

Análisis de la estabilidad y de bifurcaciones en un modelo dinámico aplicado a la gestión de una pesquería

Vílchez Lobato, M^a Luisa

Dpto. de Economía General y Estadística, Universidad de Huelva

Velasco Morente, Francisco

Dpto. de Economía Aplicada I, Universidad de Sevilla

García del Hoyo, Juan J., Universidad de Huelva

Dpto. de Economía General y Estadística, Universidad de Huelva

Resumen

Estudiamos en esta comunicación la estabilidad de las soluciones de equilibrio del sistema dinámico resultante de aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin a un modelo de control óptimo para la gestión de una pesquería. Veremos cómo puede hablarse en un modelo de este tipo de la estabilidad condicional del punto de silla. Considerando la tasa de descuento social como parámetro del sistema, se analizan las bifurcaciones locales de codimensión uno, es decir, los cambios en la estabilidad de los equilibrios y/o la aparición de nuevos equilibrios u órbitas cerradas al considerar pequeñas variaciones de dicho parámetro. En este contexto, usamos el Teorema de Bifurcación de Hopf para establecer la existencia, bajo determinadas hipótesis, de trayectorias oscilatorias de tipo ciclo límite.

1. Conocimientos previos

Antes de plantear el modelo a estudiar, sería conveniente hacer un repaso de los conceptos matemáticos básicos que vamos a utilizar a lo largo del trabajo. Definimos en primer lugar los conceptos de *punto fijo* y *estabilidad*¹.

Dado un sistema dinámico en la forma:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U abierto, llamamos *puntos fijos* o *puntos de equilibrio* del sistema (1), a aquellos puntos $z \in U$ tales que $f(z) = 0$.

El estudio de los puntos de equilibrio está íntimamente ligado al de la estabilidad de las trayectorias del sistema, pues en algún momento pueden ser atractivos y atraer a las trayectorias con valores iniciales próximos a ellos haciendo que se mantengan cerca unas de otras. Ésta es la idea fundamental del concepto de estabilidad. Una solución del sistema (1) es estable si, sometida a una pequeña perturbación, el movimiento resultante no difiere mucho del que se obtiene sin perturbar la trayectoria. Se hablará de estabilidad asintótica si el efecto de la perturbación es progresivamente eliminado conforme pasa el tiempo.

La estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico se estudia mediante los métodos debidos a Liapunov, uno de ellos basado en el estudio de la estabilidad de soluciones del sistema lineal asociado a (1) y otro, conocido como el método directo de Liapunov².

En la práctica se recurre siempre a la linealización del sistema, que se logra de la siguiente manera.

¹Wiggins, S.(1990), p.6.

² Con este método, la estabilidad se garantiza bajo la hipótesis de existencia de cierta función (función de Liapunov) la cual, en la práctica no siempre es posible encontrar.

Si x_0 es un punto de equilibrio del sistema (1), se considera el cambio de variable $y = x - x_0$, con lo cual :

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(y + x_0) \quad (4)$$

Desarrollando f en serie de Taylor en un entorno de x_0 y, despreciando los términos no lineales, obtenemos el sistema lineal:

$$\dot{y} = Ay \quad (5)$$

donde A es la matriz jacobiana de f en x_0 .

Por el teorema de Hartman-Grobman³, si A no tiene autovalores iguales a cero o imaginarios puros (sistemas hiperbólicos), existe un homeomorfismo⁴ h definido en algún entorno de x_0 que localmente transforma trayectorias del flujo no lineal en trayectorias del flujo lineal. Además este homeomorfismo preserva el sentido de las trayectorias y puede elegirse también de forma que preserve la parametrización en el tiempo.

En definitiva, el comportamiento de un sistema no lineal en un entorno de un equilibrio no hiperbólico, es cualitativamente similar al del sistema lineal asociado. En particular, la estabilidad (inestabilidad) asintótica del sistema lineal presupone la estabilidad (inestabilidad) asintótica del sistema no lineal.

Por otra parte, sabemos que la estructura orbital de un sistema lineal depende de los autovalores de la matriz del sistema, y de cómo sean éstos depende en última instancia la

³ Ver Guckenheimer y Holmes (1983) para la prueba.

⁴ Aplicación continua con inversa continua.

estabilidad de las soluciones del sistema no lineal. Así, las propiedades sobre los autovalores que se aplican a los sistemas lineales y que clasifican los puntos de equilibrio en nodos, centros, focos o puntos de silla, se aplican ahora con los autovalores de la matriz Jacobiana A , obteniéndose las mismas conclusiones excepto si uno o más de los autovalores es nulo o imaginario puro (es decir, si el equilibrio es hiperbólico). En dicho caso, es necesario el estudio del sistema dinámico restringido a la llamada *variedad centro*⁵ y/o la reducción del mismo a su forma normal, técnicas que simplifican el sistema no lineal.

A la hora de estudiar la estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico, nos interesará también saber si, bajo pequeñas variaciones de los parámetros del mismo, se producen cambios cualitativos importantes que afecten a dicha estabilidad. Un sistema dinámico se dice *estructuralmente estable* si las propiedades dinámicas cualitativas del sistema persisten bajo pequeñas variaciones⁶ de los parámetros o de las formas funcionales del mismo. En otras palabras, podríamos decir que un sistema dinámico es estructuralmente estable, si las trayectorias correspondientes a dos valores próximos de un parámetro, permanecen cerca una de la otra.

Centrándonos en el campo de la Economía, a la hora de interpretar el concepto de estabilidad estructural, nos encontramos con varios problemas. En primer lugar, si bien matemáticamente hablando no hay ninguna dificultad a la hora de interpretar el término “pequeña” perturbación (a través de la norma C^1), en ciencias aplicadas como la Economía no se trabaja con variaciones infinitesimales de los parámetros, sino con variaciones finitas. Para que el

⁵ El espacio vectorial \mathbb{V}^n puede expresarse como suma directa de los subespacios E_s , E_u y E_c generados respectivamente por los autovectores asociados a los autovalores negativos o con parte real negativa, positivos o con parte real positiva y nulos o imaginarios puros. Estos subespacios son invariantes, pues cualquier trayectoria que comience en alguno de ellos, permanecerá en él para siempre. El teorema de la variedad invariante (Wiggins, 1990) prueba que en el sistema dinámico original, E_s , E_u y E_c se distorsionan en las llamadas variedades estable, inestable y centro, respectivamente, las cuales son tangentes a los correspondientes subespacios en el punto de equilibrio y son invariantes bajo el flujo del sistema. Ver Wiggins (1990) para un tratamiento más exhaustivo de la cuestión.

concepto de estabilidad estructural fuese entonces formalmente correcto, en cada caso habría que definir una norma adecuada.

La Teoría Económica encuentra otro problema que es mencionado también a menudo en la literatura matemática y de ciencias naturales sobre la estabilidad estructural. Hasta ahora, en la definición de este último concepto hemos dado por supuesto que los sistemas perturbado y original tenían la misma dimensión. Sin embargo, los modelos económicos son retratos abstractos de fenómenos reales y en la formulación inicial de cada modelo solamente se tienen en cuenta unas pocas variables, siendo necesario a veces a posteriori la inclusión de nuevas variables con el consiguiente aumento en la dimensión del modelo. Esto puede implicar que el sistema original y el resultante en dimensión mayor tengan comportamientos dinámicos cualitativos muy distintos (pudiendo presentar incluso comportamiento caótico⁷).

El estudio de la estabilidad estructural de un sistema dinámico es el primer paso en el estudio de las bifurcaciones.

Se dice que en un sistema dinámico ocurre una *bifurcación* si el retrato de fases cambia su estructura topológica cuando un parámetro varía. Se llama *valor de bifurcación* a aquél valor del parámetro a partir del cual el sistema dinámico es estructuralmente inestable.

Los cambios a que se refiere la definición afectan al número y/o estabilidad de los puntos fijos u órbitas cerradas. En sistemas bidimensionales pueden presentarse varios tipos de bifurcaciones, que se generalizan para dimensiones mayores, a saber:

⁶ Estas pequeñas variaciones o perturbaciones se expresan matemáticamente en términos de la norma C^1 : Dos sistemas dinámicos están próximos si los campos vectoriales de ambos y sus derivadas primeras están próximas.

⁷ Ver Lorenz (1989, p. 86).

a) **Bifurcación nodo-silla**: Es el mecanismo básico de creación-destrucción de puntos fijos. Conforme un parámetro del sistema crece o decrece, los puntos de equilibrio del mismo se aproximan unos a otros, colisionan y desaparecen. Después de ello siguen incluso ejerciendo su influencia sobre el flujo del sistema atrayendo las trayectorias hacia una región “fantasma”.

b) **Bifurcación transcítica**: A medida que un parámetro varía, los puntos fijos se aproximan y colisionan, pero no desaparecen, sino que intercambian su estabilidad.

c) **Bifurcación “pitchfork”**: En este tipo de bifurcación los puntos fijos tienden a aparecer (caso supercrítico) y desaparecer (caso subcrítico) en pares simétricos.

d) **Bifurcación de Hopf**: En este tipo de bifurcación se produce una pérdida de estabilidad debido a que los autovalores complejos pasan de tener parte real negativa, a tener parte real positiva, atravesando por tanto el eje imaginario. Se distinguen al igual que antes dos tipos: supercrítica y subcrítica. En el primero un punto espiral estable cambia a espiral inestable rodeado por un pequeño ciclo límite. El segundo caso es más drástico, pues después del valor de bifurcación las trayectorias deben saltar a un atractor distante que puede ser un punto fijo, un ciclo límite, infinito ó en dimensiones $n \geq 3$ un atractor caótico (es, por ejemplo, el caso de Lorenz).

A diferencia de los otros tipos de bifurcación que pueden surgir en sistemas de cualquier dimensión, la bifurcación de Hopf sólo puede darse en sistemas de dimensiones mayores o iguales que dos y bajo las hipótesis que aparecen recogidas en el Teorema de Hopf⁸, el cual consta de una parte de existencia donde se dan las condiciones suficientes para que exista una órbita cerrada y, una parte de estabilidad con las condiciones suficientes para que el ciclo límite

⁸ Hopf, E. (1942)

sea estable. Existen varias versiones del teorema. Recogemos aquí una versión truncada de la dada por Guckenheimer y Holmes (1986) que puede leerse en Lorenz (1989, p.96).

El Teorema se formula para un sistema n-dimensional de la forma:

$$\dot{x} = f(x, \alpha) \quad (6)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^p$ y f de clase C^r .

Teorema (Hopf (1942), parte de existencia). Supongamos que el sistema (6) posee un único punto fijo x_0 para el valor del parámetro μ_0 , es decir, $f(x_0, \mu_0) = 0$, con las siguientes propiedades:

- i) La matriz Jacobiana $D_x f(x_0, \mu_0)$ tiene un par simple de autovalores imaginarios puros y ningún otro autovalor con parte real cero.

Entonces, i) implica que existe una curva uniforme de puntos fijos $(x(\mu), \mu)$ verificando que $x(\mu_0) = x_0$. Los autovalores $\lambda(\mu)$ y $\bar{\lambda}(\mu)$, los cuales son imaginarios puros en μ_0 , varían uniformemente con μ .

Si además,

$$\text{ii) } \frac{d}{d\mu}(\text{Re} \lambda(\mu)) \Big|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0 \quad (7)$$

entonces, existen algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de x_0 para el sistema (6) cuando $\mu = \mu_0$ y el período de dichas soluciones es aproximadamente igual a $2\pi/\beta_0$ (con $\beta_0 = \text{Im} \lambda(\mu_0)$).

Si bien establecer la existencia de una bifurcación de Hopf resulta relativamente sencillo, el determinar la estabilidad del ciclo límite resultante y por tanto el tipo de bifurcación que prevalece (supercrítica o subcrítica), no lo es tanto. Para ello es necesario el cálculo de cierto coeficiente que se deduce de la forma normal⁹ del sistema original. Los cálculos para obtener la forma normal resultan muy engorrosos en la práctica, si bien Kuznetsov (1997) realiza un elegante desarrollo para el problema bidimensional en variable compleja, lo que facilita la obtención del llamado *primer coeficiente de Liapunov* $l_1(0)$ cuyo signo determina la estabilidad del ciclo límite resultante (estable si $l_1(0) < 0$ e inestable si $l_1(0) > 0$).

2. Puntos de silla y órbitas cerradas en modelos de crecimiento económico óptimo

La aplicación del Principio del Máximo a un problema de crecimiento económico óptimo, da lugar a un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales caracterizado tradicionalmente por la aparición de un punto de silla. Se suele hablar entonces de estabilidad condicional para dicho problema, en el sentido de que las condiciones iniciales pueden elegirse de modo que se conduzca el sistema hacia la variedad estable del punto de silla, produciéndose por tanto, un acercamiento hacia el equilibrio del sistema. Esta “libertad” para elegir las condiciones iniciales es lo que caracteriza precisamente a los problemas de control óptimo (gracias a la presencia de una variable de control).

El problema de control (llamado también de optimización dinámica) más simple, consiste en seleccionar una función (control) continua a trozos $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ para

⁹ La forma normal de un sistema que presente una bifurcación de Hopf es un sistema dinámico de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases},$$

que resulta ser topológicamente equivalente al original. Para el caso bidimensional ver por ejemplo, Guckenheimer y Holmes (1986, p.152).

$$\text{maximizar } \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t)) dt \quad (8)$$

$$\text{sujeto a } \dot{x}(t) = g(t, x(t), u(t)) \quad (9)$$

$$\text{con } x(t_0) = x_0 \text{ y } x(t_1) \text{ libre}$$

donde f y g son funciones continuamente diferenciables. $x(t)$ se llama *variable de estado* y la ecuación (9), *ecuación de estado*. Si existe una función $u(t)$ que solucione este problema, dicha función se llama un *control óptimo*. En general, un problema de control puede tener más de una variable de control y estado, siendo el número de las primeras independiente del de las segundas.

En los problemas de crecimiento económico óptimo clásico, la función f es la utilidad social (también llamada función de la “felicidad”), la cual proporciona la utilidad social neta correspondiente al consumo per cápita en un instante de tiempo dado. Se suele suponer también que los niveles de utilidad futura se descuentan a razón de una tasa constante igual a δ . Este descuento se introduce en el funcional (8) multiplicando la función f por el factor $e^{-\delta t}$

Para estudiar un problema de control existen básicamente dos métodos: El Principio del Máximo, como ya hemos citado, y la Programación Dinámica de Bellman, siendo el primero de ellos el más utilizado en la práctica. Éste puede ser considerado como una extensión a la optimización dinámica del método de los multiplicadores de Lagrange usado en los problemas de optimización estática.

Es importante tener en cuenta que la propiedad del punto de silla que muestran los problemas de control no es una propiedad matemática inherente a los mismos. En general, son posibles también otros tipos de puntos de equilibrio. Es más bien la naturaleza económica del problema, como veremos, la que da lugar a la aparición del punto de silla.

Aunque tradicionalmente estos problemas se hayan caracterizado por la presencia de este tipo de equilibrio, la estabilidad condicional del punto de silla no es el único comportamiento dinámico observable en un modelo de crecimiento económico óptimo. Se puede demostrar la existencia de órbitas cerradas en modelos que tradicionalmente habían estado caracterizados por la presencia de trayectorias más o menos monótonas. Bajo determinadas circunstancias, los ciclos pueden ser óptimos. Las fluctuaciones pueden surgir como resultado de un proceso de optimización. Así lo demuestran por ejemplo Benhabib y Nishimura (1979) que usan el teorema de bifurcación de Hopf para probar la existencia de trayectorias cerradas alrededor del punto de equilibrio. Así mismo, Feichtinger y Sorger (1986) describen dos métodos para establecer la existencia de soluciones periódicas endógenas en problemas de control óptimo. Lo mismo hacen Dockner y Feichtinger (1991), identificando tres tipos de mecanismos económicos que pueden generar dichas trayectorias en problemas con dos variables de estado y un control. Feichtinger, Kaitala y Novak (1992) dan un ejemplo numérico de aparición de un ciclo límite estable en un modelo de gestión de una pesquería. De hecho, Montrucchio (1992) demostró que cualquier sistema de ecuaciones diferenciales arbitrario podía ser derivado como el resultado de aplicar el Principio del Máximo a un problema de control óptimo cóncavo bien planteado. En consecuencia, cualquier tipo de movimiento (no sólo oscilatorio, sino también caótico), puede surgir a partir de un problema de crecimiento óptimo de dimensión mayor. Otras referencias al respecto son Medio (1987) y Cartigny y Venditti (1994).

3. Un modelo básico de gestión de pesquerías: Análisis dinámico

Consideremos una pesquería que explota una especie cuyo stock en el instante t de tiempo representaremos por $x(t)$. Supongamos que la especie es capturada a una tasa $h(t)$ ejerciendo un

esfuerzo de pesca $E(t)$ ¹⁰ que mediremos en días de pesca estandarizados. Sean q el coeficiente de capturabilidad¹¹ de la especie, r la tasa intrínseca de crecimiento de la misma y L la capacidad de carga o población máxima asintótica en ausencia de explotación pesquera (en Kilos). Sean, así mismo, p el precio neto de venta de la captura y c el coste por unidad de esfuerzo.

Sea $W(x(t), E(t))$ la función que nos da la utilidad social neta de la pesquería en función del stock y del esfuerzo en el instante t . El beneficio obtenido por la pesquería en el instante t , vendrá dado por:

$$W(x(t), E(t)) = \text{Ingresos} - \text{costes} = p \cdot \text{capturas} - c \cdot \text{Esfuerzo} \quad (10)$$

Supongamos una tasa de capturas¹²:

$$h(t) = q E(t) x(t) \quad (11)$$

Así:

$$W(x(t), E(t)) = p q E(t) x(t) - c E(t) \quad (12)$$

El nivel de biomasa se rige por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = F(x) - q E x \quad (13)$$

donde $F(x)$ es la función que expresa el crecimiento natural de la población en ausencia de capturas. Consideraremos en nuestro modelo la función de Schaefer:

¹⁰ Las unidades pesqueras, en función de sus características tecnológicas y para una pesquería concreta, tienen asociado un determinado “poder de pesca”, entendido éste como “*el poder de captura de un barco individual*”. Pero es evidente que las capturas podrán ser mayores o menores en función de la duración de la faena de pesca. Se suele definir entonces el “esfuerzo de pesca” como el producto del poder de pesca individual por el tiempo de operación efectivo.

¹¹ q está relacionado, entre otros factores, con la dificultad de acceso al recurso por parte de la flota en función de sus potencialidades tecnológicas.

$$F(x) = r x \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (14)$$

Un modelo de gestión básico consistiría en controlar el esfuerzo a lo largo del tiempo de forma que se maximice la utilidad social proporcionada por el recurso o, en términos del stock, se trataría de determinar la trayectoria óptima de $x(t)$ de modo que sea máximo el funcional que nos da los beneficios de la pesquería. Así, el modelo consistente en:

$$\begin{aligned} & \underset{E}{\text{maximizar}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} W(x(t), E(t)) dt \\ & \text{sujeto a} \quad \dot{x} = F(x) - qE(t)x(t) \\ & \quad x(0) = 0, x(t) \geq 0, 0 \leq E(t) \leq E_{\max} \end{aligned} \quad (15)$$

sería un modelo básico de gestión de un pesquería lineal en los costes respecto de la variable de control (situación, por otra parte, bastante irrealista en la práctica). La aplicación del Principio del Máximo de Pontryagin¹³ a este modelo da lugar a un Hamiltoniano en valores corrientes lineal en la variable de control:

$$H(x, E, t, \mu) = pqEx - cE + \mu (F(x) - qEx) = (pqx - c - \mu qx)E + \mu F(x) \quad (16)$$

lo cual provoca que las condiciones necesarias de optimalidad sean también suficientes y que la solución a (14) sea una solución en forma de “feedback”¹⁴, es decir, el esfuerzo óptimo $E(t)$ se especifica en función de la variable de estado actual, como una combinación de controles “bang-

¹² Propuesta por Schaefer (1954)

¹³ Ver Kamien/Schwartz (1991)

¹⁴ De la condición de optimalidad $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$, no puede deducirse directamente el control óptimo

bang¹⁵ y óptimos. Sólo se necesita conocer el nivel actual del stock $x(t)$ y los valores de los parámetros, para deducir la política óptima para el presente y el futuro de la pesquería. Pero, como ya hemos comentado, la condición para que se dé una solución de este tipo es bastante irrealista: la linealidad en la variable de control.

Vamos a considerar a continuación un modelo general un poco más complicado en el que el Hamiltoniano no es lineal en el control. Veremos que, en este caso, la única estabilidad que puede conseguirse es la del punto de silla y que no pueden existir trayectorias óptimas cerradas.

4. Estabilidad condicional y oscilaciones en un modelo de control óptimo con una variable de estado y un control

Consideremos el problema de control óptimo consistente en:

$$\begin{aligned} & \underset{u}{\text{maximizar}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} f(x, u) dt \\ & \text{sujeto a} \quad \dot{x} = g(x, u) \\ & \quad \quad \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{17}$$

con f y g continuamente diferenciables, tales que el Hamiltoniano es no lineal en la variable de control. Tras plantear las condiciones necesarias de optimalidad del Principio del Máximo¹⁶, se llega a un sistema dinámico bidimensional de la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = G(x, \mu) \\ \dot{\mu} = \delta\mu - M(x, \mu) \end{cases} \tag{18}$$

¹⁵ Llamado así por establecerse en valores extremos

¹⁶ La condición de optimalidad $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$ define al control u como función implícita de x y μ . Las condiciones necesarias son suficientes bajo determinadas hipótesis sobre H . Si no, estaríamos hablando de candidatos a óptimos del problema (17).

Si (x^*, y^*) es un punto de equilibrio del sistema (18), consideramos la linealización del mismo en un entorno de dicho punto, con lo cual, podemos reescribir (18) como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mu} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}(x, \mu) \\ \tilde{M}(x, \mu) \end{pmatrix} \quad (19)$$

con J la matriz Jacobiana del campo vectorial dado por (18) en el punto (x^*, y^*) y \tilde{G}, \tilde{M} incluyendo los términos de órdenes mayores o iguales que dos.

Sabemos que la naturaleza del punto de equilibrio depende de los autovalores de J (siempre que el punto no sea hiperbólico). Como el polinomio característico de J es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \delta\lambda + \det J \quad (20)$$

los autovalores de J vendrán dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \det J} \quad (21)$$

Entonces, para una tasa de descuento $\delta > 0$, los autovalores anteriores pueden ser reales positivos (nodo inestable), o reales de distinto signo (punto de silla), o complejos con parte real positiva (espiral inestable). Como se observa, la estabilidad completa es imposible y sólo puede hablarse de la estabilidad condicional del punto de silla. Además, J no posee autovalores imaginarios puros y el sistema no presenta por tanto trayectorias oscilatorias de tipo ciclo límite. Hartl(1987) probó que las soluciones cíclicas en problemas de control óptimo en dimensión finita ocurren sólo si hay más de una variable de estado. En la siguiente sección analizaremos este caso

para un problema de control con dos estados y un control. Los resultados serán aplicados a continuación a un caso práctico.

5. Oscilaciones en un modelo de control óptimo con dos variables de estado y un control

Consideremos el problema de control óptimo consistente en

$$\begin{aligned}
 & \underset{u}{\text{maximizar}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} F(k_1(t), k_2(t), u(t)) dt \\
 & \text{sujeto a} \quad \dot{k}_1 = f(k_1, k_2, u) \\
 & \quad \quad \quad \dot{k}_2 = g(k_1, k_2, u) \\
 & \quad \quad \quad k_1(0) = k_{10}, k_2(0) = k_{20}
 \end{aligned} \tag{22}$$

Supongamos que f , g y F son dos veces diferenciables con derivadas de primer y segundo orden continuas. Las condiciones necesarias de optimalidad del Principio del Máximo nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
 \dot{k}_1 &= f \\
 \dot{k}_2 &= g \\
 \dot{\mu}_1 &= \delta\mu_1 - \frac{\partial H}{\partial k_1} \\
 \dot{\mu}_2 &= \delta\mu_2 - \frac{\partial H}{\partial k_2}
 \end{aligned} \tag{23}$$

donde μ_1 y μ_2 son las variables de coestado. Para estudiar la dinámica del sistema anterior, calculamos los puntos de equilibrio y, para cada uno de ellos, consideramos la linealización del sistema a través de la matriz Jacobiana J en cada punto, como se hizo en la sección anterior. Consideramos δ como parámetro del sistema. Nos interesará entonces determinar para qué valores δ_0 del parámetro, pueden existir autovalores de J con parte real nula.

Según Dockner(1985), los autovalores de la matriz Jacobiana del sistema (23) expresada en un punto de equilibrio, tienen la siguiente expresión:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 4 \det J}} \quad (24)$$

donde $K = B - \delta^2$ siendo B la suma de los menores diagonales de orden dos¹⁷ de la matriz J.

Entonces se verifican los siguientes resultados:

Teorema¹⁸.

$$1) K < 0, 0 < \det J \leq (K/2)^2 \Leftrightarrow \lambda_i \in \nabla, \forall i, \lambda_{1,2} > 0, \lambda_{3,4} < 0$$

$$2) \det J > (K/2)^2, \det J > (K/2)^2 + \delta^2 K/2 \Leftrightarrow \lambda_i \in \Re, \forall i, \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0, \operatorname{Re} \lambda_{3,4} < 0$$

$$3) \det J < 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2,4} > 0, \lambda_3 < 0 \text{ ó } \lambda_1 > 0, \lambda_3 < 0, \operatorname{Re} \lambda_{2,4} > 0$$

$$4) \det J > (K/2)^2, \det J = (K/2)^2 + \delta^2 K/2 \Leftrightarrow \lambda_i \in \Re, \forall i, \operatorname{Re} \lambda_{1,2} > 0, \operatorname{Re} \lambda_{3,4} = 0$$

A la vista de (24) y del teorema anterior, podemos observar que, siendo $\det J > (K/2)^2$, se verifica:

$$\text{Si } \det J > \left(\frac{K}{2}\right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{3,4} < 0 \quad (25)$$

$$\text{Si } \det J = \left(\frac{K}{2}\right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda_{3,4} = 0 \quad (26)$$

¹⁷ B es por tanto el coeficiente de grado dos del polinomio característico de J

¹⁸ Dockner et al (1991)

$$\text{Si } \det J < \left(\frac{K}{2}\right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{Re } \lambda_{3,4} > 0 \quad (27)$$

Entonces, como consecuencia de (25), (26) y (27), podemos concluir que los autovalores atraviesan el eje imaginario al pasar δ de ser $\delta < \delta_0$ a ser $\delta > \delta_0$, siendo

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{2}{K} \det J - \frac{K}{2}} \quad (28)$$

Es el primer signo de que una bifurcación de Hopf puede ocurrir para el valor del parámetro $\delta = \delta_0$ con la consiguiente aparición de un ciclo límite. El teorema de Hopf así lo asegura siempre que se verifique la condición (7) del teorema.

Existe entonces la posibilidad de que en un modelo de este tipo puedan existir ciclos límites, cuya estabilidad tendrá que determinarse en cada caso mediante las técnicas numéricas apropiadas. En la siguiente sección se estudia la estabilidad de las soluciones en un modelo dinámico para la gestión de una pesquería y se tratará de determinar la posibilidad de existencia de ciclos límites a través del teorema de Hopf.

6. Análisis dinámico de la pesquería de chirla en la región Suratlántica española: estabilidad y existencia de ciclos límites

Consideremos el modelo de control óptimo (15) lineal en los costes analizado en la sección 3. Vamos a introducir en el funcional objetivo unos costes de ajuste convexos¹⁹ $k = k(v(t))$ donde $v(t)$ va a ser una nueva variable de control definida como:

¹⁹ Tal y como proponen Feichtinger y Sorger (1986). La nueva variable v puede ser interpretada como un coste regulador de la entrada y salida de pescadores en la pesquería. Stollery, K.R.(1987) utiliza una función análoga.

$$v(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad (29)$$

El esfuerzo de pesca $E(t)$ (que en el modelo (15) era el control) es considerado ahora como una variable de estado que se rige por la ecuación diferencial (29). La función de utilidad $W(x,E)$, incorporaría la función de costes $k(v)$ y quedaría en la forma:

$$W(x(t), E(t)) = pqE(t)x(t) - cE(t) - k(v(t)) \quad (30)$$

Tendríamos ahora un problema de control óptimo consistente en:

$$\begin{aligned} & \underset{v}{\text{maximizar}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (W(x, E) - k(v(t))) dt \\ & \text{sujeto a} \quad \dot{x} = F(x) - qEx \\ & \quad \quad \quad \dot{E} = v \\ & \quad \quad \quad x(0) = x_0, E(0) = E_0 \end{aligned} \quad (31)$$

Vamos a considerar unos costes de ajuste cuadráticos $k(v) = \beta v^2$, con $\beta > 0$ y la función de crecimiento natural $F(x)$ como en (14). Las condiciones necesarias de optimalidad²⁰ del Principio del Máximo nos llevan al sistema de ecuaciones diferenciales:

²⁰ Hablamos de candidatos a óptimos, pues no tenemos garantizada la suficiencia de las condiciones necesarias

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{L}\right) - qEx \\
\dot{E} &= \frac{v}{L} \left(\delta - r + \frac{2rx}{L} \right) \mu_1 + (\mu_1 - p)qE \\
\dot{c} &= \delta v - \frac{p - \mu_1}{2\beta} qx + \frac{c}{2\beta}
\end{aligned} \tag{32}$$

El estudio dinámico de este sistema tal y como proponen Dockner y Feichtinger(1991) pasa por:

- Cálculo de los puntos de equilibrio
- Cálculo de la matriz Jacobiana en cada uno de ellos
- Cálculo de det J y K para determinar la naturaleza del equilibrio

Recordemos que estamos también interesados en estudiar la posibilidad de ciclos límite aplicando el teorema de bifurcación de Hopf. Sabemos que, si existe, el valor de bifurcación δ_0 viene dado por (28) y que localmente, a ambos lados de dicho valor, pueden surgir ciclos límites. Para determinar la estabilidad de dichos ciclos, habría que restringir el sistema a la variedad centro, y hallar su forma normal, la cual expresada en coordenadas polares será una expresión del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = (\eta(\delta - \delta_0) + \alpha\rho^2)\eta \\ \dot{\phi} = \omega + \gamma(\delta - \delta_0) + \nu\rho^2 \end{cases} \tag{33}$$

donde α , ν , γ y η tienen que ser calculadas a partir de los parámetros del modelo y ω es la parte imaginaria de los autovalores imaginarios puros en el valor de bifurcación. Una condición suficiente para que el ciclo límite resultante sea estable²¹, es que $\nu \neq 0$ y $\alpha < 0$.

El cálculo de los puntos de equilibrio del sistema (32), así como el de la matriz Jacobiana en cada uno de ellos y la obtención de $\det J$ y K , puede efectuarse de forma simbólica en función de todos los parámetros del sistema, pero el posterior estudio de la estabilidad y posibilidad de órbitas cerradas resulta inabordable de esta manera. Es necesario entonces asignar unos valores numéricos a los parámetros (excepto δ). Tomando como referencia los parámetros biológicos y económicos estimados para la pesquería de bivalvos y chirla suratlántica en García, F. y García, J.(1998, 2000), hemos asignado a los parámetros del sistema (32) los siguientes valores:

r	q	L	p	c
0.456146	0.0000195	19226309K	148.5 ptas/K	6138 ptas/día pesca

Como ya dijimos, se realiza el estudio dinámico en función del parámetro δ .

El sistema tiene dos puntos de equilibrio que denotaremos por P1 y P2 cuyas coordenadas, una vez asignados valores a los parámetros, resultan ser funciones de δ . Sean, para cada equilibrio dichas coordenadas: $P1 = (x_{1\delta}, E_{1\delta}, \mu_{1\delta}, v_{1\delta})$ y $P2 = (x_{2\delta}, E_{2\delta}, \mu_{2\delta}, v_{2\delta})$ donde:

$$\begin{aligned}
 x_{1\delta} &= 7.40 \left(\sqrt{2.02 \cdot 10^{12} \delta^2 - 1.23 \cdot 10^{12} \delta + 5.19 \cdot 10^{11}} - 1.42 \cdot 10^6 \delta + 7.21 \cdot 10^5 \right) \\
 E_{1\delta} &= -9 \left(\sqrt{2.02 \cdot 10^6 \delta^2 - 1.23 \cdot 10^6 \delta + 5.19 \cdot 10^5} - 1.42 \cdot 10^3 \delta - 1.87 \cdot 10^3 \right) \\
 \mu_{1\delta} &= \frac{-5.21}{\delta} \left(\sqrt{2.02 \cdot 10^2 \delta^2 - 1.23 \cdot 10^2 \delta + 51.98} - 14.23 \delta - 72.1 \right) \\
 v_{1\delta} &= 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

²¹ Ver Kuznetsov (1997,p.90) o Wiggins (1990, p.220)

y

$$\begin{aligned}
x_{2\delta} &= -7.40 \left(\sqrt{2.02 \cdot 10^{12} \delta^2 - 1.23 \cdot 10^{12} \delta + 5.19 \cdot 10^{11}} + 1.42 \cdot 10^6 \delta - 7.21 \cdot 10^5 \right) \\
E_{2\delta} &= 9 \left(\sqrt{2.02 \cdot 10^6 \delta^2 - 1.23 \cdot 10^6 \delta + 5.19 \cdot 10^5} + 1.42 \cdot 10^3 \delta + 1.87 \cdot 10^3 \right) \\
\mu_{2\delta} &= \frac{5.21}{\delta} \left(\sqrt{2.02 \cdot 10^2 \delta^2 - 1.23 \cdot 10^2 \delta + 51.98} + 14.23 \delta + 72.1 \right) \\
v_{2\delta} &= 0
\end{aligned} \tag{35}$$

Análisis del punto P1

Si calculamos la matriz Jacobiana de (32) en P1 como función de δ y hallamos su determinante y el coeficiente K, puede comprobarse que: $\det J > 0$ (Figura 1) y $K < 0$ (Figura 2), $\forall \delta > 0$. Deducimos entonces que en el punto P1 no va a existir bifurcación de Hopf, pues para que ello sucediera debía ser $K > 0$. Además, tampoco van a existir bifurcaciones del tipo transcítica ni nodo silla, pues una condición para ello es que exista un autovalor simple igual a cero²², y en consecuencia debería ser $\det J = 0$.

Para determinar la naturaleza de P1, hemos comparado $\det J$ con $(K/2)^2$, para distintos valores de β , comprobando que, para $\delta \in (0,1)$ se verifica (Figura 3) que $(K/2)^2 - \det J < 0$, $K < 0$, lo cual implica por el teorema anterior que los autovalores son todos complejos, dos de ellos con parte real positiva y dos con parte real negativa. Por lo tanto, P1 es un punto de silla. En un entorno de este punto, puede hablarse entonces de estabilidad condicional, es decir, si las condiciones iniciales son tales que están sobre la variedad estable, la trayectoria correspondiente del sistema convergerá hacia P1. En otro caso, se alejará de él. La variedad estable es de

dimensión 2 y una aproximación a a la misma vendría dada por el subespacio vectorial generado por los autovectores correspondientes a los autovalores con $\text{Re } \lambda < 0$.

Por ejemplo, para el valor del parámetro $\delta = 0.03$ y $\beta = 3$, el punto de equilibrio $P1 = (1.01724 \cdot 10^7, 1.10155 \cdot 10^4, 117.556, 0)$ y los autovalores asociados son $\lambda_{1,2} = 0.36 \pm 0.30i$ y $\lambda_{3,4} = -0.33 \pm 0.30i$.

Análisis del punto P2

En un entorno del punto P2 podemos hablar de trayectorias oscilatorias del tipo ciclo límite, pero ocurre que un punto como éste no sería posible en un caso real, pues la coordenada $x_{2\delta}$ resulta ser negativa para todo valor de $\delta > 0$. No obstante, fuera de un contexto meramente económico las posibilidades dinámicas que ofrece este punto son interesantes. Puede comprobarse que la matriz Jacobiana de (32) evaluada en P2 tiene $\det J > 0$ (Figura 4) y que el coeficiente K es positivo para todo $\delta > 0$. Además, $(K/2)^2 - \det J < 0$ para $\delta \in (0,1)$ (Figura 5). Existe pues una bifurcación de Hopf para el valor del parámetro dado por (28), con la consiguiente aparición de un ciclo límite. En la siguiente tabla recogemos algunos valores de bifurcación calculados para distintos valores de β , así como el signo de la derivada (d) de la parte real del autovalor en cada uno de ellos.

β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1	1.5
δ_0	6.15411	4.2517	3.4102	2.90949	2.56852	1.72859	1.3638
Signo(d)	+	+	+	+	+	-	-

²² Ver Wiggins (1990)

7. Conclusiones

El modelo estudiado presenta dos equilibrios. El primero es un punto de silla, el cual atraerá a las trayectorias del sistema que comiencen en valores iniciales que se sitúen sobre la variedad estable. Se habla entonces de estabilidad condicional. El segundo, fuera de un contexto meramente económico, es un equilibrio en torno al cual pueden surgir trayectorias oscilatorias del tipo ciclo límite, las cuales podrán ser estables y atraer a otras trayectorias del sistema que comiencen en valores iniciales próximos a ellas. Se pone de manifiesto cómo un modelo de control óptimo como (31) podría tener como solución óptima una política de gestión del recurso cíclica.

Nuestra investigación se centra actualmente en encontrar nuevos modelos de gestión que, aplicados a la pesquería en cuestión, exhiban trayectorias cíclicas en torno a un equilibrio que pueda ser factible en la práctica. Hemos pensado en considerar una función de capturas en la forma general de Cobb- Douglas: $h(t) = qE^\alpha x^\beta$, con $\alpha, \beta > 0$. Ello hace el estudio del sistema diferencial (32) más complicado, debido a que las no linealidades presentes son más fuertes que las encontradas con la función de capturas (11) del modelo de Schaefer.

7. Bibliografía

- Benhabib, J., Nishimura, K. (1979), “ The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth”, *Journal of Economic Theory* 21, 421- 444.
- Cartigny, P., Venditti, A. (1994), “Turnpike Theory: Some New Results on the Saddle Point Property of Equilibria and on the Existence of Endogenous Cycles”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 5, 957- 974.
- Dockner, E. (1985), “ Local Stability Analysis in Optimal Control Problems With Two State Variables”, *Optimal Control Theory and Economic Analysis* 2, 89-103.

- Dockner, E., Feichtinger, G. (1991), "On the Optimality of Limit Cycles in Dynamic Economic Systems", *Journal of Economics*, 53, 1, 31-50.
- Feichtinger, G., Sorger, G. (1986), "Optimal Oscillations in Control Models: How Can Constant Demand Lead to Cyclical Production?", *Operations Research Letters*, 5, 6, 277-281.
- Feichtinger, G., Kaitala, V., Novak, A.J. (1992), "Stable Resource-Employment Limit Cycles in an Optimally Regulated Fishery", En *Dynamic Economic Models and Optimal Control*. Feichtinger, G. (ed). Elsevier Science, pp. 163- 184.
- García Ordaz, F., García del Hoyo, J.J. (1998), "Un modelo bioeconómico para la pesquería de *chamelea gallina* de la Región Suratlántica española". Estudios Agrosociales y Pesqueros, nº 184, pp.183-211.
- García del Hoyo, J.J. (2000), "Análisis de la comercialización de bivalvos y de la chirila suratlántica". Documento elaborado por el grupo de Investigación MEMPES de la Universidad de Huelva en colaboración con la Dirección General de Pesca de la Consejería de Agricultura y Pesca de la Junta de Andalucía.
- Guckenheimer, J., Holmes, P.(1986), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer- Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- Hartl, P. F. (1987), "A Simple Proof of the Monotonicity of the State Trajectories in Autonomous Control Problems", *Journal of Economic Theory* , 40.
- Hopf, E. (1942), "Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential-Systems". *Berichte der Mathematisch- Physikalischen Koniglich- Sachsischen Academie der Wissenschaften Leipzig* 94, pp.1- 22.
- Kamien, M., Schwartz, N. (1991), *Dynamic Optimization*, North- Holland.
- Lorenz, H.W.(1989), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Springer- Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- Medio, A. (1987), "Oscillations in Optimal Growth Models". *Journal of Economic Behavior and Organization*, 8, 413-427.

- Montrucchio, L. (1992), “Dynamical Systems that Solve Continuous- Time Concave Optimization Problems: Anything Goes”. En Benhabib, J. (ed): *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*. Princeton: Princeton University Press.
- Schaefer, M.B. (1954), “Some aspects of the dynamics of populations important to the management of commercial marine fisheries”. *Bull. Inter-Amer. Trop. Tuna Comm.* 1:25-56.
- Stollery, K. R. (1986), “Monopsony Processing in an Open- Access Fishery”. *Marine Resource Economics*, Vol.3, N. 4, pp. 331- 352.
- Wiggins, S.(1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer- Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.

8. Figuras

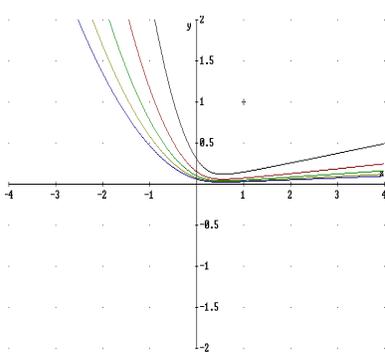


Figura 1

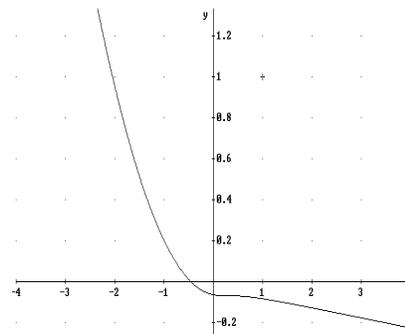


Figura 2

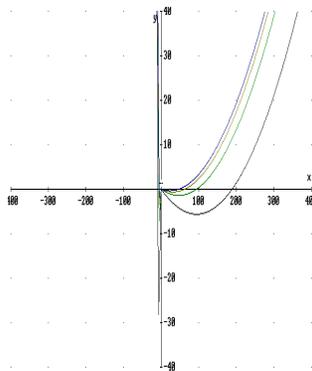


Figura 3

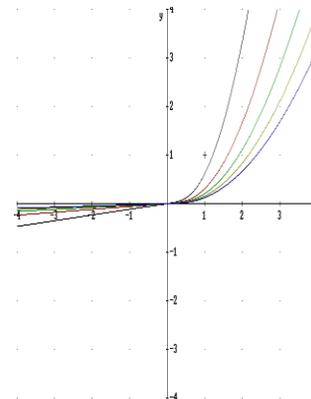


Figura 4