

BIFURCACIONES DE HOPF Y CICLOS LÍMITES EN UN MODELO DE CONTROL ÓPTIMO APLICADO A LA PESQUERÍA DE *CHAMELEA GALLINA* DEL LITORAL SURATLÁNTICO ESPAÑOL

Vílchez Lobato, M^a Luisa^a, Velasco Morente, Francisco^b, García del Hoyo, Juan J.^a

lobato@uhu.es, velasco@us.es, hoyo@uhu.es

^a Dpto. de Economía General y Estadística. Universidad de Huelva.

^b Dpto. de Economía Aplicada I. Universidad de Sevilla.

RESUMEN

Este trabajo pretende ampliar el presentado en el IV Encuentro de Economía Aplicada (Reus, 2001) que, bajo el título "Análisis de la estabilidad y de bifurcaciones en un modelo dinámico aplicado a la gestión de una pesquería", presentaba un modelo de control óptimo caracterizado por la tradicional presencia de un punto de silla y por la existencia de trayectorias cerradas de tipo ciclo límite para los valores de la tasa de descuento social que verificaran las hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf. La aplicación de los resultados obtenidos a nivel teórico al caso de la pesquería de *chamelea gallina* de la región Suratlántica Española evidenció que tales trayectorias cerradas aparecían en un entorno de un equilibrio estacionario no factible en un caso real, pues el correspondiente nivel de biomasa era negativo. Dada la evolución histórica de la citada pesquería, se ha considerado la situación de la misma en la década de los años 60, a principios de la cual existían unos stocks de chirla apenas explotados, lo que nos ha llevado a formular el mismo problema de control empleando una tasa de capturas distinta de la habitual del modelo de Schaefer que habíamos usado en el primer trabajo. Mediante la aplicación del teorema de bifurcación de Hopf se establece así la presencia de ciclos límites en el sistema dinámico resultante de aplicar el principio del máximo de Pontryagin a este nuevo problema de control.

Palabras clave: bifurcaciones, teorema de Hopf, ciclo límite, control óptimo.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas dinámicos de ecuaciones diferenciales (ya sea formulados con una concepción continua o discreta del tiempo) están presentes en la mayoría de los modelos que tratan de explicar los distintos aspectos de la dinámica y gestión de un recurso pesquero renovable. Son además sistemas con formas funcionales dependientes de varios parámetros, los cuales miden características económicas y/o biológicas del recurso explotado.

Dado el creciente interés que despiertan en la Economía desde un tiempo a esta parte los temas relacionados con los últimos estudios sobre bifurcaciones y caos, unido al hecho de que empiezan a surgir trabajos que aplican dicha teoría al campo de los recursos pesqueros renovables, nos planteamos también la cuestión de la estabilidad estructural de tales sistemas, esto es: ¿persisten las propiedades dinámicas cualitativas bajo pequeñas variaciones de los parámetros? ¿o por el contrario, se revelan en las trayectorias del sistema comportamientos atípicos?

En este sentido, el estudio de la estabilidad estructural de un sistema dinámico es el primer paso en el análisis de las bifurcaciones en el mismo, llamándose de hecho valor de bifurcación a aquel valor del parámetro a partir del cual el sistema es estructuralmente inestable.

En este trabajo pretendemos, fundamentalmente, interpretar la teoría sobre bifurcaciones locales dentro del contexto de los sistemas dinámicos con aplicación a la pesca, como herramienta importante que permite un análisis cualitativo pormenorizado del comportamiento de las trayectorias del sistema en un entorno de los puntos de equilibrio estacionario. Concretamente, analizamos el sistema de ecuaciones diferenciales resultante al aplicar el Principio del Máximo de Pontryagin a un problema de control óptimo. Tales sistemas se han caracterizado tradicionalmente en la literatura por la presencia de un punto de silla, lo que implica estabilidad condicional, esto es, las trayectorias del sistema alcanzan el equilibrio estacionario siempre y cuando las condiciones iniciales las sitúen sobre la variedad estable del mismo. Ahora bien, no es éste el único comportamiento observable en modelos de crecimiento económico óptimo, pues se demuestra también la existencia de órbitas cerradas en modelos dinámicos, caracterizados por la presencia de trayectorias más o menos monótonas y, en consecuencia, los ciclos pueden surgir como

resultado de un proceso de optimización. Así lo han establecido diversos autores tales como Benhabib y Nishimura (1979), Wirl (1995, 1996), Feichtinger y Sorger (1986), Feichtinger et al (1992) y Dokner y Feichtinger (1991), entre otros, los cuales identifican a nivel teórico distintos mecanismos que pueden generar los ciclos en problemas de control óptimo aplicados a distintos campos de la Economía, si bien, la mayoría reconoce la dificultad de llevar los resultados a la práctica encontrando modelos que reflejen una realidad social. En este sentido nuestro trabajo pretende introducir en el campo de los recursos pesqueros dos aspectos: en primer lugar, la utilización de los datos reales disponibles de pesca para la obtención de los parámetros del modelo y en segundo lugar, la obtención de los valores de dichos parámetros a partir de los cuales se producen cambios cualitativos importantes en la dinámica de los sistemas estudiados, es decir, el cálculo de los valores de bifurcación.

2. METODOLOGÍA

Para la consecución del objetivo propuesto, es necesario establecer una metodología que permita plasmar, mediante expresiones matemáticas, todos los aspectos del análisis. En este sentido, hemos seleccionado los últimos resultados existentes ya en la bibliografía al respecto¹ que, de manera más efectiva, resuelven nuestros problemas.

Los sistemas dinámicos que hemos estudiado son no lineales, como casi todos los que modelizan los fenómenos reales (en un mundo que claramente es no lineal), formulados con una concepción del tiempo como conjunto continuo. Además, son disipativos, caracterizados (a diferencia de los sistemas conservativos) por una contracción de volúmenes en el espacio de fases al transcurrir el tiempo, que es lo que provoca que posean atractores en forma de puntos fijos, ciclos límites, órbitas cuasi-periódicas o incluso atractores extraños.

¹ Ver por ejemplo Kutnetsov (1997), Guckenheimer et al (1997), Govaerts et al (1997), Govaerts (2000).

Como los cambios cualitativos a los que se refiere la teoría sobre bifurcaciones locales ocurren en un entorno de un punto fijo u órbita cerrada, nos hemos centrado en el estudio de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, es decir, aquéllos para los cuales la matriz Jacobiana del sistema posee autovalores nulos o con parte real nula, pues sabemos por el teorema de Hartman-Grobman que los equilibrios hiperbólicos son estructuralmente estables. En este contexto, resulta fundamental el teorema de la variedad centro que establece la existencia de una variedad invariante² pasando por el punto fijo (no hiperbólico) a la cual puede restringirse el sistema para estudiar la dinámica en un entorno del mismo, análogamente a como ocurre en los sistemas lineales con el subespacio vectorial generado por los autovectores asociados a autovalores nulos o con parte real nula. Dicha variedad invariante puede ser representada localmente como el grafo de una función de clase C^r y para el caso que nos ocupa, una aproximación cuadrática (e incluso lineal a veces) a la misma, es suficiente.

Cuando el punto de equilibrio es no hiperbólico debido a la presencia de al menos un autovalor real simple nulo, la restricción del sistema original a la variedad centro es un sistema de dimensión uno en la forma:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathcal{R}, \quad \alpha \in \mathcal{R}^p \quad (1)$$

y si es consecuencia de la presencia de un par de autovalores imaginarios puros, dicha restricción es bidimensional, siendo el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes más sencillo que en el de partida, toda vez que los mismos son susceptibles de escribirse bajo cierta forma estándar de expresión (llamada *forma normal topológica*) común a todos los sistemas que poseen un mismo tipo de bifurcación.

Es por ello necesario identificar una serie de propiedades compartidas por dichos sistemas, las cuales se agrupan bajo la denominación de *condiciones de generacidad*.

En el caso de las bifurcaciones relacionadas con la aparición de un autovalor real simple nulo, dichas condiciones se expresan a través de las derivadas parciales del campo vectorial que define el

² Para el caso que nos ocupa y tal como aclara Wiggins (1990), p. 15, cuando usemos el término *variedad* es suficiente pensar en dos situaciones: un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n en el caso lineal o una superficie m -dimensional incrustada en \mathbb{R}^n en el caso no lineal.

sistema, con respecto a las variables del mismo, y con respecto al parámetro responsable de la bifurcación, identificándose así tres tipos de bifurcaciones: *nodo-silla*, *transcrítica* y *Pitchfork*.

La forma normal topológica asociada a cada tipo de bifurcación, es consecuencia de las condiciones de generacidad (que se recogen en la Tabla 1), y un análisis de la misma permite comprender qué tipo de cambio se produce en el sistema cuando el parámetro rebasa el valor de bifurcación. Así, la bifurcación nodo-silla puede identificarse como el mecanismo básico de creación-destrucción de puntos fijos: conforme el parámetro del sistema varía, dos puntos fijos se mueven uno hacia el otro, colisionan (cuando el parámetro toma el valor de bifurcación) y desaparecen. En la bifurcación transcrítica, los puntos fijos colisionan igualmente, pero no desaparecen sino que intercambian su estabilidad. En la bifurcación *Pitchfork*, los puntos fijos tienden a aparecer y desaparecer en pares simétricos.

	Nodo-silla	Transcrítica	Pitchfork
Condiciones de generacidad	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) \neq 0$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$	$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) \neq 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}(0,0) \neq 0$
Forma normal topológica	$\dot{x} = \alpha \pm x^2$	$\dot{x} = \alpha x \pm x^2$	$\dot{x} = \alpha x \pm x^3$

Tabla 1. Bifurcaciones relacionadas con la aparición de un autovalor real simple igual a cero en un sistema unidimensional con un equilibrio en $x = 0$ para el valor del parámetro $\alpha = 0$ ³.

En el caso de que el equilibrio estacionario sea no hiperbólico debido a la presencia de un par de autovalores imaginarios puros para cierto valor del parámetro del sistema, $\alpha = \alpha_0$, la restricción del sistema original a la variedad centro es un sistema bidimensional, el cual presentará una bifurcación de Hopf para

³ Si el equilibrio estuviera situado en otro punto para otro valor del parámetro no nulo, bastaría con efectuar una traslación al origen.

$\alpha = \alpha_0$, si se verifica cierta condición de generacidad, traducible en que los autovalores $\lambda(\alpha)$ que son imaginarios puros en α_0 crucen el eje imaginario con velocidad no nula, esto es:

$$d = \left. \frac{d \operatorname{Re} \lambda(\alpha)}{d \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0 \quad (2)$$

En tales circunstancias, el teorema de Hopf⁴ asegura la existencia de algunas soluciones periódicas bifurcándose a partir de α_0 . La estabilidad de las mismas viene determinada por una segunda condición expresada en términos del llamado *primer coeficiente de Liapunov*, l_1 , el cual se deduce en el cálculo de la forma normal topológica correspondiente que, expresada en coordenadas polares, es el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = d[(\alpha - \alpha_0) + l_1 \rho^2] \rho \\ \dot{\phi} = \omega_0 + \gamma(\alpha - \alpha_0) + \beta \rho^2 \end{cases} \quad (3)$$

donde d está definido en (2), ω_0 es la parte imaginaria de los autovalores complejos que son imaginarios puros en α_0 , y γ y β han de ser calculados a partir de los parámetros del modelo.

En estas circunstancias, una condición suficiente para la existencia de un ciclo límite estable es que $l_1 < 0$, y si $l_1 > 0$, el ciclo límite es inestable. En el primer caso estamos ante una bifurcación de Hopf *supercrítica* y un ciclo límite estable surge para cada valor del parámetro α mayor que α_0 y lo suficientemente próximo a él. En el segundo caso, se trata de una bifurcación de Hopf *subcrítica* y los ciclos aparecen antes de que el parámetro alcance el valor de bifurcación.

Entonces, dado un sistema n -dimensional con un equilibrio no hiperbólico para cierto valor de un parámetro, podemos encontrar una variedad centro pasando por ese punto y restringir el sistema original a la misma, con lo que el estudio de las bifurcaciones en los sistemas resultantes de dimensiones uno o dos es menos complejo, una vez calculadas las formas normales topológicas equivalentes. Ahora bien, la realización de estos cálculos no es sencilla. En la mayoría de los casos un tratamiento simbólico del problema resulta inabordable y hay que recurrir a técnicas numéricas de resolución. No obstante, hemos seguido la metodología desarrollada por Kuznetsov (1997), el cual realiza un tratamiento de la cuestión

⁴ Hopf (1942). Hay una traducción al inglés en Marsden y McCracken (1976) y distintas versiones en Guckenheimer y Holmes (1986), Wiggins (1990) o Lorenz (1993).

utilizando variable compleja, lo que simplifica los cálculos, y a su vez propone dos procedimientos para el cálculo de la variedad centro y la posterior restricción del sistema.

3. FORMULACIÓN DEL MODELO DE CONTROL ÓPTIMO

El modelo que analizamos es una ampliación del modelo lineal básico de gestión de pesquerías presentado originalmente por Schaefer (1957) y desarrollado con posterioridad por Crutchfield y Zellner (1962), consistente en controlar el esfuerzo de pesca⁵ a lo largo del tiempo de manera que sea máxima la utilidad social proporcionada por el recurso o, en términos del stock, se trata de determinar la trayectoria óptima de la biomasa $x(t)$ de modo que sea máximo el funcional que expresa los beneficios netos descontados derivados de la explotación del recurso. La formulación matemática consiste en maximizar el funcional:

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} (pqE(t)x(t) - cE(t))dt \quad (8)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= r x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{L} \right) - qE(t)x(t) \\ x(0) &= x_0, x(t) \geq 0 \\ 0 &\leq E \leq E_{\max} \end{aligned} \quad (9)$$

donde por $x(t)$ representamos el nivel de biomasa en el instante t (medido en T_m) y la función $E(t)$ representa el esfuerzo de pesca (medido en días de pesca). Los parámetros r y L en la ecuación de estado representan respectivamente la tasa de crecimiento intrínseca de la población de peces y la capacidad de carga respectiva o nivel de biomasa máximo que se alcanza en ausencia de explotación. Dicha ecuación indica que la variación en el tiempo de los niveles de biomasa es igual a la diferencia entre la función que expresa el crecimiento natural de la población (de acuerdo a una ley logística) y la tasa total de capturas de

⁵ Se suele definir como esfuerzo de pesca el producto del poder de pesca (entendido éste como A el poder de captura en la terminología de Beverton y Holt (1957)) de un barco individual por el tiempo de operación efectivo. El esfuerzo total anual desplegado por una flota será la suma de los esfuerzos mensuales de cada embarcación. La unidad que emplearemos para cuantificar el esfuerzo será el número de días de pesca (adecuada si la flota es homogénea), si bien puede venir expresado en número de barcos, sedales, redes, ..., etc.

la flota, ésta última de acuerdo al modelo de Schaefer, es decir, proporcional al stock y a una tasa de mortalidad por pesca que Schaefer supuso, a su vez, directamente proporcional al esfuerzo pesquero ejercido a través del coeficiente q llamado coeficiente de capturabilidad de la especie, el cual tiene que ver con la eficiencia de la flota.

Así mismo, los parámetros p y c representan el precio neto por unidad de captura y el coste por unidad de esfuerzo respectivamente, y δ es la tasa continua de descuento que actualiza la corriente de beneficios y que es fijada por el gestor de la pesquería.

Éste es un modelo lineal en los costes (lo que constituye una situación bastante irreal en la práctica) y al ser el Hamiltoniano para este problema:

$$H(x, E, t, \mu) = pqEx - cE + \mu \left[rx \left(1 - \frac{x}{L} \right) - pqEx \right] \quad (10)$$

lineal en la variable de control, de la condición de optimalidad, $\frac{\partial H}{\partial E} = 0$, no puede deducirse el control óptimo, E^* , de forma directa, por lo que la solución al problema es una solución de tipo Abang-bang⁶ establecida en forma de Afeedback®, es decir, el esfuerzo óptimo $E(t)$ se especifica en función de la variable de estado actual como una combinación de controles Abang-bang® y óptimos. Sólo se necesita conocer el nivel actual del stock $x(t)$ y los valores de los parámetros para deducir la política óptima para el presente y el futuro de la pesquería. Pero como ya hemos comentado, la condición para que se dé una solución de este tipo es bastante irreal: la linealidad en los costes.

Una manera de evitar estas soluciones llamadas también de Atraqueteo®, consiste en introducir en el funcional unos *costes de ajuste* o de *nueva capacidad* que hagan continuo el control, de manera que éste (el nivel de esfuerzo en nuestro caso) vaya ajustándose al coste en cada momento.

La idea es considerar una nueva variable de control $v(t)$ definida como:

$$v(t) = \frac{dE(t)}{dt} \quad (11)$$

y una función de costes de ajuste (cuadráticos):

⁶ Llamada así por establecerse en valores extremos. Ver Kamien y Schwartz (1991), p. 202.

$$k(v) = \beta v^2, \beta > 0 \quad (12)$$

Si interpretamos este coste de ajuste como lo que cuesta incorporar/cesar un barco en la pesquería, entonces, de esta manera, controlamos la variación del esfuerzo en función de lo costoso que resulte el alta/baja de una embarcación.

Así, el esfuerzo de pesca que antes era la variable de control, pasa ahora a ser una variable de estado que se rige por la ecuación diferencial $\dot{E} = v$. La función de utilidad social incorpora la nueva función de costes y el problema de control que estudiamos consiste en⁷:

$$\max_v \int_0^{\infty} e^{-\delta t} (ph - cE - \beta v^2) dt$$

$$\dot{x} = r x \left(1 - \frac{x}{L}\right) - h \quad (13)$$

$$\text{sujeto a} \quad \dot{E} = v$$

$$x(0) = x_0, E(0) = E_0, v \in [-d, d], 0 < d < \infty$$

donde $h(t)$ es la tasa instantánea de capturas totales de la flota.

El problema (13), es un problema de control óptimo no lineal en los costes con dos variables de estado y un control. La aplicación de las condiciones necesarias de optimalidad del Principio del Máximo a un problema como éste, da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión cuatro en la forma:

$$\begin{cases} \dot{x} &= rx \left(1 - \frac{x}{L}\right) - h \\ \dot{E} &= v \\ \dot{\mu}_1 &= \delta \mu_1 - \frac{\partial H}{\partial k_1} \\ \dot{\mu}_2 &= \delta \mu_2 - \frac{\partial H}{\partial k_2} \end{cases} \quad (14)$$

donde H es el Hamiltoniano del problema y μ_1, μ_2 son las variables de coestado.

Dockner y Feichtinger (1991) establecieron la posibilidad de que un sistema como el anterior derivado de un problema de control óptimo con dos variables de estado y un control, admitiera como

⁷ Omitimos la dependencia explícita con respecto al tiempo por simplicidad.

soluciones trayectorias oscilatorias cerradas de tipo ciclo límite, las cuales según avanzaba Hartl (1987) sólo son posibles si hay más de una variable de estado. Concretamente, dado un equilibrio estacionario P del sistema anterior, si se considera el sistema lineal asociado $\dot{y} = Jy$, con J la matriz Jacobiana evaluada en P, Dockner (1985) probó que los autovalores asociados pueden calcularse mediante la expresión:

$$\lambda_{1,2,3,4} = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 4 \det J}} \quad (15)$$

donde $K = B - \delta^2$, con B la suma de los menores diagonales de orden dos de la matriz Jacobiana J.

A la vista de la ecuación (15), es posible establecer una clasificación de los autovalores anteriores en función de $\det J$ y K tal y como se muestra en la Figura 1 y así determinar la estabilidad de los estados estacionarios.

Está claro que la estabilidad completa es imposible y que la única estabilidad de la que puede hablarse es de la estabilidad condicional del punto de silla. Dockner y Feichtinger (1991) probaron además que una condición necesaria y suficiente para que los autovalores anteriores fuesen imaginarios puros es:

$$\det J > \left(\frac{K}{2}\right)^2, \det J = \left(\frac{K}{2}\right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \quad (16)$$

Obsérvese en la Figura 1 que los autovalores $\lambda_{3,4}$ atraviesan el eje imaginario al pasar de un lado a otro de la curva representada con trazo discontinuo. Si se considera la tasa de descuento social como parámetro del sistema, los valores δ_0 de δ para los cuales se cumplen las condiciones anteriores son candidatos a valores de bifurcación de Hopf, y un ciclo límite se bifurca a partir de ellos si los autovalores complejos que son imaginarios puros en δ_0 , atraviesan el eje imaginario con velocidad no nula, es decir, si:

$$\frac{d}{d\delta} (\text{Re}(\lambda_{3,4}))|_{\delta=\delta_0} \neq 0 \quad (17)$$

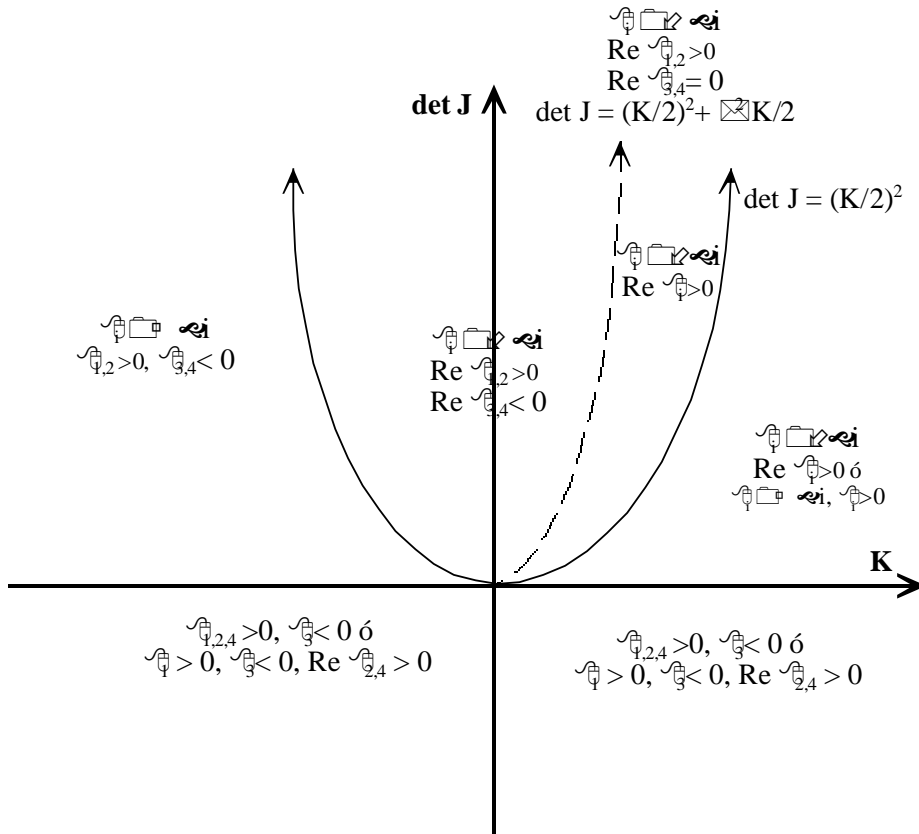


Figura 1. Clasificación de los autovalores de J en función de $\det J$ y K

Hemos estudiado el problema de control anterior en dos casos: considerando en primer lugar como función de capturas la habitual del modelo de Schaefer, $h = qEx$, y en segundo lugar una forma particular de la función de producción de Cobb-Douglas, $h = qE^2$, la cual estaría justificada en casos en los que el stock inicial estuviese tan levemente explotado que pudieran considerarse en cada instante las capturas independientes de la biomasa, siendo realista desde luego en situaciones a corto plazo y en las primeras fases de la explotación.

Para ambos modelos, la existencia de controles óptimos está garantizada si tenemos en cuenta que el integrando en los funcionales a maximizar es cóncavo con respecto a la variable de control (Berkovitz (1974) así lo establece). Pero las condiciones de optimalidad del principio del máximo son sólo necesarias y únicamente puede demostrarse la suficiencia en algunos casos excepcionales. Entonces, lo más que

sabremos es que si sólo existe una solución verificando las condiciones necesarias, ésta será la solución óptima; si hay varias, hablaremos entonces de “candidatas” a solución.

3.1. ANÁLISIS DEL MODELO CON LA FUNCIÓN DE CAPTURAS DE SCHAEFER

El estudio teórico del problema de control (13) formulado con la función de capturas de Schaefer fue presentado en el IV Encuentro de Economía Aplicada con las siguientes conclusiones:

i) El sistema dinámico resultante de la aplicación del principio del máximo de Pontryagin admite dos puntos de equilibrio estacionario óptimo, $P_1 = (x_1, E_1, \mu_1^1, v_1)$ y $P_2 = (x_2, E_2, \mu_1^2, v_2)$.

ii) El primero de ellos existe si se verifica la condición $q > c/(Lp)$ y el segundo no tiene sentido en el contexto en que nos encontramos debido a que se comprueba que para cualquier elección de los parámetros positivos del modelo, la coordenada correspondiente al nivel de biomasa, tiene signo negativo.

iii) Con respecto a la estabilidad de P_1 , y siguiendo la clasificación de Dockner y Feichtinger, se ha comprobado que para este punto es $K < 0$, para cualesquiera valores positivos de los parámetros del sistema, lo cual implica que se trata del tradicional punto de silla de los problemas de control. Además, se verifica que $\det J > 0$, con lo que la variedad estable asociada es de dimensión 2 y no existen bifurcaciones relacionadas con la aparición de un autovalor real simple igual a cero. Respecto de P_2 , y aunque fuera de una contexto económico, se ha comprobado que $K > 0$ y $\det J > 0$ siempre, con lo que puede ser un candidato a bifurcación de Hopf si para algún valor de δ fuese $\det J = (K/2)^2 + \delta^2 K/2$ y se verificaran las condiciones del teorema de Hopf.

3.2. ANÁLISIS DEL MODELO CON LA FUNCIÓN DE CAPTURAS $h(t) = qE(t)^2$

En el caso en que formulemos el problema de control (13) con la función de capturas dada por $h(t) = qE(t)^2$, el sistema dinámico resultante de aplicar el principio del máximo de Pontryagin es:

$$\begin{cases} \mathcal{E} &= rx \left(1 - \frac{x}{L}\right) - qE^2 \\ \mathcal{E} &= v \\ \mu_1 &= \left(\delta - r + \frac{2rx}{L}\right) \mu_1 \\ \mathcal{E} &= \delta v - \frac{q(p - \mu_1)}{\beta} + \frac{c}{2\beta} \end{cases} \quad (18)$$

Se han obtenido al igual que antes las expresiones simbólicas de los puntos de equilibrio que, en este caso, han resultado ser cuatro ($P_i, i = 1, \dots, 4$) cuyas coordenadas vienen dadas por:

$$x_1 = \frac{L}{2} - \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{c^2 L}{4p^2 qr}}, \quad E_1 = \frac{c}{2pq}, \quad \mu_1^1 = v_1 = 0 \quad (19)$$

$$x_2 = \frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{c^2 L}{4p^2 qr}}, \quad E_2 = \frac{c}{2pq}, \quad \mu_1^2 = v_2 = 0 \quad (20)$$

$$x_3 = \frac{L}{2} \left(1 - \frac{\delta}{r}\right), \quad E_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{qr} (r^2 - \delta^2)}, \quad \mu_1^3 = p - \frac{cr}{L(\delta^2 - r^2)} \sqrt{\frac{L}{qr} (r^2 - \delta^2)}, \quad v_3 = 0 \quad (21)$$

$$x_4 = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{\delta}{r}\right), \quad E_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{qr} (r^2 - \delta^2)}, \quad \mu_1^4 = p + \frac{cr}{L(\delta^2 - r^2)} \sqrt{\frac{L}{qr} (r^2 - \delta^2)}, \quad v_4 = 0 \quad (22)$$

Sobre la existencia de los mismos en un contexto económico, hay que decir que se ha comprobado que una condición necesaria y suficiente para que existan los dos primeros equilibrios es:

$$q > \frac{c^2}{Lp^2 r} \quad (23)$$

El tercero de los equilibrios no tiene sentido en el contexto en que nos encontramos, pues la coordenada correspondiente al esfuerzo es negativa. Y el cuarto equilibrio P_4 existe si y sólo si:

$$\delta^2 \leq r^2 - \frac{c^2 r}{qp^2 L} \left(\text{i.e., } 0 < \delta \leq \sqrt{r^2 - \frac{c^2 r}{qp^2 L}} = \delta_1 \right) \quad (24)$$

Respecto de la estabilidad de los mismos, se ha comprobado que P_2 es un punto de silla con una variedad estable asociada de dimensión uno, ya que $\det J < 0$ siempre, para cualquier elección de los

parámetros positivos del modelo, y que P_1 y P_4 pueden ser sendos puntos de silla o equilibrios totalmente inestables, o pueden surgir alrededor de ellos trayectorias cerradas de tipo ciclo límite para los valores de δ que verifiquen:

$$\det J = \left(\frac{K}{2}\right)^2 + \delta^2 \frac{K}{2} \quad (25)$$

y bajo las hipótesis del teorema de Hopf.

6. APLICACIÓN A LA PESQUERÍA DE *CHAMELEA GALLINA* DE LA REGIÓN SURATLÁNTICA ESPAÑOLA

Los resultados anteriores, deducidos a nivel teórico, han sido ilustrados empíricamente asignando a los parámetros biológicos y económicos del modelo (13) las estimaciones numéricas realizadas para la pesquería de moluscos bivalvos de la Región Suratlántica española, la cual está dirigida fundamentalmente hacia la captura de chirla (*chamelea gallina*). Esta pesquería ha sido analizada en profundidad por García Ordaz (1996, 1999), García Ordaz y García del Hoyo (1998) y otros miembros integrantes del grupo de Investigación MEMPES⁸ de la Universidad de Huelva, a través del estudio de una serie específica de esfuerzo pesquero y capturas correspondiente a los años 1961 a 2000.

Existen en este período dos etapas claramente diferenciadas por la propia evolución histórica de esta pesquería. A principios de la década de los 60 existían unos stocks de chirla apenas explotados, y la prohibición a partir de 1964 de pescar otras especies como el langostino y la acedía propició el comienzo de una etapa de fuerte presión sobre el recurso, lo que desembocó en el colapso y cierre de la pesquería durante los años 1975 y 1976, en espera de una recuperación de los stocks, lo que marcó el fin de una primera etapa. Cuando por fin se reabre la pesquería, no se observan niveles significativos de capturas hasta principios de los años 80, motivado esto quizá porque durante el período de veda entró en el mercado la chirla italiana (*vongole*), la cual resultó ser a posteriori una fuerte competidora. Así la situación, en el año 1987 vuelven a prohibirse las capturas, por los efectos de la contaminación provocada por el vertido de

⁸ Modelización Económica y Matemática de Pesquerías. El estudio realizado se recoge en el documento de García del Hoyo et al (2000).

residuos en las rías de Huelva. Todas estas circunstancias propiciaron la recuperación del stock que volvió a situarse en niveles altos. No obstante, a partir del citado año se acomete una profunda reestructuración en la flota, sustituyendo las tradicionales embarcaciones de rastro remolcado, por nuevas unidades dotadas de un nuevo arte de pesca: la draga hidráulica. Este aumento del poder de pesca de las embarcaciones, unido a la recuperación de los niveles de biomasa, provocó que sobre el recurso se ejerciera una gran presión llegándose a una situación de sobreexplotación que aún persiste en la época actual.

Es por ello que hemos estudiado el problema (13) en cada una de estas etapas. Tomando como referencia las estimaciones realizadas por García Ordaz (1999), García Ordaz y García del Hoyo (1998) y García del Hoyo et al (2000), se han asignado a los parámetros biológicos y económicos del problema de control los valores numéricos recogidos en la Tabla 2, estimados⁹ en cada una de las etapas mencionadas anteriormente, considerando como función de capturas para el período 77-00 la habitual del modelo de Schaefer y para la década de los 60, la función¹⁰ $h(t) = qE(t)^2$.

6.1. EL MODELO DE CONTROL CON LA FUNCIÓN DE CAPTURAS DE SCHAEFER

Resumimos los resultados obtenidos con la función de capturas de Schaefer, los cuales fueron presentados en el IV Encuentro. Con los valores numéricos de la Tabla 2, el sistema dinámico resultante de

⁹ Los autores estiman los parámetros usando técnicas bayesianas, basadas fundamentalmente en el algoritmo de Gibbs, si bien empleando el software de diseño de sistemas dinámicos Vensim, dada la serie de capturas y esfuerzo de pesca para el período 61-00, hemos obtenido las mismas estimaciones a través de un proceso de optimización por mínimos cuadrados. Por otra parte, para la estimación del coeficiente β de la función de costes de ajuste, se ha considerado para los años 77-00 una muestra de embarcaciones con draga hidráulica de Punta Umbría construidas durante el período en cuestión y se ha estimado el coste medio de una embarcación de este tipo en 25.458.567 ptas, incluyendo casco y maquinaria (para una embarcación media con 11.35 TRB y 107.7 CV). Calculando posteriormente las tasas de variación interanual del número de embarcaciones dedicadas a la pesca de chirla, se ha establecido un coeficiente β medio igual a 368.754 ptas./barcos² tal como se refleja en la Tabla 2. Para los años de la década de los 60 se ha procedido de la misma manera teniendo en cuenta que el coste medio de una embarcación de rastro remolcado (con 9.08 TRB y 40.87 CV) era de 161.743 ptas, lo que arroja un β medio de 1895 ptas./barcos². Con respecto a los parámetros p y c en esta época, hay que decir que el precio de 4 ptas./kg se ha obtenido a partir de las estadísticas de pesca subastada en lonja correspondientes al puerto de Punta Umbría. El coeficiente c se ha estimado computando los salarios reales de los tripulantes de la flota de rastro remolcado en 1970 según baremos de cotización al régimen especial del Mar de la Seguridad Social, que se han calculado en 960 ptas./día de pesca, a los que se les suman 195 ptas. de gasoil y 58 ptas de otros gastos, dando el total que se muestra en la Tabla 2.

¹⁰ A la vista de la situación existente en los primeros años de la década de los 60, se ha comprobado que los coeficientes $\alpha = 0$ y $\gamma = 2$ de la función de capturas $h(t) = q x^\alpha E^\gamma$, han resultado ser una buena estimación dados los datos de capturas de aquella época, capturas que pueden considerarse en las primeras fases de la explotación independientes de la biomasa dados los altos niveles existentes.

aplicar el principio del máximo de Pontryagin posee una solución de equilibrio estacionario óptimo¹¹ en el punto de silla P_1 . Hablamos en este caso de estabilidad condicional, pues la única manera de alcanzar el estado estacionario es conducir las trayectorias del sistema hacia la variedad estable del mismo.

Parámetro	Estimaciones con la función de capturas de Schaefer, años 77-00	Estimaciones con la función de capturas $h = q E^2$, años 61-73.
r	0,456146 1/años	0,456146 1/años
q	0,0000195 1/años	0,0001049 1/años
L	19.226.309 Kg	30.000 Tm
p	148,5 ptas/ Kg	4.000 ptas/ Tm
c	6.138 ptas./día de pesca	1.213 ptas./día de pesca
β	368.754 ptas.	1.895 ptas./barcos ²

Tabla 2. Estimaciones para los parámetros del modelo. **Fuentes:** García H. et al (1998, 2000), García O. (1999)

En la Tabla 3 presentamos los niveles de la biomasa $x(t)$, del esfuerzo de pesca $E(t)$ y del precio sombra $\mu_1(t)$ en el equilibrio P_1 para distintos valores de la tasa de descuento δ . Puede comprobarse que para δ en torno al 5%, los niveles en el equilibrio se aproximan a los de máxima productividad en términos físicos, es decir, a los correspondientes al rendimiento máximo sostenible (RMS)¹².

Respecto del equilibrio P_2 , y aunque en el contexto en el que nos encontramos no tiene sentido por ser la componente correspondiente al stock negativa, desde un punto de vista estrictamente matemático habíamos comprobado que para una tasa de descuento $\delta_0 = 0.0150641$ existe una bifurcación de Hopf con

¹¹ P_1 es la solución de equilibrio estacionario óptimo pues en el contexto en que nos encontramos es el único candidato a solución del problema de control.

¹² Los niveles de RMS se sitúan en 9.613.150 Kg para la biomasa y 11.696 días de pesca para el esfuerzo.

la consiguiente aparición de un ciclo límite, el cual resulta ser inestable pues se obtuvo¹³ un coeficiente de Liapunov, $l_1 > 0$. Se trata entonces de una bifurcación de Hopf *subcrítica* y un ciclo límite inestable surge para cada valor del parámetro δ menor que δ_0 y lo suficientemente próximo a él. En la Figura 2 se han representado dos de estos ciclos¹⁴.

δ	Biomasa	Esfuerzo	Precio sombra
1%	$1,0504 \cong 10^7$ Tm	10.611 días de pesca	118,5 ptas.
5%	$9,8460 \cong 10^6$ Tm	11.412 A	116,5 ptas.
8%	$9,3684 \cong 10^6$ Tm	11.993 A	114,9 ptas.
10%	$9,0586 \cong 10^6$ Tm	12.370 A	113,7 ptas.
30%	$6,4335 \cong 10^6$ Tm	15.564 A	99,5 ptas.
50%	$4,7943 \cong 10^6$ Tm	17.559 A	82,8 ptas.
4	$2,1196 \cong 10^6$ Tm	20.813 A	0 ptas.

Tabla 3. Niveles en el equilibrio P_1 .

6.2. EL MODELO DE CONTROL CON LA FUNCIÓN DE CAPTURAS $h(t) = q E(t)^2$

Tras aplicar el principio del máximo al problema de control óptimo formulado con esta forma funcional de $h(t)$, y asignando a los parámetros los valores numéricos de la Tabla 2, llegamos a las siguientes conclusiones sobre los estados estacionarios y trayectorias del sistema de ecuaciones diferenciales (18). Dados $\delta_1 = 0,441293$, $\delta_0 = 0.381547$ y las expresiones de los equilibrios (19) a (22), se

¹³ La detección del valor de bifurcación se realizó numéricamente mediante el software Mathematica3.0, determinando los valores de δ que verifican (25). El cálculo del primer coeficiente de Liapunov, así como la integración numérica del sistema para la representación de trayectorias se llevó a cabo con el software de simulación para sistemas dinámicos CONTENT, diseñado por Kuznetsov y Levitin (2000). Tanto el software como el manual pueden conseguirse en la dirección: <http://ftp.cwi.nl>.

¹⁴ Dada la inestabilidad de los mismos, ha sido necesario representarlos en Abackward@, es decir, tiempo atrás.

tiene:

1) Si $\delta > \delta_1$, el sistema posee un equilibrio inestable en el punto $P_1 = (488,417 \text{ Tm}, 1445 \text{ días de pesca}, 0,0)$ y un punto de silla en $P_2 = (29511 \text{ Tm}, 1445 \text{ días de pesca}, 0,0)$. En este caso, una idea aproximada de cómo es el comportamiento de las trayectorias del sistema puede observarse en la Figura 3.

2) Si $\delta < \delta_1$, los equilibrios anteriores P_1 y P_2 situados en los mismos niveles de biomasa, esfuerzo y precio sombra, son sendos puntos de silla con una variedad estable asociada de dimensión uno. Además existe un tercer equilibrio en un punto P_4 tal que:

2.1) Para $\delta = \delta_0 = 0.381547$ se sitúa en los niveles: $P_4 = (2453.1 \text{ Tm}, 3129 \text{ días de pesca}, 2152.61 \text{ ptas}, 0)$, y los autovalores $\lambda_{3,4}$ de la matriz Jacobiana asociada son imaginarios puros. Además,

$$\left. \frac{d}{d\delta} (\text{Re}\lambda_{3,4}) \right|_{\delta=\delta_0} > 0, \text{ con lo cual el teorema de Hopf garantiza la existencia de un ciclo límite}$$

bifurcándose a partir de δ_0 , el cual es inestable pues se ha obtenido¹⁵ un coeficiente de Liapunov $l_1(0) > 0$.

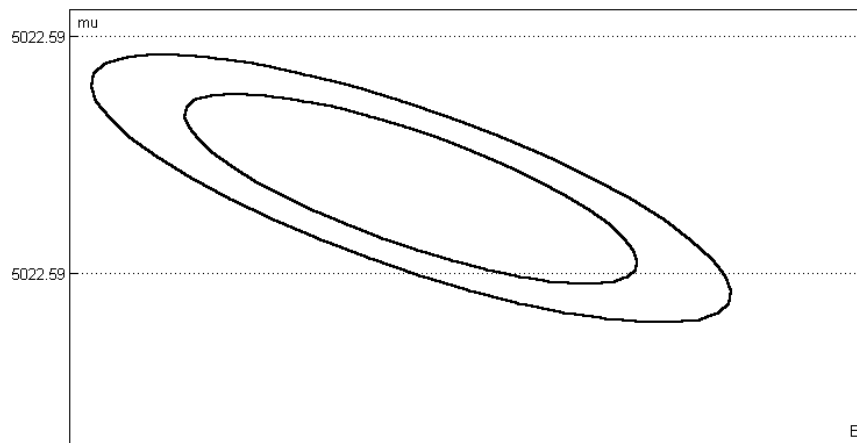


Figura 2. Dos ciclos límites

¹⁵ Nuevamente mediante el software CONTENT.

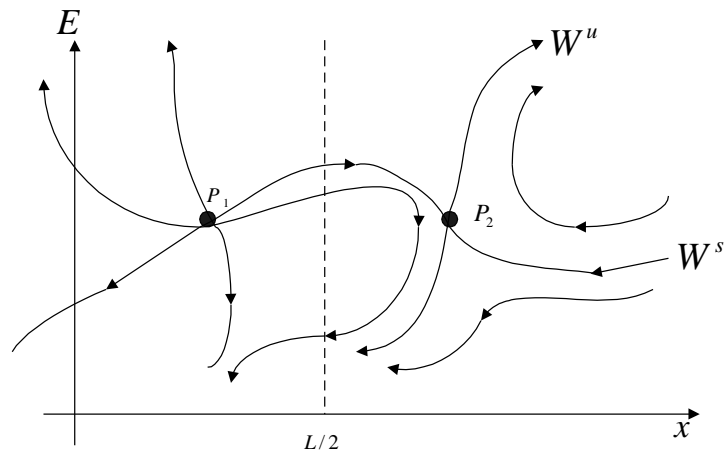


Figura 3. Una aproximación¹⁶ a las trayectorias del sistema (18) cuando $\delta > \delta_1$

2.2) Para cada $\delta_0 < \delta < \delta_1$, P_4 es un foco completamente inestable.

2.3) Para cada $\delta < \delta_0$ lo suficientemente próximo a δ_0 , y sobre la variedad centro, el equilibrio P_4 aparece rodeado por un ciclo límite inestable. En el interior del ciclo, el equilibrio P_4 se comporta como un foco estable. Fuera de la variedad centro, para cada $\delta < \delta_0$, P_4 es un punto de silla con autovalores complejos asociados, dos con $\text{Re } \lambda > 0$ y dos con $\text{Re } \lambda < 0$. Una representación aproximada del comportamiento de las trayectorias en un entorno de δ_0 es la que se muestra en las Figuras 4 y 5.

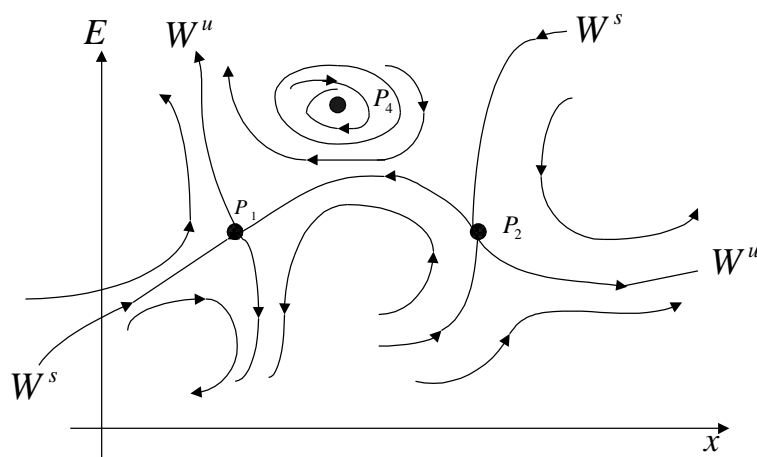


Figura 4. Una aproximación a las trayectorias del sistema (18) cuando $\delta < \delta_0$ ($\delta < \delta_1$)¹⁷.

¹⁶ Por W^s y W^u denotamos las variedades estable e inestable, respectivamente, del punto de silla.

¹⁷ La situación representada en esta Figura y en la siguiente en un entorno de P_4 , es la que tiene lugar sobre la variedad

3) Si $\delta = \delta_l$, entonces $P_1 = P_4$ y la matriz Jacobiana asociada posee un autovalor real simple igual a cero, lo cual hace pensar en la posibilidad de que exista una bifurcación nodo-silla, transcritical o pitchfork, pero un estudio de la estabilidad de los equilibrios a ambos lados de dicho valor del parámetro revela que no es así. Este punto es lo que se denomina un *A branching point* o *punto de ramificación*¹⁸, en el cual se cortan al menos dos curvas de puntos de equilibrio del sistema.

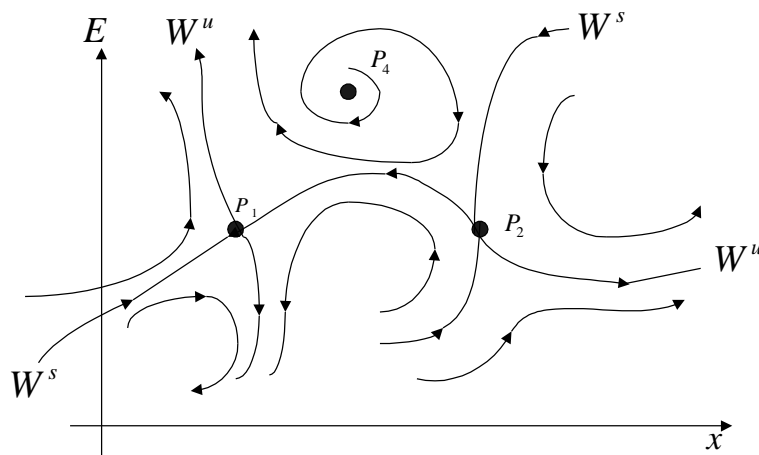


Figura 5. Una aproximación a las trayectorias del sistema (18) cuando $\delta > \delta_0$ ($\delta < \delta_l$)

Intentando entonces responder a la pregunta de si existe una solución al problema de control óptimo planteado con esta función de capturas, debemos decir que aplicando una tasa de descuento $\delta < \delta_0$ (que es lo razonable desde luego en un caso real), el sistema admite tres soluciones de equilibrio estacionario en los puntos P_1 , P_2 y P_4 . Las dos primeras se sitúan en los niveles:

$$P_1 = (488,417 \text{ Tm}, 1445 \text{ días de pesca}, 0,0)$$

$$P_2 = (29511 \text{ Tm}, 1445 \text{ días de pesca}, 0,0)$$

centro. No refleja en ningún momento el comportamiento global del sistema.

¹⁸ Ver Kuznetsov (1997), p.495.

y son sendos puntos de silla. Observamos que el esfuerzo es el mismo en ambos, mientras que los niveles de biomasa están uno en una situación de sobreexplotación¹⁹ y el otro próximo a la capacidad máxima soportable. Lógicamente, siendo P_1 y P_2 puntos de silla, el que se alcance uno u otro equilibrio, depende de que las condiciones iniciales sitúen a la trayectoria correspondiente sobre la variedad estable de uno u otro punto.

Los niveles en P_1 reflejan un esfuerzo que supone un conjunto de aproximadamente 7 barcos (suponiendo un período operativo de unos 200 días al año) operando en la pesquería, frente a los más de 150 que faenaban durante los primeros años de la década de los 60. Además, la sociedad no otorga ningún valor al pez no capturado (pues el precio sombra es cero). Esta situación fue de hecho la existente durante los años 1973-1974 en los que la pesquería se colapsó y se cerró, no observándose niveles significativos de capturas hasta principios de los 80.

La situación reflejada en el equilibrio P_2 no tuvo lugar en la realidad. El hecho de que parezca igualmente probable que el sistema evolucione hacia P_1 o P_2 puede estar motivado por haber incorporado al modelo el mismo coste de entrada que de salida, lo cual es una circunstancia poco realista si se tiene en cuenta que para un armador es más fácil invertir para entrar en una pesquería que desinvertir para salir de la misma, especialmente en una situación de sobreexplotación. No obstante, hemos de considerar también que el modelo está planteado desde la óptica del gestor social de la pesquería para el cual, los costes de entrada y salida no tienen porqué coincidir con los del armador, aunque en nuestro caso se han considerado idénticos. Desde luego, ninguna de las dos situaciones parece ser óptima desde el punto de vista económico.

Respecto del equilibrio dado por P_4 , hemos comprobado que para el valor de la tasa de descuento $\delta_0 = 0,381547$, existe una bifurcación de Hopf, con la consiguiente aparición de un ciclo límite en un entorno de dicho punto, ciclo que resulta ser inestable ya que $l_f(0) > 0$. Sobre la variedad centro y en el interior de dicho ciclo, el equilibrio P_4 es atractivo. Aunque desde el punto de matemático este resultado es

¹⁹ Prácticamente extinguido si tenemos en cuenta que los niveles de RMS son en este caso: $x_{RMS} = 15.000 \text{ Tm}$ y $E_{RMS} = 5.710$ días de pesca.

interesante, determinar en la realidad unas condiciones iniciales que conduzcan hacia ese estado estacionario es complicado . Además, los niveles en el equilibrio para δ_0 ($x_4 = 2.453,1$ Tm, $E_4 = 3.129,66$ días de pesca, $\mu_1 = 2.152,61$ ptas.) no reflejan una situación óptima desde ningún punto de vista, y la aplicación de una tasa de descuento de aproximadamente un 38% no es factible desde luego en un caso real.

No obstante, si observamos en la Tabla 4 los niveles de biomasa y esfuerzo en el equilibrio P_4 para distintos valores de δ , podemos ver que para una tasa de descuento en torno al 1%, dichos niveles se aproximan a los correspondientes al RMS.

Por tanto, en la búsqueda de solución para el problema de control correspondiente, la política óptima a seguir debería ser aquella que, aplicando una tasa de descuento apropiada, conduzca a las trayectorias del sistema hacia el equilibrio P_4 , el cual para $\delta < \delta_0$ es un punto de silla con una variedad estable asociada de dimensión dos.

δ	Biomasa	Esfuerzo de pesca	Precio sombra
1%	14.671,2 Tm	5.709 días de pesca	2.987,34 ptas.
3%	14.013,5 Tm	5.698 A	2.985,38 ptas.
5%	13.355,8 Tm	5.676 A	2.981,44 ptas.
8%	12.369,3 Tm	5.622 A	2.971,64 ptas.
10%	11.711,6 Tm	5.571 A	2.962,34 ptas.
20%	8.423,1 Tm	5.132 A	2.873,53 ptas.
30%	5.134,7 Tm	4.301 A	2.656,01 ptas.

Tabla 4. Niveles en el equilibrio P_4

Por tanto, en la búsqueda de solución para el problema de control correspondiente, la política óptima a seguir debería ser aquella que, aplicando una tasa de descuento apropiada, conduzca a las trayectorias del sistema hacia el equilibrio P_4 , el cual para $\delta < \delta_0$ es un punto de silla con una variedad estable asociada de dimensión dos.

7. CONCLUSIONES

La introducción de unos costes de ajuste en el modelo lineal de gestión de pesquerías de Schaefer (1957) tiene dos consecuencias inmediatas: por una parte, la existencia de un control continuo (en contraposición a la solución *bang-bang* del modelo habitual y por otra, la posibilidad de soluciones cerradas con comportamiento oscilatorio de tipo ciclo límite que en modelos de este tipo eran tradicionalmente excluidas en pro de la solución habitual del punto de silla. La existencia de tales soluciones se pone de manifiesto a través del teorema de bifurcación de Hopf en los dos problemas de control planteados con dos formas funcionales de la tasa de capturas: la habitual del modelo de Schaefer (que origina estas soluciones en un entorno de un equilibrio estacionario sin sentido en el contexto en que nos encontramos) y un caso especial de la función de Cobb-Douglas.

Para esta última función, y al considerar los parámetros económicos y biológicos estimados para la pesquería de chirla de la región suratlántica española en la situación correspondiente a los años de la década de los sesenta, comprobamos que para altos valores de la tasa de descuento social (mayores que 0,38) se evidencia la existencia de trayectorias cerradas de tipo ciclo límite en un entorno de uno de los equilibrios estacionarios del sistema. No obstante, dichos ciclos son inestables y aunque sobre la variedad centro, el equilibrio que rodean es atractivo, conseguir en la realidad unas condiciones iniciales que sitúen a las trayectorias del sistema sobre la variedad es difícil y la aplicación de tasas de descuento tan elevadas tampoco es factible en un caso real. Por otra parte, se observa que para tasas muy bajas (aproximadamente un 1%), los niveles de biomasa y esfuerzo en dicho equilibrio se aproximan a los correspondientes a la situación de máximo rendimiento sostenible, concluyendo que una política adecuada conduciría a las trayectorias del sistema hacia tal equilibrio estacionario, el cual en dicha situación es el habitual punto de

silla de los problemas de control análogos.

Nuestra investigación se orienta ahora hacia determinar otras formas funcionales de la tasa de capturas o de la función de costes de ajuste que originen trayectorias cerradas estables en los problemas de control estudiados.

Por otra parte, somos conscientes de que al asignar a los parámetros del modelo unos valores numéricos exactos y definitivos, hemos dotado al análisis de cierta rigidez pues cantidades como el precio o los costes del esfuerzo pueden estar sujetas a variaciones. En esta línea, pretendemos seguir trabajando en conjunción con la teoría de la *aritmética intervalar* que nos permitirá conocer cómo varían los valores de bifurcación (y por tanto dónde aparecen los ciclos límites) suponiendo que los parámetros lo hacen en ciertos intervalos que, en cualquier caso, han de ser determinados por los expertos en el tema.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Benhabib, J. y K. Nishimura (1979): A The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth. *Journal of Economic Theory*, 21, págs. 421- 444.
- Berkovitz, L.D. (1974): *Optimal Control Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Beverton, R. J. H. y S. J. Holt (1957), AOn the Dynamic of Exploited Fish Populations, Fishery Investigations Series II, XIX, Londres: Ministry of Agriculture , Fisheries and Food, 533 págs.
- Crutchfield, J. y A. Zellner (1962): AEconomic Aspects of the Pacific Halibut Fishery. *Fishery Industrial Research*, 1 (I), págs.1-173.
- Dockner, E.J. (1985): ALocal Stability Analysis in Optimal Control Problems with two State Variables. En: Feichtinger, G. (Ed): *Optimal Control Theory and Economic Analysis 2*, págs. 89- 103. Amsterdam: North-Holland.
- Dockner, E.J. y G. Feichtinger (1991): AOn the Optimality of Limit Cycles in Dynamic Economic Systems. *Journal of Economics* 53, págs. 31- 50.
- Feichtinger, G. y G. Sorger (1986): AOptimal Oscillations in Control Models: How can Constant Demand Lead to Cyclical Production? *Operations Research Letters*, 5, pp.270- 281.
- Feichtinger, G., V. Kaitala, V. y A. J. Novak (1992): AStable Resource-Employment Limit Cycles in an Optimally Regulated Fishery. Páginas 163-184 en *Dynamic Economic Models and Optimal Control*. Feichtinger, G. (ed). Elsevier Science.
- García del Hoyo, J.J. y otros (2000): *Análisis de la comercialización de bivalvos y de la chirla suratlántica*. Documento de trabajo elaborado por el grupo de Investigación MEMPES de la Universidad de Huelva en

- colaboración con la Dirección General de Pesca de la Consejería de Agricultura y Pesca de la Junta de Andalucía.
- García Ordaz, F. (1999): *Innovación tecnológica en la pesquería de chirla de la Región Suratlántica Española: conflictos entre artes y propuestas para la gestión del recurso*. Tesis Doctoral presentada en el Departamento de Economía e Historia de las Instituciones Económicas de la Universidad de Huelva. Edita: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- García Ordaz, F. (1999): *ANálisis Económico de la Pesquería de Chirla Suratlántica*. *Revista de Estudios Regionales*, 55, págs.15-46.
- García Ordaz, F. y J.J. García del Hoyo (1998), *Un modelo bioeconómico para la pesquería de chamelea gallina de la Región Suratlántica Española*. *Estudios Agrosociales y Pesqueros*, 184, págs. 183-211.
- Guckenheimer, J. y P. Holmes (1986): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- Govaerts, W., J. Guckenheimer y A. Khibnik (1997): *Defining Functions for Multiple Hopf Bifurcations*, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 34, 1, págs.1-21.
- Govaerts, W. (2000): *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Systems*. SIAM. Philadelphia.
- Guckenheimer, J., M. Myers y B. Sturmfels (1997): *Computing Hopf Bifurcations I*, *SIAM Journal of Numerical Analysis* 34, 1, págs.1-21.
- Hartl, P. F. (1987): *A Simple Proof of the Monotonicity of the State Trajectories in Autonomous Control Problems*, *Journal of Economic Theory*, 40.
- Hopf, E. (1942): *Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential-Systems*. *Berichte der Mathematisch-Physikalischen Koniglich-Sachsischen Academie der Wissenschaften Leipzig*, 94, págs.1- 22.
- Kamien, M.I. y N. L. Schwartz. (1991): *Dynamic Optimization*. North-Holland.
- Kuznetsov Yu. A., Levitin V.V. (2000): *CONTENT: A Multiplatform Environment for Analyzing Dynamical Systems*, (<ftp.cwi.nl/pub/CONTENT>).
- Kuznetsov, Y. (1997): *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer.
- Lorenz, H.W. (1963): *Deterministic Non-Period Flows*. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, págs.130-141.
- Marsden, J.E. y M. McCracken (1976): *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer- Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- Schaefer, M.B. (1957): *Some Considerations of Population Dynamics and Economics in Relation to the Management of Marine Fisheries*. *Journal of the Fisheries Research Board of Canada*, 14, págs. 669-681.
- Wiggins, S. (1990): *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verlag.
- Wirl, F. (1996): *Pathways to Hopf bifurcations in dynamic continuous-time optimization problems*. *Journal of Optimization Theory and Applications* 91, 2, págs. 299-320.
- Wirl, F. (1995): *The cyclical exploitation of renewable resource stocks may be optimal*. *Journal of Environmental Economics and Management* 29, págs.252-261.