View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by idUS. Depósito de Investigación Universidad de Sevilla

Universidad de Sevilla

Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado:

Soluciones analíticas del problema de Cauchy. Teoremas de Cauchy y Cauchy-Kowalewski

Ana Moreno Ruiz

Dirigido por: Manuel Delgado Delgado

18 de junio de 2018

«... es ist wahr, ein Mathematiker,

der nicht etwas Poet ist,

wird nimmer ein vollkommener Mathematiker sein».

K. Weierstrass (carta a Sofia Kovalevskaya, 27 de agosto de 1883)

Abstract

In first place, the goal of this work is to get a result which guarantees that the Cauchy problem, with certain conditions of analyticity, has a unique analytical solution, and its power series can be obtained.

We will also provide a result, the Cauchy-Kowalewski theorem, to guarantee that, in a Cauchy problem defined by a partial differential equation, and with certain hypotheses of analyticity, the analytical solution exists and it is unique, too. We will prove these results by the majorant method.

Finally, in last chapter, we will see how to apply the previous result on a Cauchy problem defined by a higher-order PDE. Then, we will study certain surfaces where the initial conditions can't be given. These surfaces are called characteristic surfaces, and the problem isn't well defined on them.

In order to achieve these objetives, we will need to introduce some notions and results of infinitesimal calculus, as well as the concepts of analytical and majorant functions. We will also provide other results which we will use throughout the project.

Resumen

El objetivo de este trabajo es obtener, en primer lugar, un resultado que garantice la existencia y unicidad de solución analítica del problema de Cauchy en el que la función de la ecuación diferencial ordinaria que define el problema es analítica en un cierto entorno, concepto que introduciremos en el primer capítulo. Teniendo en cuenta esta hipótesis de analiticidad, se quiere llegar a la conclusión de que el problema posee una única solución analítica, y, además, puede obtenerse su desarrollo de Taylor término a término.

Por otro lado, gracias al teorema de Cauchy–Kowalewski, garantizaremos la existencia y unicidad de solución analítica del problema de Cauchy con la particularidad de que, en este caso, la ecuación que define el problema vendrá dada por una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden. Todo ello bajo ciertas condiciones, la más importante es que los datos iniciales o de Cauchy, y los coeficientes de la ecuación en derivadas parciales son funciones analíticas, y, por tanto, la solución del problema también lo será.

Para finalizar, en el último capítulo se verá, en primer lugar, cómo aplicar el resultado anterior sobre un problema de Cauchy definido por una EDP de orden superior al primero. Por otro lado, estudiaremos ciertas superficies donde no pueden darse lo datos iniciales del problema general de Cauchy, esto es, definido por una EDP en forma implícita. Veremos que estas superficies son las denominadas superficies características, y sobre ellas el problema no está bien planteado.

Para llevar a cabo estos objetivos necesitamos conocer algunas nociones del cálculo infinitesimal, como son los conceptos de serie númerica y de potencias, y algunos resultados de convergencia de éstas; así como los conceptos de función analítica y función mayorante. También los teoremas de la función inversa e implícita, a los cuales tendremos que recurrir a lo largo del trabajo.

Índice general

Introducción

Se debe a Augustin Louis Cauchy (1789-1857) el estudio por primera vez de la convergencia de las soluciones de ciertas clases de ecuaciones diferenciales obtenidas mediante desarrollos en serie por la técnica de los coeficientes indeterminados. Cauchy veía un paralelismo entre el papel desempeñado por los números complejos en el estudio de las ecuaciones algebraicas y el que presentía que jugaría la teoría de las funciones de variable compleja en el campo de las ecuaciones diferenciales. Estaba convencido de que se podía establecer en este campo un teorema análogo al fundamental del álgebra, que cabría enunciar así: *toda ecuación diferencial con coeficientes analíticos posee una solución analítica.* Para ello ideó el conocido hoy como método de las funciones mayorantes.
Con este procedimiento, Cauchy estudió en 1842 la existencia de soluciones de una clase amplia de ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales de primer orden, si bien es cierto que no trató cuestiones como la unicidad y la prolongación de soluciones, ni demostró -lo dió por hecho- que las condiciones iniciales determinan las soluciones. Aún así, se denomina problema de Cauchy al planteado mediante una ecuación diferencial, ordinaria o en derivadas parciales, acompañada de ciertos datos iniciales.

Weierstrass también estuvo interesado en este tipo de problemas por aquellos mismos años. Lo que al matemático alemán le atraía de las ecuaciones diferenciales era, precisamente, la posibilidad de definir funciones analíticas a partir de sus soluciones. Por métodos análogos, pero independientemente de Cauchy, estudió sistemas de ecuaciones diferenciales, destacando dos detalles novedosos: las condiciones iniciales determinan unívocamente las soluciones y la prolongación de éstas. Así pues, le propuso a Sofia Kovalevskaya (1850-1891), cuyo apellido se solía transcribir Kowalewski, que investigara más profundamente este campo. Ésta lo hizo en su trabajo "*Sobre la teoría de ecuaciones en derivadas parciales*", el cual formó parte de su tesis doctoral y fue muy bien acogido por la comunidad matemática, desempeñando todavía un papel fundamental en la teoría de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Capítulo 1

Conceptos previos

En este capítulo introducimos los resultados sobre series numéricas y series de potencias que vamos a necesitar para los siguientes capítulos.

1.1. Series numéricas

Efectuamos en este apartado una recapitulación de algunos conceptos y teoremas que el lector probablemente conoce del cálculo infinitesimal elemental. En concreto, se refieren a las series de números reales, por tanto, no se darán las demostraciones. Éstas pueden encontrarse en [1]. Nuestro objetivo es que los resultados que se recopilan se puedan usar con comodidad en el resto de este proyecto.

Denotaremos por $\mathbb{N}$ el conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ de los números naturales, y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Consideremos una sucesión de números reales, es decir, una aplicación $\varphi : n \in \mathbb{N} \longrightarrow a_n \in \mathbb{R}$, representada como es habitual por $a_0, a_1, a_2 \dots$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, o bien simplemente $\{a_n\}$.

Definición 1.1 (Serie numérica)**.** Se llama *serie* asociada o generada por $\{a_n\}$ a la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales de dicha sucesión, es decir,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se representa por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definición 1.2. Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de números reales, se define la *suma* de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n$$

si este límite existe.

Definición 1.3. Se define el *producto* (de Cauchy) de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \textit{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

1.1.1. Resultados de convergencia para series numéricas

En este apartado se usan los conceptos definidos anteriormente:

Definición 1.4. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es *convergente* cuando $\{S_n\}$ converge, esto es, cuando existe un número $S \in \mathbb{R}$, necesariamente único, tal que $S_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$. Este hecho se representa por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, y se dice en tal caso que S es la suma de la serie.

Teorema 1.1. *Si la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n \longrightarrow 0$.

Definición 1.5. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente* si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ (nótese que al ser la sucesión $\{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\}_{m\geq 0}$ monótona creciente, tiene siempre límite finito o $+\infty$).

Teorema 1.2. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Nota 1.1. El recíproco del teorema 1.2 no es cierto. Un ejemplo de ello es el caso de la siguiente serie, conocida como *serie armónica alternada*:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

la cual no es absolutamente convergente, pues $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, que es divergente. Sin embargo, es convergente por el *criterio de Leibniz.*

Nota 1.2. Una propiedad importante es que si una serie es absolutamente convergente, entonces su suma no varía si se efectúa una permutación cualquiera de sus índices; es decir, que si $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{j(n)}$$

Teniendo en cuenta la definición de *producto de Cauchy* (1.3), introducimos el siguiente resultado:

Teorema 1.3 (de Mertens). *Si una de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ o $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ es absolutamente convergente y la otra convergente, entonces la serie producto es convergente al producto de las sumas de las series. Además, si las dos series son absolutamente convergentes, la serie producto es absolutamente convergente. Esto es, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \longrightarrow A$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \longrightarrow B$ absolutamente, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \longrightarrow A \cdot B$.*

1.2. Series de potencias

En este apartado trataremos las series de potencias. Comenzaremos recordando que la convergencia de una serie de potencias depende exclusivamente del radio de convergencia, el cual se obtiene a través del cálculo de un cierto límite. Por otro lado, estudiaremos también la continuidad y derivabilidad de la función límite de una serie de potencias definida en el intervalo de convergencia. Finalizaremos el apartado definiendo las funciones analíticas y viendo condiciones suficientes que garanticen que una función infinitamente derivable es analítica.

Definición 1.6. Una *serie de potencias* de coeficientes reales relativa a $x_0 \in \mathbb{R}$ es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots , \quad a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El punto x_0 se dice que es el *centro* de la serie de potencias, mientras que los números a_n se conocen como los *coeficientes* de la serie.

Nota 1.3. Al darle valores a la variable indeterminada, x, la serie de potencias se convierte en una serie numérica.

1.2.1. Convergencia de series de potencias. Derivabilidad y analiticidad de funciones

Teorema 1.4 (Fórmula de Cauchy-Hadamard). *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *una serie de potencias centrada en* x_0*, y sea* $\lambda = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$*. Denotemos* $R := \frac{1}{\lambda}$ *al radio de convergencia de la serie de potencias, de modo que* $R = 0$ *si* $\lambda = +\infty$ *y* $R = +\infty$ *si* $\lambda = 0$*. Se verifica:*

(a) Si λ *es finito y no nulo, la serie converge absolutamente para*

$x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \frac{1}{\lambda}$*, y diverge para* $x \in \mathbb{R} : |x - x_0| > \frac{1}{\lambda}$*.*

(b) Si $\lambda = 0$*, la serie converge absolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$*.*

(c) Si $\lambda = +\infty$*, la serie diverge* $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_o\}$*.*

Así pues, si $\lambda < +\infty$, tiene sentido definir la función

$$f : \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \frac{1}{\lambda}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

La función así definida tiene las importantes propiedades siguientes:

Teorema 1.5. *La función f(x) anterior es de clase* C^∞ *en su intervalo de definición y se tiene que,* $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \frac{1}{\lambda}$$

En particular

$$f^{k)}(x_0) = k!\, a_k \Longleftrightarrow a_k = \frac{1}{k!} f^{k)}(x_0)$$

Procediendo ahora al revés, consideremos una función $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea de clase C^∞ en un entorno de x_0. Es posible construir la serie potencial formal

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$$

que se llamará *serie de Taylor* relativa a f en x_0. Cabe preguntarse si se verificará que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n$$

en algún entorno de x_0.

Definición 1.7. Se dirá que f es *analítica* en $x_0 \in \Omega$, $f \in C^{\infty}(x_0)$ si verifica las dos condiciones siguientes:

(I) $f \in C^{\infty}(x_0)$

(II) $\exists r > 0 : \forall x \in B(x_0, r) \cap \Omega$, se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Nota 1.4. La anterior definición toma todo su sentido porque se prueba que si la función es igual a alguna serie potencial en un entorno de x_0, ha de ser igual a la de Taylor.

Nota 1.5. El carácter indefinidamente derivable de la función (en un entorno de x_0) e incluso la convergencia absoluta de la serie de Taylor en dicho entorno, no implican la igualdad anterior.

Ejemplo 1.1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es infinitamente derivable para cualquier $x \in \mathbb{R}$, y, en particular, todas sus derivadas en 0 son nulas: $f^{n)}(0) = 0$. Por tanto, su serie de Taylor alrededor de 0 es identicamente nula, y en ningún entorno de dicho punto coinciden la función y la serie de Taylor, por lo que no es analítica.

1.3. Resultados para sucesiones con subíndice múltiple

Consideremos ahora una colección de números reales que tienen por subíndice más de un número entero $\{a_{p_0 \ldots p_N}\}_{(p_0 \ldots p_n) \in \mathbb{N}^{N+1}}$.

Esta colección es una auténtica sucesión porque el conjunto $\overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{N+1}$ es numerable, es decir, porque existe una biyección

$$J_{N+1} \ : \ \overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{N}$$

que permite poner la colección de números uno detrás de otro de modo que cada elemento tenga uno siguiente. Por tanto, tiene sentido definir

$$\sum_{p_0 \ldots p_N = 0}^{\infty} |a_{p_0 \ldots p_N}| = \sum_{0}^{\infty} |a_{J_N(p_0 \ldots p_N)}|$$

y decir que la serie es *absolutamente convergente* si la anterior serie tiene suma finita. En este caso, se define sin ambigüedad

$$\sum_{p_0 \ldots p_N = 0}^{\infty} a_{p_0 \ldots p_N} = \sum_{0}^{\infty} a_{J_N(p_0 \ldots p_N)}$$

cualquiera que sea la biyección que se escoja.

Definición 1.8. Definimos el *producto* de dos series absolutamente convergentes

$$\sum_{p_0 \ldots p_N = 0}^{\infty} a_{p_0 \ldots p_N} \quad \text{y} \quad \sum_{q_0 \ldots q_N = 0}^{\infty} b_{q_0 \ldots q_N}$$

del modo siguiente. Ya que el orden de sumación de los términos de la serie es irrelevante, se tiene que

$$\sum_{p_0 \ldots p_N = 0}^{\infty} a_{p_0 \ldots p_N} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{y} \quad \sum_{q_0 \ldots q_N = 0}^{\infty} b_{q_0 \ldots q_N} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

siendo respectivamente

$$\left.\begin{array}{l} A_n = \displaystyle\sum_{(p_0\ldots p_N)\in I_n} a_{p_0\ldots p_N} \\ B_n = \displaystyle\sum_{(q_0\ldots q_N)\in I_n} b_{q_0\ldots q_N} \end{array}\right. , \text{ con } \quad I_n = \{(r_0,\ldots,r_N)\in \mathbb{N}^{N+1} : r_0+\cdots+r_N = n\}$$

Pues bien, se define

$$\sum_{p_0\ldots p_N=0}^{\infty} a_{p_0\ldots p_N} \cdot \sum_{q_0\ldots q_N=0}^{\infty} b_{q_0\ldots q_N} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

Definición 1.9. Se llama *serie potencial formal* de coeficientes reales relativa a $(x_0, y_0) = (x_{00}, y_{01}, \ldots, y_{0N}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ a una expresión de la forma

$$\sum_{p_0\ldots p_N=0}^{\infty} a_{p_0\ldots p_N} \cdot (x-x_{00})^{p_0}(y_1-y_{01})^{p_1}\cdots(y_N-y_{0N})^{p_N}$$

Al darle valores a las indeterminadas, $x, y_1, \ldots, y_N$, la serie formal se convierte en una serie numérica múltiple.
En particular, si $x = x_0$, la serie trivialmente vale $a_{0\ldots 0}$. Se tiene

Proposición 1.1. *Sea* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *un punto de convergencia absoluta de la serie potencial formal. Entonces, la serie numérica*

$$\sum_{p_0\ldots p_N=0}^{\infty} a_{p_0\ldots p_N} \cdot (x-x_{00})^{p_0}(y_1-y_{01})^{p_1}\cdots(y_N-y_{0N})^{p_N}$$

es absolutamente convergente

$$\forall (x,y) \in R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{N+1} : |x-x_{00}| < |\overline{x}-x_{00}|, |y_i - y_{0i}| < |\overline{y_i} - y_{0i}|,\ i = 1\ldots N\right\}.$$

Denotaremos por Ω el interior del conjunto de convergencia absoluta de la serie que resulta ser no vacío si $|\overline{x} - x_{00}| \neq 0$ y $|\overline{y_i} - y_{0i}| \neq 0,\ i = 1\ldots N$, y conexo. Se puede definir

$$f : (x,y)\in\Omega \longmapsto f(x,y) = \sum_{p_0\ldots p_N=0}^{\infty} a_{p_0\ldots p_N}\,(x-x_{00})^{p_0}(y_1-y_{01})^{p_1}\cdots(y_N-y_{0N})^{p_N} \ \in\ \mathbb{R}$$

Se tiene:

Proposición 1.2. *La anterior aplicación tiene las siguientes propiedades:*

(a) Es de clase C^∞ *en* $\Omega : f \in C^\infty(\Omega)$.

(b) se tiene que

$$a_{p_0 \dots p_N} = \frac{1}{p_0!p_1! \cdots p_N!} \cdot \frac{\partial^{p_0+\cdots+p_N}}{\partial x^{p_o} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_N}} \, f(x_0, y_0)$$

De forma similar al caso unidimensional, si se considera una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^\infty(x_0, y_0)$, cabe construir la serie potencial formal

$$\sum_{p_0 \cdots p_N = 0}^{\infty} \frac{1}{p_0!p_1! \cdots p_N!} \cdot \frac{\partial^{p_0+\cdots+p_N}}{\partial x^{p_o} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_N}} \, f(x_0, y_0)(x - x_{00})^{p_0} (y_1 - y_{01})^{p_1} \cdots (y_N - y_{0N})^{p_N}$$

que llamaremos serie de Taylor relativa a f en (x_0, y_0). Cabe preguntarse por la igualdad de esta serie con la función. Así, se define:

Definición 1.10. Se dirá que f es analítica en $(x_0, y_0) \in \Omega$, $f \in C^\infty(x_0, y_0)$ si verifica las dos condiciones siguientes:

(I) $f \in C^\infty(x_0, y_0)$

(II) $\exists r > 0 : \ \forall (x, y) \in B((x_0, y_o), r) \subset \Omega$, se tiene:

$$f(x, y) = \sum_{p_0 \cdots p_N = 0}^{\infty} \frac{1}{p_0!p_1! \cdots p_N!} \cdot \frac{\partial^{p_0+\cdots+p_N}}{\partial x^{p_o} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_N}} \, f(x_0, y_0)(x - x_{00})^{p_0} (y_1 - y_{01})^{p_1} \cdots (y_N - y_{0N})^{p_N}$$

Se dirá que f es analítica en Ω si lo es en cada punto de Ω.

Definición 1.11. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$. Se dirá que f es analítica en $(x_0, y_0) \in \Omega$ (o en Ω) si lo son respectivamente cada una de sus componentes.

Teorema 1.6. *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$. *Entonces* f *es analítica en* Ω *si y solo si* $f \in C^\infty$ *y para cada compacto* $K \subset \Omega$ *existen* $M > 0$, $r > 0$ *tales que,* $\forall (x, y) \in K$,

$$\left| \frac{\partial^{p_0+\cdots+p_N}}{\partial x^{p_o} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_N}} \, f(x, y) \right| \leq M \, p_0! \, p_1! \cdots p_N! \, r^{-(p_0+p_1+\cdots+p_N)}, \quad \forall (p_0, \dots, p_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$$

Basándonos en este teorema, se dan dos propiedades que necesitaremos:

Proposición 1.3. *Sean* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *analíticas en* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Entonces,* $f \cdot g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *es analítica en* (x_0, y_0) *y el desarrollo de* $f \cdot g$ *se encuentra mediante el producto de Cauchy descrito anteriormente.*

Teorema 1.7 (Sustitución)**.** *Sea* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *analítica en* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *y* $\Psi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *tal que* Ψ *es analítica en* x_0 *y* $\Psi(x_0) = y_0$. *Entonces* $f(x, \Psi(x))$ *es analítica en* x_0.

1.4. Otros resultados de utilidad

En este apartado vamos a enunciar dos teoremas a los que vamos a recurrir a lo largo de este proyecto. Las demostraciones de ambos pueden verse en [1]:

El *Teorema de la Función Inversa* proporciona las condiciones suficientes para que una funcion sea invertible localmente en un entorno de un cierto punto p en términos de su derivada en dicho punto. Se trata, pues, de un teorema de existencia local de la función inversa:

Teorema 1.8 (de la función inversa)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto,* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y* $\overline{a} \in A$. *Si* f *es de clase* $\mathcal{C}^1$ *en* A *y* $det(Df(\overline{a})) \neq 0$, *entonces existe un entorno abierto de* $\overline{a} \in A$ *y uno de* $\overline{b} = f(\overline{a})$ *en el que la función* f *tiene* inversa local*:* $f^{-1} : B \longrightarrow A$. *Además:*

$$Df^{-1}(\overline{y}) = [Df(\overline{x})]^{-1}, \quad \forall \overline{y} \in B, \ con\ \overline{y} = f(\overline{x}).$$

Intrínsecamente conectado con este teorema, está el llamado *Teorema de la Función Implícita*: en muchas ocasiones podemos encontrar relaciones funcionales o ecuaciones en las que las variables dependientes no se expresan explícitamente como funciones de las independientes. Se trata ahora de estudiar si detrás de cada una de estas relaciones existe una relación funcional implícita que permita definir una o más de sus variables como función del resto de las variables:

Teorema 1.9 (de la función implícita)**.** *Supongamos una relación implícita del tipo* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$. *Esta ecuación define implícitamente a* x_k *como* *función de las demás variables, en notación* $x_k = \Psi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ *en un entorno de un punto* $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ *si y sólo si:*

a) $f(a_1, \ldots, a_n) = c$ *(es decir, el punto verifica la relación implícita).*

b) La función f *y sus* n *parciales* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ *son continuas en un entorno de* $\overline{a}$*.*

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a}) \neq 0$.

En caso afirmativo, la derivada parcial de x_k *respecto a otra variable* x_i *se obtiene mediante:*

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i}(\overline{a}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{a})}{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{a})}$$

Capítulo 2

Teorema de Cauchy

El siguiente teorema de Cauchy es históricamente la primera prueba de existencia y unicidad de solución para el problema de Cauchy

$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

con una función de hipótesis bastante generales. Además del interés intrínseco del Teorema, presenta el de obtener término a término el desarrollo de Taylor de la solución analítica:

Teorema 2.1 (Analiticidad de las soluciones del (PC))**.** *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *abierto, y* $(x_0, y_0) \in \Omega$*. Supongamos que* f *es analítica en un entorno de* (x_0, y_0)*. Entonces* $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ *es analítica en un entorno de* x_0*.*

Demostración:

Por simplicidad de la notación, efectuaremos en primer lugar la demostración para el caso $N = 1$. Supondremos además que $x_0 = y_0 = 0$, lo que no implica restricción alguna, pues basta hacer una traslación. Así pues, $(0,0) \in \Omega$ y el (PC) planteado es

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Por hipótesis,

$$\exists\, \rho > 0 : |x| < \rho, |y| < \rho \Rightarrow \sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} |a_{p_0p_1}||x|^{p_0}|y|^{p_1} < +\infty,$$

y

$$f(x,y) = \sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} a_{p_0p_1} x^{p_0} y^{p_1}, \quad \text{con } a_{p_0p_1} = \frac{1}{p_0!p_1!} \frac{\partial^{p_0+p_1}}{\partial x^{p_0}\, \partial y^{p_1}} f(x_0, y_0)$$

Se debe probar que, denotando $\varphi = \varphi(\cdot\,; 0, 0)$:

$$\exists r > 0 : |x| < r \Rightarrow x \in I(0,0), \quad \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n < +\infty \quad \text{y}$$

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{con} \quad c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \varphi(0)$$

Comenzaremos suponiendo que hay solución analítica y determinaremos los coeficientes que debe tener su desarrollo en serie. Probaremos después que la serie que tiene esos coeficientes define efectivamente una función analítica que es solución del (PC).

$$\text{Como} \begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) & \forall x \in I(0,0) \\ \varphi(0) = 0 \end{cases},$$

$$\text{resulta} \begin{cases} c_0 = \varphi(0) = 0 \\ c_n = \dfrac{1}{n!} \dfrac{d^n}{dx^n} \varphi(0) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x, \varphi(x)) \Big|_{x=0} & \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

Desarrollando estas fórmulas, queda:

- $c_0 = \varphi(0) = 0$
- $c_1 = f(0, \varphi(0)) = f(0,0) = a_{00}$
- $c_2 = \dfrac{1}{2!} \dfrac{d}{dx} f(x, \varphi(x) \Big|_{x=0} = \dfrac{1}{2} \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot \varphi'(0) \right] =$
  $= \dfrac{1}{2}(a_{10} + a_{01} \cdot a_{00})$
- $c_3 = \dfrac{1}{3!} \dfrac{d^2}{dx^2} f(x, \varphi(x) \Big|_{x=0} = \dfrac{1}{3!} \dfrac{d}{dx} \left[\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \varphi'(x) \right]_{x=0} =$
  $= \dfrac{1}{3!} \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \cdot \varphi'(0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)[\varphi'(0)]^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot \varphi''(0) \right) =$

$$= \frac{1}{3!}[2!\, a_{20} + 2a_{11} \cdot a_{00} + 2!\, a_{02} \cdot a_{00}^2 + a_{01}(a_{10} + a_{01} \cdot a_{00})],$$

y así sucesivamente.

Es decir, los coeficientes c_n están determinados de manera unívoca mediante expresiones polinómicas con coeficientes ≥ 0 de los coeficientes $a_{p_0p_1}$. Los coeficientes de la expresión polinómica son independientes de f.
Con estos coeficientes c_n se puede construir una serie de potencias formal, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, que probaremos define una función en cierto entorno de $x_0 = 0$ que es solución del (PC).

Supongamos por un momento que

$$\exists \tilde{r} : |x| < \tilde{r}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n < +\infty \tag{2.1}$$

En tal caso se puede definir $\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n \quad \text{para} \quad |x| < \tilde{r},$

que es analítica. Su derivada también lo es en $|x| < \tilde{r}$ y asímismo lo es $f(x, \Psi(x))$ en un entorno de $(0, 0)$, ya que $\Psi(0) = c_0 = 0$ (Teorema 1.7).

La igualdad $\Psi'(x) = f(x, \Psi(x))$ sigue de lo siguiente. Nótese que la función $\varphi(x)$ (solución del (PC)) y $\Psi(x)$ verifican ambas que

$$\frac{d^n}{dx^n}\varphi(0) = n!\, c_n = \frac{d^n}{dx^n}\Psi(0)$$

Entonces, $\quad \Psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n$,

mientras que $\quad f(x, \Psi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad$ siendo $\quad \alpha_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} f(x, \Psi(x))\Big|_{x=0}$.

Este cálculo depende solo de las derivadas parciales de f en $(0, 0)$ y de Ψ en 0; coincide, por tanto, con el efectuado anteriormente, y:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} f(x, \Psi(x))\Big|_{x=0} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n} f(x, \varphi(x))\Big|_{x=0} = (n+1)c_{n+1}$$

Así pues

$$\exists r > 0 : |x| < r, \quad x \in I(0,0) \quad \text{y} \quad \begin{cases} \Psi' = f(x, \Psi(x)) \\ \Psi(0) = 0 \end{cases}$$

De la unicidad de coeficientes se sigue la unicidad de solución analítica del (PC), y de ahí que

$$\exists r > 0 : |x| < r, \quad x \in I(0,0) \quad \text{y} \quad \varphi(x) = \Psi(x)$$

Por tanto, hay que probar (2.1).

Se denomina *mayorante* de f (en $(0,0)$) a cualquier F de la clase C^∞ en un entorno de $(0,0)$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{p_0+p_1} f}{\partial x^{p_0}\, \partial y^{p_1}}(0,0) \right| \leq \frac{\partial^{p_0+p_1} F}{\partial x^{p_0}\, \partial y^{p_1}}(0,0) \quad \forall (p_0, p_1) \in \mathbb{N}^2$$

Si F es una mayorante se puede considerar lo que se denomina un (PC) mayorante del dado

$$(\mathrm{PC})_m \begin{cases} y' = F(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Supongamos que se encuentra una F mayorante analítica y tal que el $(\mathrm{PC})_m$ tiene solución analítica, Φ, en un entorno de $x_0 = 0$. En este caso

$$\exists \tilde{r} > 0 : |x| < \tilde{r} \;\Rightarrow\; \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot x^n$$

Pero teniendo en cuenta que los coeficientes de la solución el problema de Cauchy (del (PC) y del $(\mathrm{PC})_m$) se obtienen mediante la misma expresión polinómica de coeficientes positivos, resultará

$$|c_n| \leq C_n \quad \forall n \geq 0$$

y de ahí seguirá la convergencia de la serie pedida en (2.1). Así pues, el problema se reduce a hallar una mayorante analítica de f, F, tal que la solución del $(\mathrm{PC})_m$, Φ, sea analítica en un entorno de $x_0 = 0$.

Ya que

$$\exists \rho > 0 : |x| < \rho,\ |y| < \rho \ \Rightarrow \sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} |a_{p_0p_1}||x|^{p_0}|y|^{p_1} < +\infty$$

se sigue que

$$\exists \lambda > 0,\, \exists M > 0 :\ |a_{p_0p_1}|\lambda^{p_0+p_1} \leq M,$$

y por tanto que

$$\left| \frac{\partial^{p_0+p_1} f}{\partial x^{p_0}\, \partial y^{p_1}}(0,0) \right| = p_0!\, p_1!\, |a_{p_0p_1}| \leq \frac{p_0!\, p_1!}{\lambda^{p_0+p_1}} M$$

Consideremos

$$F(x,y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y}{\lambda}\right)} \quad \text{para} \quad |x| < \lambda, |y| < \lambda$$

F es analítica en el origen y

$$F(x,y) = M \cdot \sum_{p_0=0}^{\infty} \frac{x^{p_0}}{\lambda^{p_0}} \cdot \sum_{p_1=0}^{\infty} \frac{y^{p_1}}{\lambda^{p_1}} = \sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} \frac{M}{\lambda^{p_0+p_1}}\, x^{p_0} y^{p_1}$$

para $|x| < \lambda, |y| < \lambda$ por la Proposición 1.3. Esta es la mayorante analítica de f, puesto que

$$\frac{\partial^{p_0+p_1} F}{\partial x^{p_0}\, \partial y^{p_1}}(0,0) = p_0!\, p_1!\, \frac{M}{\lambda^{p_0+p_1}}$$

Resolvamos ahora

$$(\mathrm{PC})_m \begin{cases} y' = \dfrac{M}{\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\left(1-\frac{y}{\lambda}\right)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si $|x| < \lambda$,

$$\left(1-\frac{y}{\lambda}\right) y' = \frac{M}{1-\frac{x}{\lambda}} \ \Rightarrow\ -2\left(1-\frac{y}{\lambda}\right)\frac{y'}{\lambda} = -\frac{2}{\lambda}\cdot\frac{M}{1-\dfrac{x}{\lambda}} \overset{Integrando}{\Longrightarrow} \left(1-\frac{y}{\lambda}\right)^2 + Cte =$$

$$= 2\cdot M \cdot \ln\left(1-\frac{x}{\lambda}\right) \overset{y(0)=0}{\Longrightarrow} 1 + Cte = 0 \Rightarrow \left(1-\frac{y}{\lambda}\right)^2 - 1 = 2\cdot M\cdot \ln\left(1-\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \frac{y}{\lambda} - 1 =$$

$$= \pm\sqrt{1+2M\ln\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)} \Rightarrow y = \lambda\left(1 \pm \sqrt{1+2M\ln\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)}\right) \overset{y(0)=0}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \lambda\left(1-\sqrt{1+2M\ln\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)}\right),$$

función que es analítica en el origen con desarrollo válido si

$$\begin{cases} |x| < \lambda \\ |2M \ln\left(1 - \dfrac{x}{\lambda}\right)| < 1 \end{cases}$$

es decir, si

$$\begin{cases} |x| < \lambda \\ -1 < |2M \ln\left(1 - \dfrac{x}{\lambda}\right)| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |x| < \lambda \\ e^{-\frac{1}{2M}} < 1 - \dfrac{x}{\lambda} < e^{\frac{1}{2M}} \end{cases}$$

por la monotonía de la función exponencial. La condición es, pues:

$$\begin{cases} |x| < \lambda \\ \lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right) < x < \lambda\left(1 - e^{\frac{1}{2M}}\right) \end{cases}$$

Pero $\quad \lambda\left|1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right| < \lambda\left|1 - e^{\frac{1}{2M}}\right|, \quad$ por tanto, basta tomar $\quad |x| < \lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right)$.

Veamos ahora qué ocurre cuando $N = n$, donde $n > 1$.

El problema en este caso sería de la forma

$$\begin{cases} y_i'(x) = f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)), \quad i = 1, \ldots, n \\ y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \quad i = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.2}$$

Igual que para el caso $N = 1$, suponemos en primer lugar que las condiciones iniciales del sistema (2.2) son $x_0 = y_1^{(0)} = \cdots = y_n^{(0)} = 0$.

Entonces tendremos

$$f_i(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) = \sum_{p_0, \ldots, p_n = 0}^{\infty} a^{(i)}_{p_0 \cdots p_n} x^{p_0} y_1^{p_1} \cdots y_n^{p_n} \tag{2.3}$$

donde

$$a^{(i)}_{p_0 \cdots p_n} = \frac{1}{p_0! p_1! \cdots p_n!} \left(\frac{a^{p_0 + \cdots + p_n} f_i}{\partial x^{p_0} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_n}} \right) (0, \ldots, 0)$$

y supondremos que las series son convergentes para $|x| < r$; $|y_i| < t$,

$i = 1, 2, \ldots, n$

El procedimiento es análogo al caso $N = 1$, probando que las funciones $y_i(x)$

que constituyen la solución del sistema (2.2) son analíticas, es decir, que están determinadas de manera única por unos coeficientes c_n que hay que calcular. En otras palabras, que pueden expresarse por:

$$y_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(i)} x^n \tag{2.4}$$

con

$$c_n^{(i)} = \frac{1}{n!} y_i^{(n)}(0)$$

Falta ver que dichas series sean convergentes, para lo cual hay que encontrar una función mayorante, F, de clase C^∞, en un entorno de $(0,0)$ tal que

$$\left| \left(\frac{\partial^{(p_0+p_1+\cdots+p_n)} f_i}{\partial x^{p_0} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_n}} \right)(0,\ldots,0) \right| \leq \left(\frac{\partial^{(p_0+p_1+\cdots+p_n)} F}{\partial x^{p_0} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_n}} \right)(0,\ldots,0)$$

Procedemos entonces a mostrar que es posible encontrar una función mayorante F. Por la convergencia absoluta de las series 2.3 por $|x| < r$, $|y_i| < t$, se sigue que existe una constante M tal que $\forall\, p_0, p_1, \ldots, p_n$ se tiene

$$\left| \frac{\partial^{(p_0+p_1+\cdots+p_n)} f_i}{\partial x^{p_0} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_n}}(0,\ldots,0) \right| \leq \frac{p_0! p_1! \cdots p_n!}{r^{p_0} t^{p_1+\cdots+p_n}} M \tag{2.5}$$

Consideramos ahora la función

$$F(x, y_1, \ldots, y_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{t}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{t}\right)} = M \sum_{p_0 \cdots p_n = 0}^{\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^{p_0} \left(\frac{y_1}{t}\right)^{p_1} \cdots \left(\frac{y_n}{t}\right)^{p_n}$$

Esta última serie es convergente para $|x| < r$, $|y_i| < t$, $i = 1, \ldots, n$. La función $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ es por tanto analítica para tales valores de las variables, y se cumple, además, que

$$\frac{\partial^{(p_0+p_1+\cdots+p_n)} F(0)}{\partial x^{p_0} \partial y_1^{p_1} \cdots \partial y_n^{p_n}} = \frac{p_0! p_1! \cdots p_n!}{r^{p_0} t^{p_1+\cdots+p_n}} M$$

De 2.5 se sigue que, efectivamente, la función $F(x, y_1, \ldots, y_n)$ es una mayorante de las funciones $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Por tanto, el problema mayorante en este caso sería

$$(\mathrm{PC})_m \begin{cases} y_i' = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y_1}{t}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{t}\right)}, & i=1,\dots,n \\ y_i(0)=0, \qquad i=1,\dots,n \end{cases}$$

Como el miembro derecho de la ecuación diferencial no depende de i, y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se tiene

$$y_1(x) \equiv y_2(x) \equiv \cdots \equiv y_n(x) \equiv y(x),$$

lo que nos lleva a resolver una única ecuación diferencial de primer orden:

$$y'(x) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{r}\right)\left(1-\frac{y}{t}\right)^n}$$

Mediante separación de variables, obtenemos la solución

$$y_1(x) \equiv \cdots \equiv y_n(x) \equiv y(x) \equiv t\left[1 - \sqrt[n+1]{1 + \frac{n+1}{t} Mr \log\left(1-\frac{x}{r}\right)}\right],$$

donde la raíz debe tomarse en valor absoluto, y está bien definida para

$$x < r\left(1 - e^{-\frac{t}{(n+1)Mr}}\right).$$

La raíz puede desarrollarse en una serie binomial si

$$\frac{n+1}{t} Mr \left|\log\left(1-\frac{x}{r}\right)\right| < 1,$$

es decir, si

$$r\left(1 - e^{\frac{t}{(n+1)Mr}}\right) < x < r\left(1 - e^{\frac{-t}{(n+1)Mr}}\right)$$

y, por tanto, si

$$|x| < r\left(1 - e^{-\frac{t}{(n+1)Mr}}\right) \tag{2.6}$$

ya que

$$r\left(1 - e^{\frac{t}{(n+1)Mr}}\right) < -r\left(1 - e^{\frac{-t}{(n+1)Mr}}\right)$$

De hecho, de

$$e^{\frac{t}{(n+1)Mr}} + e^{-\frac{t}{(n+1)Mr}} - 2 = \left[e^{\frac{t}{2(n+1)Mr}}\right) - e^{-\frac{t}{2(n+1)Mr}}\right)\Big]^2 > 0$$

se tiene

$$1 - e^{\frac{t}{(n+1)Mr}} < -\left(1 - e^{\frac{-t}{(n+1)Mr}}\right)$$

De este modo, en el intervalo (2.6) se tiene

$$\sqrt[n+1]{1 + \frac{n+1}{t} Mr \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)} = \sum_{s=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{n+1}}{s} \left(\frac{n+1}{t} Mr\right)^s \left[\log\left(1 - \frac{x}{r}\right)\right]^s,$$

donde

$$\binom{\frac{1}{n+1}}{s} = \frac{1}{s!} \cdot \left[\frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{n+1} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{n+1} - (s-1)\right)\right],$$

y como $\log\left(1 - \frac{x}{r}\right)$ se puede desarrollar en una serie de MacLaurin en el mismo intervalo, la solución $\{y_i(x)\}$ puede desarrollarse análogamente.

$\square$

Ejemplo 2.1 (Aplicación del teorema 2.1)**.** Consideremos el problema de Cauchy

$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} y'' = xy' + 2y \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Se trata de encontrar la solución sabiendo que ha de ser analítica según el teorema 2.1.

Se tiene que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{para} \quad |x| < r$$

y

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad \varphi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

con

$$\varphi(0) = c_0 = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'(0) = c_1 = 1$$

Sustituyendo en la EDO:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n-1)c_{n+2}x^n = \sum n = 0^{\infty}(n+2)c_n x^n$$

Identificando coeficientes:

$$c_{n+2} = \frac{1}{n+1} c_n \quad \forall n \geq 0,$$

y por tanto

$$\begin{cases} c_0 = 0 \ \Rightarrow \ c_{2k} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ c_{2k+1} = \dfrac{1}{2k} c_{2k-1} = \dfrac{1}{2k(2k-2)\cdots 2} c_1 \ \overset{c_1=1}{\Longrightarrow} \ c_{2k+1} = \dfrac{1}{2^k k!} \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Así

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k = x\, e^{x^2/2}$$

Capítulo 3

Teorema de Cauchy-Kowalewski

Este capitulo lo vamos a dedicar a estudiar un resultado clásico. Para una ecuación diferencial ordinaria particular cuyo segundo miembro es expresable como la suma de una serie de potencias, Cauchy obtuvo la solución del problema como una serie, calculándose los coeficientes como se mencionó en el capítulo anterior.

El caso de las ecuaciones en derivadas parciales es debido a Cauchy y a Sofia Kovalevskaya, más conocida por Kowalewski.

El teorema de Cauchy-Kovalévskaya formaba parte del trabajo por el que Kowalewski obtuvo el doctorado. Fue publicado en Crelle′s Journal. Es un teorema de existencia y unicidad de soluciones de una ecuación en derivadas parciales de orden n con condiciones iniciales para funciones analíticas. En 1842 Cauchy había demostrado la existencia de solución de una ecuación en derivadas parciales lineales de primer orden. En la misma época, Weierstrass, que no conocía los trabajos de Cauchy, demostró la existencia y "unicidad" de la solución para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias y propone a Sonia extender estos resultados a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. Este teorema, elaborado independientemente del de Cauchy, generaliza sus resultados y establece unas demostraciones tan simples, completas y elegantes que son las que se exponen en la actualidad en los libros de análisis.

3.1. Problema de Cauchy restringido

Denotando por u la función incógnita, de más de una variable; supondremos $u = u(t, x_1, \ldots, x_n)$, donde t es la incógnita respecto de la cual la derivada ocupa un lugar privilegiado en el planteamiento del problema.

Denotaremos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t \quad y \quad \frac{\partial u}{x_i} = p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden , en forma normal o "kovalevskiana", es una expresión del tipo

$$u_t = F(t, x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n).$$

De forma sintética, podemos escribir $u_t = F(t, x, u, p)$, donde t y u son variables escalares, y x y p son variables vectoriales.

Definición 3.1. Diremos que $(t, x_1, \ldots, x_n) \in D \longmapsto u = f(t, x) \in \mathbb{R}$ es solución de la E.D.P. si f admite derivadas parciales de todos los órdenes. Como F ha de ser al menos continua, pediremos que $f \in C^1$, y ha de ocurrir que:

1. $\forall (t, x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad (\underbrace{t}_{1}, \underbrace{x}_{n}, \underbrace{f(t, x)}_{1}, \underbrace{f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x)}_{n}) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$ pertenezca al conjunto de definición de F.

2. $\forall (t, x) \in D, \quad f_t(t, x) = F(t, x, f(t, x), f_1(t, x), \ldots, f_n(t, x)).$

LLamaremos *condición restringida de Cauchy* a lo siguiente: consiste en agregarle a la ecuación $u_t = F(t, x, u, p)$ el dato $u(t_0, x) = \varphi(x)$. Este dato se llama también condición inicial, por semejanza con el problema de Cauchy para una ecuación diferencial en forma normal $y' = F(x, y)$.

Conocido el ya nombrado *problema de Cauchy restringido* y la correspondiente notación, introducimos el teorema:

Teorema 3.1 (de Cauchy-Kowalewski)**.** *Denotamos por C^w el conjunto de las funciones analíticas. Sea $\varphi \in C^w(x_0)$, y llamemos $u_0 = \varphi(x_0)$ y $\frac{\partial \varphi(x_0)}{\partial x_i} = p_{oi}$, siendo $p_0 = (p_{01}, \ldots, p_{0n})$. Sea $F \in C^w(t_0, x_0, u_0, p_0)$. Entonces existe una función $f \in C^w(t_0, x_0)$ que verifica:*

1. *Es solución de* $u_t = F(t, x, u, p)$, *en un entorno de* (t_0, x_0).

2. *Verifica la condición de Cauchy:* $f(t_0, x) = \varphi(x)$.

3. *Es única, esto es, si* $f_1 \in C^w(t_0, x_0)$ *y* $f_2 \in C^w(t_0, x_0)$ *con las condiciones anteriores en el menor de los entornos en que estan definidas, entonces* f_1 *y* f_2 *son iguales.*

Demostración:

Plantearemos la posibilidad de encontrar f a partir de un desarrollo en serie en un entorno de (t_0, x_0), de modo que si existe será:

$$f(t, x) = \sum_{m=0, |\alpha|=0}^{\infty} c_{m\alpha}(t - t_0)^m \underbrace{(x_0 - x_{01})^{\alpha_1} \cdots (x_n - x_{0n})^{\alpha_n}}_{(x-x_0)^\alpha},$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, definiendo así $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

El problema quedaría resuelto al determinar $c_{m\alpha}$ para que $f(t, x)$ verifique todas las condiciones que queremos.

Forzando a que la serie cumpla estas condiciones (mediante un método recursivo), obtendremos una serie formal que, a priori, no ha de converger más que en (t_0, x_0). La principal dificultad del teorema va a estar en probar que la serie representa una función. Si esto se cumple, tendremos $f(t_0, x) = \varphi(x)$ (condición de Cauchy).

$\varphi(x)$ es analítica en x_0, luego,

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha (x - x_0)^\alpha \text{ en un entorno de } x_0, \text{siendo } c_\alpha = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} D^\alpha \varphi(x_0);$$

$$f(t_0, x) = \sum_{m=0, |\alpha|=0}^{\infty} c_{m\alpha}(t - t_0)^m (x - x_0)^\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t_0, x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{0\alpha}(x - x_0)^\alpha = \varphi(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha (x - x_0)^\alpha,$$

y como los coeficientes del mismo grado han de ser iguales, se tiene que $c_{0\alpha} = c_\alpha$ (coeficientes unívocamente determinados).

Vamos a obtener los coeficientes de la forma $c_{1\alpha}$. Sabemos que:

$$c_{1\,0\ldots0} = \frac{1}{1!\,0!\cdots0!}\frac{\partial f(t_0,x_0)}{\partial t} \overset{\text{si f es solución de la EDP}}{=} F(t_0,x_0,f(t_0,x_0),p_{01},\ldots,p_{0n}),$$

$$\text{ya que } \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_i}\right|_{(t_0,x_0)} = \left.\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}\right|_{(x=x_0)} = p_{0i}, \quad i=1,\ldots,n.$$

Obtenemos $c_{1\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ de la manera siguiente:

$$c_{1\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{1}{1!\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{1+|\alpha|}f(t_0,x_0)}{\partial t\,\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \overset{(*_1)}{=}$$

$(*_1)$ Se puede derivar en cualquier orden por ser las funciones de clase infinito

$$= \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)_{(t_0,x_0)} =$$

$$= \frac{1}{\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\bigg(F\Big(t,x,f(t,x),\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_n}\Big)\bigg)_{(t_0,x_0)}$$

Así, por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}F\Big(t,x,f(t,x),\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_n}\Big) = \frac{\partial F}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x_i}+\cdots;$$

donde las derivadas de F respecto de sus argumentos son conocidas. Los demás términos de la suma son conocidos por lo siguiente:

$$f(t_0,x)=\varphi(x) \Rightarrow \left.\frac{\partial f(t_0,x)}{\partial x_i}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\right|_{x=x_0}; \text{ y análogamente}$$

$$\frac{\partial f(t_0,x)}{\partial x_i\cdot\partial x_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i\cdot\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial f(t_0,x_0)}{\partial x_i\cdot\partial x_j} = \left.\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\cdot\partial x_j}\right|_{x=x_0}.$$

Si necesitáramos derivar la suma respecto de otro argumento, obtenemos una suma cuyos términos son derivadas de F respecto de varios argumentos y derivadas de f respecto de varios argumentos, también en $f(t_0,x_0)$. De igual manera que en el caso anterior, esto se sigue de la igualdad $f(t_0,x)=\varphi(x)$.

Los coeficientes son pues sumas de produtos cuyos factores son derivadas sucesivas de F y φ. Las derivadas sucesivas de φ son, salvo coeficientes, igual a los $c_\alpha = c_{0\alpha}$. De modo que en la obtención de los coeficientes $c_{r\alpha}$ intervienen las derivadas sucesivas de F y los coeficientes de la forma $c_{0\alpha}$.

Para la obtención de los coeficientes de la forma $c_{2\alpha}$ se procede de manera análoga:

$$c_{2\,0\cdots 0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f(t_0,x_0)}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(F\big(t,x_1,f(t,x),\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f(t,x)}{\partial x_n})\right)_{(t_0,x_0)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial p_1}\cdot\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F(t,x)}{\partial p_n}\cdot\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t\partial x_n}\right]_{(t_0,x_0)}$$

donde las derivadas de F respecto de sus argumentos son conocidos. Los demás términos también lo son: $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t} = F(t,x,f(t,x),p_1,\dots,p_n)$, y el resto de coeficientes se calculan de forma análoga al caso anterior.

El coeficiente de la forma

$$c_{2\,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \frac{1}{2!\alpha_1!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{2+|\alpha|}f(t_0,x_0)}{\partial t^2\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{2!\cdots\alpha_n!}\cdot\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\left(\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2}\right)_{(t_0,x_0)}$$

, y el problema se reduce a la derivación respecto de x_i del corchete anterior.

El resultado es que los coeficientes de la forma $c_{2\,\alpha_1\dots\alpha_n}$ dependen de las derivadas de F y de los coeficientes de la forma $c_{1\,\alpha_1\dots\alpha_n}$. Los coeficientes, pues, se obtienen de manera única.

Si la serie que hemos construído define una función, ésta es solución de este problema de Cauchy. Haremos las simplificaciones siguientes:

1. Supondremos que $(t_0,x_0) = (0,\theta)$, que no introduce la menor restricción, pues se trata de un cambio: $\begin{cases} t^* = t - t_0 \\ x^* = x - x_0 \end{cases}$
2. Podemos suponer también que el dato inicial $\varphi(x) = 0$ sea la función 0; esto puede hacerse, pues bastará tomar como nueva función incógnita $v(t,x) = u(t,x) - \varphi(x)$, luego: $v(t_0,x) = u(t_0,x) - \varphi(x) = 0$.

   Además

   $$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\ y\ \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ \Rightarrow\ v_t = F\big(t,x,v+\varphi,\dots,\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},\dots\big):$$

la ecuación es de la misma clase que la anterior, y el problema de Cauchy se reduce a otro totalmente análogo con el dato inicial nulo. El hecho de que el dato inicial sea nulo quiere decir que $c_\alpha = 0 \Rightarrow c_{0\alpha} = 0$.

3. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $F(t_0, x_0, u_0, p_0) = 0$. Esto introduciría la simplificación $c_{1\,0\ldots0} = 0$. De ser $F(t_0, x_0, u_0, p_0) = k$, tomamos como nueva incógnita $w(t,x) = u(t,x) - kt$, y entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - k \Rightarrow w_t + k = F\big(t, x, w + kt, \frac{\partial (w+kt)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (w+kt)}{\partial x_n}\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow w_t = F\big(t, x, w + kt, \frac{\partial (w+kt)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (w+kt)}{\partial x_n}\big) - k,$$

del mismo tipo anterior y tal que

$$F\big(t_0, x_0, w_0 + kt_0, \frac{\partial (w_0+kt_0)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial (w_0+kt_0)}{\partial x_n}\big) - k = 0$$

De modo que el problema de Cauchy es relativo a la ecuación $u_t = F(t, x, u, p)$ con la condición inicial $u(t_0, x) = 0$, con $F \in C^w(t_0, x_0, u_0, p_0)$.
Hay que ver que la serie

$$f(t,x) = \sum_{m=0, |\alpha|=0}^{\infty} c_{m\alpha} t^m x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

define una función en un entorno del origen.

Vamos a buscar una mayorante convergente de dicha serie. Le asociaremos al problema de Cauchy un problema llamado mayorante, que probaremos tiene solución analítica.

El problema mayorante consiste en el problema de Cauchy relativo a

$$\begin{cases} u_t = \Phi(t, x, u, p), \\ u(t_0, x) = 0, \\ \Phi(t_0, x_0, u_0, p_0) = 0 \end{cases},$$

siendo Φ mayorante de F. Lo que haremos es cambiar la condición de Cauchy, de modo que el problema, que ya no será de Cauchy, tenga solución.

Como funciones mayorantes Φ tomaremos uno de los tres tipos siguientes:

a) $$\Phi_1(t,x,u,p) = M\left[\frac{1}{\left(1-\frac{t}{|\bar{t}|}\right)\left(1-\frac{x_1}{|\overline{x_1}|}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n}{|\overline{x_n}|}\right)\left(1-\frac{u}{|\overline{u}|}\right)\left(1-\frac{p_1}{|\overline{p_1}|}\right)\cdots\left(1-\frac{p_n}{|\overline{p_n}|}\right)}-1\right]$$

donde $\begin{array}{ll} |t|<|\bar{t}|, & |u|<|\overline{u}| \\ |x_i|<|\overline{x_i}|, & |p_i|<|\overline{p_i}|, \quad \forall i=1,\dots,n \end{array}$

El 1 se resta para anular el término independiente de la fracción, 1, ya que $F(0,\theta,0,\theta)=0$. Basta que los términos de grado no nulo mayoren a los correspondientes del desarrollo de F.

b) $$\Phi_2(t,x,u,p) = M\left[\frac{1}{\left(1-\frac{t+x_1+\cdots+x_n+u}{r_1}\right)\left(1-\frac{p_1+\cdots+p_n}{r_2}\right)}-1\right]$$

donde $\begin{array}{l} r_1 = \text{mín}\,(|\bar{t}|,|\overline{x_1}|,\dots,|\overline{x_n}|,|\overline{u}|) \\ r_2 = \text{mín}\,(|\overline{p_1}|,\dots,|\overline{p_n}|) \end{array}$

El 1 se resta por igual razón que en el caso anterior. La validez del carácter mayorante de Φ respecto de F es para $\begin{array}{l} |t+x_1+\cdots+x_n+u|<r_1 \\ |p_1+\cdots+p_n|<r_2 \end{array}$.

El carácter mayorante se prueba igual que se hizo en el estudio de las mayorantes.

c) $$\Phi_3(t,x,u,p) = M\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\frac{t}{k}+x_1+\cdots+x_n+u}{r_1}\right)\left(1-\frac{p_1+\cdots+p_n}{r_2}\right)}-1\right],$$

con $0<k<1$.

Llamaremos a

$$(\mathrm{PP})_m \begin{cases} u_t = \Phi(t,x,u,p), \\ u(0,x) = 0, \\ \Phi(0,\theta,0,\theta) = 0 \end{cases},$$

problema mayorante del problema de partida,

$$(\mathrm{PP})\begin{cases} u_t = F(t,x,u,p), \\ u(0,x) = 0, \\ F(0,\theta,0,\theta) = 0 \end{cases},$$

Supongamos que repetimos lo que hemos hecho con el problema inicial: llegaríamos a la obtención de una serie formal de coeficientes $C_{m\alpha}$. Si se puede justificar que esta serie es mayorante de la serie formal solución del primer problema, queda aclarado el nombre de mayorante dado a este problema.

Habría que probar:

1. $C_{m\alpha} \geq 0$
2. $|c_{m\alpha}| \leq C_{m\alpha}$

Los coeficientes $C_{0\alpha}$ valen todos 0, pues no varía la condición inicial:

$$C_{0\alpha} = c_\alpha = 0 = c_{0\alpha}.$$

Los términos del desarrollo de Φ, que salvo constantes son derivadas sucesivas de Φ, son todos mayores o iguales que 0, por ser la serie mayorante de F. Los términos $c_{1\alpha}$ eran suma de productos de derivadas sucesivas de F (de Φ para $C_{1\alpha}$) y los coeficientes de la etapa anterior. Sigue que $C_{1\alpha} \geq 0$ por ser suma de producto cuyos factores son positivos (derivadas de $\Phi \geq 0$); y, análogamente, $C_{m\alpha} \geq 0$ reiterando el razonamiento.

Comparando lo que hacemos con F y con Φ, resulta que sumando a sumando, los sumandos que constituyen los coeficientes $C_{m\alpha}$ son mayores que los que constituyen los coeficientes $c_{m\alpha}$, de donde se tiene $|c_{m\alpha}| \leq C_{m\alpha}$.
Pero estamos en las mismas condiciones que teníamos, ya que $\displaystyle\sum_{m=0,|\alpha|=0}^{\infty} C_{m\alpha} t^m x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ es también formal, que no consta que sea convergente; además, probar su convergencia es igual de complicado que probarlo para el problema de partida.

Vamos a plantearnos ahora otro problema: se trata de determinar una solución analítica,

$$\sum_{m=0,|\alpha|=0}^{\infty} C^*_{m\alpha} t^m x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ de } u_t = \Phi(t, x, u, p),$$

con la única condición $C^*_{0\alpha} \geq 0$. Entonces probaremos que esta serie es mayorante de la del segundo problema, y, por tanto, del primero: $C_{m\alpha} \leq C^*_{m\alpha}$. Resolveremos el problema, esto es, probaremos que la solución es convertente en algun sitio distinto del origen:

- El problema es mayorante del segundo:
  Ya que $C^*_{0\alpha} \geq 0$ y $C_{0\alpha} = 0$, se tiene $C^*_{0\alpha} \geq C_{0\alpha}$. El resto de los factores que intervienen en la obtención de $C^*_{m\alpha}$ son los $c^*_{0\alpha}$ y las derivadas sucesivas de Φ (que son las que aparecen en la obteción de $C_{m\alpha}$).

- Vamos a resolver ahora el tercer problema:
  Usaremos la mayorante del tipo c, con $0 < k < 1$. Vamos a buscar una solución particular de este problema. Si llamamos $X = \dfrac{t}{k} + x_1 + \cdots + x_n$, buscaremos la solución bajo la forma $u = h(X)$.

  En este caso $\begin{array}{l} u_t = h'(X) \cdot \dfrac{1}{k} \\ p_i = h'(X) \cdot 1, \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$

  Entonces, si el procedimiento vale, vamos a considerar la EDO de primer orden siguiente:

$$\frac{1}{k} h' = M \left[\frac{1}{\Big(1 - \dfrac{X+h}{r_1}\Big)\Big(1 - \dfrac{nh'}{r_2}\Big)} - 1 \right]$$

  donde la incógnita es h, y la variable X.

  Ordenando el resultado en potencias de h', se obtiene:

$$\frac{1}{k}\Big(1 - \frac{nh'}{r_2}\Big)h' = \frac{M}{1 - \frac{X+h}{r_1}} - M\Big(1 - \frac{nh'}{r_2}\Big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{n}{kr_2} h'^2 + \Big(\frac{1}{k} - \frac{Mn}{r_2}\Big)h' = \frac{M}{1 - \frac{X+h}{r_1}} - M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n}{kr_2}h'^2 - \Big(\frac{1}{k} - \frac{Mn}{r_2}\Big)h' + \frac{M}{1-\frac{X+h}{r_1}} - M. \tag{3.1}$$

Aplicando ahora la fórmula de ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, que viene dada por $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, nos queda:

$$h' = \frac{\Big(\frac{1}{k} - \frac{Mn}{r_2}\Big) \pm \sqrt{\Big(\frac{1}{k} - \frac{Mn}{r_2}\Big)^2 - 4\frac{nM}{kr_2}\left(\frac{1}{1-\frac{X+h}{r_1}} - 1\right)}}{2 \cdot \frac{n}{kr_2}}.$$

Tomando como datos iniciales

$$X = 0,\ h = 0,\ h' = 0$$

llegamos a que la solución valida de la ecuación 3.1 es la que viene dada con el signo $-$,

$$h' = \frac{\Big(\frac{1}{k} - \frac{Mn}{r_2}\Big) - \sqrt{\Big(\frac{1}{k} - \frac{Mn}{r_2}\Big)^2 - 4\frac{nM}{kr_2}\left(\frac{1}{1-\frac{X+h}{r_1}} - 1\right)}}{2\frac{n}{kr_2}}.$$

pues es la única que se anula al tomar los datos iniciales anteriores. Además, se trata de una función analítica, ya que es una función C^∞ y, por cómo esta definida, puede expresarse en forma de serie de potencias, luego la solución única también lo es (lo cuál hemos probado en el capítulo anterior).

Por tanto, $h(X)$ es analítica en el origen, luego

$$h(X) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i X^i, \quad d_i = \frac{1}{i!}h^{i)}(0).$$

Sabemos que $\begin{array}{l} d_1 = h(0) = 0 \\ d_1 = \frac{1}{1!}h'(0) = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad h(X) = d_2X^2 + d_3X^3 + \dots.$

Probando que $d_i \geq 0$, habremos encontrado la solución del tercer problema. En efecto:

$$h(X) = d_2\Big(\frac{t}{k} + x_1 + \dots + x_n\Big)^2 + d_3\Big(\frac{t}{k} + x_1 + \dots + x_n\Big)^3 + \dots$$

los coeficientes $C^*_{m\alpha}$ serán todos positivos, no solo los $C^*_{0\alpha}$.

Para probar $d_i \geq 0$, elegimos k de modo que $\frac{1}{k} > \frac{nM}{r_2}$ (coeficiente de $h' \neq 0$), con lo cual:

$$\Big(\frac{1}{k} - \frac{nM}{r_2}\Big)h' = \frac{n}{kr_2}h'^2 + M\Big(\frac{X+h}{r_1} + \frac{(X+h)^2}{r_1^2} + \dots\Big)$$

$d_2 = \frac{1}{2}h^{2)}(0)$. Basta ver que $h''(0) \geq 0$. Derivando arriba:

$$\Big(\frac{1}{k} - \frac{nM}{r_2}\Big)h'' = \frac{n}{kr_2}2h'h'' + M\Big(\frac{1+h'}{r_1} + \frac{2(X+h)(1+h')}{r_1^2} + \dots\Big)$$

Para $X = 0$:

$$\Big(\frac{1}{k} - \frac{nM}{r_2}\Big)h''(0) = 0 + M\Big(\frac{1+0}{r_1} + 0\Big) = \frac{M}{r_1} \Rightarrow h''(0) = \frac{M}{r_1}\frac{1}{\frac{1}{k} - \frac{nM}{r_2}} > 0$$

En general, derivando $n-1$ veces,

$$\Big(\frac{1}{k} - \frac{nM}{r_2}\Big)h(X)^{n)} = \frac{n}{kr_2}\Big(\overbrace{h(X)^{n)}h'(X)}^{(*_1)} +$$
$$\underbrace{+\binom{n-1}{1}h(X)^{n-1)}h(X)^{2)} + \binom{n-2}{2}h(X)^{n-2)}h(X)^{3)} + \dots\Big)}_{(*_2)} + M\underbrace{\Big[\qquad\Big]}_{(*_3)}$$

$(*_1)$ Vale 0 cuando X=0.

$(*_2)$ Suma de sumandos ≥ 0 para $X = 0$.

$(*_3)$ Sólo aparece hasta h^{n-1}, y es suma de sumandos ≥ 0 para $X \equiv 0$.

Por tanto, $h^{n)}(0) \geq 0 \Rightarrow d_n \geq 0$.

Así pues, existe una función $(t,x) \longmapsto f(t,x)$ analítica en (t_0, x_0), solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = F(t,x,u,p) \\ u(t_0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

con hipótesis de analiticidad de F y φ.

□

Observación 3.1. El teorema nos garantiza la existencia y unicidad locales de solución analítica de un problema de Cauchy con datos iniciales, siempre que se verifique que la EDP es normal y que tanto la EDP como los datos iniciales dependan analíticamente de las variables independientes, es decir, se asegura existencia y unicidad de solución analítica en el entorno $t = 0$. Esto es, no excluye la posibilidad de que existan otras soluciones no analíticas, ni de que una solución analítica deje de serlo, o de que incluso deje de existir a cierta distancia de la superficie inicial. Un ejemplo de esto último es el caso del problema de valores iniciales para la ecuación de Burgers:

$$\begin{cases} u_t + uu_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Calculando la solución mediante el método de las características, puede suceder que dos características que arrancan de dos puntos x_0 y x_1 respectivamente se corten en un punto (x,t), y en dicho punto la solución tendría que tomar dos valores diferentes. Esto ocurriría en el caso de que el dato inicial dado sea positivo y decreciente, es decir, si se cumple $f(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to 1$. Ver [6].

Nota 3.1. El *Teorema de C-K* garantiza la unicidad de solución analítica en el marco de problemas de Cauchy con datos y coeficientes analíticos. Sin embargo, el resultado de unicidad que dicho teorema proporciona no siempre es de aplicación, pues frecuentemente los datos del problema no son analíticos.
Conviene pues desarrollar una herramienta que permita abordar el problema de la unicidad de manera más sistemática, como es el *Teorema de Holmgren*, el cual es un corolario del *Teorema de Cauchy-Kowalewski*:

Teorema 3.2 (de Holmgren)**.** *En el marco del Teorema de C-K, es decir, para ecuaciones con coeficientes y datos analíticos, la solución proporcionada por el Teorema de C-K es la única no solo en la clase de funciones analíticas, sino que es única en toda la clase de funciones localmente integrables.*

La importancia del *Teorema de Holmgren* radica en que, para problemas de

Cauchy en los que el *Teorema de C-K* es aplicable, no puede existir otra solución que no sea la función analítica que C-K proporciona.

Nota 3.2. El problema restringido de Cauchy puede resolverse para un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas. Sea entonces

$$u = (u_1, \ldots, u_m)$$
$$p_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Un sistema sería:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = F_1(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, p_{11}, \ldots, p_{mn}) \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} = F_m(t, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, p_{11}, \ldots, p_{mn}) \end{cases}$$

donde las funciones dependen de $1 + n + m + nm$ argumentos.

Las condiciones de Cauchy serían $\begin{matrix} u_1(t_0, x) = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ u_m(t_0, x) = \varphi_m(x) \end{matrix}$.

El teorema vale exactamente igual que para una sola ecuación, con las hipótesis

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in C^w(x_0)$$
$$F = (F_1, \ldots, F_m) \in C^w(t_0, x_0, \varphi_1(x_0), \ldots, \varphi_m(x_0), p_{11}(x_0), \ldots, p_{mn}(x_0))$$

se afirma existencia, unicidad y analiticidad de la solución $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

El procedimiento de la demostración es el mismo: se parte de unas series potenciales formales a las que se les exige que sean soluciones del problema restringido de Cauchy

$$\sum_{q=0,|\alpha|=0}^{\infty} c^i_{q\alpha}(t - t_0)^q (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \cdots (x_n - x_{0n})^{\alpha_n} = f_i(t, x),$$

y luego se prueba mediante un problema mayorante (pasar a sistema mayorante) que definen efectivamente una función.

Las mayorantes serían

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Phi_i(t,x,u,p) \to M\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\frac{t}{k}+x_1+\cdots+x_n+u_1+\cdots+u_m}{r_{1i}}\right)\left(1-\frac{p_{11}+\cdots+p_{mn}}{r_{2i}}\right)}-1\right]$$

Ejemplo 3.1.

Consideremos el poblema $\begin{cases} u_t = u_x, & (t,x)\in\mathbb{R}^2 \\ u(0,x)=e^x \end{cases}$.

La EDP $u_t = u_x$ es normal respecto de t y se cumplen las condiciones de dependencia analítica en todo $\mathbb{R}^2$. Busquemos una solución local alrededor del punto $(t,x)=(0,0)$:

$$u(t,x)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\cdot\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n\partial x^m}(0,0)t^nx^m$$

Derivamos la condición inicial respecto de x:

$$\frac{\partial^m u}{\partial x^m}(0,0)=\left.\frac{\partial^m e^x}{\partial x^m}\right|_{x=0}=\left.e^x\right|_{x=0}=e^0=1 \tag{3.2}$$

Derivando ahora respecto de t la EDP:

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}}=\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^n\partial x},\quad n\geq 0$$

e iterando este resultado se obtiene

$$\underbrace{\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}}}_{(1)}=\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^n\partial x}=\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n-1}\partial x^2}=\cdots=\underbrace{\frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}}_{(2)}$$

Derivando en (1) y (2) respecto de x nos queda

$$\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial t^{n+1}\partial x^m}=\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+m+1}},\quad n,m\geq 0$$

Por tanto,

$$\left.\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial t^{n+1}\partial x^m}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial^{n+m+1}u}{\partial x^{n+m+1}}\right|_{x=0}\overset{(3.2)}{=}1.$$

Luego, la solución será

$$u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \cdot \underbrace{\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n \partial x^m}(0,0)}_{1}\, t^n x^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} t^n x^m =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = e^t \cdot e^x = e^{t+x}$$

Capítulo 4

El problema general de Cauchy

Varían algo las cosas al estudiar las ecuaciones o sistemas de orden superior al primero. Vamos a estudiar las llamadas ecuaciones kovalevskianas, las cuales son de la forma:

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = F\Big(t, x_1, \dots, x_n, u, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\, \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \dots\Big), \tag{4.1}$$

con $k = k_0 + \cdots + k_n$, cumpliendo las siguientes características:

1. En el segundo miembro de la ecuación no aparecen derivadas de u de orden superior a r: $k \leq r$.

2. En el segundo miembro de la ecuación no puede aparecer una derivada de orden r, solo respeto de t, $\quad k_0 < r$.

Fijando las condiciones iniciales iniciales de Cauchy

$$\begin{aligned} u(t_0, x) &= \varphi_0(x) \\ \frac{\partial u(t_0, x)}{\partial t} &= \varphi_1(x) \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{r-1} u(t_0, x)}{\partial t^{r-1}} &= \varphi_{r-1}(x) \end{aligned}$$

y añadiéndolas a la EDP (4.1), nos queda el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^r u}{\partial t^r} = F\Big(t, x_1, \ldots, x_n, u, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial t^{k_0}\, \partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}, \ldots\Big) \\ u(t_0, x) = \varphi_0(x) \\ \dfrac{\partial u(t_0, x)}{\partial t} = \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{r-1} u(t_0, x)}{\partial t^{r-1}} = \varphi_{r-1}(x) \end{cases}$$

El método para resolver este tipo de problemas es el mismo que se usa para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior, esto es, convirtiendo el problema en un sistema de primer orden que sea equivalente al problema original.

Usaremos la siguiente notación: $u_{k_0,k_1,\ldots,k_n}$, donde k_0 nos va a indicar las derivadas de u respecto de la variable t, y k_i las derivadas de u respecto de la variable x_i, $\quad i = 1, \ldots, n$,

$0 \leq k_0 + k_1 + \cdots + k_n \leq r - 1, \quad k_0 < r.$

Vamos a plantear como ejemplo $u_{tt} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx})$, la forma más general de una ecuación kovalevskiana de segundo orden con dos variables independientes, con condiciones iniciales

$$\begin{cases} u_{tt} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \\ u(0, x) = \varphi_0(x) \\ u_t(0, x) = \varphi_1(x) \end{cases} \tag{4.2}$$

Transformamos el problema (4.2) de la manera siguiente:

$$u_{00}(t, x) = u(t, x) \quad u_{10}(t, x) = u_t(t, x) \quad u_{01}(t, x) = u_x(t, x)$$

El sistema asociado es (kovalevskiano de primer orden):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{00}}{\partial t} = u_{10} \\ \dfrac{\partial u_{01}}{\partial t} = \dfrac{\partial u_{10}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u_{10}}{\partial t} = F(t, x, u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{01_x}, u_{10_x}) \end{cases},$$

y las condiciones iniciales en este último son

$$\begin{cases} u_{00}(0,x) = \varphi_0(x) \\ u_{10}(0,x) = \varphi_1(x) \\ u_{01}(0,x) = \varphi_0'(x) \end{cases} ,$$

Por tanto, se obtiene el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_{00}}{\partial t} = u_{10} & \text{(4.3a)} \\ \dfrac{\partial u_{01}}{\partial t} = \dfrac{\partial u_{10}}{\partial x} & \text{(4.3b)} \\ \dfrac{\partial u_{10}}{\partial t} = F(t, x, u_{00}, u_{10}, u_{01}, u_{01_x}, u_{10_x}) \\ u_{00}(0,x) = \varphi_0(x) \\ u_{10}(0,x) = \varphi_1(x) \\ u_{01}(0,x) = \varphi_0'(x) \end{cases}$$

el cual, supuesta probada la equivalencia entre este último y el problema original (4.2), se resuelve por el teorema de C-K.

La prueba de la equivalencia entre ambos problemas de Cauchy se haría del modo siguiente:

Si u es la única solución analítica del problema original (4.2), que existe por Cauchy-Kowalewski, el vector $(u_{00}, u_{10}, u_{01}) = (u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x})$ es solución del problema equivalente (4.3). Y recíprocamente, si (u_{00}, u_{10}, u_{01}) es solución de (4.3), la función $u = u_{00}$ es solución del problema original (4.2).

La primera implicación es inmediata por la construcción del sistema y la determinación que se ha hecho de las condiciones iniciales. Es algo más complicado en el otro sentido:

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} & \text{(4.3a)} \\ \dfrac{\partial u_{01}}{\partial t} & \text{(4.3b)} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(u_{01} - \frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \Rightarrow u_{01} - \frac{\partial u}{\partial x} = \Psi(x)$$

Haciendo $t = 0$:

$u_{01}(0,x) - \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial x} = \Psi(x) \Rightarrow \dfrac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi_0(x)}{\partial x} = \Psi(x) \Rightarrow \Psi(x) = 0 \Rightarrow$
$u_{01} - \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_{01} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$,

con lo que queda probada la equivalencia entre ambos problemas.

4.1. El problema general de Cauchy. Variedades características

En este apartado vamos a estudiar el problema general de Cauchy, es decir, en el que no hay variables distinguidas. Vamos a plantear la ecuación modelo de partida de segundo orden con dos variables independientes

$$\Phi\Big(x_0, x_1, u, \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}\Big) = 0 \tag{4.4}$$

Sea S una curva (hipersuperficie unidimensional del espacio $\mathbb{R}^2$). A cada punto de la curva se le asocia una curva ”transversal”, de modo que a puntos próximos corresponderán curvas próximas. El problema de Cauchy es el estudio de existencia, unicidad y propiedades de las soluciones del problema que verifiquen las siguientes condiciones iniciales: el valor de la incógnita u, y sus derivadas direccionales según la dirección de las curvas en cada punto de la hipersuperficie S.

Si S es una hipersuperficie regular, unidimensional en $\mathbb{R}^2$, queremos decir lo siguiente: si S tiene la ecuación

$$\sigma(x_0, x_1) = 0$$

(una sola ecuación, pues su dimensión es una unidad menos que el espacio), ésta admite una parametrización regular, esto es:

$$\begin{matrix} x_0 = \varphi_0(y_1) \\ x_1 = \varphi_1(y_1) \end{matrix} \quad , \quad y_1 \in G \subset \mathbb{R}$$

de forma que

$$\sigma\big(\varphi_0(y_1), \varphi_1(y_1)\big) = 0 \quad \forall y_1 \in G$$

, verificándose que:

- φ_i biyectiva, $\quad i = 1, 2$
- $\varphi_i \in C^1(G), \quad i = 1, 2$
- Si, $\forall y_1 \in G, \quad M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_0(y_1)}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial \varphi_1(y_1)}{\partial y_1} \end{pmatrix}$ es la matriz jacobiana de la parametrización, de dimensión 2×1, el rango de M ha de ser 1.

Como hemos mencionado anteriormente, por cada punto de la curva S pasa una curva transversal: se trata de describir todos los puntos de todas las curvas. Para ello, añadimos un nuevo parámetro y_0 a la parametrización. Así, variando y_1 determinamos un punto de la variedad, y, por tanto, seleccionamos una curva, y al variar y_0 nos movemos a lo largo de los distintos puntos de la curva transversal determinada por y_1.

Los puntos los determinamos mediante el corte de la curva transversal con las curvas de nivel (o "paralelas") relativas a σ. Entonces, llamemos $\sigma(x_0, x_1) = y_0$ (S está caracterizada por $y_0 = 0$), que es regular. Entonces

$$x_0 = \Phi_0(y_0, y_1)$$
$$x_1 = \Phi_1(y_0, y_1)$$

Para cada valor de y_0, $\Phi_i(y_0, y_1), \quad i = 1, 2$ es biyectiva: a puntos próximos de la curva S corresponden curvas próximas por continuidad de $\Phi_i, \quad i = 1, 2$ respecto de estos últimos argumentos.

Interesa poder describir fácilmente en términos de y_0, y_1 la hipersuperficie y las curvas. La hipersuperficie es $y_0 = 0$. Las curvas se obtienen fijando $y_1 = c_1$, que determina un punto de la curva, y, por tanto, una curva transversal.

El hecho geométrico que caracteriza las curvas regulares es la existencia en cada punto del vector tangente, que varía con continuidad. Vamos a suponer $\Phi_i \in C^1(y_1), \ i = 1, 2$ (es decir, que el rango de la matriz M definidad anteriormente tengo rango máximo) y $\Phi_i \in C^1(y_0), \ i = 1, 2$, pues queremos que las curvas transversales sean también regulares. Además, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial y_0}$, $i = 1, 2$ no son simultáneamente nulos.

Queda por expresar analíticamente el carácter "transversal". Construimos la matriz

$$N = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_0(0, y_1)}{\partial y_0} & \dfrac{\partial \varphi_0(y_1)}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial \Phi_1(0, y_1)}{\partial y_0} & \dfrac{\partial \varphi_1(y_1)}{\partial y_1} \end{pmatrix}$$

en la que el primer vector columna es el vector tangente a la curva en el punto de corte con la superficie, y el segundo vector columna es el vector tangente a la curva S.

La matriz N es cuadrada de orden 2. Lo que se pide es que el vector tangente a la curva transversal no coincida con el vector tangente a la curva S en ningún punto, es decir, $\forall y_1 \in G,\ rg\ (N) = 2$.

Una vez impuesto esto, la resolución del problema de Cauchy se va a intentar mediante la sustitución de las variables y_0, y_1 como nuevas coordenadas en un entorno de la curva S.

Para ello, basta asegurar que el sistema

$$\begin{cases} x_0 = \Phi_0(y_0, y_1) \\ x_1 = \Phi_1(y_0, y_1) \end{cases}$$

define y_0, y_1 como funciones implícitas de x_0, x_1.

Nota 4.1. El cambio de variable es lícito en un entorno de (y_0, y_1) (carácter local del *teorema de la función inversa* (1.8)), pero como $y_0 = 0$ es S, se sigue que el cambio es válido en un entorno de S.

Observemos que se cumplen las hipótesis del *teorema de la función implícita* (1.9):

1. Φ_0, $\Phi_1 \in C^1$

2. No anulación del determinante de la matriz jacobiana en un entorno de S, es decir, de la matriz N para $y_0 = 0$; y $det(N) \neq 0$ sobre la superficie S. Pero el determinante es suma algebraica de productos de sus términos, y, como son continuos en un entorno, el determinante es no nulo.

Por tanto, podemos llamar

$$\begin{aligned} y_0 &= \Psi_0(x_0, x_1) \\ y_1 &= \Psi_1(x_0, x_1) \end{aligned}$$

y pasamos a hacer el cambio de variables en la ecuación original (4.4),

$$\Phi\Big(x_0, x_1, u, \frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}\Big) = 0$$

de forma que vamos a intentar despejar las derivadas de orden máximo respecto de y_0 para obtener un sistema kovalevskiano respecto de y_0, si las condiciones iniciales lo permiten. Esto es, queremos expresar (4.4) en función de las nuevas variables y_0, y_1:

$$\mathcal{H}\Big(y_0, y_1, u, \frac{\partial u}{\partial y_0}, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y_0 \partial y_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\Big) = 0$$

Para ello, pasamos a calcular cada una de ellas:

- $y_0 = \Psi_0(x_0, x_1)$
- $y_1 = \Psi_1(x_0, x_1)$
- $u(y_0, y_1) = u\big(\Psi_0(x_0, x_1), \Psi_1(x_0, x_1)\big)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial y_0} \cdot \dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_i} + \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_0}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_0}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial y_0}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_0}\Big)\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_0}\Big)\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_0} =$
  $= \dfrac{\partial}{\partial y_0}\Big[\dfrac{\partial u}{\partial y_0} \cdot \dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_0}\Big]\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big[\dfrac{\partial u}{\partial y_0} \cdot \dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial u}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_0}\Big]\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_0} =$
  $= \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\big(\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0}\big)^2 + \dots$ $\big($no hay más sumandos en los que aparezca $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\big)$
- El cálculo de $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ es análogo.
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x_0}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big) = \dfrac{\partial}{\partial y_0}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\Big)\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_0} =$
  $= \dfrac{\partial}{\partial y_0}\Big[\dfrac{\partial u}{\partial y_0}\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial y_1}\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\Big]\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial}{\partial y_1}\Big[\dfrac{\partial u}{\partial y_0}\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial y_1}\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\Big]\dfrac{\partial \Psi_1}{\partial x_0} =$
  $= \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_1}\dfrac{\partial \Psi_0}{\partial x_0} + \dots$ $\big($no hay más sumandos en los que aparezca $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}\big)$

Una vez calculado esto, vamos a estudiarlo al detalle para el caso de una ecuación de segundo orden casi lineal con dos variables independientes en forma general, de forma que los coeficientes de las derivadas sean conocidos (ya que en (4.4) no los conocemos). Supongamos que (4.4) es de la forma:

$$a_{20}(x_0,x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}+a_{11}(x_0,x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_0\partial x_1}+a_{02}(x_0,x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}=b(x_0,x_1,u,\frac{\partial u}{\partial x_0},\frac{\partial u}{\partial x_1})$$

Así, teniendo en cuenta los cálculos realizados anteriormente, y, ya que $\Psi_0(x_0,x_1)=\sigma(x_0,x_1)$, el coeficiente transformado de la derivada de orden máximo de u respecto de y_0 es:

$$\Big[a_{20}(\Phi_0,\Phi_1)\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}\Big)^2+a_{11}(\Phi_0,\Phi_1)\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}+a_{02}(\Phi_0,\Phi_1)\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}$$

donde, por simplicidad de la notación, omitimos que las Φ_i son funciones de y_0, y_1, esto es, $\Phi_i(y_0,y_1),\quad i=1,2$.
Denotando

$$\mathcal{A}=a_{20}(\Phi_0,\Phi_1)\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}\Big)^2+a_{11}(\Phi_0,\Phi_1)\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\frac{\partial\sigma}{\partial x_0}+a_{02}(\Phi_0,\Phi_1)\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\Big)^2,$$

la posibilidad de despejar $\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}$ depende de que su coeficiente $\mathcal{A}$ no sea nulo: en ese caso, despejando $\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}$ y cambiando las variables x por las y resulta una ecuación en forma kovalevskiana. Tenemos ya pues una restricción de la curva σ: debemos excluir las curvas que verifiquen $\mathcal{A}=0$, que es una EDP de primer orden.

En este caso, se dice que la curva es *característica*, y no se puede tomar como soporte de los datos iniciales (en tal caso, la ecuación no podría expresarse en forma normal o kovalevskiana, y no podríamos aplicar el *teorema de C-K*).

Por tanto, cumpliéndose todo lo anterior, basta exigir las hipótesis de analiticidad de coeficientes y datos iniciales sobre σ para aplicar el *teorema de Cauchy-Kowalewski* sobre el problema, pudiendo así probar la existencia y unicidad de solución analítica en un entorno de una curva analítica no característica.

Bibliografía

[1] T.M. Apostol *Análisis Matemático* Second Edition, Reverté. Barcelona (1991).

[2] P.R. Garabedian. *Partial Differential Equations.* Second Edition, Chelsea Publishing Company. New York (1986).

[3] F. John. *Partial Differential Equations.* Fourth Edition, Springer Verlag. New York (1982).

[4] L.C. Piccinini, G. Stampacchia & G. Vidossich. *Ordinary Differential Equations in* $\mathbb{R}^n$*: Problems and Methods.* Springer Verlag. New York (1984).

[5] A. Valle Sánchez. [Apuntes manuscritos de Ecuaciones Funcionales]. Universidad de Sevilla, Sevilla (1975-76).

[6] E. Zuazua. *Ecuaciones en derivadas parciales.* Universidad Autónoma de Madrid, Madrid (2004-05).