



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y  
ANÁLISIS NUMÉRICO

TRABAJO FIN DE GRADO EN MATEMÁTICAS

**ESTUDIO DEL ERROR EN LA  
INTERPOLACIÓN POLINÓMICA**

MARTA LOBATO LÓPEZ

19 de Junio de 2018

---

Dirigido por:

D. Manuel Delgado Delgado



# Abstract

This dissertation provides a study of the error of Lagrange's Polynomial Interpolation. It consists of seven chapters that include some topics of the Numerical Analysis.

Firstly, we will have introduced a series of basic tools that are also very useful in other fields of Numerical Analysis and that we will use throughout the project.

Secondly, we will recall the main results related to the approximation of a function of a real variable by an algebraic polynomial. After that, we will study the error of polynomial interpolation when the nodes are equidistant. In addition, we will analyse the problem of minimizing the oscillations produced in the extremes in the Runge phenomenon and we will study the existence of the polynomial of best approximation.

From here, the Weierstrass Theorem is deduced and the approximation of a class  $C^1$  function is studied by polynomials that interpolate it to the zeros of the Chebyshev polynomials.

Finally, we will conclude the dissertation by considering which choice of nodes uniformly approximate regular functions.



# Resumen

En este trabajo se lleva a cabo un estudio del error de la interpolación polinómica de Lagrange. Consta de siete capítulos que recoge algunos temas del Cálculo Numérico.

En los capítulos 1 y 2, hemos introducido una serie de herramientas básicas que también son muy útiles en otros campos del análisis numérico y que utilizaremos a lo largo del trabajo.

En el capítulo 3, recordamos los principales resultados relativos a la aproximación de una función de una variable real por un polinomio algebraico. Comenzamos el capítulo introduciendo el concepto de la interpolación polinómica de Lagrange, citando un resultado de existencia y unicidad del polinomio de interpolación y una expresión del error de interpolación, ya estudiada en el grado.

En el capítulo 4, estudiaremos el error de la interpolación polinómica cuando los nodos son equidistantes y veremos lo que puede ocurrir en los extremos del intervalo cuando estudiamos el fenómeno de Runge.

En el capítulo 5, analizaremos el problema de minimizar las oscilaciones producidas en los extremos en el fenómeno de Runge mediante otra elección de los nodos, en este caso, los ceros de los polinomios de Chebyshev, dando una mejor estimación del error.

En el capítulo 6, estudiaremos la existencia del polinomio de mejor aproximación, introduciendo el concepto de Constante de Lebesgue y probando la acotación del grado de aproximación (mínima distancia entre la función y el polinomio de mejor

---

aproximación de grado  $n$ ) por el módulo de continuidad de la función en el intervalo  $\frac{b-a}{n}$ .

De aquí se deduce el Teorema de Weierstrass y se estudia la aproximación de una función de clase  $C^1$  por polinomios que la interpolan a los ceros de los polinomios de Chebyshev.

Finalmente concluiremos el trabajo viendo qué elección de los nodos aproximan uniformemente a funciones regulares.

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
1.1	Generalidades . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Resultados previos</b>	<b>11</b>
2.1	Teoría de series . . . . .	11
2.2	Resultados de variable compleja . . . . .	13
2.3	Otros resultados . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Interpolación polinómica</b>	<b>15</b>
3.1	Fórmula de interpolación de Lagrange . . . . .	16
3.2	Estimación del error . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Interpolación polinómica para puntos de abscisas equidistantes</b>	<b>19</b>
4.1	Estudio de $\prod_{i=0}^n  (x - x_i) $ en el caso de abscisas equidistantes . . . . .	19
4.2	Fenómeno de Runge . . . . .	26
4.2.1	Ejemplo . . . . .	26
4.2.2	Explicación del Fenómeno de Runge . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Polinomios de Chebyshev</b>	<b>31</b>
5.1	Mejores estimaciones de errores reales: Polinomios de Chebyshev . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Aproximación de funciones continuas</b>	<b>39</b>
6.1	Existencia del polinomio de mejor aproximación . . . . .	39
6.2	Constante de Lebesgue . . . . .	41
6.3	Módulo de continuidad . . . . .	46
6.4	Casos particulares . . . . .	50

6.5	Ejemplo considerando los ceros del polinomio de Chebyshev . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Anexos</b>	<b>55</b>
7.1	Código Matlab . . . . .	55
7.1.1	Fenómeno de Runge . . . . .	55
7.1.2	Interpolaciones de Polinomios de Chebyshev . . . . .	56
	<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Una cuestión que encontramos con frecuencia en las ciencias experimentales y en ingeniería es tratar de construir una función denominada “*función interpolante*” de la cual se conoce una serie de valores en ciertos puntos denominados “*datos de interpolación*”.

En ocasiones, este problema comprende también otros datos, especialmente los valores de las derivadas de la función en ciertos puntos. Estos datos pueden ser obtenidos, por ejemplo, a partir de observaciones realizadas en un determinado experimento.

El objetivo será determinar una función cuyos valores en los puntos considerados coincidan con los datos y que además sea fácil de construir y manipular. Los polinomios se usan con frecuencia como funciones interpolantes porque son fáciles de evaluar y por el hecho fundamental de que dados  $n+1$  puntos de abscisa distinta,  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , existe exactamente un polinomio  $P_n(x)$  de grado no superior a  $n$ , que pasa por dichos puntos, es decir, tal que  $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ . En la interpolación lineal, la función se sustituye por la recta que pasa por dos puntos.

Tres datos se interpolan con un polinomio de segundo grado, gráficamente una parábola que pasa por esos tres puntos.

Una vez que se ha determinado la función interpolante, en nuestro caso se trataría del polinomio interpolante, uno puede estimar el valor que el experimento de partida habría tomado en puntos próximos a los datos de interpolación evaluando la función

interpolante en los mismos.

Pero cabe también considerar el problema donde se tiene una función conocida definida en el intervalo  $[a,b]$  en el que se toman una serie de puntos (abscisas) que junto con los respectivos valores de la función en ellos (ordenadas) constituyen los datos de interpolación.

Se construye así un polinomio que coincide con la función en una serie de puntos y cabe preguntarse por el error máximo cometido entre ambas funciones e incluso, si al aumentar el número de puntos de coincidencia que se relaciona con el grado del polinomio, se obtendrá mejor aproximación.

Según cómo sean los datos de interpolación, podemos considerar los siguientes tipos de interpolación:

Se denomina *Interpolación de Lagrange* si los datos son los valores de la función en distintos puntos. Se denomina *Interpolación de Taylor* cuando se conoce el valor de la función y sus derivadas sucesivas en un punto y, por último, se llama *Interpolación de Hermite* si se conocen los valores de la función y sus derivadas en distintos puntos. En este trabajo nos ocuparemos de la primera de ellas.

## 1.1 Generalidades

Un problema de interpolación en general puede enunciarse de la siguiente forma: Dado un conjunto de datos, generalmente valores de una función y/o sus derivadas en determinados puntos  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , que llamaremos *nodos*, nuestro objetivo es construir otra función que coincida con la función dada en los datos de interpolación.

En general, las funciones interpolantes forman un espacio vectorial de dimensión finita, es decir, son del tipo:

$$\psi(x) = a_0\psi_0(x) + a_1\psi_1(x) + \dots + a_n\psi_n(x),$$

donde  $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ , son funciones dadas que forman base del espacio vectorial correspondiente y  $a_i, i = 0, 1, \dots, n$  son números reales a determinar.

Dependiendo del tipo de funciones que utilicemos como funciones interpolantes,

la interpolación se llamará polinómica, racional, trigonométrica, . . . Entre las diferentes funciones interpolantes, los polinomios son los utilizados con mayor frecuencia en problemas de interpolación.

A lo largo de este trabajo iremos dando respuesta a cada una de estas preguntas.

Supongamos que tenemos una función continua definida en un intervalo  $[a, b]$ . Supongamos que construimos  $p_n(x)$  el polinomio de interpolación de esta función en  $n + 1$  nodos:

- a) ¿ Se verifica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$  en el sentido de la convergencia uniforme?
- b) En caso negativo, ¿qué cota de error se comete?
- c) ¿Qué nodos hay que escoger para que la aproximación sea la mejor posible?



# Capítulo 2

## Resultados previos

### 2.1 Teoría de series

**Teorema 2.1 (Criterio de Stolz).** Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  dos sucesiones de números reales. Asumiendo que  $\{b_n\}$  sea positiva, estrictamente creciente y no acotada y que exista el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda.$$

Entonces podemos asegurar que el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  existe y es igual a  $\lambda$ .

Este criterio se utiliza para probar la convergencia de una sucesión. Su aplicación permite la resolución de algunos tipos de indeterminaciones, como por ejemplo la siguiente proposición.

**Proposición 2.2** Se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\text{Ln}(n)} = 1.$$

**Demostración:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \dots + \frac{1}{n}}{\text{Ln}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\text{Ln} \left( 2 \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n}{n-1} \right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\text{Ln}(2) + \text{Ln}\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + \text{Ln}\left(\frac{n}{n-1}\right)}.$$

Aplicando el **criterio de Stolz**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{n}{n-1}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\text{Ln}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \cdot [\text{Ln}(1) - \text{Ln}(1 - \frac{1}{n})]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{-n \cdot \text{Ln}\left(1 - \frac{1}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Ln}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}} = \frac{1}{\text{Ln}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = e. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\text{Ln}(n)} = \frac{1}{\text{Ln}(e)} = 1$$

Con esto hemos probado que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \text{Ln}(n). \quad (2.1)$$

■

**Proposición 2.3 (Fórmula de Stirling).** *Se verifica:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}} = 1. \quad (2.2)$$

Podemos usar esta fórmula para calcular el límite de sucesiones en las que aparece el término  $n!$ .

## 2.2 Resultados de variable compleja

A continuación, introduciremos aquellos resultados previos que utilizaremos a lo largo del trabajo. Así pues, empezaremos dando la primera proposición.

**Proposición 2.4 (Fórmula integral de Cauchy).** *Sea  $\mathbb{R}$  una región simplemente conexa y sea  $f(z) \in A(\mathbb{R})$ . Sea  $z_0 \in \mathbb{R}$  y supongamos que  $C$  es una curva simple, cerrada y rectificable que está en  $\mathbb{R}$  y que se encuentra alrededor de  $z_0$  en sentido positivo. Luego:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (2.3)$$

**Proposición 2.5 (Fórmula de De Moivre)** *La fórmula de De Moivre afirma que para cualquier número complejo y para cualquier entero  $n$  se verifica que:*

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \quad (2.4)$$

## 2.3 Otros resultados

**Teorema 2.6 (Fórmula del binomio de Newton).** *Sean  $a$  y  $b$  números reales y además  $n$  y  $k$  números enteros, tal que  $0 \leq k \leq n$ , entonces:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (2.5)$$

Siendo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



# Capítulo 3

## Interpolación polinómica

Comenzamos este capítulo introduciendo el concepto de la interpolación polinómica de Lagrange y obteniendo un resultado de existencia y unicidad del polinomio de interpolación. Presentaremos un algoritmo de construcción del polinomio de interpolación y una expresión del error de interpolación.

A la vista de la expresión del error obtenida, analizamos el problema de minimizar dicho error, usando para ellos la sucesión de polinomios de Chebyshev que veremos en el capítulo 5.

**Definición 3.1** Sea  $f(x)$  una función continua definida  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y consideremos unos valores conocidos de esta en  $n + 1$  puntos distintos  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  con  $x_i \in [a, b]$ .

La interpolación polinómica de Lagrange consiste en obtener un polinomio  $P_n(x)$  de grado no superior a  $n$  tal que se cumpla que en los nodos, las imágenes de  $f(x)$  y  $P_n(x)$  coincidan, es decir,

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Al polinomio  $P_n(x)$  se le conoce como polinomio interpolador de Lagrange y forma parte del conjunto de los polinomios de grado menor o igual que  $n$  y, por tanto,  $P_n(x)$  será de la forma:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

y, para determinarla, habrá que hallar los  $n + 1$  coeficientes reales  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

**Nota 3.2** Diremos que  $P_n(x)$  tiene grado  $n$  en el caso que  $a_n$  sea no nulo.

Supongamos que aproximamos  $f(x)$  por  $P_n(x)$  en dichos nodos. Con  $P_n(x)$  estimamos el valor de  $f(x)$ , cometiendo un error cuya cota es interesante determinar.

En el siguiente resultado recordaremos la existencia y unicidad del polinomio de interpolación  $P_n(x)$ .

### 3.1 Fórmula de interpolación de Lagrange

**Teorema 3.3 (Fórmula de interpolación de Lagrange)** Sean  $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   $n + 1$  puntos distintos del intervalo  $[a,b]$ . Entonces, existe un único polinomio  $P_n(x)$  de grado menor o igual que  $n$ , que verifica:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.1)$$

A este polinomio se le denomina polinomio de interpolación de  $f$  en los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y viene dado por:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x), \quad (3.2)$$

donde

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \text{ para cada } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

**Nota 3.4** : Ver [4]

- La expresión (3.2) se conoce como *fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación*. El Teorema anterior proporciona un método constructivo para obtener el polinomio de interpolación  $P_n(x)$  mediante la fórmula (3.2).
- Podríamos omitir el cálculo de  $L_j(x)$  si algún dato es  $f(x_j) = 0$ .

- Los polinomios  $L_k(x)$  sólo dependen de los nodos de interpolación  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ . De modo que, una vez calculado cada  $L_k(x)$  se construyen los polinomios de interpolación poniendo los  $f(x_k)$  como coeficientes de una combinación lineal, lo cual es una ventaja si queremos resolver varios problemas de interpolación como los mismos nodos  $x_k$ . En este sentido,  $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}$  es la base del espacio vectorial de los polinomios de interpolación asociados a los nodos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .
- La fórmula de Lagrange (3.2) tiene el inconveniente de que hay que realizar numerosos cálculos y al añadir un dato más de interpolación, hay que volver a calcular todos los polinomios  $L_k(x)$ .

## 3.2 Estimación del error

En este apartado analizaremos el error en la interpolación polinómica de una función  $f(x)$ . El teorema que introduciremos a continuación permite estudiar el error de la interpolación por polinomios cuando la función dada posee derivadas de hasta orden  $(n + 1)$ . Mediante este resultado se puede obtener una estimación del error que estamos cometiendo al aproximar  $f(x)$  por  $P_n(x)$ .

### **Teorema 3.5 (Error de la interpolación polinómica de Lagrange)** .

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(x)$  continua en  $[a, b]$  y  $n+1$  veces derivable en dicho intervalo. Consideremos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  nodos distintos dos a dos. Sea  $P_n(x)$  el polinomio de interpolación de grado  $\leq n$  tal que  $P_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $\forall i = 0, \dots, n$ . Entonces, existe  $\xi \in [a, b]$  tal que:

$$|R_n(f; x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|f^{n+1}(\xi)|}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)|. \quad (3.3)$$

Observamos que aparecen dos factores en la cota,  $f^{n+1}(\xi)$  y  $\prod_{i=0}^n |(x - x_i)|$ .

**Nota 3.6** El teorema anterior resulta ser una extensión del Teorema del Valor Medio para más de un punto. En efecto, para  $n = 0$  y  $S = x_0$ , la expresión se reduce a lo siguiente:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f'(\xi_x)| \cdot (x - x_0).$$

A continuación, introduciremos un corolario en el cual acotaremos el término  $f^{(n+1)}(\xi)$ .

**Corolario 3.7** Sea  $f(x) \in A(\mathbb{R})$  donde  $\mathbb{R}$  es una región que contiene  $[a, b]$ . Sea  $C$  una curva cerrada que contiene a  $[a, b]$  en su interior y sea  $L(C)$  la longitud de la curva  $C$ ,  $M_C = \max_{z \in C} |f(z)|$  es el valor máximo que puede tomar dicha curva y  $\delta$  es la mínima distancia de  $C$  a  $[a, b]$ . Luego:

$$|R_n(f; x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{n! L(C) M_C}{2\pi \delta^{n+2}} |x - x_0| |x - x_1| \cdots |x - x_n|. \quad (3.4)$$

**Demostración:** Tomando valor absoluto en la proposición (2.3) obtenemos la siguiente expresión:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n! \max_{z \in C} |f(z)|}{2\pi \min |z - z_0|^{n+1}} L(C),$$

donde  $L(C)$  es la longitud de la curva  $C$ ,  $\max_{z \in C} |f(z)|$  es el valor máximo que puede tomar dicha curva y  $\min |z - z_0|^{n+1}$  el valor mínimo de la distancia entre los puntos de la curva y  $z_0$ . ■

En los siguientes capítulos, estudiaremos diversas cotas de  $\prod_{i=0}^n |(x - x_i)|$  en función de la elección de los puntos.

# Capítulo 4

## Interpolación polinómica para puntos de abscisas equidistantes

### 4.1 Estudio de $\prod_{i=0}^n |(x - x_i)|$ en el caso de abscisas equidistantes

En este capítulo estudiaremos el error de la interpolación polinómica cuando los nodos son puntos equidistantes. Veremos cómo el cálculo del polinomio de interpolación se simplifica cuando los nodos están igualmente espaciados.

**Proposición 4.1** *Dados  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  ( $n + 1$ ) puntos igualmente espaciados en el intervalo  $[a, b]$  con  $x_0 = a, x_n = b$ , existe  $C > 0$  tal que:*

$$\max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \leq \frac{C e^{-n}}{\sqrt{n} \operatorname{Ln}(n)} (b - a)^{n+1}, \quad \forall n > 1. \quad (4.1)$$

Donde  $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$  es el término de la fórmula del error de interpolación en el punto  $x$ .

**Demostración:** Dividiremos la demostración en varias etapas:

**Primera etapa:**

Esta etapa va a consistir en reducir el problema al intervalo  $[0, n]$ .

Sea:

$$\left. \begin{aligned} x &= a + s \left( \frac{b-a}{n} \right), \quad s \in [a, b]. \\ x_i &= a + i \left( \frac{b-a}{n} \right), \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \right\}$$

Luego  $(x - x_i) = \left( \frac{b-a}{n} \right) (s - i)$ .

Por tanto,

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n (x - x_i) &= \left| (s-0) \left( \frac{b-a}{n} \right) \cdot (s-1) \left( \frac{b-a}{n} \right) \cdot \dots \cdot (s-n) \left( \frac{b-a}{n} \right) \right| = \\ &= \left( \frac{b-a}{n} \right)^{n+1} |s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-n)|, \quad \text{con } s \in [0, n]. \end{aligned}$$

Consideremos la función  $f(s) = |s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n)|$  definida para  $s \in [0, n]$  y que alcanza su máximo en un punto  $s_n$ . Vamos a estudiar la posición de  $s_n$  y el valor del máximo de  $f$ , dando paso a la siguiente etapa.

### Segunda etapa:

Aquí vemos la simetría de la función  $f(s) = |s(s-1) \cdot \dots \cdot (s-n)|$ . Tomamos  $s' = s - \frac{n}{2}$  y sustituyendo obtenemos:

$$\left| \left( s' + \frac{n}{2} \right) \cdot \left( s' + \frac{n}{2} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left( s' + \frac{n}{2} - n + 1 \right) \cdot \left( s' + \frac{n}{2} - n \right) \right|$$

que simplificando quedaría:

$$\left| \left( s' + \frac{n}{2} \right) \cdot \left( s' + \frac{n}{2} - 1 \right) \cdot \dots \cdot \left( s' - \frac{n}{2} + 1 \right) \cdot \left( s' - \frac{n}{2} \right) \right|.$$

De aquí concluimos que  $s'$  tiene exponente par, ya que el producto entre el primer término y el último queda un término de segundo grado, de igual forma pasaría con el segundo término y el penúltimo, y así sucesivamente, dando lugar al producto de

polinomios de exponente par, lo que implica que la función es simétrica respecto de  $s = \frac{n}{2}$ .

Por tanto, el máximo se da en la primera mitad del intervalo  $[0, n]$ , es decir, en  $\left[0, \frac{n}{2}\right]$ .

**Tercera etapa:**

En esta etapa, veremos cómo la función  $f$  puede describirse a partir de sus valores en  $[0, 1]$ , alcanzando su máximo en algún valor  $s_n$  que pertenece al intervalo  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Veamos ahora que  $f(s+\ell)$  es una función decreciente de  $\ell$  con  $\ell = 0, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1$ .

$$f(s+\ell) = |(s+\ell)(s+\ell-1)(s+\ell-2) \cdot \dots \cdot (s+\ell-n+1)(s+\ell-n)|.$$

$$f(s+\ell-1) = |(s+\ell-1)(s+\ell-2) \cdot \dots \cdot (s+\ell-n+1)(s+\ell-n)(s+\ell-n-1)|.$$

Por tanto,

$$f(s+\ell) = f(s+\ell-1) \cdot \frac{s+\ell}{n+1-s-\ell}, \text{ definida para } s \in [0, 1) \text{ y } \ell \in \{1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1\}.$$

La fórmula da, en forma recursiva, los valores de  $f$  a partir de los valores en  $[0, 1]$ .

Luego,

$$\frac{f(s+\ell)}{f(s+\ell-1)} = \frac{s+\ell}{1+n-s-\ell} < 1 \text{ y por tanto } f(s+\ell) < f(s+\ell-1).$$

Ahora la analizaremos en el intervalo  $[0, 1]$  y cogemos la primera mitad para facilitar, es decir, cogemos  $s \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{2} + s\right) &= \left| \left(\frac{1}{2} + s\right) \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(s - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(s + \frac{1}{2} - n + 1\right) \cdot \left(s + \frac{1}{2} - n\right) \right| = \\
 &= \left(\frac{1}{2} + s\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - s\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - s\right) \cdots \left(n - s - \frac{1}{2}\right) \\
 f\left(\frac{1}{2} - s\right) &= \left| \left(\frac{1}{2} - s\right) \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(s - \frac{3}{2}\right) \left(s - \frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - s - n\right) \right| = \\
 &= \left(\frac{1}{2} - s\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + s\right) \cdot \left(\frac{3}{2} + s\right) \cdots \left(n + s - \frac{1}{2}\right) \\
 \implies f\left(\frac{1}{2} + s\right) &< f\left(\frac{1}{2} - s\right) \text{ para } s \in \left(0, \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  alcanza su máximo en un punto  $s_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

**Cuarta etapa:**

Tomamos logaritmos para obtener la derivada más fácilmente:

$$\ln(f(s)) = \ln(s) + \ln(1 - s) + \dots + \ln(n - s).$$

Por tanto, para  $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{1}{s} - \left( \frac{1}{1 - s} + \dots + \frac{1}{n - s} \right).$$

En el máximo,  $f'(s_n) = 0$  :

$$\frac{1}{s_n} - \left( \frac{1}{1 - s_n} + \dots + \frac{1}{n - s_n} \right) = 0.$$

De donde obtenemos

$$\frac{1}{s_n} = \frac{1}{1 - s_n} + \dots + \frac{1}{n - s_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k - s_n}. \tag{4.2}$$

Entonces,

$$\frac{1}{s_n} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

que por (2.1) se comporta como  $\text{Ln}(n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto,

$$\frac{1}{s_n} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \text{Ln}(n) \rightarrow \infty, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Luego debe ser,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0.$$

Ahora veamos que

$$\frac{1}{s_n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = s_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-s_n)}. \quad (4.3)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-s_n)} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\frac{1}{s_n}}{k-s_n} - \frac{\frac{1}{s_n}}{k} \right) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k-s_n} - \frac{1}{k} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow s_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-s_n)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k-s_n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{s_n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \text{ por (4.3)}. \end{aligned}$$

Por lo que obtenemos la igualdad (4.3). Como  $s_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  entonces,

$$s_n < \frac{1}{2} \longrightarrow k - s_n > k - \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{k - s_n} < \frac{1}{k - \frac{1}{2}}.$$

Y al ser una serie geométrica de exponente dos, converge y está acotada por una constante que llamaremos  $C$ .

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-s_n)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k-\frac{1}{2})} \leq C,$$

sigue que

$$0 < \frac{1}{s_n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq C \cdot s_n.$$

Por último, dividimos en (4.3) por  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , de modo que

$$0 < \frac{\frac{1}{s_n}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{C \cdot s_n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

Tomando límites, el miembro de la derecha tiende a 0 y despejamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{s_n}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = 1$$

y aplicando (2.1) obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} \frac{1}{Ln(n)} = 1.$$

Por tanto, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,

$$f(s_n) = |s_n(1 - s_n) \cdot \dots \cdot (n - s_n)| \leq n! \cdot s_n \leq \frac{C \cdot n!}{Ln(n)}$$

Puede justificarse que también existe otra cota inferior  $C_1 > 0$  tal que:

$$f(s_n) \geq \frac{n! \cdot C_1}{Ln(n)}.$$

Sea

$$\begin{aligned} Ln \left[ \frac{Ln(n)}{n!} \cdot f \left( \frac{1}{Ln(n)} \right) \right] &= \sum_{k=1}^n Ln \left( 1 - \frac{1}{k \cdot Ln(n)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n Ln \left( -\frac{1}{k \cdot Ln(n)} + 0 \cdot \frac{1}{k^2 Ln^2(n)} \right) = -\frac{1}{Ln(n)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 0 \cdot \frac{1}{Ln^2(n)} \sim -1. \end{aligned}$$

Es decir,

$$Ln \left[ \frac{Ln(n)}{n!} \cdot f \left( \frac{1}{Ln(n)} \right) \right] \sim -1.$$

Y despejando obtenemos

$$f\left(\frac{1}{Ln(n)}\right) \sim \frac{n!}{Ln(n)} \cdot \frac{1}{e}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por otra parte,

$$s_n \leq \frac{1}{Ln(n)} \text{ y } f(s_n) \geq f\left(\frac{1}{Ln(n)}\right) \geq C \cdot \frac{n!}{e \cdot Ln(n)} = C_1 \cdot \frac{n!}{Ln(n)}$$

Y deshaciendo los cambios,

$$|x - x_0| \cdot \dots \cdot |x - x_n| \leq C \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \frac{n!}{Ln(n)}, \text{ aplicando (2.2) obtenemos:}$$

$$\begin{aligned} |x - x_0| \cdot \dots \cdot |x - x_n| &\leq C_2 \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{2n\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^n}{\sqrt{n} \cdot Ln(n)} = \\ &= C_2 \frac{(b-a)^{n+1} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot e^{-n} \cdot n^{n+1}}{n^{n+1} \cdot \sqrt{n} \cdot Ln(n)} = C_2 \frac{(b-a)^{n+1} \cdot e^{-n}}{\sqrt{n} \cdot Ln(n)}. \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.2 (Cota global)** *La expresión del Teorema 3.3 viene acotado por:*

$$\begin{aligned} C_2 \cdot \frac{L(C) \cdot M_C \cdot n!}{2\pi\delta^{n+2}} \cdot \frac{(b-a)^{n+1} \cdot e^{-n}}{\sqrt{n} \cdot Ln(n)} &= K \cdot \frac{(b-a)^n}{(e \cdot \delta)^n} \cdot \frac{n^n \cdot \sqrt{2n\pi} \cdot e^{-n}}{\sqrt{n} \cdot Ln(n)} = \\ &= K \cdot \frac{(b-a)^n}{(e \cdot \delta)^n} \cdot \frac{n^n}{Ln(n)} = K \cdot \frac{(b-a)^n}{(e \cdot \delta)^n} \cdot \frac{n!}{\sqrt{n} \cdot Ln(n)} \end{aligned}$$

donde  $C$  es una curva cerrada que contiene a  $[a,b]$  en su interior y  $L(C)$  la longitud de la curva  $C$ ,  $M_C = \max_{z \in C} |f(z)|$  es el valor máximo que puede tomar dicha curva y  $\delta$  es la mínima distancia de  $C$  a  $[a,b]$ .

## 4.2 Fenómeno de Runge

El fenómeno de Runge fue descubierto por Carl David Tolmé Runge cuando exploraba el comportamiento de los errores al usar interpolación polinómica para aproximar determinadas funciones por polinomios de alto grado utilizando nodos equidistantes. En este caso se garantiza que el error máximo se incrementa al aumentar el orden polinómico.

Este fenómeno consiste en tratar de interpolar esta función con un sólo polinomio de Lagrange. Cuando se intenta reducir el error de interpolación se puede incrementar el número de particiones del polinomio que se usan para construir el spline, en lugar de incrementar su grado.

**Nota 4.3** Si  $f(x)$  es una función continua cualquiera y  $P_n(x)$  es el polinomio que interpola  $f$  en los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  no es cierto, en general, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x) \text{ en } [a, b].$$

A continuación, veremos un ejemplo para observar este fenómeno con el fin de mostrar que el fenómeno de Runge manifiesta que los polinomios de grado alto no son, en general, aptos para la interpolación.

### 4.2.1 Ejemplo

**Ejemplo 4.4** Consideramos la función  $f(x) = \frac{1}{(1 + 25x^2)}$ . Sea  $P_n(x)$  un polinomio que interpola a  $f(x)$ , en  $n + 1$  nodos igualmente espaciados en el intervalo  $[-1, 1]$ .

En primer lugar, construiremos una gráfica donde compararemos el comportamiento de  $f(x)$  y  $P_n(x)$  para  $n = 5, 10, 15$  y  $20$ .

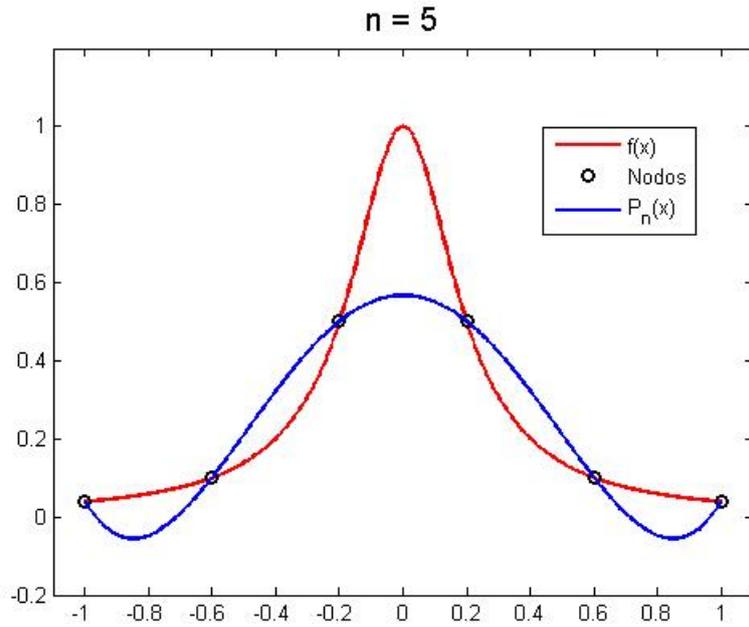


FIGURA 4.1: Comportamiento de  $f(x)$  y  $P(x)$  para  $n = 5$ .

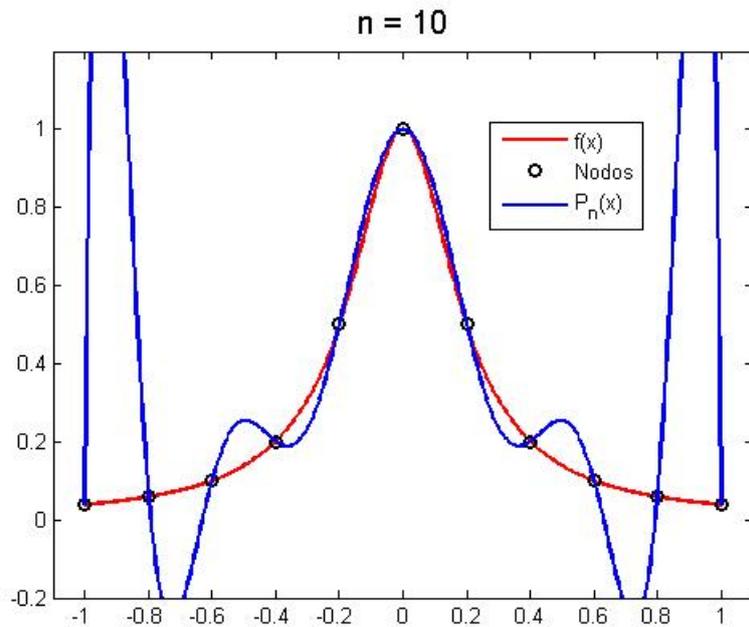


FIGURA 4.2: Comportamiento de  $f(x)$  y  $P(x)$  para  $n = 10$ .

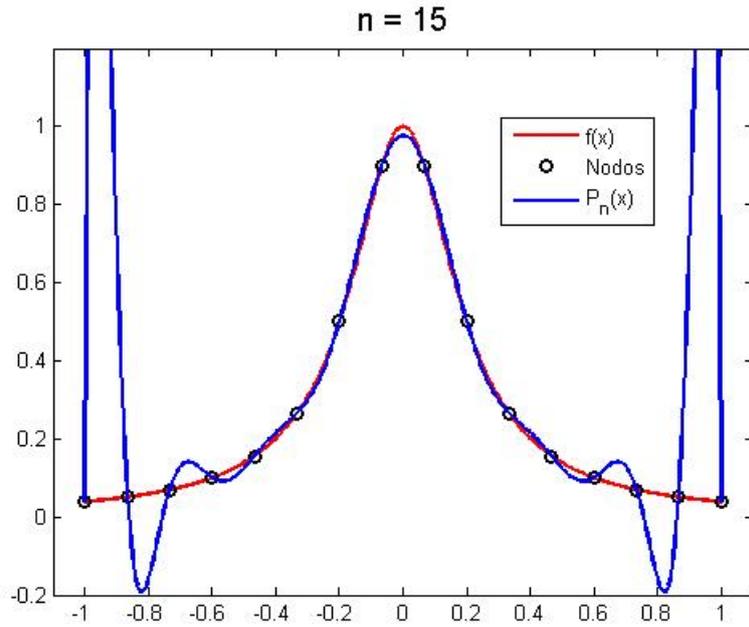


FIGURA 4.3: Comportamiento de  $f(x)$  y  $P(x)$  para  $n = 15$ .

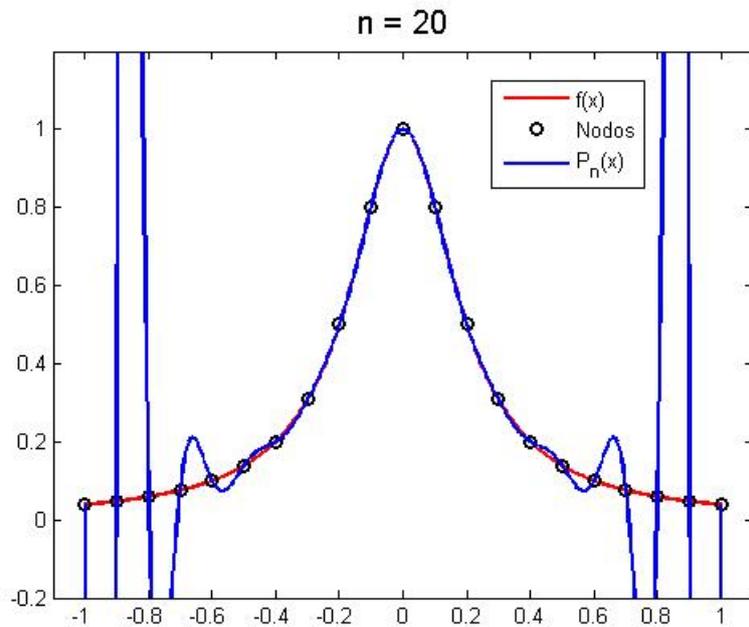


FIGURA 4.4: Comportamiento de  $f(x)$  y  $P(x)$  para  $n = 20$ .

La función  $f(x)$  es una función indefinidamente derivable en el intervalo  $[-1, 1]$ , incluso en  $\mathbb{R}$ . Además es acotada, positiva y su máximo valor es 1 que se alcanza cuando  $x = 0$ .

Como podemos observar en las gráficas anteriores, se produce más oscilaciones a medida que incrementa el grado del polinomio interpolador, es decir, observamos que la diferencia entre la función  $f(x)$  y el polinomio interpolador  $P_n(x)$  es cada vez más notoria conforme nos acercamos a los extremos  $[-1, 1]$ . Estas oscilaciones son conocidas como el *fenómeno de Runge*.

Se puede probar que el error de interpolación tiende a infinito cuando crece el grado del polinomio:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - P_n(x)| \right) = \infty.$$

Esto nos muestra que una función continua no puede aproximarse, en general, de manera arbitrariamente precisa mediante polinomios de interpolación relativos a soportes equidistantes.

Más aún, se puede comprobar que para cada elección de soportes  $(S_n) \subset [a, b]$ , existe  $f \in C^0([a, b])$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_{S_n}\|_{\infty} \neq 0.$$

Buscaremos la elección de los nodos para que la aproximación sea óptima y pues nos preguntamos si en este caso se tendrá aproximación uniforme.

## 4.2.2 Explicación del Fenómeno de Runge

Sea la función  $f(x) = \frac{1}{(1 + 25x^2)}$  en el intervalo  $[-1, 1]$ . Definimos  $\tilde{f}$  como

$$\tilde{f} = \frac{1}{5x - i} = \frac{5x + i}{25x^2 + 1} = \frac{5x}{1 + 25x^2} + \frac{1}{1 + 25x^2} \cdot i$$

Deducimos que  $f(x) = \text{Im} \left( \frac{1}{5x - i} \right)$  y que su derivada  $k$ -ésima es:

$$\left( \frac{1}{5x - i} \right)^{(k)} = \text{Im} \left( \frac{1}{5x - i} \right)^{(k)} = (-1)^k \cdot 5^k \cdot k! \cdot \text{Im} \left( \frac{1}{5x - i} \right)^{(k+1)}.$$

Aplicando (3.3) en la primera desigualdad y (4.1) en la segunda:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1+25x^2} P_n(x) \right| &\leq \frac{|f^{n+1}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot \max \left| \prod_{i=0}^n (x-x_i) \right| \leq \frac{|f^{n+1}(\xi)|}{(n+1)!} \frac{C e^{-n}}{\sqrt{n} Ln(n)} (2)^{n+1} \leq \\ &\leq \frac{n! \cdot 5^n}{(n+1)!} \cdot \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n} Ln(n) e^n} \leq C \frac{10^n}{(n+1)\sqrt{n} Ln(n)e^n} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lo que permite que en los extremos la cota del error tienda a infinito, como anteriormente pudimos observar en las gráficas.

**Definición 4.5 (Spline).** *Un spline es una curva diferenciable definida en porciones mediante polinomios.*

En los problemas de interpolación, se utiliza a menudo la interpolación mediante splines porque da lugar a resultados similares requiriendo solamente el uso de polinomios de bajo grado, evitando así las oscilaciones, indeseables en la mayoría de las aplicaciones, encontradas al interpolar mediante polinomios de grado elevado.

# Capítulo 5

## Polinomios de Chebyshev

En esta sección veremos cómo podemos solucionar el problema presentado por el fenómeno de Runge.

Para minimizar las oscilaciones producidas en los extremos usaremos los polinomios de Chebyshev en lugar de nodos de abscisa equidistante, como vimos en el capítulo anterior. En este caso se garantiza que el error máximo disminuye al crecer el orden polinómico.

Estos polinomios reciben este nombre en honor al matemático ruso Pafnuti Chebyshev. Se trata de una familia de polinomios ortogonales que están relacionados con la fórmula de De Moivre y son definidos de forma recursiva con facilidad.

Normalmente se hace una distinción entre polinomios de Chebyshev de primer tipo que son denotados  $T_n$  y polinomios de Chebyshev de segundo tipo, denotados  $U_n$ .

Los polinomios de Chebyshev son importantes en la teoría de la aproximación puesto que las raíces de los polinomios de Chebyshev de primer tipo  $T_n$ , también llamadas nodos de Chebyshev, son usadas como nodos en interpolación polinómica.

### 5.1 Mejores estimaciones de errores reales: Polinomios de Chebyshev

La estimación del error

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{n+1}(x)| \cdot \frac{|x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdots |x - x_n|}{(n + 1)!} \quad (5.1)$$

para el polinomio de interpolación esta dividida en dos partes.

La primera parte,  $\max_{a \leq x \leq b} |f^{n+1}(x)|$  que depende de la función interpolada pero no depende de la forma en la cual la interpolación se realiza.

La segunda parte,  $\frac{|x - x_0| \cdot |x - x_1| \cdots |x - x_n|}{(n + 1)!}$  es independiente de la función pero depende de los puntos .

La estimación (5.1) se ha obtenido de sustituir  $|f^{n+1}(\xi)|$  por  $\max_{a \leq x \leq b} |f^{n+1}(x)|$ . En muchos casos, el error predicho por (5.1) será mucho mejor que el error (3.4).

Consideremos la cantidad  $\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)|$  que depende de los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta: ¿Cómo podemos seleccionar los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $[a, b]$  de forma que el máximo sea lo más pequeño posible?. La respuesta al problema viene dada por los ceros del polinomio de Chebyshev.

Si tomamos  $x = \cos \theta$  en la fórmula (2.4) con  $\theta \in [0, \pi]$ , entonces  $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$ . Luego,

$$(\cos n\theta + i \sin n\theta) = (x + i\sqrt{1 - x^2})^n.$$

Si desarrollamos esta expresión por el teorema del Binomio, cogemos la parte real del resultado de la ecuación y sustituimos el valor de  $x = \cos \theta$ , obtenemos:

$$\cos(n(\arccos x)) = \cos(n\theta) = \binom{n}{0} x^n (x^2 - 1)^0 + \binom{n}{2} x^{n-2} (x^2 - 1)^1 + \binom{n}{4} x^{n-4} (x^2 - 1)^2 + \dots$$

Así,  $\cos(n\theta)$  es un cierto polinomio de grado  $n$  en  $\cos \theta$

**Definición 5.1** Se define el polinomio de Chebyshev de grado  $n$  como:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2} (x^2 - 1) + \dots, \text{ para } n = 0, 1, \dots \quad (5.2)$$

Los polinomios definidos por (5.2) son los que se denominan *Polinomios de Chebyshev* por antonomasia.

Es fácil calcular los primeros los polinomios de Chebyshev explícitamente y para ellos usaremos (5.2). De esta forma obtenemos:

$$T_0(x) = \cos(0) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = \binom{2}{2} x^{2-2} (x^2 - 1) + x^2 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

A continuación, incluiremos algunas gráficas que pertenecen a los anteriores polinomios:

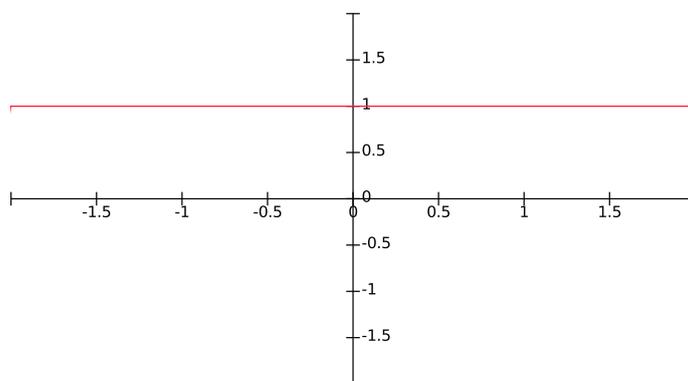


FIGURA 5.1: Función  $T_0(x)$

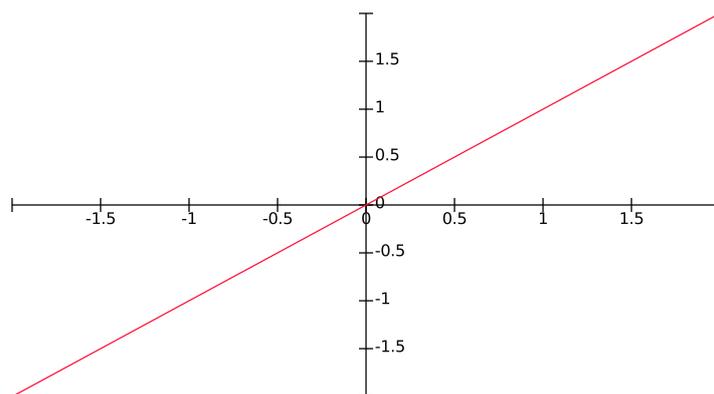


FIGURA 5.2: Función  $T_1(x)$

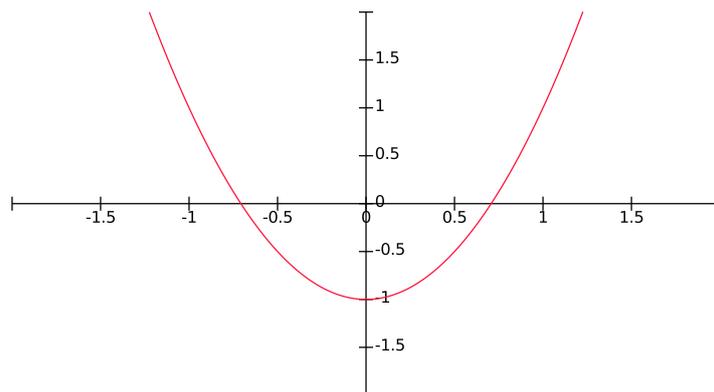


FIGURA 5.3: Función  $T_2(x)$

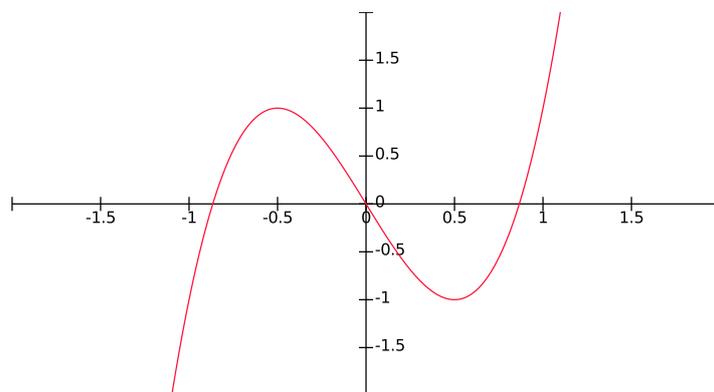


FIGURA 5.4: Función  $T_3(x)$

**Teorema 5.2** *Los polinomios de Chebyshev verifican la siguiente relación de recurrencia.*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

**Demostración:** Usando identidades trigonométricas adecuadas, obtenemos:

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta$$

Sumándolas obtenemos:

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta$$

y despejando,

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta$$

A continuación, tomamos:

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ \cos n\theta = T_n(x) \end{cases}$$

Finalmente, sustituimos y se obtiene lo deseado:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= \cos((n+1) \cdot \arccos x) = 2 \cdot (n \arccos x) \cdot \cos(\arccos x) - \\ &\quad \cos((n-1) \cdot \arccos x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

■

**Corolario 5.3** *Se verifica:*

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \text{términos de menor grado.} \quad (5.4)$$

**Teorema 5.4**  *$T_n(x)$  tiene ceros simples, es decir, puntos que anulan a la función pero no a su derivada, en los  $n$  puntos.*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.5)$$

*En el intervalo cerrado  $x \in [-1, 1]$ ,  $T_n(x)$  tiene valores extremos en los  $n+1$  puntos,*

$$x'_k = \cos\left(\frac{2k}{2n}\pi\right) \text{ para } k = 0, 1, \dots, n$$

*donde toma los valores alternativos  $(-1)^k$ .*

**Demostración:** Por definición de los polinomios de Chebyshev y aplicando (5.4)

obtenemos:

$$\begin{aligned} T_n(x_k) &= \cos(n \arccos x_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \\ &= \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Estas son las  $n$  raíces que puede tener el polinomio  $T_n(x)$  de grado  $n$ .

Sea su derivada,

$$T'_n(x_k) = \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin(n \arccos x_k)$$

y aplicando (5.5) tenemos,

$$\begin{aligned} T'_n(x_k) &= \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = \\ &= \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right) \neq 0 \end{aligned}$$

y los ceros deben ser simples.

Además,

$$T'_n(x'_k) = \frac{n}{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}} \sin(k\pi) = 0, \text{ para } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Tomamos ahora:

$$T_n(x'_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\frac{2k\pi}{2n}\right)\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k.$$

Esto es válido para  $k = 0, 1, \dots, n$ . Pero para  $x \in [-1, 1]$ ,

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

y por lo tanto,  $|T_n(x)| \leq 1$ . Esto nos muestra que los puntos  $x'_k$  son puntos extremos en  $-1 \leq x \leq 1$ .

■

**Definición 5.5** Denotamos:

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Notaremos que  $\widetilde{T}_n(x) = x^n + \text{términos de menor grado}$ .

**Teorema 5.6 (Chebyshev).** Dado  $P_n$  que designa la clase de todos los polinomios de grado  $n$  con coeficiente principal 1. Entonces, para cualquier  $p \in P_n$  tenemos,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\widetilde{T}_n(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|.$$

**Demostración:** En  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $|\widetilde{T}_n|$  toma su valor máximo,  $\frac{1}{2^{n-1}}$ ,  $n + 1$  veces en los puntos  $x'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Supongamos que hay un  $p \in P_n$ , con  $\max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ .

En forma de diferencia tenemos  $Q(x) = \widetilde{T}_n(x) - p(x)$ . Claramente,  $Q(x) \in P_{n-1}$  como máximo. Sea ahora,

$$Q(x'_k) = \widetilde{T}_n(x'_k) - p(x'_k) = \frac{(-1)^k}{2^{n-1}} - p(x'_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Estas cantidades son alternativas tanto positivas como negativas ya que  $|p(x'_k)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Por lo tanto, hay  $n + 1$  puntos donde  $Q(x)$  toma valores con signos alternados. De modo que,  $Q(x)$  tiene  $n$  ceros.

Ya que  $Q \in P_{n-1}$ , debe anularse de forma idéntica. Así,  $p(x) \equiv \widetilde{T}_n(x)$  lo que indica que:

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |\widetilde{T}_n(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

llegando a contradicción. Por tanto,

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\widetilde{T}_n(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)|.$$

■

Para finalizar este capítulo nos preguntamos si cuándo  $n \rightarrow \infty$ , los polinomios que interpolan la función en los ceros de los polinomios de Chebyshev como nodos verifica  $p_n \rightarrow f$ .



# Capítulo 6

## Aproximación de funciones continuas

### 6.1 Existencia del polinomio de mejor aproximación

En este capítulo estudiaremos la existencia del polinomio de mejor aproximación. Sea un espacio vectorial  $E$  de funciones definidas en un subconjunto de  $\mathbb{R}$ , provisto de una norma  $\| \cdot \|_E$  y tal que  $P_n \subset E$ .

**Teorema 6.1** *Para toda función  $f \in E$ , existe al menos un polinomio  $p_n \in P_n$ , tal que:*

$$\|f - p_n\|_E = \inf_{q \in P_n} \|f - q\|_E.$$

**Demostración:** Sea  $f \in E$  y  $P_n([a, b]) \subset E$  el espacio vectorial de polinomios de grado  $n$  que tiene dimensión finita.

El teorema de Bolzano Weierstrass nos dice que en un espacio vectorial normado de dimensión finita, todo conjunto compacto tiene un punto de acumulación.

Sea

$$\{\|f - q\| \geq 0, q \in P_n\}$$

un conjunto de números reales acotado inferiormente y que tiene un ínfimo, al que denotaremos  $\alpha$ . Existe  $\{q_n\} \subset P_n$  de forma que  $\|f - q_n\| \rightarrow \alpha$ .

Probemos que  $\{\|q_n\|\}$  está acotada:

Dado  $\varepsilon$ , existe  $n_0$  tal que  $n \geq n_0$  y  $\|f - q_n\| \leq \alpha + \varepsilon$ .

Por otra parte,

$$\|q_n\| = \|q_n - f + f\| \leq \|q_n - f\| + \|f\| \leq \alpha + \varepsilon + \|f\|$$

la cual es una cota independiente de  $n$  y válida para  $n \geq n_0$ .

Por tanto,  $\|q_n\| \leq \max(\|q_1\|, \|q_2\|, \dots, \|q_{n_0}\|, \alpha + \varepsilon + \|f\|)$ .

Entonces, existe una subsucesión de  $\{q_n\}$  que converge a  $p^*$  por Bolzano-Weierstrass, a la que denotamos  $\{q_n^*\}$ .

El conjunto  $\{q_n^*\}$  está contenido en  $\{q_n\}$  entonces  $\{\|f - q_n^*\|\} \subset \{\|f - q_n\|\}$  que es una sucesión de números reales.

Además sabemos que  $\|f - q_n\| \rightarrow \alpha$  y, por tanto,  $\|f - q_n^*\| \rightarrow \alpha$ .

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - q_n^*\| = \alpha$$

y por ser la norma continua

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - q_n^*\| = \|f - \lim_{n \rightarrow \infty} q_n^*\| = \|f - p^*\| = \alpha.$$

De aquí deducimos que  $\|f - p^*\| = \alpha$ .

De modo que existe un polinomio  $p^*$  que logra el mínimo  $\|f - q\|$  si  $q \in P_n$ , es decir,  $\min_{q \in P_n} \|f - q\| = \|f - p^*\|$ , donde  $\alpha = \min \|f - q\|$  es el grado de aproximación de una función.

■

**Definición 6.2 (Polinomio de mejor aproximación).** *Un polinomio  $p_n \in P_n$  que verifica el teorema anterior, se denomina polinomio de mejor aproximación de  $f$  en un espacio vectorial  $E$ .*

Tengamos en cuenta que no siempre tenemos la unicidad del mejor polinomio de aproximación en un espacio vectorial normado  $E$  pero si  $E = C^0([a, b], \|\cdot\|_\infty)$  o si  $E$  es un espacio de Hilbert hay unicidad.

Por el contrario, no hay unicidad en general  $L^1(a, b)$  o  $L^\infty(a, b)$  como podemos ver en los siguientes ejemplos:

**Ejemplo 6.3**  $E = L^1(-1, 1)$ ;  $f(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $f(x) = -1$  si  $x \leq 0$ .

Se puede comprobar fácilmente que  $\forall \alpha \in [-1, 1]$ ,  $p_0(x) \equiv \alpha$  logra la mejor aproximación  $L^1$  de  $f$  para un polinomio de grado cero y  $\|f - p_0\|_{L^1(-1,1)} = 2$ .

**Ejemplo 6.4**  $E = L^\infty(-1, 1)$ ;  $f(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $f(x) = -1$  si  $x \leq 0$ .

Se puede comprobar que  $\forall \alpha \in [0, 2]$ ,  $p_1(x) = \alpha x$  logra la mejor aproximación  $L^\infty$  de  $f$  para un polinomio de grado cero y  $\|f - p_1\|_{L^\infty(-1,1)} = 1$ .

En el caso donde  $f \in C^0[a, b]$  podemos probar la unicidad del polinomio de mejor aproximación en  $L^1(a, b)$  y  $L^\infty(a, b)$ .

**Nota 6.5** Consideremos en adelante el caso en que  $E = C^0([a, b], \|\cdot\|_\infty)$ .

**Definición 6.6 (Grado de aproximación):** *La cantidad*

$$E_n(f) = \inf_{q \in p_n} \|f - q\|_\infty$$

*se conoce como el grado de aproximación de la función  $f$  para aquellos polinomios de grado  $\leq n$ , en el sentido estándar de convergencia uniforme.*

## 6.2 Constante de Lebesgue

La constante de Lebesgue da una idea de qué tan bueno es el interpolador de una función, dependiendo de un conjunto de nodos y de su tamaño, en comparación con la mejor aproximación polinómica de la función.

La constante de Lebesgue para polinomios de grado como máximo  $n$  y para el conjunto de  $n + 1$  nodos  $T$  generalmente se denota por  $\Lambda_n(T)$ . Estas constantes llevan el nombre de Henri Lebesgue.

**Definición 6.7 (Constante de Lebesgue):** Se denomina  $\Lambda_n$  (respectivamente la función  $\lambda_n$ ) a la constante de Lebesgue (respectivamente) asociada a los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en el intervalo  $[a, b]$ , definida así:

$$\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^n |L_i(x)|, \quad \Lambda_n = \|\lambda_n\|_\infty.$$

De acuerdo con la definición anterior, las cantidades  $\lambda_n(x)$  y  $\Lambda_n$  aparecen así como constantes de estabilidad en la interpolación de Lagrange, además, será interesante que estas constantes sean lo más pequeñas posible. A continuación daremos otra interpretación de la constante  $\Lambda_n$ .

Consideremos la aplicación lineal  $S_n$  que asocia a cada  $f \in C^0([a, b], \|\cdot\|_\infty)$  su polinomio de interpolación Lagrange con los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , por lo que  $S_n(f) = p_n$ .

**Nota 6.8** Notamos de inmediato que esta aplicación es lineal puesto que: (Ver en [1])

$$\begin{aligned} 1) \quad S_n(f + g) &= \sum_{i=0}^n (f(x_i) + g(x_i)) \cdot L_i(x) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) \cdot L_i(x) + g(x_i) \cdot L_i(x)) = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x) + \sum_{i=0}^n g(x_i) \cdot L_i(x) = S_n(f) + S_n(g). \end{aligned}$$

$$2) \quad S_n(\lambda f) = \sum_{i=0}^n (\lambda \cdot f(x_i) \cdot L_i(x)) = \lambda_n \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x) = \lambda_n \cdot S_n(f).$$

y que:

$$\forall q \in P_n, \quad S_n(q) = q.$$

**Definición 6.9 :** Definimos la norma de la aplicación lineal entre los espacios de

*Banach como:*

$$\|S_n\| = \max_{f \in C^0[a,b]; f \neq 0} \frac{\|S_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Probaremos que la constante  $\Lambda_n$  representa la norma del operador  $S_n$  relacionado con la norma de la convergencia uniforme en  $C^0[a, b]$ . Además, se obtiene el teorema fundamental de acotación del error de interpolación.

**Proposición 6.10** *Se da la siguiente igualdad:*

$$\|S_n\| = \Lambda_n$$

**Demostración:** Demostraremos esta igualdad por doble desigualdad:

Por un lado tenemos que:

$$(S_n(f))(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x).$$

De modo que:

$$|(S_n(f))(x)| = \left| \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \right| \leq \sum_{i=0}^n |f(x_i)||L_i(x)| \quad (6.1)$$

y como  $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ , tenemos que:

$$|(S_n(f))(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \Lambda_n.$$

Por tanto,  $\|S_n(f)\| \leq \|f\|_\infty \cdot \Lambda_n$  entonces:

$$\max_{f \in C^0([a,b]); f \neq 0} \frac{\|S_n(f)\|}{\|f\|} \leq \Lambda_n,$$

obteniendo así  $\|S_n\| \leq \Lambda_n$ .

Por otro lado, faltaría probar  $\|S_n\| \geq \Lambda_n$ . Se busca una función en la que  $\|S_n\| = \Lambda_n$ .

Construiremos una función  $\tilde{f}$  para la que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{\|S_n(\tilde{f})\|}{\|\tilde{f}\|} = \Lambda_n$$

Con lo que se deducirá:

$$\max_{f \in C^0([a,b]); f \neq 0} \frac{\|S_n(f)\|}{\|f\|} = \|S_n\| \geq \Lambda_n.$$

Sabemos que  $\Lambda_n = \max \sum_{i=1}^n |L_i(x)|$ , entonces  $\exists \bar{x}$  tal que  $\max \sum_{i=1}^n |L_i(\bar{x})| = \Lambda_n$ . Definimos  $\tilde{f}(x_i) = \text{sign}(L_i(\bar{x}))$ . Y se define  $\tilde{f}$  de forma lineal para cualquier  $x \in [a, b] - \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

Entonces,

$$S_n(\tilde{f}) = \sum_{i=0}^n \tilde{f}(x_i) \cdot L_i(x) = \sum_{i=0}^n \text{sign}(L_i(\bar{x})) \cdot L_i(x).$$

Aplicando la norma obtenemos que:

$$\|S_n(\tilde{f})\| = \max \left| \sum_{i=0}^n \text{sign}(L_i(\bar{x})) \cdot L_i(x) \right| \geq \sum_{i=0}^n \text{sign}(L_i(\bar{x})) \cdot L_i(\bar{x}),$$

y como el producto de un número por su signo es su valor absoluto, llegamos a que:

$$\sum_{i=0}^n \text{sign}(L_i(\bar{x})) \cdot L_i(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})| = \Lambda_n.$$

Ya que  $\|\tilde{f}\| = 1$ , concluimos que  $\frac{\|S_n(\tilde{f})\|}{\|\tilde{f}\|} \geq \frac{\Lambda_n}{1} = \Lambda_n$ .

Así pues, concluimos la demostración con la igualdad que queríamos probar. ■

**Teorema 6.11** *Dada una función  $f \in C^0[a, b]$  y su polinomio  $p_n$  de interpolación de Lagrange en sus nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Se tiene:*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \cdot E_n(f), \tag{6.2}$$

con

$$E_n(f) = \inf_{q \in P_n} \|f - q\|_\infty.$$

**Demostración:** Para todo  $q \in P_n$ :

Como  $S_n$  es lineal, obtenemos que  $S_n(f - q) = S_n(f) - S_n(q) = p_n - q$ . Por tanto,

$$f - p_n = (f - q) - (p_n - q) = (f - q) - S_n(f - q).$$

Donde sabemos que  $S_n(f) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot L_i(x)$ .

Entonces tenemos que:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \|f - q\|_\infty + \|S_n(f - q)\|_\infty.$$

Como hemos visto anteriormente,  $\|S_n\| = \Lambda_n$  por lo que

$$\|S_n(f - q)\|_\infty = \|S_n\| \cdot \|f - q\|_\infty = \Lambda_n \cdot \|f - q\|_\infty.$$

Así pues,

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \|f - q\|_\infty + \|S_n(f - q)\|_\infty \leq \|f - q\|_\infty(1 + \Lambda_n).$$

■

Examinemos ahora los diferentes términos en el aumento (6.2). La cantidad  $\Lambda_n$  depende sólo de la elección de los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  en  $[a, b]$ , mientras que la cantidad  $E_n(f)$  depende únicamente de la función  $f$ .

Echemos un vistazo a lo que sucede para la constante  $\Lambda_n$ , y supongamos primero  $n$  fijo.

Al igual que en el estudio de la estabilidad, tenemos interés en elegir puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  para que  $\Lambda_n$  sea lo más pequeño posible.

Notemos por  $\bar{\Lambda}_n$  al límite inferior, para todas las opciones posibles de puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de las constantes de Lebesgue. Se ha demostrado que  $\bar{\Lambda}_n \sim \frac{2}{\pi} \text{Log}(n)$

(cuando  $n \rightarrow \infty$ ).

Además, se ha logrado caracterizar los puntos de interpolación dados para la constante Lebesgue  $\bar{\Lambda}_n$ .

Desafortunadamente, el cálculo de estos puntos es demasiado complicado como para presentar un interés práctico. Si uno elige para interpolar puntos los ceros del polinomio de Chebyshev de grado  $(n + 1)$ , es decir,

$$x_i^n = \frac{a + b}{2} + \frac{b - a}{2} \cdot \cos \frac{(2i + 1)\pi}{2n + 2}, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n.$$

Se tiene que  $\Lambda_n > \bar{\Lambda}_n$ , si  $n \neq 1$ , pero se tiene todavía que:

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \text{Log}(n), \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

por lo que los puntos de Chebyshev son casi óptimos. En muchas aplicaciones, es necesario elegir puntos de interpolación equidistantes,  $x_i^n = a + i \cdot \frac{b - a}{n}$ , donde  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Se sabe que en este caso que:

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \cdot \text{Log}(n)}, \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

que es mucho peor que para los puntos anteriores de Chebyshev. No es sorprendente, por lo tanto, ver fuertes inestabilidades cuando  $n$  se vuelve grande y de ahí el ejemplo de Runge.

### 6.3 Módulo de continuidad

Estudiemos ahora la cantidad  $E_n(f)$  y su comportamiento cuando  $n$  tienda hacia el infinito. Veremos que este estará relacionado con la regularidad de la función  $f$  y más particularmente con su módulo de continuidad denotado por  $\omega(f; h)$ .

**Definición 6.12** Se define módulo de continuidad de una función  $f$  de la siguiente manera:

$$\omega(f; h) = \max_{t, t' \in [a, b]; |t-t'| \leq h} |f(t) - f(t')|.$$

A continuación, veamos que se verifican las siguientes propiedades del módulo de continuidad.

**Proposición 6.13** Las propiedades el módulo de continuidad son las siguientes:

- 1) La función  $h \rightarrow \omega(f; h)$  definida para  $\mathbb{R}^+$  es positiva y creciente.
- 2) Es subaditiva:  $\omega(f; h_1 + h_2) \leq \omega(f; h_1) + \omega(f; h_2)$ .
- 3) Si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\omega(f; n \cdot h) \leq n \cdot \omega(f; h)$
- 4) Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\omega(f; \lambda \cdot h) \leq (1 + \lambda)\omega(f; h)$
- 5) Si  $f \in C^0([a, b])$  entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(f; h) = 0$  y la función  $h \rightarrow \omega(f; h)$  es continua para  $\mathbb{R}^+$ .
- 6) Si  $f \in C^1[a, b]$ ,  $\omega(f; h) \leq h \|f'\|_\infty$ .

**Demostración:**

- 1) Al aumentar  $h$ , aumenta el tamaño del intervalo sobre el que se tenía el máximo y por tanto el valor de este máximo o, al menos, se queda igual. ■

- 2) Sea  $\omega(f; h_i) = \max_{t, t' \in [a, b]; |t-t'| \leq h_i} |f(t) - f(t')|$  con  $i = 1, 2$  de forma que

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &\leq \left| f(t) - f\left(\frac{t \cdot h_2 + t' \cdot h_1}{h_1 + h_2}\right) \right| + \left| f\left(\frac{t \cdot h_2 + t' \cdot h_1}{h_1 + h_2}\right) - f(t') \right| \\ &\leq \omega(f; h_1) + \omega(f; h_2). \end{aligned}$$

Y tomando máximo tenemos que  $\omega(f; h_1 + h_2) \leq \omega(f; h_1) + \omega(f; h_2)$ . ■

- 3) Sale directa de la anterior, aplicando inducción.
- 4) Sea  $\lambda$  un número real positivo. Todo número real está comprendido entre dos números naturales a los que denotaremos  $[\lambda]$  y  $[\lambda] + 1$ . Por ser creciente, tenemos:

$$\begin{aligned} \omega(f; \lambda \cdot h) &\leq \omega(f; ([\lambda] + 1)h) \leq (1 + [\lambda]) \cdot \omega(f; h) \leq \\ &\leq \omega(f; h) + [\lambda] \cdot \omega(f; h) \leq \omega(f; h) + \lambda \cdot \omega(f; h) = (1 + \lambda) \cdot \omega(f; h) \end{aligned}$$

■

- 6) Sea  $f \in C^1([a, b])$ . Por el Teorema del Valor Medio tenemos:  $f(t) - f(t') = f'(\xi)(t - t')$ , además:

$$|f(t) - f(t')| = |f'(\xi)| |t - t'| \leq \|f'\|_{\infty} |t - t'|.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\|f'\|_{\infty} = \max_{\xi \in [a, b]} |f'(\xi)|$$

Entonces,

$$\omega(f; h) = \max_{t, t' \in [a, b]; |t-t'| \leq h} |f(t) - f(t')| \leq \max_{t, t' \in [a, b]; |t-t'| \leq h} \|f'\|_{\infty} |t - t'| \leq \|f'\|_{\infty} \cdot h$$

■

A continuación, enunciaremos el teorema de Jackson que demuestra que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$$

**Teorema 6.14** *Existe un real  $M$ , (independiente de  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ) tal que para todo  $n \geq 1$  y todo  $f \in C^0[a, b]$ ,*

$$0 \leq E_n(f) \leq M \cdot \omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right).$$

**Corolario 6.15 (Teorema de Weierstrass).** Si  $[a, b]$  es un intervalo cerrado y acotado de  $\mathbb{R}$ , el conjunto de funciones polinómicas es denso en  $C^0[a, b]$  para la topología de la convergencia uniforme.

**Demostración:** En efecto, por la propiedad 5 del módulo de continuidad, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( f; \frac{b-a}{n} \right) = 0$$

y como resultado  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f) = 0$ , para toda función  $f \in C^0[a, b]$ . ■

**Nota 6.16** Si la función es de clase  $p$ , la estimación del Teorema de Jackson puede mejorarse.

**Corolario 6.17** Suponemos que  $f \in C^p[a, b]$ ,  $p \geq 0$ . Tenemos que para todo  $n > p$ :

$$E_n(f) \leq M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)} \cdot \omega \left( f^{(p)}; \frac{b-a}{n-p} \right). \quad (6.3)$$

**Demostración:** Lo demostraremos por inducción.

De acuerdo con el teorema de Jackson, el corolario se cumple para  $p = 0$ . Supongamos, ahora, que se cumple para cualquier función  $f \in C^p[a, b]$  para un entero  $p$ .

Hay que probar que se cumple para un  $f \in C^{p+1}[a, b]$  y en este caso, tenemos que  $f'$  es de clase  $C^p$ , es decir,  $f' \in C^p[a, b]$  donde  $\forall n > p + 1$ .

$$E_{n-1}(f) \leq M^{p+1} \frac{(b-a)}{(n-1)(n-2)\dots(n-p)} \cdot \omega \left( f^{(p+1)}; \frac{b-a}{n-1-p} \right).$$

Existe un polinomio  $q$  de mejor aproximación de  $f'$ , donde  $q \in P_{n-1}$  tal que:

$$\|f' - q\|_\infty = E_{n-1}(f').$$

Llamamos  $p(x) = \int_a^x q(t)dt$  y  $\varphi(x) = f(x) - p(x)$ .

Para  $p \in P_n$ , se tiene  $E_n(f) = E_n(\varphi)$  y además que  $\|\varphi'\|_\infty = \|f' - q\|_\infty = E_{n-1}(f')$

y aplicando el teorema de Jackson a la función  $\varphi$  y la propiedad (6) del módulo de continuidad se obtiene:

$$E_n(f) = E_n(\varphi) \leq M\omega\left(\varphi; \frac{b-a}{n}\right) \leq M\frac{b-a}{n} \cdot \|\varphi'\|_\infty$$

Por lo tanto,

$$E_n(f) \leq M^{p+2} \frac{(b-a)^{p+1}}{n(n-1)\dots(n-p)} \cdot \omega\left(f^{(p+1)}; \frac{b-a}{n-p-1}\right).$$

■

## 6.4 Casos particulares

Usando los resultados anteriores, las estimaciones que hemos dado para las constantes de Lebesgue y el teorema (6.2), obtenemos las siguientes cotas en el error de interpolación de Lagrange si  $f \in C^p[a, b]$ .

a) En el caso de los nodos  $x_i$  equidistantes tenemos:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \cdot E_n(f) \leq \left(1 + C \cdot \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \text{Log}(n)}\right) \cdot E_n(f)$$

Y aplicando (6.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &\leq \left(1 + C \cdot \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \text{Log}(n)}\right) \cdot E_n(f) \leq \\ &\leq \left(1 + C \cdot \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \text{Log}(n)}\right) \cdot M^{p+1} \frac{(b-a)^p}{n(n-1)\dots(n-p+1)} \cdot \omega\left(f^{(p)}; \frac{b-a}{n-p}\right) \leq \\ &\leq C_p \frac{(b-a)^p \cdot 2^n}{n^{p+1} \text{Log}(n)} \cdot \left(f^{(p)}; \frac{b-a}{n-p}\right). \end{aligned}$$

b) En el caso de los puntos de interpolación de Chebyshev tenemos:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \left(1 + C \cdot \frac{2\text{Log}(n)}{\pi}\right) E_n(f) \leq C \cdot \text{Log}(n) \cdot \omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right) \leq C_p (b-a)^p \frac{\text{Log}(n)}{n^p} \omega\left(f^{(p)}; \frac{b-a}{n-p}\right).$$

**Nota 6.18** Usando este resultado con  $p = 0$ , encontramos el resultado de *Bernstein* que dice que la interpolación de Lagrange en los puntos de Chebyshev converge a  $f$  tan pronto como  $\lim_{h \rightarrow \infty} \omega(f; h) \cdot \text{Log}(h) = 0$  si  $f \in C^p[a, b]$ , es decir, para  $p = 0$  tenemos:

$$\|f - p_n\| \leq C \cdot \text{Log}(n) \cdot \omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right)$$

Y aplicando la propiedad (6) del módulo de continuidad:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq C \cdot \text{Log}(n) \cdot \|f'\|_\infty \cdot \frac{b-a}{n}$$

donde  $C \cdot \frac{\text{Log}(n)}{n}$  tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ .

De aquí deducimos que Chebyshev consigue que la función de clase  $C^1$  se aproxime uniformemente.

## 6.5 Ejemplo considerando los ceros del polinomio de Chebyshev

**Ejemplo 6.19** Consideremos de nuevo la función  $f = \frac{1}{1+25x^2}$  del ejemplo de Runge que utilizamos en el capítulo 4 y calculamos su polinomio de interpolación, pero esta vez, en los nodos del polinomio de Chebyshev.

A continuación, veremos cómo a partir de las gráficas podemos deducir que a medida que aumentamos el grado del polinomio, la función converge uniformemente. Es decir, que el método de Chebyshev resulta óptimo para la minimización de

la distancia existente entre la función que se desea aproximar y el polinomio de interpolación.

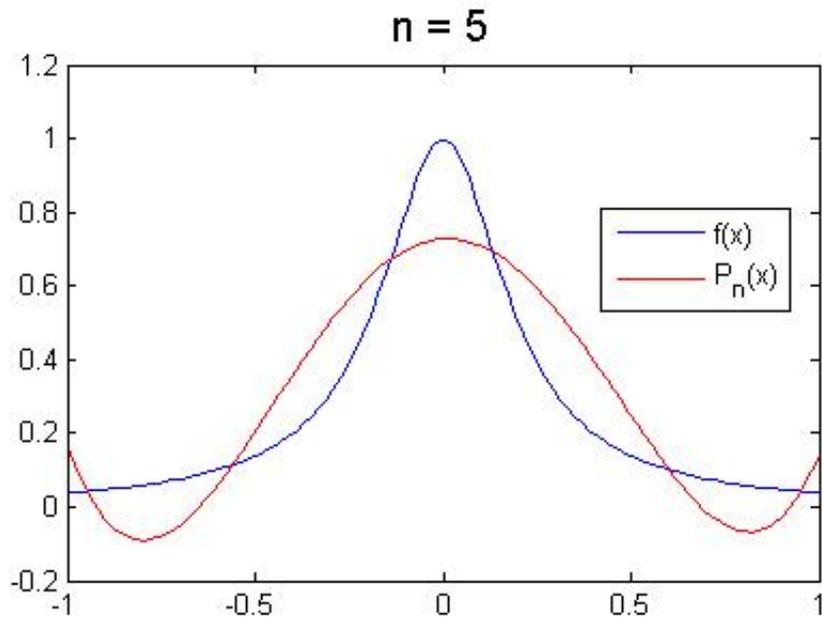


FIGURA 6.1: Relación entre la función  $f(x)$  y el polinomio  $P_n(x)$  de grado 5.

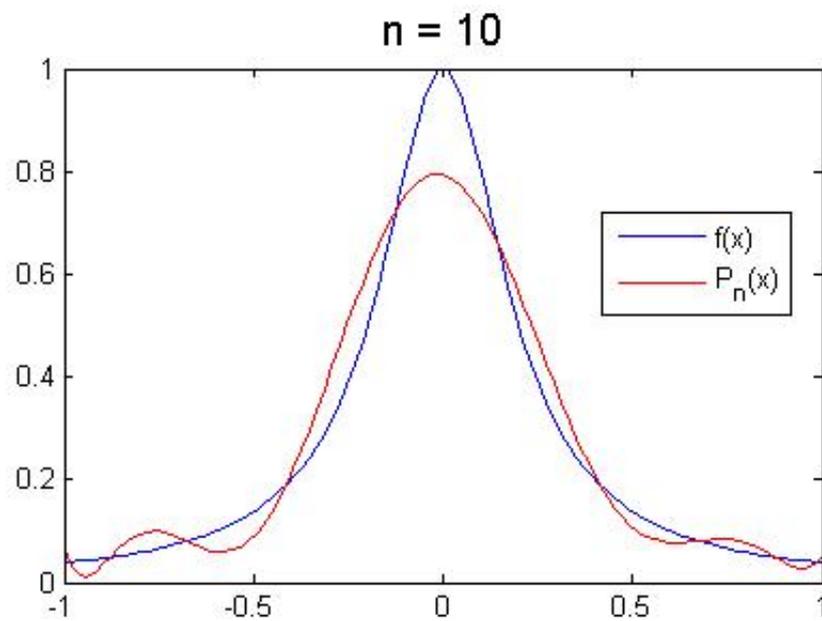


FIGURA 6.2: Relación entre la función  $f(x)$  y el polinomio  $P_n(x)$  de grado 10.

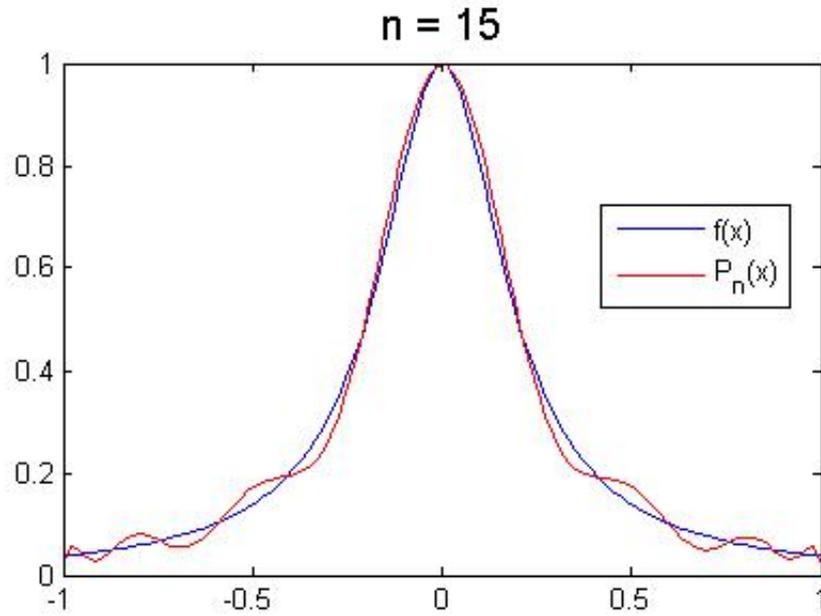


FIGURA 6.3: Relación entre la función  $f(x)$  y el polinomio  $P_n(x)$  de grado 15.

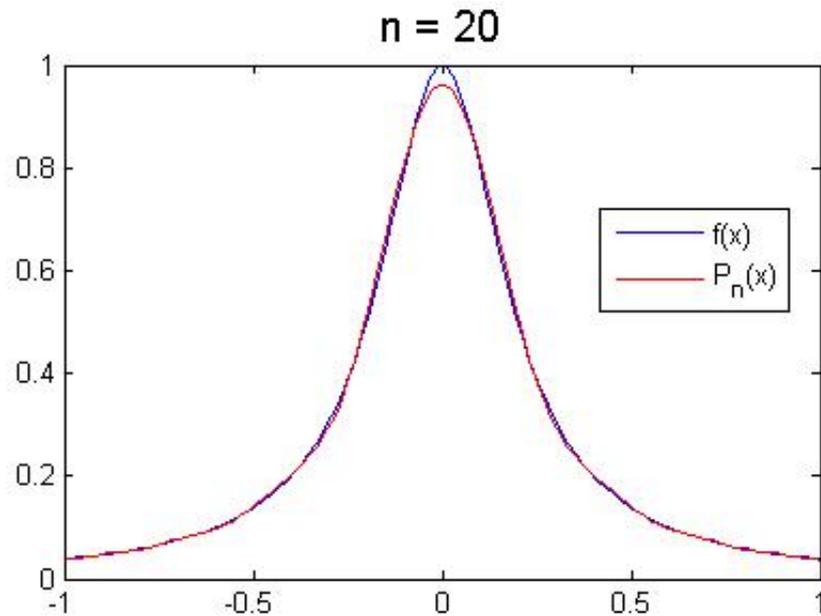


FIGURA 6.4: Relación entre la función  $f(x)$  y el polinomio  $P_n(x)$  de grado 20.



# Capítulo 7

## Anexos

A continuación, presentaremos los respectivos programas que se han usado en MATLAB para observar el fenómeno de Runge y para los polinomios de Chebyshev respectivamente.

### 7.1 Código Matlab

#### 7.1.1 Fenómeno de Runge

```
f = @(x)1./(1 + 25 * x.^2);
```

**Para n=5**

```
figure(1)
```

\*Número de nodos es n+1:

```
n=5;
```

\*Elección de  $n + 1$  puntos igualmente espaciados en  $[-1, 1]$

```
nodos=linspace(-1,1,n+1);
```

\*Valores de la función en los nodos:

```
valores=f(nodos);
```

\*Polinomio de interpolación:

```
p=polyfit(nodos,valores,n);
```

\*500 puntos del intervalo  $[-1, 1]$  igualmente espaciados:

```
t=linspace(-1,1,500);
```

*\*Dibujo de la función, los nodos y su polinomio interpolador:*

```
subplot(1,2,1),plot(t,f(t),'r',nodos,valores,'ko',t,polyval(p,t),'b','LineWidth',1.5)
```

*\*Ventana gráfica,  $x$  en  $[-1.1, 1.1]$  y en  $[-0.2, 1.2]$ :*

```
axis([-1.1,1.1,-0.2,1.2])
```

*\*Le ponemos título:*

```
title(' n = 5','fontsize',15)
```

```
legend('f(x)', 'Nodos', 'P_n(x)', 'Location', 'Best')
```

## 7.1.2 Interpolaciones de Polinomios de Chebyshev

```
f = @(t)1./(1 + 25 * t.^2)
```

```
figure(1)
```

*\*Número de nodos es  $n+1$ :*

```
n=5
```

```
s = 0; for k = 1 : n; s = s + 1; x(n + 1 - s) = cos(((2 * k - 1)/(2 * n)) * pi); end; x;
```

*\*Calculamos el valor de la función  $f$  en  $x$ .*

```
pn = polyfit(x, f(x), n - 1)
```

*\*En el intervalo  $[-1, 1]$ :*

```
r = linspace(-1, 1)
```

*\*Dibujo de la función y su polinomio interpolador:*

```
plot(r,f(r),'b',r,polyval(pn,r),'r')
```

*\*Le ponemos título:*

```
legend('f(x)', 'P_n(x)', 'Location', 'Best')
```

# Bibliografía

- [1] M. CROUZEIX & A.L. MIGNOT, 2<sup>e</sup> ÉDITION, «*Analyse numérique des équations différentielles* », Masson, Paris, 1989.
- [2] M. CROUZEIX & A.L. MIGNOT, «*Exercices d'analyse numérique des équations différentielles* », Masson, Paris, 1986.
- [3] A. DOUBOVA & F.GUILLÉN GONZÁLEZ, «*Un curso de Cálculo Numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y Resolución de Ecuaciones Diferenciales* », Universidad de Sevilla, Sevilla, 2007.
- [4] P.J. DAVIS «*Interpolation and Approximation* », Publishing Company, New-York, 1975.
- [5] T.Y. RIVLIN «*An introduction to the Approximation of Functions* », Blaisdell Publishing Company, New-York, 1969.
- [6] G.G LORENT, «*Approximation of Function* », Holt, Rinehart and Winston, New-York, 1966.
- [7] <http://departamento.us.es/edan/php/asig/LICMAT/LMCN1/Tema3CN10809.pdf>