

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/26544567>

Solución Exacta de la Configuración Mezcla Contra-Direccional de Dos Ondas en un Material Fotorrefractivo

Article · January 2007

Source: DOAJ

CITATIONS

0

READS

21

2 authors, including:



Jorge Enrique Rueda

Universidad de Pamplona

22 PUBLICATIONS 9 CITATIONS

SEE PROFILE

All content following this page was uploaded by [Jorge Enrique Rueda](#) on 01 October 2014.

The user has requested enhancement of the downloaded file. All in-text references [underlined in blue](#) are linked to publications on ResearchGate, letting you access and read them immediately.



Solución Exacta de la Configuración Mezcla Contra-Direccional de Dos Ondas en un Material Fotorrefractivo

Rueda P. J. E., Mendoza L. J.

Facultad de Ciencias Básicas, Grupo Óptica Moderna, Universidad de Pamplona,
jrueadap2003@unipamplona.edu.co

ABSTRACT

In studies on the contra-directional two-wave mixing in media photorefractive, Pochi Yeh, presented a solution to approximate «small attenuation media»; this restriction is made easier in getting the solution of the resulting non-linear equations. For this same situation of contra-directional two-wave mixing, an exact analytical solution was gotten of unrestricted attenuation.

KEYWORDS

Photorefractive Effect, Contra-Directional Wave Mixing, Kukhtarev's Equations.

RESUMEN

En el estudio de la mezcla contra-direccional de dos ondas en medios fotorrefractivos, Pochi Yeh presentó una solución analítica para la aproximación "pequeña atenuación del medio"; esta restricción hace "simple" obtener la solución de las ecuaciones no lineales resultantes. Para esta misma situación de mezcla de dos ondas en régimen contra direccional, obtenemos una solución analítica exacta sin restricciones de atenuación.

PALABRAS CLAVES

Efecto Fotorrefractivo, Mezcla de Ondas, Ecuaciones de Kutarev

INTRODUCCIÓN

En óptica lineal el índice de refracción depende de la frecuencia de la luz; luego, sólo en este caso, se considera que la reflexión y refracción son independientes de la intensidad del haz de luz. La óptica no lineal estudia la interacción de la luz y la materia, cuando el material

responde no linealmente a la amplitud del campo eléctrico de la misma luz; así, el índice de refracción del medio se puede controlar con la iluminación de un haz de luz; en otras palabras, la propagación de un haz de luz se puede manipular con luz; ello condujo a



establecer una gran variedad de innovación tecnológica basada en control de luz con luz.

El efecto fotorrefractivo es un fenómeno óptico no lineal [1-8]; sin embargo, los fenómenos no lineales por efecto fotorrefractivo no son causados directamente por el campo eléctrico de la luz que perturba el material, como si sucede en los materiales no lineales puros; esta especial característica de los materiales fotorrefractivos permite generar efectos de orden superior con intensidades de la radiación electromagnética igual o inferior a 1mW/cm^2 .

El efecto fotorrefractivo se define como el cambio local del índice de refracción, que se produce por la variación espacial de la intensidad de la luz en el interior del material. En términos microscópicos, esta radiación electromagnética espacialmente no homogénea, provoca transiciones electrónicas hacia la banda de conducción. Así, se crea una distribución de carga espacial y por ende un campo de carga espacial. Tal campo induce entonces un cambio local de índice de refracción, modulado por efecto Pockels. De esta forma, es posible utilizar estos materiales como memorias ópticas, que permiten registrar-borrar-registrar y/o fijar la información.

Los materiales $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO) y $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO) presentan fotorrefractividad y son apropiados para holografía en tiempo real, entre otras aplicaciones, usando radiación de intensidad relativamente baja (1mW/cm^2). En el registro de un holograma fotorrefractivo puede ocurrir acoplamiento energético entre los haces que inciden al medio y los generados en él; esta condición experimental se conoce como mezcla de ondas.

Acoplar haces ópticos ha permitido el desarrollo de aplicaciones en óptica computacional, almacenamiento de información, procesado de imágenes, redes neuronales, generación de armónicos, auto-enfoque, amplificación óptica, conjugación de fase, síntesis óptica de circuitos lógicos,

acopladores, multiplexado de información, modulares óptico-electrónicos, metrología óptica de alta resolución y correladores ópticos, entre otras aplicaciones.

La técnica holográfica fotorrefractiva considera dos posibles configuraciones: geometría de transmisión o co-direccional y geometría de reflexión o contra-direccional. En la primera ambos haces inciden por la misma cara del cristal fotorrefractivo, mientras que en el segundo caso, cada haz incide por una de las caras opuestas del cristal.

La mayor parte de los estudios de la mezcla de dos ondas están encaminados a la mezcla co-direccional; con respecto a los estudios de mezcla de dos ondas en el caso contra direccional, Pochi Yeh presenta en su trabajo un resultado de solución analítica, restringida a la condición de absorción nula, y un resultado numérico bajo la condición de muy baja absorción del medio [3]; bajo esta condición del medio, es cómodo resolver analíticamente el sistema de ecuaciones acopladas.

En este trabajo, presentamos una solución analítica exacta de la mezcla de dos ondas contra-direccionales, considerando el caso general de cualquier valor de absorción del material; a partir de estas expresiones generales encontramos los casos de absorción baja y nula resueltos por Pochi Yeh.

MODELO DE KUKHTAREV-VINETSKII

Cuando se produce la transición de electrones por acción de la luz que incide en el medio fotorrefractivo, se desplazan portadores donores a la banda de conducción con una probabilidad $(sI + \beta)(N_D - N_D^+)$, entonces los donores ionizados son capturados por portadores con una probabilidad $\gamma_R n N_D^+$, donde s es la sección eficaz de fotoionización, β es la rata de generación térmica, γ_R es la constante de recombinación, n es la concentración de portadores y N_D^+ es la concentración de donores ionizados.

El campo de carga espacial $\vec{E}(x, z)$ generado como consecuencia de la migración de electrones, se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones, denominadas ecuaciones del material:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N_D^+}{\partial t} - \frac{1}{e} \nabla \cdot \vec{j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = (sI + \beta)(N_D - N_D^+) - \gamma_R n N_D^+ \quad (2)$$

$$\vec{j} = e\mu n \left(\vec{E} - \frac{k_B T}{en} \nabla n \right) + pI \vec{e} \quad (3)$$

$$\nabla(\varepsilon \vec{E}) = e(N_A^- - N + N_D^+) \quad (4)$$

Donde, N es la concentración de portadores, n el índice de refracción, e la carga del electrón, k_B la constante de Boltzmann, pI la corriente fotovoltaica, p la constante fotovoltaica, \vec{E} el campo de carga espacial, \vec{E} el campo eléctrico de la luz incidente, N_A^- la concentración de aceptores y \vec{e} es un vector unitario en la dirección del eje óptico del cristal. La Ec.(1) es la ecuación de continuidad, la Ec.(2) la ecuación de generación y recombinación de carga, la Ec.(3) la densidad de corriente y la Ec.(4) la generación de la densidad de carga.

MODELACION ANALITICA DE LA MEZCLA CONTRA-DIRECCIONAL DE DOS ONDAS

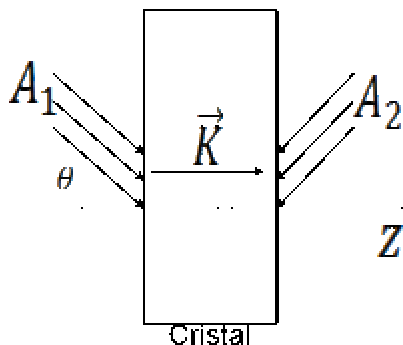


Figura 1. Esquema de mezcla contra-direccional de dos ondas

En el esquema de la Fig.1, A_1 y A_2 representan las amplitudes de las dos ondas ópticas que interactúan en interior del cristal; \vec{K} es el vector de la red de volumen generada. Si ω es la frecuencia de las dos ondas incidentes en el medio fotorrefractivo, entonces el campo eléctrico resultante se puede escribir como:

$$\vec{E} = A_1 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + A_2 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}, \quad (5)$$

donde \vec{k}_1 y \vec{k}_2 , son los vectores de onda y A_1 , A_2 son las amplitudes de las dos ondas, respectivamente; el caso de considerar mezcla de ondas de igual frecuencia, se conoce como régimen degenerado.

La distribución de intensidad para el campo dado por la Ec.(5) tiene la siguiente forma:

$$I = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1^* A_2 e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} + A_2^* A_1 e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (6)$$

donde \vec{K} es el vector de onda del patrón dado por la Ec.(6). Introduciendo esta intensidad en las ecuaciones de Kukhtarev-Vinetskii, se obtiene el campo de carga espacial,

$$E = E_1 e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} + c.c = \frac{A_1^* A_2}{2I_0} E_w e^{-i\vec{K} \cdot \vec{r}} + c.c \quad (7)$$

Donde $I_0 = |A_1|^2 + |A_2|^2$, $E_1 = \frac{A_1^* A_2}{2I_0} E_w$, con $E_w = |E_w| e^{i\varphi}$, $c.c$ es el término complejo conjugado.

Como consecuencia de la presencia del campo de carga espacial, se produce una variación en el índice de refracción de la forma $\delta n = \frac{n_0^3}{2} r E$; donde r es el coeficiente electroóptico del cristal y n_0 es el valor del índice de refracción en zonas del cristal no iluminadas.

Debido a que el índice de refracción está definido como el índice de refracción en ausencia de luz, más la variación causada por



el campo de carga espacial, este se puede escribir como:

$$n = n_0 + \frac{n_1}{2} e^{i\varphi} \frac{A_1^* A_2}{I_0} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}} \quad (8)$$

Donde $n_1 = n_0^3 r E_w$, y donde la fase φ indica el desfase entre la red de índices respecto al patrón de interferencia de la luz generado por la superposición entre los dos haces incidentes, patrón dado por la Ec.(6)

Para estudiar el acoplamiento entre los haces, se introduce el índice de refracción, y el campo eléctrico de la radiación incidente en la ecuación de onda:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) - \frac{\omega^2}{c^2 n^2} \vec{E} = 0 \quad (9)$$

Después de realizar los procedimientos necesarios se llega al conjunto de ecuaciones simplificadas:

$$\frac{d}{dz} A_1 = -i \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos \theta} e^{i\varphi} |A_2|^2 A_1 - \frac{\alpha}{2} A_1 \quad (10)$$

$$\frac{d}{dz} A_2 = -i \frac{\pi n_1}{\lambda I_0 \cos \theta} e^{i\varphi} |A_1|^2 A_2 - \frac{\alpha}{2} A_2 \quad (11)$$

donde se ha tomado $\beta_1 = -\beta_2 = k \cos \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta$.

El conjunto de Ecs.(10)-(11) se puede simplificar con el cambio de variables $A_1 = \sqrt{I_1} e^{-i\varphi_1}$ y $A_2 = \sqrt{I_2} e^{-i\varphi_2}$, donde φ_1 y φ_2 son las fases de las amplitudes complejas A_1 y A_2 . Así, las ecuaciones acopladas se pueden escribir de la forma:

$$\frac{d}{dz} I_1 = -\xi \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} - \alpha I_1 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dz} I_2 = -\xi \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} + \alpha I_2 \quad (13)$$

y

$$\frac{d}{dz} \varphi_1 = -\beta \frac{I_2}{I_1 + I_2} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz} \varphi_2 = \beta \frac{I_1}{I_1 + I_2}, \quad (15)$$

Donde $\xi = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos \theta} \sin \varphi$ y $\beta = \frac{2\pi n_1}{\lambda \cos \theta} \cos \varphi$.

RESULTADOS: SOLUCION ANALITICA DE LAS ECUACIONES ACOPLADAS Y CASOS PARTICULARES

Solucionando este sistema de ecuaciones no lineales acopladas, que podemos hacerlo de forma numérica o analítica, se obtiene la definición sobre el comportamiento de las intensidades de cada uno de las ondas incidentes, en función del espesor del material atravesado por las ondas que interactúan en él. La solución analítica que proponemos se obtiene mediante varias consideraciones algebraicas, que inicia con la aplicación del método de reducción a las Ecs.(12)-(13), y que conduce al siguiente resultado:

$$I_1^{\frac{\xi+2\alpha}{\xi}} e^{\frac{\xi+2\alpha^2}{\xi} z} - C_1 \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} I_1^{\frac{2\alpha-\xi}{\xi}} e^{\frac{2\alpha^2+\alpha\xi-\xi^2}{\xi} z} = C_2 \quad (16)$$

$$I_2 = \frac{C_1 e^{-\xi z}}{I_1} \quad (17)$$

Donde las constantes C_1 y C_2 se obtienen aplicando las condiciones iniciales $I_1(0)$ e $I_2(0)$, así, se obtiene:

$$I_1(0)^{\frac{\xi+2\alpha}{\xi}} - C_1 \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} I_1(0)^{\frac{2\alpha-\xi}{\xi}} = C_2 \quad (18)$$

$$\left(\frac{C_1 e^{-\xi L}}{I_2(L)} \right)^{\frac{\xi+2\alpha}{\xi}} e^{\frac{\xi+2\alpha^2}{\xi} L} - C_1 \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} \left(\frac{C_1 e^{-\xi L}}{I_2(L)} \right)^{\frac{2\alpha-\xi}{\xi}} e^{\frac{2\alpha^2+\alpha\xi-\xi^2}{\xi} L} = C_2 \quad (19)$$

Si aplicamos la operación diferencia entre la Ec.(18) y la Ec.(19), y al resultado el operador integral, podemos obtener la fase relativa entre los dos haces, esto es:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{2} \beta z + Const.$$



Es también importante definir expresiones para establecer la ganancia energética de cada haz a la salida del cristal, factor que se denomina transmitancia óptica, $T_1 = I_1(L)/I_1(0)$ y $T_2 = I_2(0)/I_2(L)$, así, podemos llevar las Ecs.(18)-(19) a la forma:

$$e^{\frac{\xi\alpha+2\alpha^2}{\xi}L} T_1^{\frac{\xi+2\alpha}{\xi}} - \frac{e^{\frac{\xi\alpha+2\alpha^2}{\xi}L}}{m} \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} T_1^{\frac{2\alpha}{\xi}} + \frac{e^{\xi L}}{m} \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} T_1 - 1 = 0 \quad (20)$$

$$e^{\frac{2\alpha^2-\xi\alpha-\xi^2}{\xi}L} T_2^{\frac{\xi+2\alpha}{\xi}} - \frac{e^{\frac{2\alpha^2-\xi\alpha}{\xi}L}}{m} \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} T_2^{\frac{2\alpha}{\xi}} + \frac{1}{m} \frac{\xi+2\alpha}{\xi-2\alpha} T_2 - 1 = 0 \quad (21)$$

donde $m = I_1(0)/I_2(L)$ es la relación entre las intensidades de las ondas incidentes. De estas expresiones generales Ecs.(20)-(21), podemos modelar cualquier caso real de acoplamiento contra-direccional de haces en un medio fotorrefractivo.

En la Fig.2 presentamos el resultado del comportamiento energético entre las dos ondas contra-direccionales, determinado por

las Ecs.(16)-(17), y para las condiciones $\xi = -10\text{cm}^{-1}, \alpha = 1.60\text{cm}^{-1}, L = 0.25\text{ cm}$. Se observa que el haz 1, curva azul a trazos, se amplifica hasta alcanzar una intensidad final de 1.3, mientras que, el haz 2, curva negra continua con círculos, pierde energía a medida que se propaga en el espesor del cristal fotorrefractivo, hasta reducir su energía al 10% en la salida del cristal.

VALIDACIÓN DEL RESULTADO EXPRESIONES ECS.(20)-(21)

A continuación presentamos los dos casos resueltos por Pochi Yeh, a partir de las Ecs.(16)-(17):

1. Caso atenuación baja, $\alpha \ll |\xi|$, entonces se obtiene:

$$I_1 = \left[\frac{C_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 + C_1 e^{(2\alpha-\xi)z}} \right] e^{-\alpha z} \quad (22)$$

$$I_2 = \left[-\frac{C_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 + C_1 e^{(2\alpha-\xi)z}} \right] e^{-\alpha z} \quad (23)$$

Entonces las transmitancias T_1 y T_2 , para valores de α pequeños es:

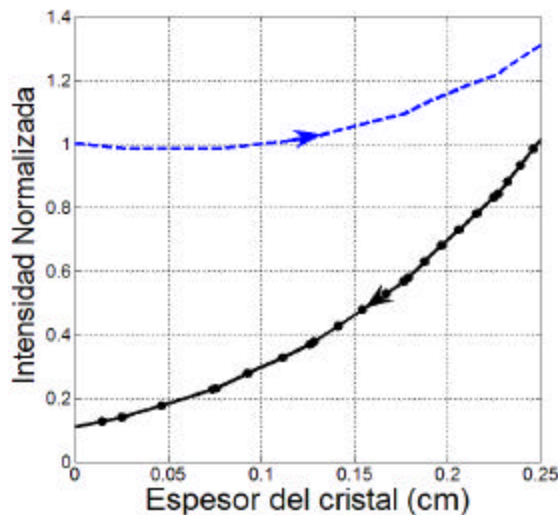


Figura 2. Representación de las intensidades de las dos ondas en el caso de $\xi = -10\text{cm}^{-1}, \alpha = 1.60\text{cm}^{-1}, L = 0.25\text{ cm}$, utilizando las expresiones Ecs.(16)-(17); la curva en trazos corresponde a la intensidad de la onda 1 y la curva continua con círculos es la intensidad de la onda 2.



$$T_1 = \frac{1+m e^{\alpha L}}{m+e^{(\xi-\alpha)L}} \quad (24)$$

$$T_2 = \frac{1+m e^{\alpha L}}{e^{\alpha L}+m e^{-\xi L}} \quad (25)$$

En la Fig.3 se muestra la comparación entre las aproximaciones de Pochi Yeh versus el resultado utilizando nuestra solución analítica exacta Ecs.(16)-(17), y aproximada Ecs.(22)-(23).

1. Caso atenuación nula, $\alpha = 0$, entonces se obtiene:

$$I_1 = \frac{C_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 + C_1 e^{-\xi z}} \quad (26)$$

$$I_2 = -\frac{C_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{C_2}{2}\right)^2 + C_1 e^{-\xi z}} \quad (27)$$

Las expresiones para las transmitancias son:

$$T_1 = \frac{1+m}{m+e^{\xi L}} \quad (28)$$

$$T_2 = \frac{1+m}{e^{\alpha L}+m e^{-\xi L}} \quad (29)$$

DISCUSION Y CONCLUSIONES

Presentamos los resultados de solución general analítica exacta, de un sistema de mezcla de dos ondas en régimen degenerado y contra-direccional. Utilizamos los resultados presentados por Pochi Yeh, para validar la solución analítica exacta obtenida.

Determinamos que, aun para pequeñas atenuaciones, las aproximaciones aplicadas para la solución de las ecuaciones acopladas, generan errores cercanos al 15% en el cálculo de la intensidad del haz que se amplifica, hecho que se puede inferir de los resultados mostrados en la Fig.3. Sin embargo, el error es menor para el caso del haz que pierde energía. Demostramos también, que utilizando algunas consideraciones algebraicas “sencillas”, se puede obtener la solución analítica exacta del problema de mezcla contra-direccional de dos ondas. Las expresiones obtenidas permiten la modelación exacta de arreglos experimentales de mezcla contra-direccional de dos ondas.

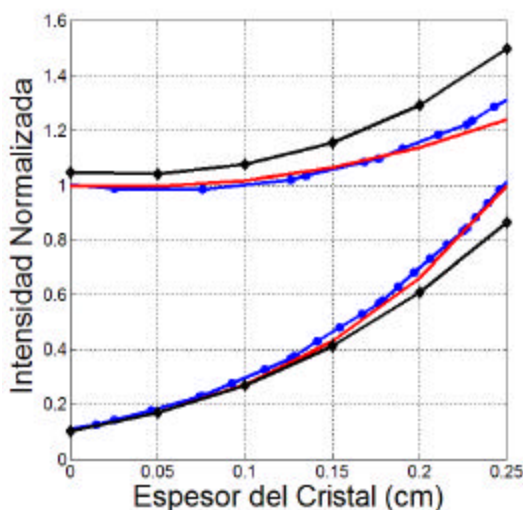


Figura 3. Comparación entre las aproximaciones de Pochi Yeh versus el resultado utilizando nuestra solución analítica exacta; con $\xi = -10\text{cm}^{-1}, \alpha = 1.60\text{cm}^{-1}, L = 0.25\text{ cm}$. Líneas azules: solución exacta; Líneas rojas: solución aproximación Ecs.(22)-(23); Líneas negras: aproximación de Pochi Yeh.



Glass, M. The photorefractive effect. Opt. Eng., Vol. 17, (1978), p. 470.

Mills, L. Nonlinear optics. New York: Springer-Verlag, 1998

Salazar A., Rueda J., Y Lasprilla M., "La física de los órdenes de difracción en cristales fotorrefractivos". Rev. Col. Fís., Vol. 33, No.2, (2001), p.p 337-341.

Salazar A., Rueda J., Y Lasprilla M., "Efecto del campo externo en la energía de los armónicos espaciales en materiales fotorrefractivos". Rev. Col. Fís., Vol. 34, No.1, (2002), p.p 183-186.

Salazar A., Rueda J., "Modification of the exchange of energy in BSO at equal optimized coupling constant". Opt. Comm., Vol.212, (2002), pp.191-198

Solymar, L.; Webb, D. And Grunnet-Jepsen, A. The physics and applications of photorefractive materials. New York : Oxford University Press Inc., 1996.

Yeh, P., Introduction to photorefractive nonlinear optics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

Yeh P., And Gu C. Landmark papers on photorefractive nonlinear optics. New Jersey: World Scientific, 1995.

Recibido 11 Julio 2007
Aceptado 10 Noviembre 2007