^2+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6}{x} = 0$$

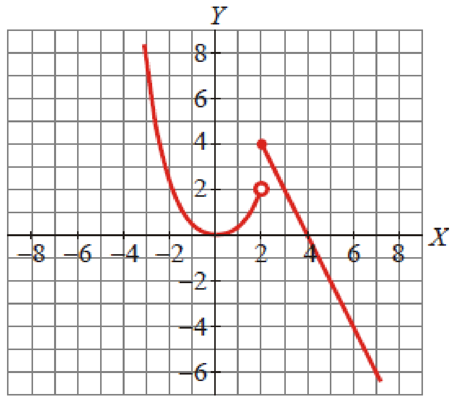
Por lo tanto la función tiene una asíntota oblicua en ***y=2x***

EJERCICIOS

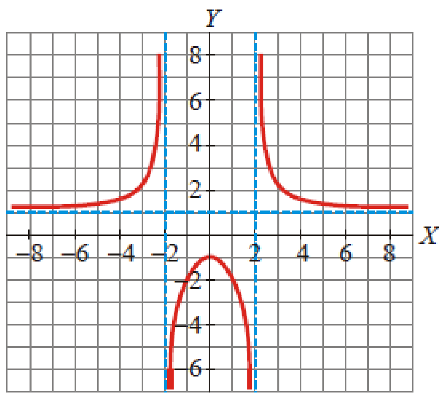
1. *A partir de la gráfica de f(x), calcula:*



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

2. *Calcula los límites indicados de la función:*

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } x < 4 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \to -3} g(x)$ c) $\lim_{x \to 4^-} g(x)$ e) $\lim_{x \to 6^+} g(x)$

b) $\lim_{x \to 6^-} g(x)$ d) $\lim_{x \to 3} g(x)$ f) $\lim_{x \to 4^+} g(x)$

3. *Encuentra el valor de:*

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x} - \sqrt{4x^2-3}\right)$ b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2-2x+4}\right)$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^2+1}{x} + \frac{3-x^2}{x+2}\right)$ d) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-2x} - \frac{2x^2+1}{2x-4}\right)$

4. *Halla el valor de los siguientes límites en el infinito:*

a) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+5x+7}{2x^2+x+1}$ c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-2x^2-10x}{-x^2+2x^3-x+3}$

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4+x-2x^3}{2x^2-3x+11}$ d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2+3x+21}{5x^2-4x^3+2x}$

f) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-6x+3}{x^2-3x+5}$ i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+x-12}{x^2-x^3+2}$

g) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-6x^3-x+1}{4x^2+5x-2}$ j) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x-6x^4+x^3}{3x+2x^2-3}$

h) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3+3x-1}{6x^2-3x^3+x}$

5. *Determina los siguientes límites:*

$a)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2-3}+2x^2}{5x+3}$ $c)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{25x^2-3}+2x}{\sqrt{1-4x^4}+3x}$

$b)\ \lim_{x \to +\infty} \frac{5x+\sqrt{9x^2-3}}{16x-2}$ $d)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{3x-5x^2+8}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{2x}}$

6. *Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-\sqrt{x+1}}$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ **c)** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ **d)** $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

e) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-x\right)$ **f)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ **g)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$ **h)** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ **j)** $\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{(x+2)(x-3)}-x\right]$ **k)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$ **l)** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

m) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ **n)** $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ **o)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$ **p)** $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

7. *Calcula los siguientes límites, aplicando el método de resolución apropiado a cada caso, dependiendo del tipo de indeterminación:*

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^3-6x^2+12x-8}$ **b)** $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+x-6}$ **c)** $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

d) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+x^2-x-1}$ **e)** $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+1}\right)$ **f)** $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ **h)** $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$ **i)** $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$

j) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ **k)** $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6}$ **l)** $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3+x}{x^2-1}-\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

8. *Dada la función:*

$$f(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$$

determina los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ d) $\lim_{x\to -2} f(x)$

9. *Resuelve los límites:*

a) $\lim_{x\to -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$ d) $\lim_{x\to 5} \frac{x^3-9x^2+15x+25}{x^3-5x^2+2x-10}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-9x+10}{3x^2-7x+2}$ e) $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-11x+14}{4x^2-16x+16}$

c) $\lim_{x\to -4} \frac{3x^3+12x^2-x-4}{x^3+7x^2+14x+8}$ f) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2+x}$

10. *Determina los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+6}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{9-x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+2x}{8-2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4-2x}{x^2-2x+1}$

11. *Calcula los siguientes límites:*

$a)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x-3}\right)^{x+3}$

$b)\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x}\right)^{\frac{x}{2}}$

12. *Calcula los siguientes límites de funciones exponenciales y logarítmicas:*

a) $\lim_{x\to+\infty} 3^{-x}$

b) $\lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{3})^{-x}$

c) $\lim_{x\to-\infty} (5)^{x+2}$

d) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{2})^{-x+3}$

e) $\lim_{x\to+\infty} (\log_{\frac{1}{5}}(x-1))$

f) $\lim_{x\to+\infty} (\log_2(2x+1))$

g) $\lim_{x\to 0^+} (\log_{\frac{1}{3}}(x+3))$

e) $\lim_{x\to e} (\ln x^2)$

13. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones, en el punto conflictivo, detectando el tipo de discontinuidad, en caso de no serlo:*

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & \text{si} \quad x\le 1 \\ 3x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x-2}{2} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<2 \\ 2x-1 & \text{si } 2\le x<4 \\ 5 & \text{si } 4\le x \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2x+1} & x\le -1 \\ x^2+2 & x>-1 \end{cases}$

14. Estudia la continuidad de las siguientes funciones y en caso de discontinuidad, determinar de qué tipo es:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\geq 0 \\ x-1 & \text{si } x<0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<0 \\ 2 & \text{si } x=0 \\ 2x-1 & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\in(-\infty,2) \\ 2x-1 & \text{si } x\in(2,\infty) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x\leq 2 \\ 2x-6 & \text{si } x>2 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x<3 \\ x^2 & \text{si } 3\leq x<4 \\ 0 & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$

g) $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1<x\leq 2 \\ x^2 & \text{si } x>2 \end{cases}$

h) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si } x\in(-\infty,1) \\ \text{Ln}\,x & \text{si } x\in[1,\infty) \end{cases}$

i) $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x\leq 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

15. Determina los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1}{x+3}$

b) $y=\dfrac{x+2}{x^2-x+12}$

c) $y=\sqrt{4+x}$

d) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$

e) $y=\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$

f) $y=\sqrt{x-5}$

g) $y=\sqrt{x^2-2x-8}$

h) $y=\sqrt{x^2-2x+8}$

16. Razona si la siguiente función es continua en $x=3$ y en $x=0$:

$$y=\begin{cases} 2^x-1 & \text{si } x\geq 3 \\ \dfrac{12}{x}+3 & \text{si } x<3 \end{cases}$$

17. Investiga si las siguientes funciones son continuas:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x+5}{2}} & \text{si } x<-1 \\ 0 & \text{si } x=-1 \\ x+1 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{2-x} & \text{si } x<1 \\ 5 & \text{si } x=1 \\ 2^{x+1}+1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

18. *Determina las asíntotas de las siguientes funciones y estudia la posición relativa de la gráfica con respecto a ellas:*

a) $f(x)=\dfrac{2-6x}{x+3}$

b) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{4x^3}{x-5}$

d) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-5x+6}$

f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{x^3-7x+1}{2x^2-5x^3}$

h) $f(x)=\dfrac{x^3-7x+1}{2x^2-8}$

i) $f(x)=\dfrac{x^3-7x+1}{2x^2+8}$

j) $f(x)=\dfrac{x^3-7x+1}{2x+8}$

19. *Halla las asíntotas de estas funciones y la posición de las ramas:*

a) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x+3}$

b) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12-8}{x^2+x-6}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x-2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2+4}$

20*. Comprueba si la recta $y=x+3$ es una asíntota oblicua de la función:*

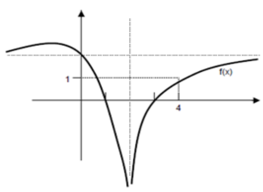
$$f(x)=\frac{x^2+5x}{x+2}$$

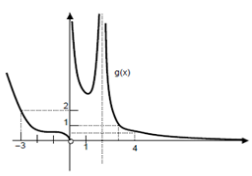
En caso afirmativo determina la posición relativa que ocupa una respecto de la otra.

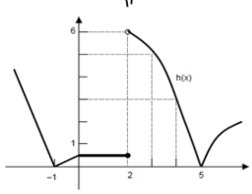
21. *Dadas las funciones cuyas gráficas aparecen a continuación:*

a) Calcular sus límites cuando $x\to 0, x\to 2, x\to 3, x\to 4, x\to +\infty$ y $x\to -\infty$.

b) ¿Cuáles son las asíntotas en cada gráfica?







ANEJO III. CUADERNILLO DE TRABAJO EN GRUPO

Cuadernillo de trabajo en grupo

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
IES PATERNA
Curso 2015/2016

Mª José Torrejón Toledo

EJERCICIOS

1. *Dada la función*

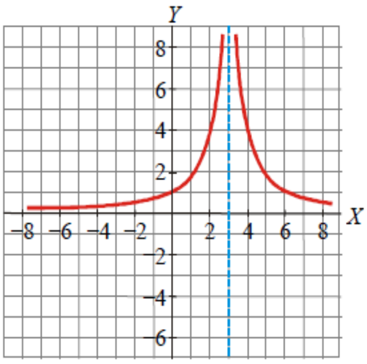
$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & si \quad x \leq 0 \\ -ax + b & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Determinar el valor de a y b para que $f(x)$ *sea continua en todo su dominio.*

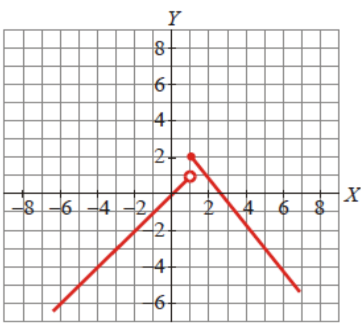
2. *Comprueba si la recta* $y = x + 3$, *es una asíntota oblicua de la función* $y = \frac{x^2+5x}{x+2}$.

En caso afirmativo, decide la posición que ocupa una respecto de la otra.

3. *A partir de la gráfica de* $f(x)$, *señala si es continua o no en* $x = 0$ *y en* $x = 3$.
En el caso de no ser continua, indica el tipo de discontinuidad que presenta.

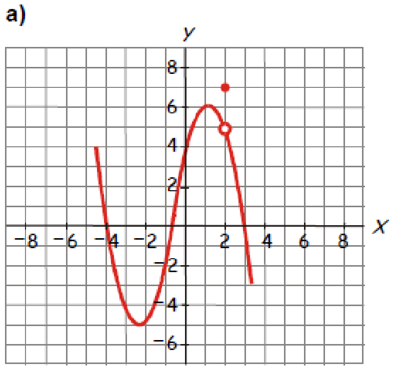


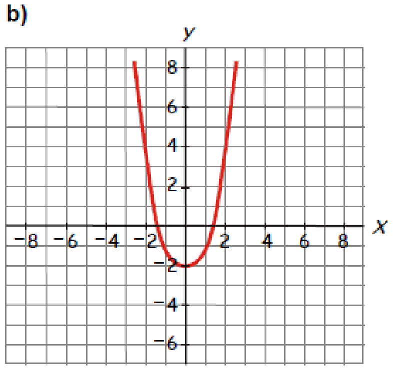
4. *La siguiente gráfica corresponde a la función* $f(x)$:



Di si es continua o no en $x = 1$ *y en* $x = 2$. *Si en alguno de los puntos no es continua, indica el tipo de discontinuidad.*

5. $¿Son\ continuas\ las\ siguientes\ funciones\ en\ x = 2?$





$Si\ alguna\ de\ ellas\ no\ lo\ es, indica\ la\ razón\ de\ la\ discontinuidad.$

6. *En una empresa se ha comprobado que el número de unidades diarias producidas depende de los días trabajados, de acuerdo con la siguiente función:*

$$N(t) = \frac{30t}{t+4} \quad (donde\ t\ viene\ expresado\ en\ días)$$

a) ¿Cuántas unidades se producen el primer día? ¿Y el décimo?

b) Representar la función N(t). ¿Qué ocurre si el período de producción se hace muy grande?

7. *Hallar una función f(x) que cumpla a la vez:*

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty\ y\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 4$$

8. *Razona.*

a) ¿Se puede calcular el límite de una función en un punto en el que la función no está definida? ¿Puede ser la función continua en ese punto? Razonar la respuesta con ejemplos.

b) ¿Puede tener una función dos asíntotas verticales? En caso afirmativo, poner algún ejemplo.

c) El denominador de una determinada función se anula en x=a. ¿Presenta necesariamente una asíntota vertical en x=a? Poner ejemplos.

d) ¿Puede tener una función más de dos asíntotas horizontales? ¿Por qué?

e) Si $\lim_{x\to 2} f(x) = 5, ¿podemos\ afirmar\ que\ f(x) es\ continua\ en\ x = 2?$

9. *Calcular cuánto debe vales a para que la siguiente función sea continua ∀R*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ 3-ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

10. *Determinar los valores de a y b para que f(x) sea continua y f(2)=3*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Ln} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \le x < \infty \end{cases}$$

11. *Determina el valor de a y b para que f(x) sea continua ∀R*

$$f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x \le -2 \\ ax+2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2+b & \text{si } x \ge 2 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -x^2+a & \text{si } x < -1 \\ x^2-4 & \text{si } -1 \le x < 2 \\ \ln(x-b) & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 1 \\ ax+3 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ bx^3-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

12. *Calcular los valores del parámetro a para que se verifiquen las siguientes igualdades:*

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{3ax^3-5x+1}{10x^3+5} = -1$ **b)** $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+ax+1} - x = 2$

13. *Completa la tabla para la función.*

$$f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$

Comprueba que su límite cuando $x \to 3$ *es* 4; *es decir*: $lim_{x\to 3}\, f(x) = 4$

¿Cuánto vale f(3)? Haz una representación de la función con Geogebra.

¿Qué diferencia hay entre las gráficas de f(x) y de y=x+1?

14. *Dibuja una función que sea continua, salvo en x=-1, que tenga un salto infinito y que tenga en x=3 un salto finito.*

15. *Dibuja una función cuyo dominio sea* $[0,+\infty)$, *y que presente un punto de discontinuidad evitable en x=4.*

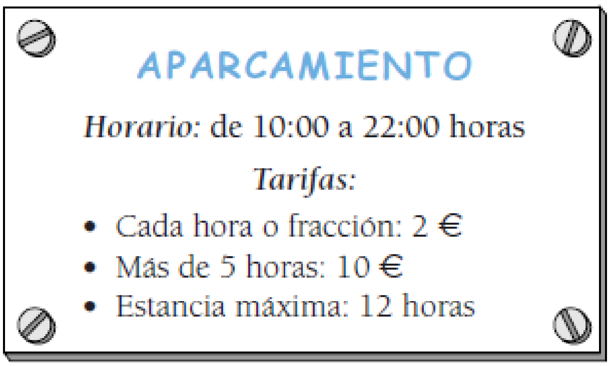
16. *Demuestra que la recta de ecuación* $y=\frac{b}{a}x$ *es una asíntota de la hipérbola* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

17. *¿Qué ocurrirá con las raíces de la ecuación* $ax^2+bx+c=0$, *si el coeficiente a tiende a cero y los coeficientes b y c son constantes, siendo b≠0?*

18. *La famosa fórmula* $M=\frac{mc}{\sqrt{c^2-v^2}}$ *se debe a Einstein, y expresa la masa M de un cuerpo en función de su velocidad v, siendo c la velocidad de la luz (300.000 km/s).*

Calcula el límite de la masa M cuando v tiende a c. A la vista de ese resultado, ¿crees que un cuerpo puede alcanzar esa velocidad?

19. *Representa mediante una función definida a trozos la tarifa de un aparcamiento.*



a) Estudia su continuidad.

b) Clasifica los puntos de discontinuidad, si los tuviera.

20. *Se ha estimado que la población de zorros en una finca se rige por la fórmula:*

$$z = 100\frac{6t^2 + 3}{2 + t^2}$$

donde z representa el número de zorros y t es el tiempo transcurrido, en meses.

El veterinario de la finca ha observado que, en los primeros seis meses, la población ha aumentado. Investiga si el crecimiento será indefinido, si tenderá a estabilizarse la población o si tenderá a disminuir.

21. *Escribe una función racional para cada caso.*

a) Que tenga $x = 2$ *y* $x = -3$ *como únicas asíntotas.*

b) Sus únicas asíntotas son $x = -2$ *e* $y = 3$.

c) Sus asíntotas son $x = 4$ *e* $y = 2x - 1$.

22. *Dibuja una función continua que cumpla que f(x) es negativa si x>3 y es positiva si x<3.*

a) ¿Cuánto vale $lim_{x\to 3} f(x)$*? ¿Y* $f(3)$*?*

b) ¿Hay un posible resultado? Razona la respuesta.

23. *Representa tres funciones que cumplan que* $lim_{x\to 3} f(x) = 5$ *y cada una de estas condiciones:*

a) f(3) = 5

b) f(3) no existe.

c) f(3) = 2

24. *Realiza la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.*

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = -2$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = 0$$

25. *Haz la gráfica aproximada de una función que cumpla las siguientes condiciones.*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$

26. *Escribe, en cada caso, un polinomio, P(x), para obtener los resultados indicados cuando calculamos el límite.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2+6x-1}{P(x)}$$

a) 4 b) 5 c) 0 d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) 1

27. *Luis y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:*

$$v(t) = \frac{\sqrt{t+3}-2}{t-1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y v(t) es el volumen de agua expresado en m^3.

Averigua hacia donde se aproxima el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1 h.

28. *Un comerciante vende camisetas a un grupo de estudiantes que están organizando un viaje de estudios. Para ello llama al proveedor para hacer el pedido de las camisetas y éste se las suministra según la función:*

$$f(n) = \frac{4{,}27n + 7{,}74}{n}$$

donde n es el número de camisetas vendidas y f(n) el precio en euros por camiseta. Sabiendo que el comerciante a su vez se las vende a los estudiantes por 8 euros la unidad. ¿Cuál es el beneficio por camiseta según las camisetas vendidas? ¿Cuántas camisetas ha de vender para obtener un beneficio superior a 3,20 euros la unidad? ¿Cuánto cobra el proveedor si el comerciante pide 10.000 unidades?

ANEJO IV: PRUEBA FINAL

IES PATERNA 1º Bachillerato
Departamento de Matemáticas Curso 2015/2016

Nombre: ______________________________ Fecha: ______________

1. Realiza los siguientes límites:

a) $lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^5-2x+1}}$

b) Siendo $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-3x}$*, calcula:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\quad \lim_{x\to-\infty} f(x),\quad \lim_{x\to 3} f(x)\ y\ \lim_{x\to -1} f(x)$$

c) $lim_{x\to+\infty}(\frac{3x^2-4x}{x+2}-3x)$

d) $lim_{x\to-\infty}(\sqrt{3x^2+2x}-\sqrt{3x^2+4x})$

e) $lim_{x\to-\infty}(\frac{-2x+5}{-2x+3})^{\frac{2x}{3}}$

f) $lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3}-x^2)$

g) $lim_{x\to+\infty}(\frac{x-1}{3x-2})^{x}$

2. Razona si existe o no el límite en cada caso. En el caso de tener límite, calcúlalo:

a)

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si\ \ x\le 1 \\ 4 & si\ \ 1<x\le 4 \\ (x-4)^2+2 & si\ \ x>4 \end{cases} \qquad en\ x=1\ y\ x=4$$

b) $f(x)=\frac{x^3+8}{x^2-4}$ $\quad en\ x=-2$

3. Calcula el valor de a y b para que la siguiente función sea continua en R:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2 & si\ \ x\le -2 \\ \frac{x+3}{4} & si\ \ -2<x\le 1 \\ bx+2 & si\ \ x>1 \end{cases}$$

4. Estudia la continuidad de la siguiente función y en caso de existir una punto de discontinuidad, indica de qué tipo es:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 5x & si \quad x < -3 \\ \frac{2x-4}{x^2-5x+6} & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{2x-8} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

5. Calcula las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ *y estudia la posición relativa de la gráfica de la misma con respecto a las asíntotas. Represéntalas.*

6. Dibuja en cada caso una función que cumpla las siguientes características:

a) Tenga una discontinuidad evitable en x=-1 y una asíntota vertical en x =1.

b) $lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, $lim_{x\to3^-} f(x) = +\infty$ y $lim_{x\to3^+} f(x) = -\infty$

c)Tenga una discontinuidad inevitable de salto finito en x=1 y una asíntota horizontal en y =4.

7. Luís y María tienen una piscina en su jardín y al llegar el verano necesitan cambiar el agua de la piscina. Abren el desagüe y la piscina se comienza a vaciar según la función:

$$v(t) = \frac{\sqrt{t+3} - 2}{t-1}$$

donde t es el tiempo de vaciado en horas y v(t), el volumen de agua expresado en m^3.

Averigua cuál será el volumen de la piscina cuando el tiempo se aproxima a 1h.

ANEXO XXIII. UNIDAD DIDÁCTICA DESARROLLADA EN EL AULA.

Desarrollo y valoración de la unidad

Antes de comentar cómo ha sido mi intervención en el aula, me gustaría reflejar que sólo he dispuesto de tres sesiones para desarrollar una parte de la unidad didáctica que mi tutor del centro había acordado conmigo, por lo tanto, no he podido llevar a cabo la planificación prevista: ni la detección de ideas previas, ni el proceso de evaluación, ni tampoco las estrategias metodológicas.

Descripción de la secuenciación de las actividades desarrolladas

La parte de la unidad didáctica que he tenido que desarrollar dentro del aula ha sido la continuidad de una función y el cálculo de las asíntotas. Para ello mi tutor me ha dejado tres sesiones:

- **SESIÓN 1. Día 5 de abril**

Durante esta sesión he llevado a cabo la explicación de la Continuidad de una función en un punto; así como los Tipos de Discontinuidad.

Para ello les he entregado las hojas correspondientes a este punto, del cuadernillo de teoría que yo había elaborado para desarrollar la unidad completa, donde aparecen los contenidos teóricos del apartado, acompañados de ejemplos. La metodología que he llevado a cabo es tradicional, en cuanto a que considero que estos alumnos primero necesitan tener una explicación clara de los contenidos, donde se haga hincapié en aquellos puntos susceptibles a que se cometan errores y a que argumenten los resultados, con el lenguaje y simbología acorde a su nivel.

En todo momento les voy preguntando a los alumnos si están entendiendo la teoría y a la hora de resolver los ejemplos, les voy pidiendo ayuda para que me vayan guiando en la resolución del mismo; ya que aunque esté llevando una metodología tradicional, quiero hacerles partícipes en todo momento.

Al finalizar la sesión, les he mandado dos ejercicios sobre el estudio de la continuidad para que los resuelvan en casa, a pesar de que mi tutor no tiene esta costumbre, pero de este modo quiero que los alumnos practiquen algunos ejercicios por sí solos y que no dejen la materia para que en las clases particulares, días antes del examen, les resuelvan todas las dudas.

- **SESIÓN 2. Día 7 de abril**

Al comenzar la sesión me encuentro con que es mi tutor quien va sacando a los alumnos que él considera oportunos, para corregir los ejercicios y además interviene dándole orientaciones al alumno mientras está en la pizarra. Una vez terminada la corrección, me pide que continúe con las explicaciones, de manera que comienzo a explicarles la continuidad de las funciones elementales y el estudio de la continuidad de una función en todo su dominio.

La metodología sigue siendo la misma que en la sesión anterior; pero en este caso no les mando ejercicios para hacer en casa, porque el tiempo no me lo permite. Al finalizar la clase, mi tutor me dice un tipo de ejercicio típico, que quiere que les resuelva al alumno en la próxima sesión y le comento que yo ya tenía previsto ver ese tipo de ejercicios con los alumnos.

- **SESIÓN 3. Día 8 de abril**

Al comienzo de esta sesión, al igual que en la anterior, me encuentro con que mi tutor les plantea a los alumnos un ejemplo del ejercicio típico que me pidió en la sesión anterior que les planteara yo. El ejercicio consiste en calcular una incógnita sabiendo que la función tiene que ser continua en todo su dominio.

Una vez hecho el ejercicio, me pide que les plantee otro del mismo tipo y luego me pide que les explique las asíntotas de una función, pero obviando las asíntotas oblicuas.

Una vez terminada estas tres sesiones, me hubiese gustado llevar a cabo la planificación que yo había previsto, basada en el trabajo en grupos, uso de las Tics y de juegos, para que los alumnos trabajasen problemas de mayor dificultad y profundización y reforzaran los conocimientos, pero mi tutor de prácticas no me da la oportunidad. Además resulta imposible en vista de que el examen estaba previsto para el martes de la semana próxima; con lo que disponen de una única sesión antes de la prueba final.

Quiero hacer mención a la siguiente sesión, aunque yo no haya intervenido en ella, porque durante la misma, el profesor estuvo repasando los contenidos visto a lo largo del tema, sobre todo el cálculo de límites indeterminados. Además, una alumna le pregunta sobre una duda que tiene del estudio de la continuidad de una función en todo su dominio y en lugar de dejar que sea yo quien se la resuelva, empieza a explicársela él, pero a su manera, generándole dudas a los alumnos, porque yo les he explicado dicho estudio siguiendo unos pasos y él los obvia y sólo se limita a hablar de la continuidad en los puntos conflictivos.

Análisis de los resultados de la evaluación

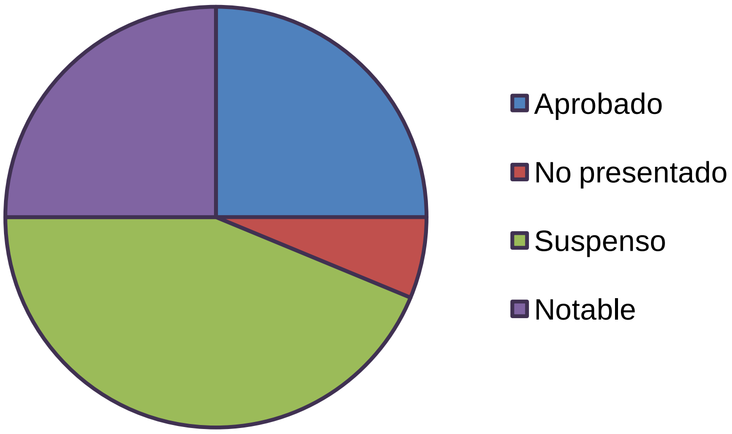
Como ya he reflejado, no he podido llevar a cabo un proceso de evaluación de mi unidad, por tanto no puedo realizar un análisis de los resultados de la misma.

Aunque sí me gustaría hacer mención a los resultados obtenidos en el examen que les puso mi tutor y sobre el que no he podido participar para su elaboración, ni su posterior corrección, así como una comparación de dicho examen con el que yo tenía previsto al finalizar la unidad (*Véase el Anexo XI de la unidad didáctica prevista*).

- **Resultados obtenidos**

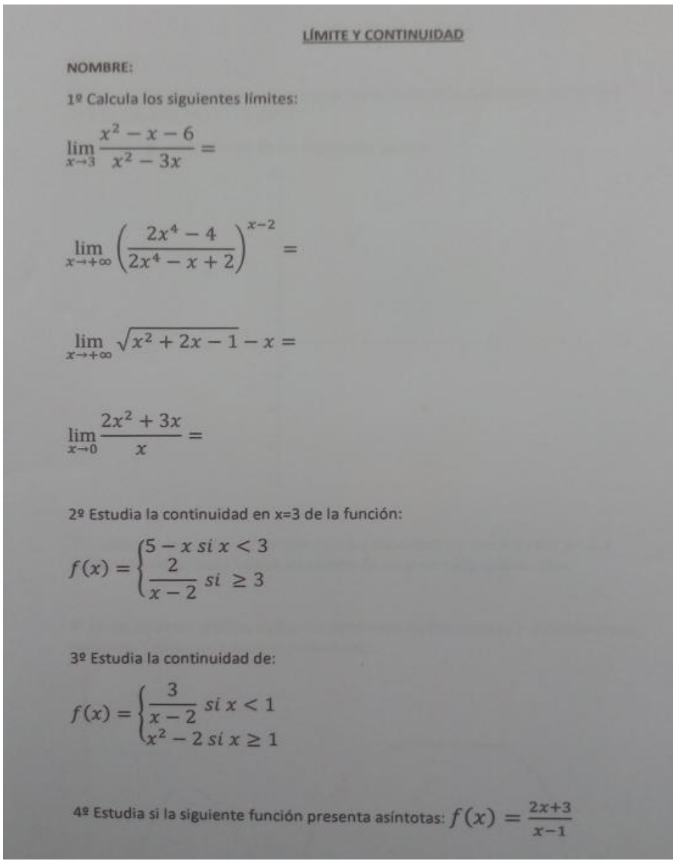
A la hora de dar los resultados obtenidos, se limita a decir la nota de los alumnos, sin dedicar tiempo a comentar el examen, ni corregirlo en la pizarra junto con los alumno, para que detecten los errores e intentar solucionar sus posibles dudas.

Alumno/a	Calificación del examen	Calificación Nominal
BCC	5	Aprobado
CAD	3,5	Suspenso
CSR	2,5	Suspenso
CGA	5	Aprobado
COD	5	Aprobado
CBS	7	Notable
DDA	3	Suspenso
GRJ	No presentado	No presentado
JPM	1,75	Suspenso
MPR	3,75	Suspenso
MPA	7	Notable
PMJ	4,5	Suspenso
PME	4,5	Suspenso
PGR	5	Aprobado
QBM	7	Notable
RMI	8,5	Notable



- **Comparación de los exámenes**

El examen que mi tutor le ha planteado al grupo consta de 4 preguntas: una sobre el cálculo de límites, donde cada uno de ellos se resuelve por un tipo de indeterminación diferente, otra donde tienen que estudiar la continuidad de una función en un punto, otra sobre el estudio de la continuidad de una función a trozos en todo R y por último un ejercicio sobre el cálculo de asíntotas.



LÍMITE Y CONTINUIDAD

NOMBRE:

1º Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^2-3x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4-4}{2x^4-x+2}\right)^{x-2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-x=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+3x}{x}=$$

2º Estudia la continuidad en x=3 de la función:

$$f(x)=\begin{cases}5-x \; si \; x<3\\ \dfrac{2}{x-2} \; si \; \geq 3\end{cases}$$

3º Estudia la continuidad de:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x-2} \; si \; x<1\\ x^2-2 \; si \; x\geq 1\end{cases}$$

4º Estudia si la siguiente función presenta asíntotas: $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

Examen sobre la unidad de Límite de una función, realizado por 1º Bachillerato de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

Dicho examen, difiere del que yo tenía previsto ponerles a los alumnos, en el que no sólo se les pide hacer meros cálculos, sino que además tienen que reflexionar y profundizar sobre los aspectos teóricos vistos en el aula, así como extrapolarlos y aplicarlos a una situación de la vida real, mediante la resolución de un problema.

A diferencia del examen que les ha puesto mi tutor, el mío consta de siete ejercicios, algunos de los cuales son de mayor dificultad, pero que se ajustan a la planificación que yo quería llevar a cabo, los objetivos que quería que alcanzasen ; así como las competencias que pretendía que adquiriesen.

Uno de los ejercicios que incluye mi examen es el del cálculo de varias incógnitas, sabiendo que la función debe ser continua en todo su dominio y me sorprende que mi tutor no lo incluya en su examen, en vista de su petición de que yo viera ese tipo de ejercicios en el aula.

En lo que respecta al cálculo de asíntotas, para mí es importante que el alumno estudie la posición relativa de la función con respecto a la asíntota, para después representar las ramas asintóticas y así poder esbozar de forma aproximada la gráfica de la función. Sin embargo, mi tutor sólo pide el cálculo de las mismas, obviando incluso el estudio de las asíntotas oblicuas.

Por último he incluido un problema sobre una situación que puede darse en la realidad y sobre la que se puede ver la aplicabilidad de los límites.

Dificultades y problemas detectados

A pesar del poco tiempo que he dispuesto para trabajar con los alumnos y en vista del contenido que he desarrollado dentro del aula, he detectado una serie de dificultades y errores:

Por un lado, había alumnos que tenían problemas para elegir qué trozo de la función debían tomar para el cálculo de los límites laterales, a la hora de estudiar la continuidad de dicha función definida a trozos. Una de las causas a las que se debe esta dificultad, es al hecho de que no tienen claro la representación de los intervalos mediante desigualdades. Este problema se acrecentaba aún más cuando la función a trozos venía dada del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & si \quad x \neq 3 \\ \\ x^2+3, & si \quad x = 3 \end{cases};$$

porque tenían dificultades para pasar el conjunto $\{x: x \neq 3\}$ a forma de intervalo $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$.

En cuanto a los tipos de discontinuidad, la que más trabajo les costó asimilar era la del tipo evitable, ya que tenían conflictos con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite; pero sobre todo cuando este tipo de discontinuidad venía dado por la no existencia de la función en el punto.

A la hora de estudiar la continuidad de una función en todo R, algunos alumnos tenían dificultades para detectar si la función era o no continua en el punto conflictivo de una función racional, así por ejemplo en el ejercicio 3 del examen que les puso el profesor, en el que se les pide que estudien la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2} & si \quad x < 1 \\ \\ x^2-2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Al estudiar el punto conflictivo de la función racional, les sale $x = 2$, pero no caen en la cuenta que ese trozo de función está definida en el intervalo $(-\infty, 1)$, con lo cual el 2 no pertenece a dicho intervalo y por tanto la función sí es continúa en dicho punto.

En el cálculo de asíntotas se detectan varios tipos de dificultades, sobre todo a la hora de determinar la posición relativa de la gráfica de la función con respecto a la asíntota y representar las ramas asintóticas, quizás porque no conciben bien la idea de límite en el infinito y porque tienen dificultades para pasar de un sistema de representación a otro; en este caso para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica.

Este tipo de dificultad suele ser común según Vrancken, Gregorini, Engler, Müller & Hecklein (2006), quienes realizaron un estudio con el objetivo de detectar las dificultades relacionadas con el concepto de límite y sus diferentes representaciones.

Cuestionamiento de la unidad y de la teoría que la sustenta

Como ya bien he reflejado con anterioridad, no he podido desarrollar la unidad didáctica en su totalidad, ni según las estrategias metodológicas previstas, por lo que se me hace difícil el cuestionamiento de la misma, así como de la teoría que la sustenta. Es por eso que voy a centrarme en cómo ha llevado mi tutor el tratamiento de dicha unidad en el aula y los aspectos que yo mejoraría.

En primer lugar, considero que la temporalización llevada a cabo no ha sido lo más adecuada, ya que no ha profundizado en los contenidos, ni los ha reforzado, a pesar de que la enseñanza del concepto de límite de una función, supone uno de los mayores retos de la educación actual y su aprendizaje conlleva una serie de dificultades relacionadas con un nivel de pensamiento de orden superior como la abstracción, el análisis, demostraciones, etc. Para los alumnos suele ser un concepto árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan con facilidad y, por lo tanto, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender (Blázquez & Ortega, 2000). Además es uno de los conceptos más importantes del Análisis, ya que a partir del mismo se introducen otros como la continuidad, derivada, integral, etc., por tanto se hace imprescindible afianzar su conocimiento.

Por otro lado se deberían considerar los obstáculos con los que se pueden encontrar los alumnos, porque es vital para detectar los posibles errores que pueden conllevar, es por eso que a la hora de tratar los contenidos en las aulas, se deberían incluir una serie de actividades que promuevan el diagnóstico, detección, corrección y superación de errores, fomentándose así la actitud crítica de los alumnos con respecto a sus propias elaboraciones.

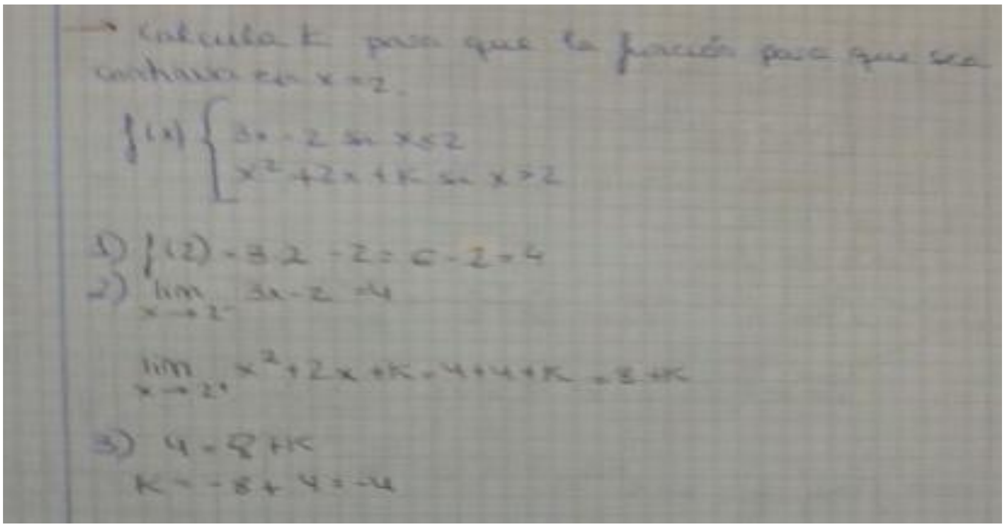
Otros de los puntos a cuestionar sobre mi tutor es que sólo ha tratado el concepto de límite desde el punto de vista algebraico, sin vincular este tipo de representación con otra de tipo gráfico; a diferencia de lo que yo tenía previsto en mi unidad, donde se ha dado importancia a tratar el concepto de límite desde distintos tipos de representaciones (numérica o algebraicamente, gráficamente o mediante una tabla de valores). De muchos estudios se desprenden como conclusión que en la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, generalmente se trabajan las representaciones algebraicas, lo cual dificulta la detección de los errores; mientras que las representaciones gráficas se usan de forma muy limitada, cuando en realidad "se debe favorecer la integración de las tres representaciones sobre el límite funcional: gráfica, numérica y simbólica" (Vrancken et al., 2006).

Por último quisiera cuestionar la metodología tradicional llevada a cabo en el aula, tanto por mi tutor como por mí, ya que no tuve otra alternativa; aunque de los cuestionarios que pasé a los alumnos y cuyos resultados están recogidos en una de las evidencias anexas, he podido conocer que los alumnos no cambiarían la metodología hasta ahora llevada en el aula, quizás porque están acostumbrados al modelo tradicional y no conciben otros modelos nuevos, por miedo al cambio y su adaptación.

También en mi caso me cuesta erradicar el modelo tradicional por completo, de ahí que en mi propuesta para desarrollar la unidad didáctica haya combinado la metodología tradicional con el trabajo en grupo, el aprendizaje cooperativo, el uso de las Tics; así como de juegos; es decir, con estrategias metodológicas más innovadoras y motivadoras, que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Material elaborado por el alumno

Debido al poco tiempo del que he dispuesto para trabajar con los alumnos, sólo puedo ofrecer como material, alguno de los ejercicios que resolvieron conmigo en el aula, sobre el estudio de la continuidad; así como el único ejercicio que les pude poner sobre el cálculo de asíntotas y el estudio de la posición relativa de la función con respecto a la misma.



Calcula k para que la función para que sea continua en x=2.

$$f(x)\begin{cases} 3x-2 & \text{si } x<2 \\ x^2+2x+k & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

1) $f(2) = 3\cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$

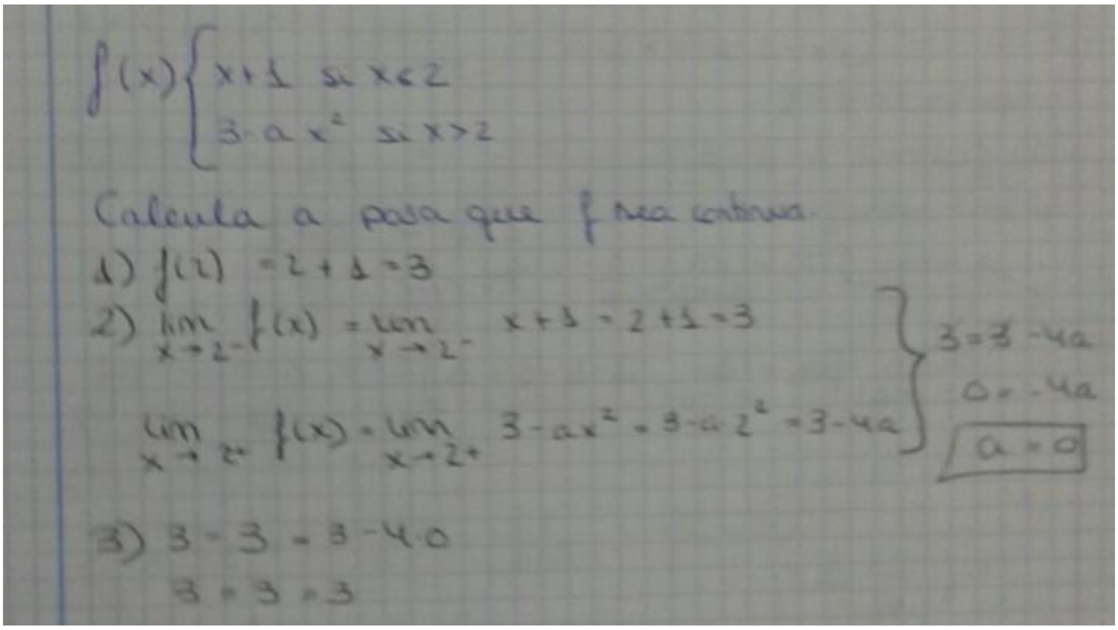
2) $\lim_{x\to 2^-} 3x-2 = 4$

$\lim_{x\to 2^+} x^2+2x+k = 4+4+k = 8+k$

3) $4 = 8+k$

$k = -8+4 = -4$

Ejercicio 1 realizado por una alumna sobre el cálculo de una incógnita sabiendo que la función ha de ser continua en todo su dominio.



$f(x)\begin{cases} x+1 & si\ x<2 \\ 3-ax^2 & si\ x>2 \end{cases}$

Calcula a para que f sea continua

1) $f(2) = 2+1 = 3$

2) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x+1 = 2+1 = 3$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3-ax^2 = 3-a\cdot 2^2 = 3-4a$

$3 = 3-4a$

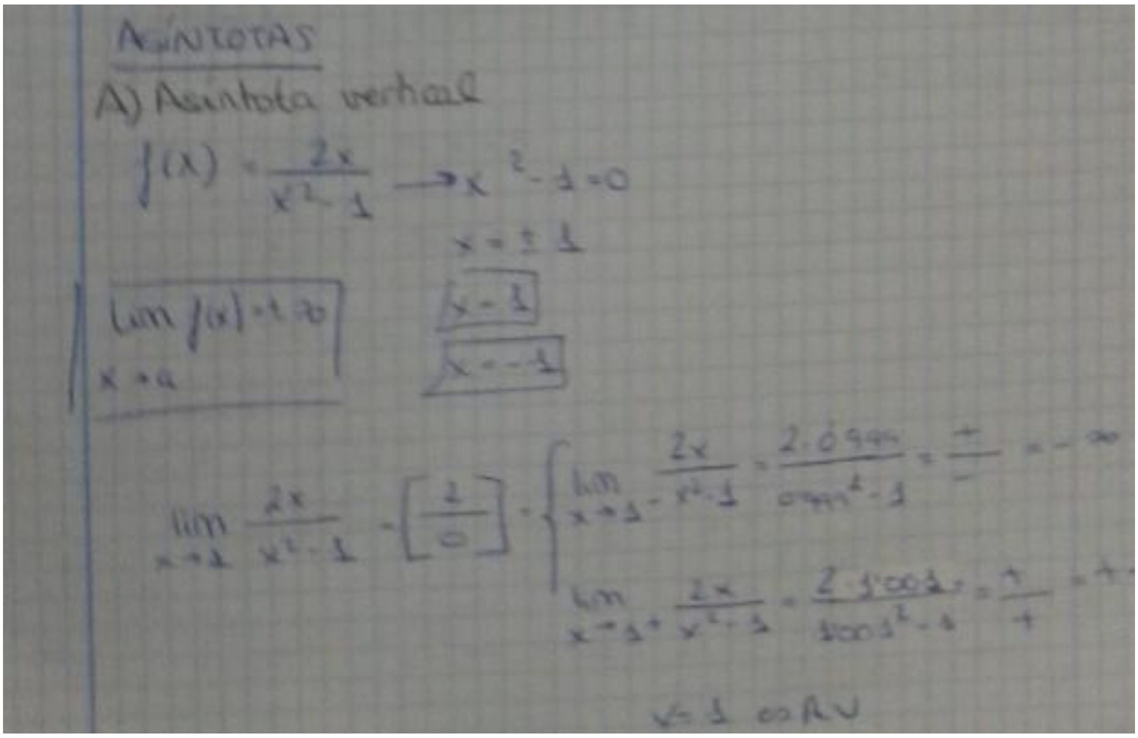
$0 = -4a$

$\boxed{a=0}$

3) $3 = 3 = 3-4\cdot 0$

$3 = 3 = 3$

Ejercicio 2 realizado por una alumna sobre el cálculo de una incógnita sabiendo que la función ha de ser continua en todo su dominio.



ASÍNTOTAS

A) Asíntota vertical

$f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \longrightarrow x^2-1=0$

$x = \pm 1$

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty}$

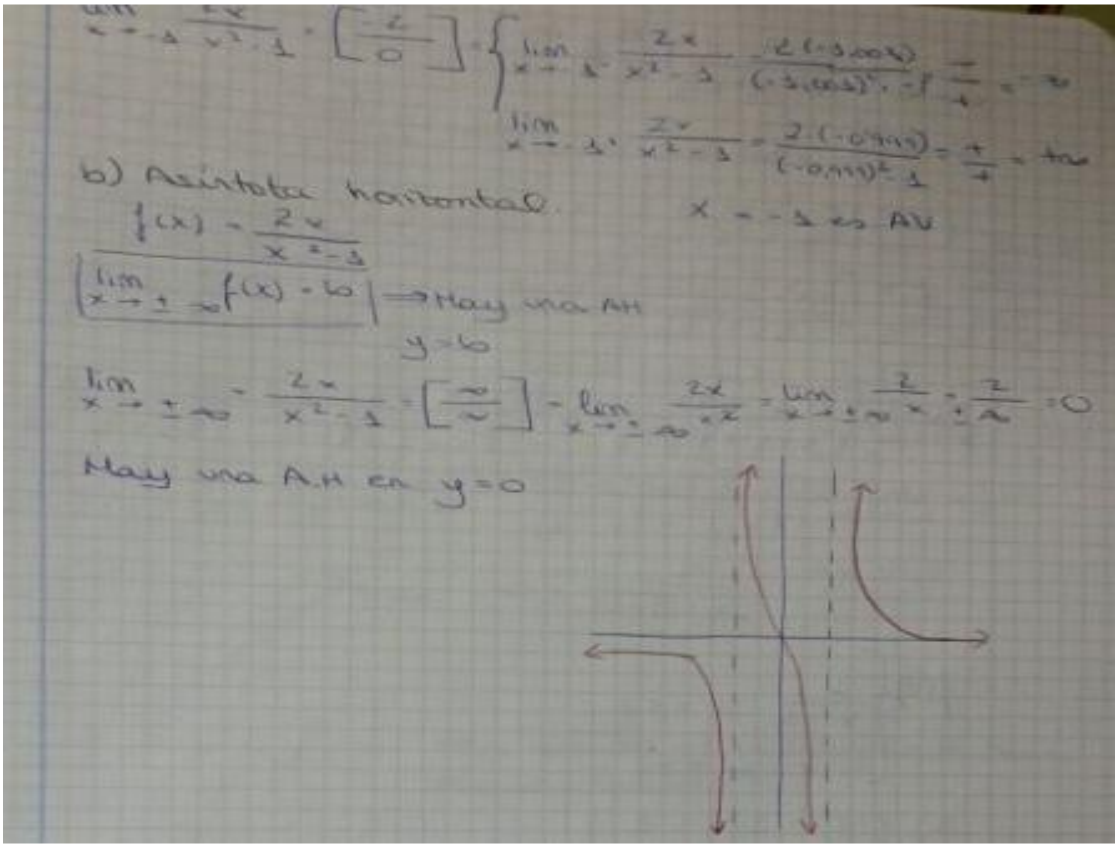
$\boxed{x=1}$

$\boxed{x=-1}$

$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{2}{0}\right] = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2\cdot 0'999}{0'999^2-1} = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2\cdot 1'001}{1'001^2-1} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$

$x=1$ es AV

Ejemplo visto en clase sobre el cálculo de las asíntotas de una función.



Ejemplo visto en clase sobre el cálculo de las asíntotas de una función (*continuación*).

Bibliografía

Blázquez, S. & Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *En el futuro del cálculo infinitesimal. México: Grupo Editorial Iberoamérica*, 331-354.

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D.; Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA. Sociedad Argentina de Educación Matemática (SOAREM)*. Año 8, Nº 29, 9-19. Recuperado de www.soarem.org.ar

ANEXO XXIV. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO PROPORCIONADO AL ALUMNADO EN LAS PRÁCTICAS.

1. Contextualización

El presente documento trata sobre una evidencia llevada a cabo en el aula de 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Se basa en la realización de un cuestionario inicial para conocer algunos datos interesantes del alumnado, como pueden ser datos personales, grado de satisfacción y motivación por la materia, conocer si disponen de ciertos recursos en casa, como ordenador y conexión a internet, etc.

Dicho cuestionario, estaba previsto entregárselo a los alumnos al comienzo de la unidad didáctica que había acordado con mi tutor de prácticas que iba a impartir en el aula, pero en vista de la problemática con la que me he encontrado durante el desarrollo de mis prácticas, en cuanto a que no pude desarrollar con normalidad dicha unidad, he decidido proporcionárselo a los alumnos en mi última semana de prácticas, porque considero que podrían proporcionarme información relevante de cara a la realización de propuestas de mejora futuras.

2. Justificación teórica

En todo proceso de enseñanza-aprendizaje se hace necesario investigar desde una perspectiva evaluativa y formativa, que contribuya a la mejora de la calidad docente y a la potenciación de la intervención orientadora en los centros escolares; luego para ello se hace necesario recoger suficiente información que nos permita actuar sobre la problemática y en contextos reales, con posterioridad (Méndez Garrido, 2004).

El cuestionario es un idóneo instrumento de recogida de información, ya que según Hayman (1984:106, citado en Méndez Garrido, 2004) permite "obtener opiniones, conocer actitudes, recibir sugerencias para el mejoramiento de la instrucción y lograr la obtención de otros datos semejantes". Por tanto nos puede dar información relevante sobre lo que hacen, opinan o piensan los estudiantes a través de una serie de preguntas realizadas por escrito y que pueden ser respondidas sin la presencia del encuestador.

Además, los cuestionarios nos ofrecen las siguientes ventajas, de acuerdo con HopKins (1989, citado en Aguaded et al., 2001):

- Son fáciles de realizar.
- Fáciles de valorar.
- Comparan directamente grupos e individuos.

- La retroalimentación sobre actitudes, adecuación de recursos, adecuación del profesor, ayuda, preparación para la siguiente sesión y datos cuantificables.

Por otro lado, se hace necesario tener en cuenta determinados inconvenientes que nos ofrecen los cuestionarios para intentar que interfieran lo menos posible en el proceso, como son según Hopkins (1989, citado en Aguaded et al., 2001):

- El análisis de la información requiere bastante tiempo.
- Se necesita gran preparación para conseguir preguntas claras y relevantes.
- Es difícil conseguir preguntas que exploren en profundidad.
- La eficacia depende mucho de la capacidad lectora.
- Los sujetos pueden tener reparo a la hora de contestar con sinceridad e intentarán dar respuestas "correctas".

Para ello, se pretende que cada una de las preguntas que integran el cuestionario tenga un sentido y una finalidad; de manera que me aporten información privilegiada de cara a una futura intervención en el aula o reflexión sobre una propuesta de mejora.

Por un lado, quiero conocer datos de identificación del alumno, como son su nombre y apellidos, edad, nacionalidad (me resulta relevante, porque así puedo detectar si un alumno es inmigrante y requiere la aplicación de medidas de atención a la diversidad) y centro del que provienen con anterioridad (para conocer si un alumno ha estudiado siempre en algún centro del pueblo o por el contrario, ha estudiado en centros de otra localidad, con anterioridad).

Por otro lado, me interesa conocer datos del entorno del alumno, como pueden ser el nivel de estudios y profesión de los padres o tutores del alumno o si disponen o no de ordenador y conexión a internet en sus casas, porque muchos estudios han mostrado que el nivel académico que alcanza un alumno o una alumna depende fundamentalmente de la posición económica y social de su familia, lo que significa que si un estudiante proviene de una familia desestructurada o en exclusión social es muy probable que fracase académicamente, mientras que aquellos estudiantes con un nivel de vida medio-alto difícilmente lo harán. Precisamente por esta razón cada vez son más los padres que prefieren ofrecer un *capital cultural* a sus hijos. El éxito o nivel académico de un estudiante se mide principalmente por la cantidad de libros que posea en su casa, como muestra Ducajú (2010):

El último" Informe PISA 2009", centrado en los estudiantes de 15 años de 65 países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), demuestra que en las casas donde hay libros, los jóvenes comprenden mejor lo que leen y cuantos más volúmenes hay en sus estantes, mayor es el éxito escolar.

Por último, me parece interesante conocer el grado de satisfacción, así como la motivación del alumno por la asignatura.

3. Desarrollo y resultados obtenidos.

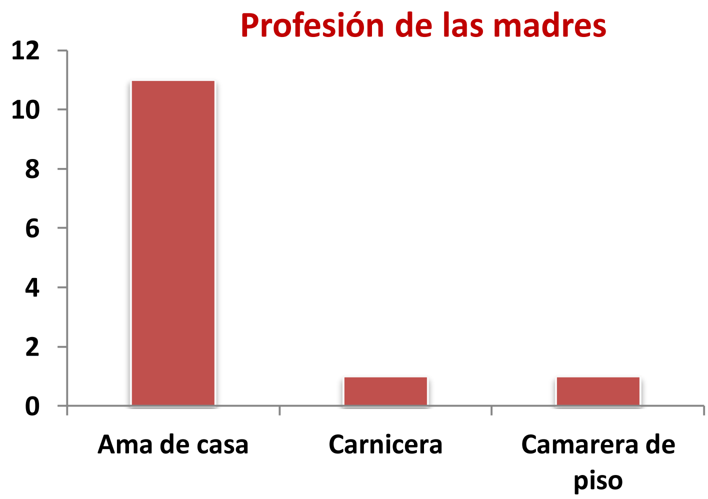
El cuestionario es entregado a los alumnos al finalizar la clase, para que lo cumplimenten en casa y lo traigan en la próxima sesión. Para evitar problemas de comprensión, se les lee las preguntas para dejar claro qué se les pide en cada una de ellas y además se les informa que dicho cuestionario tiene carácter voluntario; así como la finalidad del mismo.

Una vez llevada a cabo la recogida de los cuestionarios (ha sido entregado por 13 alumnos de los 16 que conforman la clase) y analizadas las respuestas, caben destacar los siguientes resultados:

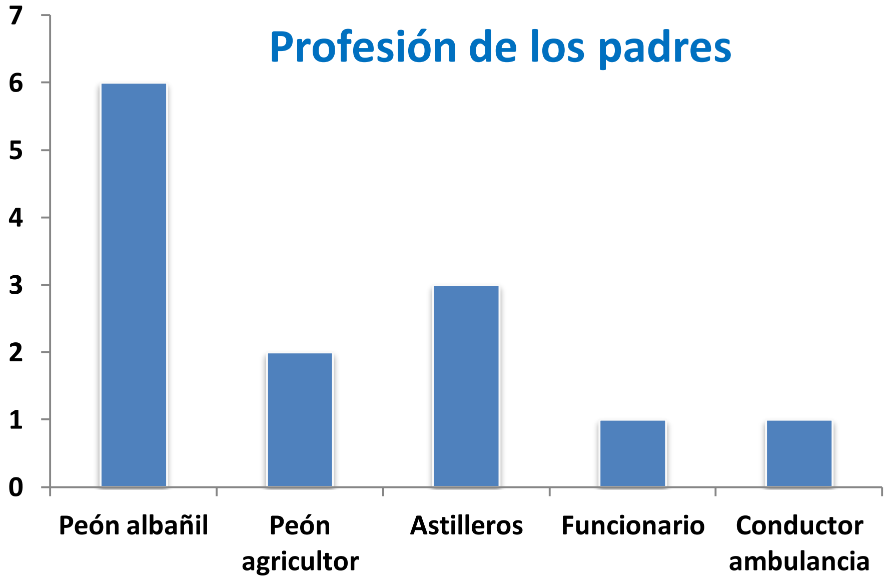
- En cuanto al nivel de estudios de los padres y de las madres, todos respondieron que tienen el Graduado Escolar ó Primaria, salvo una alumna cuyo padre tiene estudios de Magisterio y Psicopedagogía y la madre el Grado Superior de Administrativo.
- Por otro lado, en cuanto a la profesión de los mismos, en la mayoría de los casos, la profesión de los padres suele ser peón de albañil, peón agricultor ó trabajan en astilleros; excepto la alumna cuyo padre tenía estudios superiores, quien trabaja como funcionario. En el caso de las madres, la mayoría son amas de casa, salvo algunas excepciones, cuyas madres son carnicera ó camarera de piso en hoteles.

  De aquí se deduce que el nivel económico de las familias es bajo-medio y la mayoría no tiene estudios superiores, incluso en algunos casos carecen de Graduado Escolar.

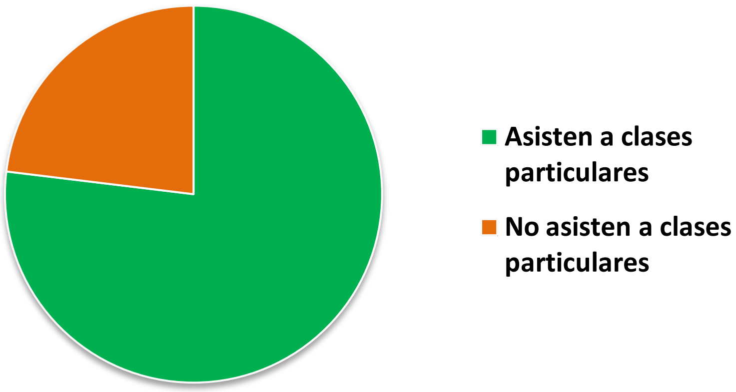
Profesión Madre	fi
Ama de casa	11
Carnicera	1
Camarera de piso	1
Total	**13**



Profesión Padre	fi
Peón albañil	6
Peón agricultor	2
Astilleros	3
Funcionario	1
Conductor ambulancia	1
Total	**13**



- La mayoría de los estudiantes, salvo tres alumnas, asisten a clases particulares, siendo algunas de sus razones las siguientes: porque necesitan ayuda para aprender los pasos y llevarlos a cabo, porque les cuesta entender la materia, para preguntar dudas existentes antes del examen, porque se les olvidan las explicaciones e ir a las clases les ayudan a repasarlas, etc.
  El hecho de asistir a clases particulares es algo muy común y cada vez más generalizado entre los alumnos, no sólo de este centro, sino también de los alumnos del colegio público de Educación Primaria, del pueblo.



- Sólo una alumna considera que su materia preferida es Matemáticas, sin embargo a la pregunta de cuáles son las asignaturas más difíciles, sólo dos alumnas ponen que son las Matemáticas. El resto de alumnos consideran que Inglés o Lengua son las asignaturas más difíciles para ellos porque carecen de vocabulario y les cuesta entender la gramática. Mientras que Economía, Historia o Educación Física son las preferidas porque consideran que se les dan mejor, les resultan fáciles de comprender ó les gusta el deporte, en el caso de Educación Física.
- Ningún alumno cambiaría la metodología llevada a cabo en el aula, incluso una alumna aclara que el problema que ella tiene con la materia, es simplemente suyo.
- Ante la última pregunta del cuestionario, que quedaba un poco abierta para que el alumnado pusiera aquellas cuestiones que considerasen oportunas, sólo dos alumnas las responden: una manifiesta que a veces el profesor de la materia les pone los exámenes de forma precipitada y la otra añade que está muy contenta con el profesor y el centro.

- Todos los alumnos disponen de ordenador y conexión a internet en casa, salvo una alumna, que dispone de ordenador pero no de conexión a internet.
- Todo el alumnado ha estudiado siempre en centros del pueblo:
  - Educación Infantil en el C.E.I. "El Llano".
  - Educación Primaria en el C.P. Perafán de Ribera.
  - Educación Secundaria (ESO) en el I.E.S. Paterna.
- Sólo dos alumnos han repetido con anterioridad y en ambos casos ha sido en 2º de Primaria.
- Con respecto a la cuestión número doce, en la que se les pregunta si saben qué se les va a exigir en la asignatura, sólo un alumno responde que no lo tiene claro, mientras que el resto responden que sí, pero sin dar una explicación más detallada, salvo dos alumnas que responden que tienen claro que no pueden olvidar los temas anteriores y que deben llevar a la práctica los contenidos, mediante la realización de las actividades.

4. Anexos

4.1. Cuestionario inicial para conocer al alumno.

MÁSTER EN PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

UCA
Universidad de Cádiz

Cuestionario inicial para conocer al alumnado

El presente cuestionario consta de una serie de preguntas a través de las cuales se pretende conocer un poco mejor al alumnado y recabar información de interés para el desempeño de la práctica docente en el centro. Así pues, la información que se recoja del mismo será meramente confidencial.

1. Nombre y Apellidos: ....

2. Edad: .... Curso/Nivel: ....

3. Lugar de nacimiento: .... Lugar de residencia: ....

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: ....

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: ....

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: ....
....

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: ....
....

8. ¿Cómo te ha ido el último curso con la asignatura de matemáticas? ¿Tienes pendiente las matemáticas de años anteriores? ....
....

9. Tus asignaturas preferidas son: ....
¿Por qué? ....

10. Las asignaturas más difíciles para ti son: ....
¿Por qué? ....

11. ¿Qué opinas de la asignatura de matemáticas? ¿Cambiarías algo de la metodología llevada a cabo hasta ahora? ....
....
....

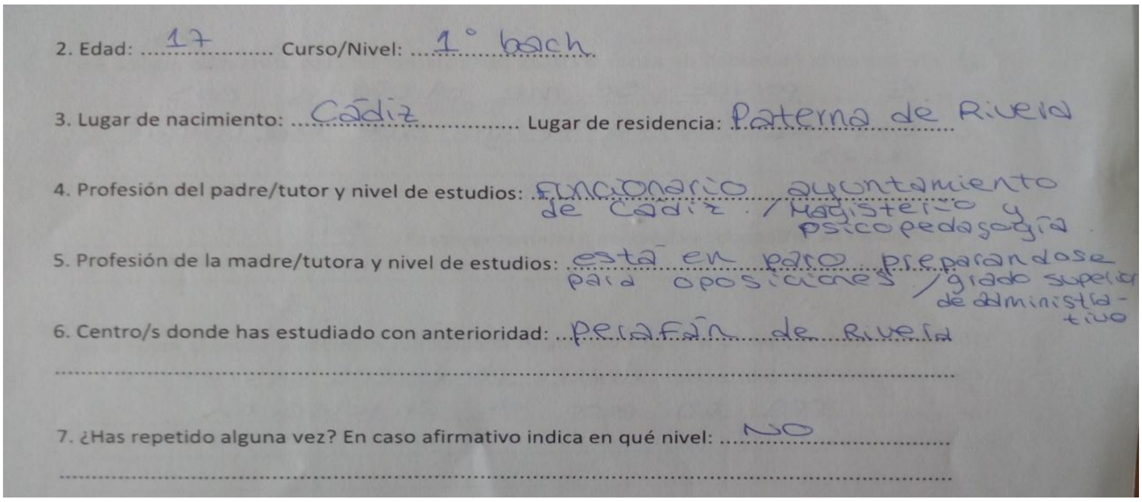
12. ¿Tienes claro lo que se te va a exigir en la asignatura?...
....
....

13. ¿Te ves en la necesidad de asistir a clases particulares? En caso afirmativo explica por qué: ....
....
....

14. ¿Dispones de ordenador y conexión a internet en casa?...
....

15. Otras cuestiones personales que consideres importantes mencionar sobre la materia en cuestión, el profesor o el centro: ....
....
....

4.2. Respuestas de algunos alumnos


2. Edad: 17 Curso/Nivel: 1° bach

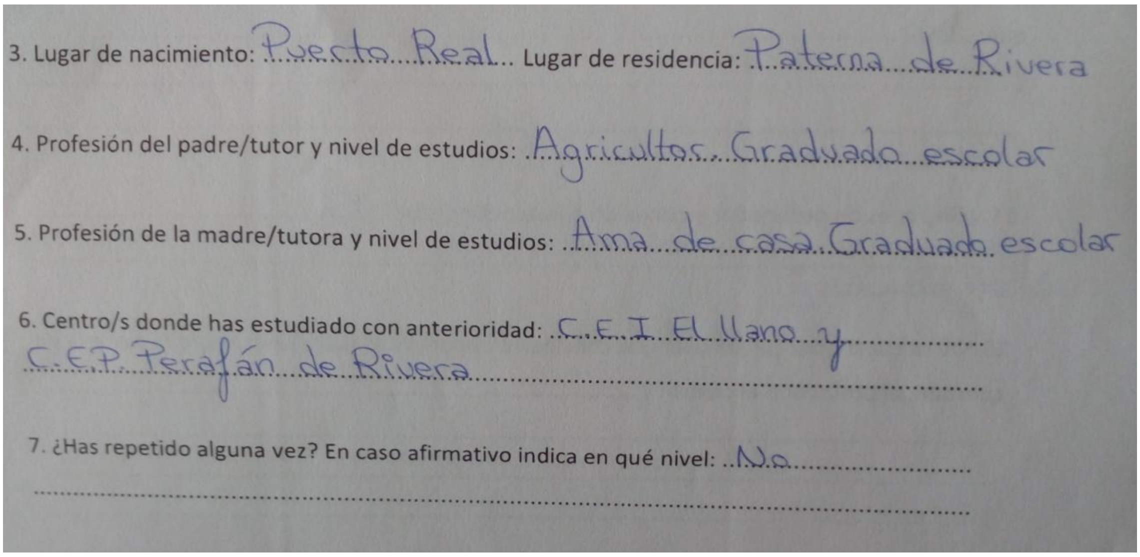
3. Lugar de nacimiento: Cádiz Lugar de residencia: Paterna de Rivera

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: funcionario ayuntamiento de Cádiz / Magisterio y psicopedagogía

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: está en paro preparandose para oposiciones / grado superior de administrativo

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: Perafán de Rivera

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: NO

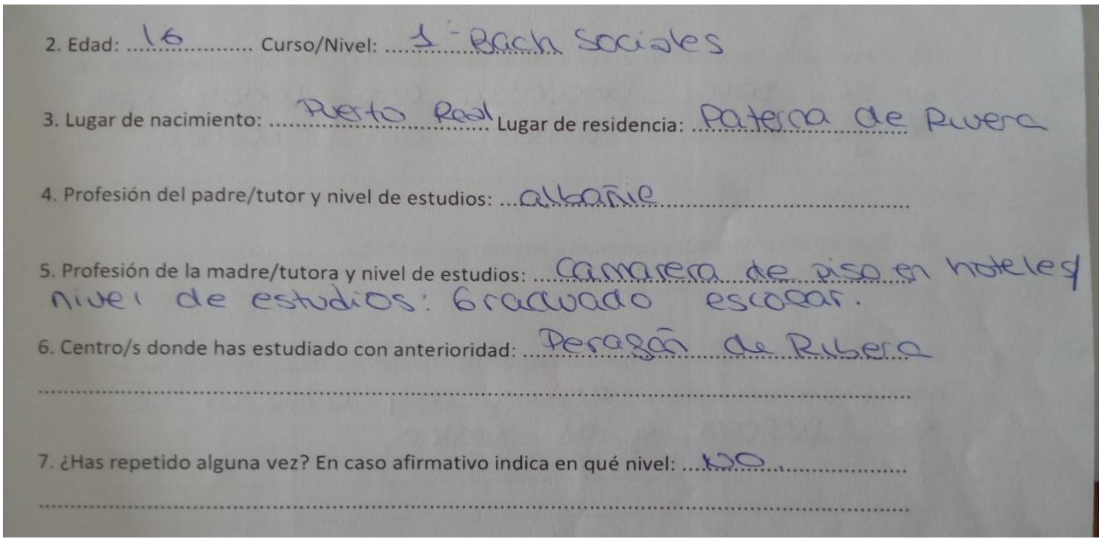

3. Lugar de nacimiento: Puerto Real Lugar de residencia: Paterna de Rivera

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: Agricultor. Graduado escolar

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: Ama de casa. Graduado escolar

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: C.E.I. El llano y C.E.P. Perafán de Rivera

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: No


2. Edad: 16 Curso/Nivel: 1- Bach Sociales

3. Lugar de nacimiento: Puerto Real Lugar de residencia: Paterna de Rivera

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: albañil

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: camarera de piso en hoteles y nivel de estudios: Graduado escolar.

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: Perafán de Ribera

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: NO

3. Lugar de nacimiento: Puerto Real Lugar de residencia: Paterna de Rivera

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: conductor de ambulancia

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: Ama de casa

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: el llanito, Perafan de Ribera

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: NO

---

4. Profesión del padre/tutor y nivel de estudios: Albañil y Astillero Graduado Escola

5. Profesión de la madre/tutora y nivel de estudios: Carnicera, Graduado Escolar.

6. Centro/s donde has estudiado con anterioridad: Escuela infantil "llanito" Perafán de Rivera.

---

7. ¿Has repetido alguna vez? En caso afirmativo indica en qué nivel: Sí segundo de primaria

---

9. Tus asignaturas preferidas son: Educación física y historia

¿Por qué? porque me gusta mucho.

---

12. ¿Tienes claro lo que se te va a exigir en la asignatura? Sí

13. ¿Te ves en la necesidad de asistir a clases particulares? En caso afirmativo explica por qué: Sí, porque me cuesta entender las matemáticas

9. Tus asignaturas preferidas son: Economía, historia y filosofía
¿Por qué? Son muy interesantes

10. Las asignaturas más difíciles para ti son: Matemáticas
¿Por qué? No se me dan bien

11. ¿Qué opinas de la asignatura de matemáticas? ¿Cambiarías algo de la metodología llevada a cabo hasta ahora? Para mí son difíciles. No lo cambiaría, el fallo es mío no es de la asignatura

12. ¿Tienes claro lo que se te va a exigir en la asignatura? Sí

9. Tus asignaturas preferidas son: Matemáticas
¿Por qué? Porque las suelo entender rápidamente

10. Las asignaturas más difíciles para ti son: Lengua
¿Por qué? Porque hay temas que son complicados de entender para mi.

12. ¿Tienes claro lo que se te va a exigir en la asignatura? Llevar a la práctica todas las actividades y no olvidar lo aprendido

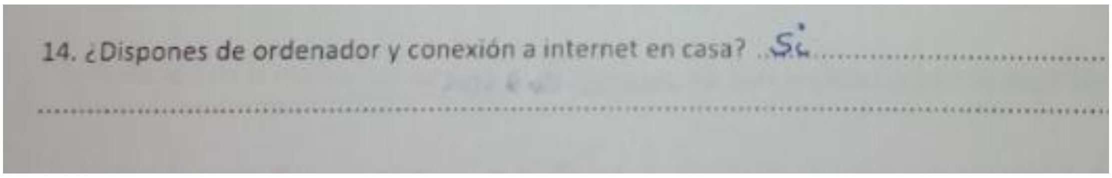
13. ¿Te ves en la necesidad de asistir a clases particulares? En caso afirmativo explica por qué: No

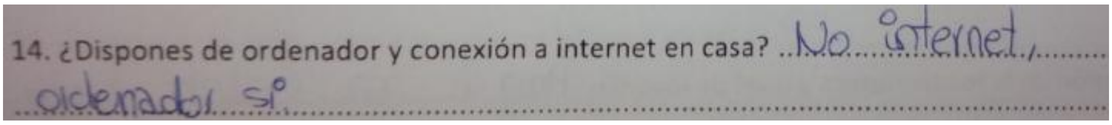
10. Las asignaturas más difíciles para ti son: Inglés
¿Por qué? Porque me cuesta más trabajo entenderla

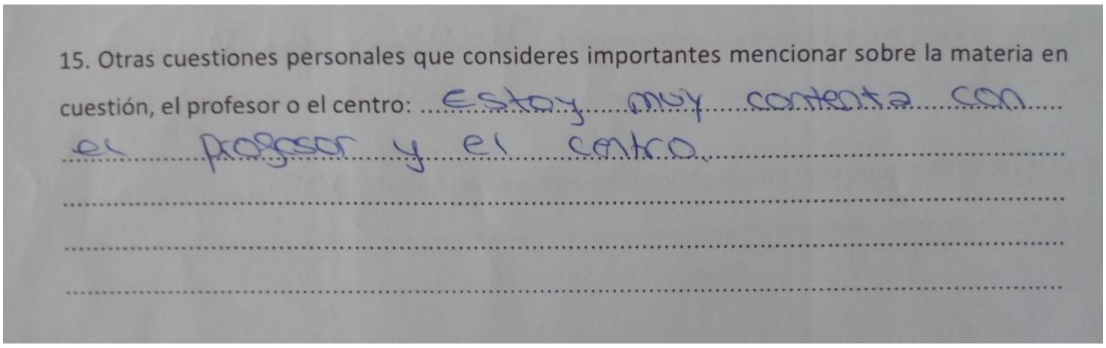
11. ¿Qué opinas de la asignatura de matemáticas? ¿Cambiarías algo de la metodología llevada a cabo hasta ahora? Hay temas que son difíciles de entender. No.

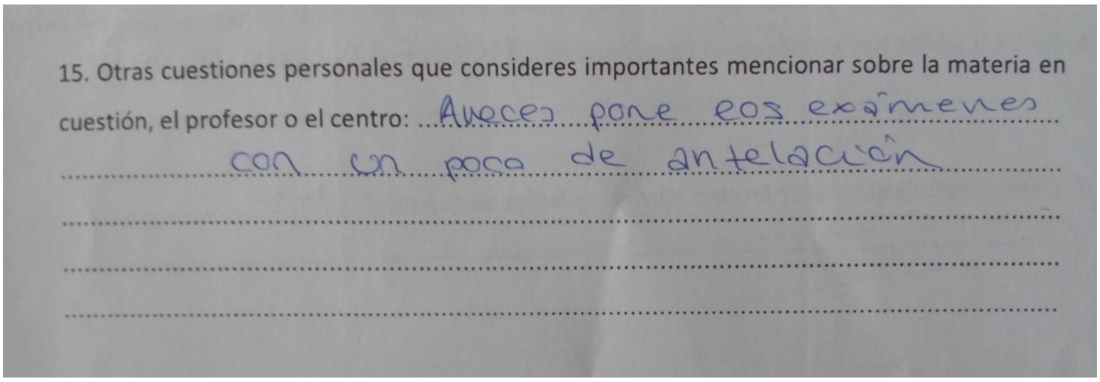
12. ¿Tienes claro lo que se te va a exigir en la asignatura? No olvidar los temas anteriores

13. ¿Te ves en la necesidad de asistir a clases particulares? En caso afirmativo explica por qué: No


14. ¿Dispones de ordenador y conexión a internet en casa? Sí


14. ¿Dispones de ordenador y conexión a internet en casa? No internet, ordenador sí


15. Otras cuestiones personales que consideres importantes mencionar sobre la materia en cuestión, el profesor o el centro: Estoy muy contenta con el profesor y el centro.


15. Otras cuestiones personales que consideres importantes mencionar sobre la materia en cuestión, el profesor o el centro: Aveces pone los exámenes con un poco de antelación

5. Referencias bibliográficas

Aguaded Gómez, J.I., Correa García, R.I., Duarte Hueros, A., Tirado Morueta, R., Guzmán Franco, M.D., Martínez Mojarro, M.E., ... Pavón Redondo, I. (2001). Instrumento de recogida de datos: El cuestionario. En Exma. Diputación Provincial de Huelva. Área de Educación y Grupo Comunicar. Colectivo Andaluz para la Educación en Medios de Comunicación (Eds.), *Memoria de investigación: Infoescuela 2001* (pp. 56-74). Huelva: Diputación Provincial de Huelva. Recuperado de http://www.grupocomunicar.com/contenidos/pdf/infoescuela/II.3.pdf

Ducajú, M. (2010, 9 de diciembre): Libros en casa seguro de éxito. *Levante-emv.com*. Recuperado de http://www.levante-emv.com/comunitat-valenciana/2010/12/09/libros-casaseguro-exito/764138.html.

Méndez Garrido, J.M. (2004). Investigar la incidencia de los medios en las aulas mediante cuestionarios.