# GENERACIÓN DE LAS MATRICES DE TRANSFERENCIA EN EL FORMALISMO DE STROH PARA MATERIALES DEGENERADOS EN ESQUINAS MULTIMATERIALES ANISÓTROPAS.

**A. Barroso, V. Mantic y F. París**
Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla
e-mail: abc@esi.us.es

***Palabras Clave:*** *Esquinas multimateriales, Tensiones singulares, Uniones adhesivas, Materiales anisótropos, Formalismo de Stroh, Materiales Compuestos.*

***Resumen:*** *Las uniones adhesivas entre adherentes metálicos y composites (frecuentes en la industria aeronáutica), presentan habitualmente esquinas multimateriales con materiales isótropos (adhesivo y adherentes metálicos) y transversalmente isótropos, que según la orientación relativa o valor de sus constantes, pueden ser degenerados, desde un punto de vista matemático. El uso de la matriz de transferencia facilita la caracterización del estado tensional singular en el entorno de esquinas multimateriales. Para esquinas multimateriales anisótropas, se ha generado con base en el formalismo de Stroh, las matrices de transferencia para materiales matemáticamente degenerados, generalizando la ya existente matriz de transferencia para materiales anisótropos no degenerados desarrollada por Ting[8]. Los materiales isótropos se pueden considerar, en el marco del formalismo, como materiales anisótropos matemáticamente degenerados. Se completa de esta manera el abanico de materiales a incluir en este tipo de análisis.*

***Abstract:*** *Metal to composite adhesive joints, give rise very often to corners involving isotropic materials (metal adherends and the adhesive) and transversely isotropic materials, which depending on the relative orientation and the value of the elastic constants, can be considered as degenerated materials, from a mathematical point of view. The use of the transfer matrix facilitates the singular stress characterization in the neighbourhood of multimaterial corners. For anisotropic multimaterial corners, and in the frame of Stroh formalism, the transfer matrix have been derived for degenerated materials, generalizing the existing one for non degenerated anisotropic materials, developed by Ting[8]. Isotropic materials can be considered in the frame of the formalism as mathematically degenerated anisotropic materials. The range of materials covered by this type of analysis is in this way completed.*

## 1.- INTRODUCCIÓN

El formalismo de Stroh[1,2] es una herramienta poderosa y eficiente en la resolución de problemas de elasticidad anisótropa bajo deformación plana generaliza da. En particular, la caracterización de los estados singulares que se inducen en esquinas con presencia de uno o varios materiales anisótropos, ha sido resuelta con éxito en numerosos trabajos basados en este formalismo (Ting and Chou[3]; Delale[4], Chen[5], Poonsawat et al.[6], Mantič et al.[7]).

El uso de la matriz de transferencia, que relaciona los valores del vector de desplazamientos y del vector de la función de tensiones entre las caras extremas de cada sector angular (cada material) que forma la esquina, simplifica notablemente el procedimiento de cálculo (Ting[8]). Para materiales anisótropos matemáticamente degenerados, aquellos en los que al aplicar el formalismo los autovalores no son todos diferentes y sus autovectores asociados no son todos linealmente independientes, el formalismo sufre ciertas modificaciones (Ting and Chyabyn[9] y Wang and Ting[10]). Es el objetivo de este trabajo obtener las expresiones de las matrices de transferencia para estos materiales, entre los cuales y por su importancia destacan los materiales isótropos, que dentro del formalismo se pueden considerar como materiales anisótropos degenerados.

En la industria aeronáutica es frecuente la presencia de esquinas multimateriales en las uniones adhesivas composite-composite y composite-metal. En estas esquinas, algunos de los materiales (los adhesivos y los adherentes metálicos) tienen comportamiento isótropo, y otros (p.e. láminas de fibra unidireccional) pueden tener comportamiento transversalmente isótropo, que pueden además presentar degeneración dependiendo exclusivamente de la orientación relativa del material al plano donde se produce la deformación plana generalizada, independientemente del valor de sus constantes elásticas [11].

Con la obtención de las matrices de transferencia para los materiales degenerados, se amplía el procedimiento de cálculo[8] a este tipo de uniones, con la posibilidad de caracterizar esquinas multimateriales con presencia de cualquier material degenerado.

## 2.- ECUACIONES BÁSICAS

En problemas de elasticidad anisótropa en los que el campo de desplazamientos sólo depende de las coordenadas de un plano [$u_i=u_i(x_1,x_2)$ (i=1,2,3)] es aplicable el formalismo de Stroh (para una información completa del formalismo ver Ting[12]) que básicamente, resuelve el sistema:

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\xi}_\alpha = p_\alpha \boldsymbol{\xi}_\alpha \quad (\alpha = 1,...,6) \tag{1}$$

donde **N** es una matriz real 6×6 que sólo depende de las constantes elásticas del material, $p$ y $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{a}^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}^{\mathrm{T}})$ son los autovalores y autovectores asociados del sistema. $x_\alpha$ tiene un significado físico importante, siendo sus tres primeras componentes **a** el vector de desplazamientos y las tres últimas **b** el vector tensión. Es habitual ordenar $p_a$ y $\xi_\alpha$ de la siguiente manera:



$$\operatorname{Im} p_\alpha > 0, \qquad p_{\alpha+3} = \bar{p}_\alpha, \qquad \boldsymbol{\xi}_{\alpha+3} = \bar{\boldsymbol{\xi}}_\alpha \qquad (\alpha = 1,2,3) \tag{2}$$

donde la barra superior denota el valor complejo conjugado. En el caso de que todos los autovalores sean distintos (caso simple) o en el caso de que aun siendo iguales, tengan autovectores asociados linealmente independientes (caso semisimple), la solución en desplazamientos y el vector de la función de tensiones se pueden expresar como:

$$\mathbf{u} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \mathbf{a}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{a}}_\alpha f_{\alpha+3}(\bar{z}_\alpha) \right\} \ , \ \boldsymbol{\varphi} = \sum_{\alpha=1}^{3} \left\{ \mathbf{b}_\alpha f_\alpha(z_\alpha) + \bar{\mathbf{b}}_\alpha f_{\alpha+3}(\bar{z}_\alpha) \right\} \tag{3}$$

donde $f_\alpha(z_\alpha)$ es una función arbitraria y $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$. Para el caso de esquinas y en general, para el análisis de estados singulares de tensión se toma: $f_\alpha(z_\alpha) = q_\alpha z_\alpha^\delta$ y $f_{\alpha+3}(\bar{z}_\alpha) = \tilde{q}_\alpha \bar{z}_\alpha^{\delta}$, donde $q_\alpha$ y $\tilde{q}_\alpha$ (a=1,2,3) son constantes arbitrarias y d-1 es el orden de la singularidad de tensiones. Definiendo **A**=[**a**$_1$,**a**$_2$,**a**$_3$] y **B**=[**b**$_1$,**b**$_2$,**b**$_3$], (3) toma, en coordenadas polares, la forma:

$$\mathbf{u}(r,\theta) = r^\delta \left\{ \mathbf{A}\left\langle \zeta_*^\delta(\theta) \right\rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{A}}\left\langle \bar{\zeta}_*^\delta(\theta) \right\rangle \tilde{\mathbf{q}} \right\}, \ \boldsymbol{\varphi}(r,\theta) = r^\delta \left\{ \mathbf{B}\left\langle \zeta_*^\delta(\theta) \right\rangle \mathbf{q} + \bar{\mathbf{B}}\left\langle \bar{\zeta}_*^\delta(\theta) \right\rangle \tilde{\mathbf{q}} \right\} \tag{4}$$

donde $\left\langle \zeta_*^\delta(\theta) \right\rangle = diag\left[\zeta_1^\delta(\theta), \zeta_2^\delta(\theta), \zeta_3^\delta(\theta)\right]$ y $\zeta_\alpha(\theta) = \cos\theta + p_\alpha sin\theta$ de forma que $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2 = r\zeta_\alpha(\theta)$. Teniendo en cuenta que $\sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}$ y $\sigma_{i2} = \varphi_{i,1}$, se observa de (4) que las tensiones tienen carácter singular cuando d<1. Adicionalmente, y debido a que la energía de deformación debe permanecer acotada, también se debe cumplir que d>0.

## 3.- MATRIZ DE TRANSFERENCIA

Reproduciendo a Ting[8], las expresiones en (4) se compactan en: $\mathbf{w}(r,\theta) = r^\delta \mathbf{X}\mathbf{Z}^\delta(\theta)\mathbf{t}$

$$\text{donde: } \mathbf{w}(r,\theta) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(r,\theta) \\ \boldsymbol{\varphi}(r,\theta) \end{bmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \ \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \ \mathbf{y} \ \mathbf{Z}^\delta(\theta) = \begin{bmatrix} \left\langle \zeta_*^\delta(\theta) \right\rangle & 0 \\ 0 & \left\langle \bar{\zeta}_*^\delta(\theta) \right\rangle \end{bmatrix} \tag{5}$$

Si **a** y **b** están normalizados según 2**a**·**b**=1, entonces se sabe que $\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} & \bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$. Para cualquiera de los materiales presentes en la esquina multimaterial ocupando un sector $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, se puede establecer, para $\theta=\theta_1$ y $\theta=\theta_2$:

$$\begin{matrix} \mathbf{w}(\theta_1) = r^\delta \mathbf{X}\mathbf{Z}^\delta(\theta_1)\mathbf{t} \\ \mathbf{w}(\theta_2) = r^\delta \mathbf{X}\mathbf{Z}^\delta(\theta_2)\mathbf{t} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{Eliminando } \mathbf{t} \\ \text{entre ambas} \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{w}(\theta_2) = \mathbf{E}\,\mathbf{w}(\theta_1) \qquad \mathbf{E} = \mathbf{X}\mathbf{Z}^\delta(\theta_2)\left[\mathbf{Z}^\delta(\theta_1)\right]^{-1}\mathbf{X}^{-1} \tag{6}$$

Quedando así definida la matriz de transferencia **E** (6×6), que relaciona los valores de **w** entre $\theta_1$ y $\theta_2$. Ting[8] desarrolla con detalle la estructura de $\mathbf{Z}^{\delta}(\theta_2)\left[\mathbf{Z}^{\delta}(\theta_1)\right]^{-1}$ para materiales anisótropos no degenerados, siendo el objeto de los apartados siguientes el desarrollo de dicha expresión para materiales anisótropos matemáticamente de generados.

## 4.- MATERIALES DEGENERADOS

El formalismo de Stroh sufre ciertas modificaciones cuando existen autovalores $p_\alpha$ iguales y autovectores $\boldsymbol{x}_a$ linealmente dependientes. Concretamente el número de autovectores linealmente independientes, es el que fija la forma de la solución, siendo válida la expresión general (1) para el caso de tres autovectores linealmente independientes, y expresiones modificadas[9,10] que analizaremos en los apartados siguientes para dos y un sólo autovector linealmente independiente. Ting[13] muestra con detalle todos los casos posibles de degeneración en función del número de autovalores iguales y el número de autovectores linealmente independientes. Un cuadro resumen con las diferentes posibilidades se presenta en la Tabla 1.

| | $p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq p_1$ | $p_1 = p_2 \neq p_3$ | $p_1 = p_2 = p_3$ |
|---|---|---|---|
| 3 autovectores independientes | Simple (SP) | Semisimple (SS) | Ex. semisimple (ES) No Existe |
| 2 autovectores independientes | | Degenerado de 1ª especie (D1) | Degenerado de 2ª especie (D2) |
| 1 autovector independiente | | | Extraordinariamente degenerado (ED) |

**Tabla 1**. Clasificación de la matriz **N**.

Ting[14] demostró la existencia de matrices **N** del grupo ED, así como la imposibilidad de encontrar materiales con una matriz **N** pertenecientes al grupo ES a menos que la función de energía de deformación fuese semidefinida positiva[9]. Los materiales isótropos pertenecen al grupo D2, con los tres autovalores iguales $p_1=p_2=p_3=i$, siendo $i=\sqrt{-1}$ la unidad imaginaria. Según Tanuma[11], los materiales transversalmente isótropos, dependiendo del valor de las 5 constantes elásticas que lo definen y de la orientación relativa del mismo respecto de los ejes coordenados, pueden pertenecer a todos los grupos mostrados en la Tabla 1, salvo al grupo ED.

### 4.1.- Dos autovectores linealmente independientes. Casos D1 y D2

Si en ambos casos suponemos, sin ninguna pérdida de generalidad, que asociados a $p_1=p_2$ tenemos un sólo autovector $\boldsymbol{x}_1$ linealmente independiente, las expresiones modificadas del sistema del formalismo (1) para $p_1=p_2$ y $p_3$ son[12]:

$$\mathbf{N}\xi_1 = p_1\xi_1 \qquad \mathbf{N}\xi_2 = p_1\xi_2 + \xi_1 \qquad \mathbf{N}\xi_3 = p_3\xi_3 \tag{7}$$



donde $\boldsymbol{x}_2$ es el autovector generalizado. Las relaciones de ortogonalidad, propias del formalismo, también se ven modificadas[12] y quedan:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma A}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{\Gamma}\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} & \mathbf{\Gamma}\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Las expresiones (4) pueden escribirse también como:

$$\mathbf{u} = 2\,\mathrm{Re}\{\mathbf{AF}(z_*)\mathbf{q}\}, \quad \boldsymbol{\varphi} = 2\,\mathrm{Re}\{\mathbf{BF}(z_*)\mathbf{q}\} \tag{9}$$

En lo que respecta a la forma de la solución, la diferencia entre los materiales anisótropos no degenerados y los degenerados es que, mientras que en los primeros $\mathbf{F}(z_*) = \langle f(z_*)\rangle = di\mathbf{a}g\left(z_1^{\delta}, z_2^{\delta}, z_3^{\delta}\right)$, en los degenerados con dos autovectores linealmente independientes (grupos D1 y D2), la matriz $\mathbf{F}(z_*)$ ya no es diagonal. La estructura de $\mathbf{F}(z_*)$ para estos materiales es la siguiente:

$$\mathbf{F}(z_*) = \begin{bmatrix} f(z_1) & x_2 f'(z_1) & 0 \\ 0 & f(z_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(z_3) \end{bmatrix} \tag{10}$$

siendo: $f(z_\alpha) = z_\alpha^{\delta} = r^{\delta}(\cos\theta + p_\alpha sin\theta)^{\delta} = r^{\delta}\zeta_\alpha^{\delta}(\theta)$, $\quad f'(z_i) = \left.\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}\right|_{z_i}$ (ver[12]) y $x_2 = r\,sin\theta$. Es inmediato demostrar: $x_2 f'(z_1) = \left[\dfrac{\delta\, sin\theta}{\cos\theta + p_1\, sin\theta}\right] f(z_1)$, que sustituído en (10) da:

$$\mathbf{F}(z_*) = r^{\delta} \begin{bmatrix} \zeta_1^{\delta}(\theta) & \left[\dfrac{\delta\, sin\theta}{\cos\theta + p_1 sin\theta}\right]\zeta_1^{\delta}(\theta) & 0 \\ 0 & \zeta_2^{\delta}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3^{\delta}(\theta) \end{bmatrix} = r^{\delta}\mathbf{F}(\theta) \tag{11}$$

Usando todo lo anterior y sabiendo que $\overline{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}$, la matriz de transferencia **E** (6) toma la forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{X}\begin{bmatrix} \mathbf{F}(\theta_2)\mathbf{F}^{-1}(\theta_1)\mathbf{\Gamma} & 0 \\ 0 & \overline{\mathbf{F}}(\theta_2)\overline{\mathbf{F}}^{-1}(\theta_1)\mathbf{\Gamma} \end{bmatrix}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{F}}\mathbf{X}^{-1} \tag{12}$$

donde:

$$\mathbf{F}^{-1}(\theta_1)=\begin{bmatrix} \zeta_1^{-\delta}(\theta_1) & -\left[\dfrac{\delta\, sin\theta}{\cos\theta+p_1 sin\theta}\right]\zeta_1^{-\delta}(\theta_1) & 0 \\ 0 & \zeta_2^{-\delta}(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3^{-\delta}(\theta_1) \end{bmatrix} \tag{13}$$

Vamos a evaluar $\mathbf{F}_1=\mathbf{F}(\theta_2)\mathbf{F}^{-1}(\theta_1)\boldsymbol{\Gamma}$ y $\mathbf{F}_2=\overline{\mathbf{F}}(\theta_2)\overline{\mathbf{F}}^{-1}(\theta_1)\boldsymbol{\Gamma}$, que conforman los términos no nulos de $\hat{\mathbf{F}}$ (12). Haciendo uso de la relación $\ln\zeta(\theta)=\ln|\zeta(\theta)|+i\arg\zeta(\theta)$ y $\delta=\delta_{\mathrm{R}}+i\,\delta_{\mathrm{I}}$ donde $|\zeta(\theta)|$ es el módulo de $\zeta(\theta)$, $\arg\zeta(\theta)$ es el argumento de $\zeta(\theta)$, y $\delta_{\mathrm{R}}$ y $\delta_{\mathrm{I}}$, las partes Real e Imaginaria de $\delta$ respectivamente. Es importante remarcar que $\arg\zeta(\theta)$ debe ser una función continua en el intervalo ( $\theta_1,\theta_2$). Según lo anterior, $\zeta^{\delta}(\theta)$ y $\zeta^{-\delta}(\theta)$ se pueden expresar como:

$$\begin{aligned}\zeta_\alpha^{\delta}(\theta_\beta)&=|\zeta_\alpha(\theta_\beta)|^{\delta_{\mathrm{R}}}\cdot\mathbf{e}^{-\delta_{\mathrm{I}}\arg\zeta_\alpha(\theta_\beta)}\\ &\cdot\left[\cos(\ln|\zeta_\alpha(\theta_\beta)|\delta_{\mathrm{I}}+\delta_{\mathrm{R}}\arg\zeta_\alpha(\theta_\beta))+i\,sin(\ln|\zeta_\alpha(\theta_\beta)|\delta_{\mathrm{I}}+\delta_{\mathrm{R}}\arg\zeta_\alpha(\theta_\beta))\right]\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\zeta_\alpha^{-\delta}(\theta_\beta)&=|\zeta_\alpha(\theta_\beta)|^{-\delta_{\mathrm{R}}}\cdot\mathbf{e}^{\delta_{\mathrm{I}}\arg\zeta_\alpha(\theta_\beta)}\\ &\cdot\left[\cos(-\ln|\zeta_\alpha(\theta_\beta)|\delta_{\mathrm{I}}-\delta_{\mathrm{R}}\arg\zeta_\alpha(\theta_\beta))+i\,sin(-\ln|\zeta_\alpha(\theta_\beta)|\delta_{\mathrm{I}}-\delta_{\mathrm{R}}\arg\zeta_\alpha(\theta_\beta))\right]\end{aligned} \tag{15}$$

con $\alpha=1,2,3$ y $\beta=1,2$. Operando, obtenemos:

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{F}(\theta_2)\mathbf{F}^{-1}(\theta_1)\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix} h(\zeta_1,\theta_1,\theta_2) & g(\zeta_1,\theta_1,\theta_2) & 0 \\ g(\zeta_2,\theta_1,\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g(\zeta_3,\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Usando (14) y (15) y sabiendo que $p_1=p_2$ implica que $\zeta_1(\theta_\beta)=\zeta_2(\theta_\beta)$, entonces $|\zeta_1(\theta_\beta)|=|\zeta_2(\theta_\beta)|$ y $\arg[\zeta_1(\theta_\beta)]=\arg[\zeta_2(\theta_\beta)]$, de donde operando obtenemos:

$$g(\zeta_\alpha,\theta_1,\theta_2)=\mathbf{e}^{i\delta\{\arg[\zeta_\alpha(\theta_1)]-\arg[\zeta_\alpha(\theta_2)]\}}\left[\frac{|\zeta_\alpha(\theta_2)|}{|\zeta_\alpha(\theta_1)|}\right]^{\delta},\ h(\zeta_1,\theta_1,\theta_2)=g(\zeta_1,\theta_1,\theta_2)\frac{\delta\, sin(\theta_2-\theta_1)}{\zeta_1(\theta_2)\zeta_1(\theta_1)} \tag{17}$$

De manera análoga, para el producto $\overline{\mathbf{F}}(\theta_2)\overline{\mathbf{F}}^{-1}(\theta_1)\boldsymbol{\Gamma}$ tenemos:



$$\mathbf{F}_2=\overline{\mathbf{F}}(\theta_2)\overline{\mathbf{F}}^{-1}(\theta_1)\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix} \bar{h}(\zeta_1,\theta_1,\theta_2) & \bar{g}(\zeta_1,\theta_1,\theta_2) & 0 \\ \bar{g}(\zeta_2,\theta_1,\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{g}(\zeta_3,\theta_1,\theta_2) \end{bmatrix} \tag{18}$$

donde:

$$\bar{g}(\zeta_\alpha,\theta_1,\theta_2)=\mathbf{e}^{-i\delta\{\arg[\zeta_\alpha(\theta_1)]-\arg[\zeta_\alpha(\theta_2)]\}}\left[\frac{|\zeta_\alpha(\theta_2)|}{|\zeta_\alpha(\theta_1)|}\right]^{\delta},\ \bar{h}(\zeta_1,\theta_1,\theta_2)=\bar{g}(\zeta_1,\theta_1,\theta_2)\frac{\delta\, sin(\theta_2-\theta_1)}{\bar{\zeta}_1(\theta_2)\bar{\zeta}_1(\theta_1)} \tag{19}$$

siendo $\overline{\zeta_1}(\theta_\beta)=\cos\theta_\beta+\bar{p}_1\, sin\theta_\beta$. Con $\boldsymbol{\Gamma}$ (8), $\mathbf{F}_1$ (16) y $\mathbf{F}_2$ (18) se completa $\hat{\mathbf{F}}$ (12), quedando sólo conocer las matrices **A** y **B** para completar la matriz de transferencia **E** (12).

### 4.2.- Un autovector linealmente independiente. Caso ED.

El formalismo, en el caso de que exista un sólo autovector linealmente independiente asociado al autovalor triple $p$, se ve modificado[10] y el sistema de autovalores, en vez de (1) toma la forma:

$$\mathbf{N}\xi_1=p\xi_1 \qquad \mathbf{N}\xi_2=p\xi_2+\xi_1 \qquad \mathbf{N}\xi_3=p\xi_3+\xi_2 \tag{20}$$

donde $x_2$ y $x_3$ son autovectores generalizados. Las relaciones de ortogonalidad, también se ven modificadas[10].

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\Gamma}\overline{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Gamma}\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

La expresión de la matriz $\mathbf{F}(z_*)$ (10), tampoco es diagonal para materiales Extraordinariamente Degenerados tomando en este caso la forma siguiente[10].

$$\mathbf{F}(z_*)=\begin{bmatrix} f(z) & x_2 f'(z) & \frac{1}{2}x_2^2 f''(z) \\ 0 & f(z) & x_2 f'(z) \\ 0 & 0 & f(z) \end{bmatrix} \tag{22}$$

En la que $f(z)=r^{\delta}(\cos\theta+p sin\theta)^{\delta}=r^{\delta}\zeta^{\delta}(\theta)$, $f'(z)=\dfrac{\partial f(z)}{\partial z}$ y $f''(z)=\dfrac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}$. Ya sabemos que: $x_2 f'(z)=\left[\dfrac{\delta\, sin\theta}{\cos\theta+p\, sin\theta}\right]f(z)=L(\theta)f(z)$ y operando convenientemente, obtenemos: $\frac{1}{2}x_2^2 f''(z) = \left(\frac{\delta-1}{2\delta}\right)\left(\frac{\delta\, sin\theta}{\cos\theta + p\, sin\theta}\right)^2 f(z) = P\, L^2(\theta) f(z)$ que sustituídas en (22) dan:

$$\mathbf{F}(z_*) = r^\delta \zeta^\delta(\theta)\begin{bmatrix} 1 & L(\theta) & P\,L^2(\theta) \\ 0 & 1 & L(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r^\delta \mathbf{F}(\theta) \tag{23}$$

Para obtener la expresión de la matriz de transferencia, necesitamos la inversa de $\mathbf{F}(\theta)$ (en (23)), que toma la forma.

$$\mathbf{F}^{-1}(\theta) = \zeta^{-\delta}(\theta)\begin{bmatrix} 1 & -L(\theta) & (1-P)L^2(\theta) \\ 0 & 1 & -L(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

Análogamente con el caso anterior, debemos evaluar los productos $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}(\theta_2)\mathbf{F}^{-1}(\theta_1)\mathbf{\Gamma}$ y $\mathbf{F}_2 = \overline{\mathbf{F}}(\theta_2)\overline{\mathbf{F}}^{-1}(\theta_1)\mathbf{\Gamma}$ para obtener $\hat{\mathbf{F}}$ (12). Operando adecuadamente, obtenemos:

$$\mathbf{F}_1 = g(\zeta,\theta_1,\theta_2)\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_1 & \mathbf{Z}_1 & 1 \\ \mathbf{Z}_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \overline{g}(\zeta,\theta_1,\theta_2)\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Z}}_2\overline{\mathbf{Z}}_1 & \overline{\mathbf{Z}}_1 & 1 \\ \overline{\mathbf{Z}}_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

donde:

$$g(\zeta,\theta_1,\theta_2) = \mathbf{e}^{\delta \arg[\zeta(\theta_1)] - \arg[\zeta(\theta_2)]}\left[\frac{|\zeta(\theta_2)|}{|\zeta(\theta_1)|}\right]^\delta, \quad \overline{g}(\zeta,\theta_1,\theta_2) = \mathbf{e}^{-\delta\{\arg[\zeta(\theta_1)] - \arg[\zeta(\theta_2)]\}}\left[\frac{|\zeta(\theta_2)|}{|\zeta(\theta_1)|}\right]^\delta \tag{26}$$

con $\mathbf{Z}_1 = \dfrac{\delta\, sin(\theta_2-\theta_1)}{\zeta(\theta_1)\zeta(\theta_2)}$, $\overline{\mathbf{Z}}_1 = \dfrac{\delta\, sin(\theta_2-\theta_1)}{\overline{\zeta}(\theta_1)\overline{\zeta}(\theta_2)}$,

y $\mathbf{Z}_2 = \dfrac{\mathbf{Z}_1}{2} - \dfrac{sin\theta_1}{2\zeta(\theta_1)} - \dfrac{sin\theta_2}{2\zeta(\theta_2)}$, $\overline{\mathbf{Z}}_2 = \dfrac{\overline{\mathbf{Z}}_1}{2} - \dfrac{sin\theta_1}{2\overline{\zeta}(\theta_1)} - \dfrac{sin\theta_2}{2\overline{\zeta}(\theta_2)}$

donde $\overline{\zeta}(\theta) = \cos\theta + \overline{p}\, sin\theta$. Con $\mathbf{F}_1$ $(25)_1$ y $\mathbf{F}_2$ $(25)_2$ se completa $\hat{\mathbf{F}}$ (en 12) y sólo queda conocer las matrices **A** y **B** para completar la matriz de transferencia **E** (12).



## 5.- APLICACIÓN A MATERIALES ISÓTROPOS

Para los materiales isótropos (caso D2) todas las expresiones anteriores se simplifican significativamente debido a que el autovalor triple $p=i$, lleva a:

$$\zeta_\alpha(\theta) = \cos\theta + i\, sin\theta \quad \Rightarrow \quad |\zeta_\alpha(\theta)| = 1 \quad \text{y} \quad \arg[\zeta_\alpha(\theta)] = \theta \quad (\forall\alpha) \tag{27}$$

de (27) tenemos que (17) y (19) quedan respectivamente:

$$g(\theta_1,\theta_2) = \mathbf{e}^{i\delta(\theta_1-\theta_2)}, \quad h(\theta_1,\theta_2) = g(\theta_1,\theta_2)\frac{\delta\, sin(\theta_2-\theta_1)}{\mathbf{e}^{i(\theta_2+\theta_1)}} \tag{28}$$

$$\overline{g}(\theta_1,\theta_2) = \mathbf{e}^{-i\delta(\theta_1-\theta_2)}, \quad \overline{h}(\theta_1,\theta_2) = \overline{g}(\theta_1,\theta_2)\frac{\delta\, sin(\theta_2-\theta_1)}{\mathbf{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}} \tag{29}$$

Las matrices **A** y **B** ya normalizadas para materiales isótropos[12] se muestran en (30), donde $\mu$ y $\nu$ son respectivamente el módulo de cortadura y el coeficiente de Poisson del material.

$$\mathbf{A} = \psi\begin{bmatrix} 1 & -i\gamma & 0 \\ i & -\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mu\psi\begin{bmatrix} 2i & 1 & 0 \\ -2 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \psi &= [8\mu(1-\nu)]^{-1/2} \\ \gamma &= \tfrac{1}{2}(3-4\nu) \\ \varepsilon &= (1-i)\sqrt{2(1-\nu)} \end{aligned} \tag{30}$$

Sustituyendo (28) y (29) en $\mathbf{F}_1$ (16) y $\mathbf{F}_2$ (18) respectivamente, y éstas junto con las expresiones de **A** y **B** (30) en **E** (12) obtenemos la expresión de la matriz de transferencia para materiales isótropos.

## 6.- CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han obtenido las expresiones de la matriz de transferencia para los denominados, según el Formalismo de Stroh, materiales matemáticamente degenerados. Ello permite aplicar el enfoque introducido por Ting[8] para caracterizar de una manera eficiente el estado tensional en esquinas multimateriales compuestas por cualquier material elástico, sea cual sea su grado de anisotropía y degeneración. Los materiales isótropos, no dejan de ser unos materiales anisótropos muy particulares. Para ellos, por lo tanto, son también aplicables los resultados obtenidos.

Los mismos autores que suscriben este trabajo, han implementado numéricamente[15] el procedimiento de cálculo en el que se hace uso de los resultados aquí descritos, para caracterizar el estado tensional y de desplazamientos en esquinas con presencia conjunta de materiales anisótropos no degenerados y degenerados (incluyendo isótropos y transversalmente isótropos), que aparecen con frecuencia en las uniones adhesivas metal - composite y composite-composite en la industria aeronaútica.

## 7.- AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con la financiación PROFIT 2001 del Ministerio de Ciencia y Tecnología (proyecto EUREKA S!1882) y del Ministerio de Educación y Cultura (proyecto PB98-1118).

## 8.- REFERENCIAS


1. A. N. Stroh (1958), "Dislocations and cracks in anisotropic elasticity", Phil. Mag. 3, 625-646.
2. A. N. Stroh (1962), "Steady state problems in anisotropic elasticity", J. Math. Phys. 41, 77-103.
3. T. C. T. Ting and S. C. Chou (1981), "Edge singularities in anisotropic composites", Int.l J. Solids Structures 17, 1057-1068.
4. F. Delale, (1984), "Stress singularities in bonded anisotropic materials", Int. J. Solids Structures Vol. 20, No.1, 31-40.
5. Hua-Peng Chen (1998), "Stress singularities in anisotropic multimaterial wedges and junctions", Int. J. Solids Structures Vol. 35, No. 11, 1057-1073.
6. P. Poonsawat, A. C. Wijeyewickrema and P. Karasudhi (1997), "Singular stress fields of angle-ply and monoclinic bimaterial wedges", Int. J. Solids Structures 38, 1057-1068, 1981.
7. V. Mantič, F. París and J. Cañas (1997), "Stress singularities in 2D orthotropic corners", Int. J. Fracture 83, 67-90.
8. T. C. T. Ting (1997), "Stress singularities at the tip of interfaces in polycrystals", Damage and Failure of Interfaces, Rossmanith (ed.) Balkema, Rotterdam, ISBN 90 5410 899 1, pp:75-82.
9. T. C. T. Ting and H. Chyanbin (1988), "Sextic formalism in anisotropic elasticity for almost non-semisimple matrix N", Int. J. Solids Structures 24, 65-76.
10. Y. M. Wang and T. C. T. Ting (1997)"The Stroh formalism for anisotropic materials that possess an almost extraordinary degenerate matrix N", Int. J. Solids Structures 34, No. 4, pp. 65-76.
11. K. Tanuma (1996), "Surface-impedance tensors of transversely isotropic elastic materials", Q. J. Mech. Appl. Math. 49, No. 1, 29-48.
12. T. C. T. Ting (1996), "Anisotropic Elasticity: Theory and Applications", Oxford University Press.
13. T. C. T. Ting (1999), "A modified Lekhnitskii formalism à la Stroh for anisotropic elasticity and classifications of the 6×6 matrix N", Proc. R. Soc. Lond. A 455, 69-89.
14. T. C. T. Ting (1996), "Existence of an extraordinary degenerate matrix N for anisotropic elastic materials", Q. J. Mech. Appl. Math. 49, No. 3, 405-417.
15. A. Barroso, V. Mantič y F. París (2001), "Caracterización del estado tensional en el entorno de esquinas con varios materiales anisótropos", MATCOMP 2001. Gijón.