

Матеріали XX наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя, 2017

УДК 004.94

А. Я. Карвацкий, д-р. техн. наук, проф., А. Ю. Педченко

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Украина

## РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

A. Ya. Karvatskii, Dr., Prof., A. Yu. Pedchenko

## SOLVING NONLINEAR NONSTATIONARY THERMOELECTRIC PROBLEM BY FINITE ELEMENT METHOD

Для расчетов сложных теплоэлектрических технических систем получили особое распространение методы с применением мощной вычислительной техники, используемое специальное программное обеспечение. Современные программные продукты для проведения инженерных расчетов основаны на различных числовых методах и алгоритмах решения дифференциальных уравнений. Поэтому разработка рациональных методик и алгоритмов численного решения нестационарных задач тепло- электропроводности со значительной температурной зависимостью теплофизических свойств является чрезвычайно важной и актуальной для проектирования современных промышленных объектов.

Систему уравнений связанной нелинейной нестационарной задачи тепло- электропроводности изотропной среды можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T(\mathbf{x})] + \chi(T) |\nabla U|^2 + q_v(T), \tau > 0; \\ \nabla \cdot [\chi(T) \nabla U] = 0, \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

где  $h(T) = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_p(T) \rho(T) dT$  – объемная энтальпия, Дж/м<sup>3</sup>;  $T_{\text{ref}}$  – абсолютная температура отсчета, К;  $c_p$  – массовая изобарная теплоемкость, Дж/(кг·К);  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $T$  – абсолютная температура, К;  $\tau$  – время, с;  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $i=1,2,3$  – оператор Гамильтона, м<sup>-1</sup>;  $x_i$ ,  $i=1,2,3$  – декартовы координаты, м;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор декартовой системы координат, м;  $\chi$  – коэффициент электропроводности, См/м;  $U$  – электрический потенциал, В;  $q_v$  – объемная плотность внутреннего источника теплоты неэлектрической природы, Вт/м<sup>3</sup>;  $\Omega \in R^3$  – трехмерная расчетная область.

Начальные условия для (1) в момент времени  $\tau=0$  задаются только для нестационарного уравнения теплопроводности. Граничные условия (ГУ) для уравнения теплопроводности (1) в момент времени  $\tau > 0$  могут быть:

- I рода или Дирихле – задана температура на границе  $\Gamma_{T I}$  части поверхности  $\Omega$ ;
- II рода или Неймана – задана нормальная составляющая вектора плотности теплового потока на границе  $\Gamma_{T II}$  части поверхности  $\Omega$ ;
- III рода – заданы конвективные условия теплообмена на границе  $\Gamma_{T III}$  части поверхности  $\Omega$ .

ГУ квазистационарного уравнения электропроводности (1) в момент времени  $\tau > 0$  могут быть двух типов:

– Дирихле – задається нулевой электрический потенциал на границе  $\Gamma_{U_I}$  части поверхности  $\Omega$ ;

– Неймана – задаётся нормальная составляющая вектора плотности электрического тока на границе  $\Gamma_{U_{II}}$  части поверхности  $\Omega$ .

С помощью системы уравнений (1), методик и алгоритма численного решения нестационарных задач [1] разработано программное обеспечение для решения нелинейных нестационарных задач тепло-электропроводности изотропной среды.

Тестовая численная модель тепло-электропроводности представляет собой четвертую часть цилиндра, которая построена с помощью специального geo-файла в программе Gmsh и выполнено ее дискретизацию на тетраэдные конечные элементы.

Геометрические размеры цилиндра: радиус 0,05 м, высота 0,1 м. Заданные нелинейные от температуры свойства материала (графит): коэффициент теплопроводности

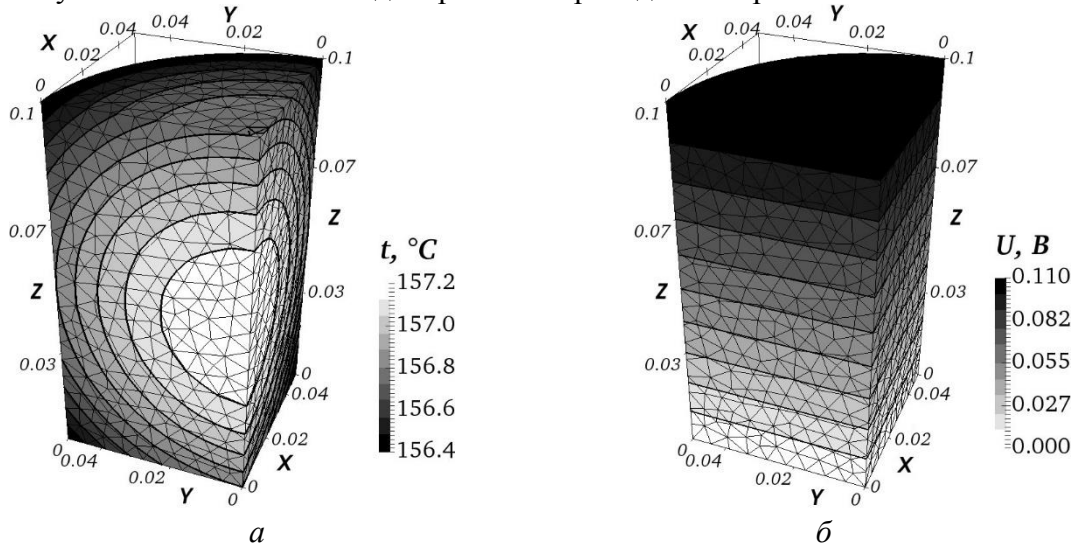
$$\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t} \text{ Вт/(м·К)}, \text{ массовая изобарная теплоемкость}$$

$$c_p(t) = 712,2 + 2,933 \times 10^{-7}t^3 - 1,444 \times 10^{-3}t^2 + 2,406t \text{ Дж/(кг·К)}, \text{ плотность}$$

$$\rho(t) = 1853 - 5,453 \times 10^{-5}t^2 - 0,127t \text{ кг/м}^3 \text{ и электропроводность } \chi(t) = 73086,2 -$$

$-7,032 \cdot 10^{-9}t^4 + 5,188 \cdot 10^{-5}t^3 - 1,381 \cdot 10^{-1}t^2 + 136,36t \text{ См/м}$ . Заданы ГУ I, II и III родов на торцах и боковой стороне для уравнений электропроводности и теплопроводности, соответственно: нижний торец  $U = 0 \text{ В}$ ; верхний торец  $j_n = 10^5 \text{ А/м}^2$ ; торцы и боковые стороны  $\alpha = 15 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$ ,  $t_{p1} = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ . Начальная температура  $t_0 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Результаты численного моделирования приведены на рис. 1.



*a* – поле температуры; *б* – поле электрического потенциала

Рис. 1. Результаты численного моделирования ( $\tau = 4 \text{ ч}$ )

Анализ сравнения результатов показывает, что данные моделирования с разработанным программным обеспечением совпадают с аналитическими точными решениями [2]. При этом максимальное значение погрешности определения температуры и электрического потенциала не превышает 1 %.

### Література

1. Карвацкий, А. Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів [Текст]: навч. посіб. — К.: НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2015. — 392 с.
2. Исаченко, В. П. Теплопередача : учебник для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М. : Энергоиздат, 1981. — 416 с.