

Міжнародна студентська науково - технічна конференція
"ПРИРОДНИЧІ ТА ГУМАНІТАРНІ НАУКИ. АКТУАЛЬНІ ПИТАННЯ"

УДК 536.2

Курило Д. – ст.гр. ММ – 11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

**РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ
СТЕРЖНЯ В СЕРЕДОВИЩІ БЕЗ ОПОРУ**

Науковий керівник: канд. фіз. – мат. наук, доцент Шелестовський Б.Г.

Kurylo.D.

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

**THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATION OF THE ROD
OSCILLATION IN RESISTANCE-LESS MEDIUM**

Supervisor: Shelestovsky B.

Ключові слова: стержень, крайова задача.

Key words: rod, boundary value problem

Крайова задача коливань стержня $0 \leq x \leq l$, якщо кінець $x = 0$ стержня закріплений жорстко, а до кінця $x = l$ прикладена сила $F(t) = A \sin \omega t, 0 < t < \infty$, записується так:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{A}{ES} \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

Розв'язок задачі (1), (2), (3) шукаємо методом Фур'є

а) при $\omega \neq \frac{(2n+1)\pi a}{2l}, n=0,1,2,3,\dots$,

$$u(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad V_{tt} = a^2 V_{xx},$$

$$V(x, t) = V_1(x) \cdot V_2(t); \quad \frac{V_2''(t)}{a^2 V_2(t)} = \frac{V_1''(x)}{V_1(x)} = -\lambda^2,$$

$$V_1(x) = L \cos \lambda x + p \cdot \sin \lambda x,$$

$$V_2(t) = M \cos \lambda a t + N \sin \lambda a t.$$

З (2) випливає $L = 0$, а із (3) – $M = 0$.

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \cdot \sin \lambda a t.$$

Частинний розв'язок $U(x, t)$ беремо у вигляді:

$$U(x, t) = C \sin \frac{\omega}{a} x \cdot \sin \omega t ,$$

$$u(x, t) = C \sin \frac{\omega}{a} x \cdot \sin \omega t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x \cdot \sin \lambda_n at .$$

Задовольняємо умови (2) і (3):

$$C \cdot \frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l \cdot \sin \omega t + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b_n \cos \lambda_n l \sin \lambda_n at = \frac{A}{ES} \sin \omega t ,$$

$$c \omega \sin \frac{\omega}{a} x + \sum_{n=0}^{\infty} a \lambda_n b_n \sin \lambda_n x = 0 .$$

Покладемо: $\cos \lambda_n l = 0 \quad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}$; $C = \frac{A \cdot a}{\omega ES \cdot \cos \frac{\omega}{a} l}$.

Отже, розв'язок задачі має вигляд:

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} ,$$

де

$$U(x, t) = \frac{aA}{ES\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\cos \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t ,$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz .$$

б) при $\omega = \frac{(2n_0+1)\pi a}{2l}$

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} ,$$

де

$$U(x, t) = - \left\{ \frac{Aa}{ES\omega} \int_0^x \left(z - A_{n_0}^* \sin \frac{(2n_0+1)\pi z}{2l} \right) \sin \frac{(2n_0+1)\pi(x-z)}{2l} dz \right\} \sin \omega t - \frac{AA_{n_0}^*}{2ES} t \cos \omega t \sin \frac{(2n_0+1)\pi x}{2l} ,$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz , \quad A_{n_0}^* = \int_0^l z \sin \frac{(2n_0+1)\pi z}{2l} dz .$$