# FORMULACIÓN DE LA IDENTIDAD DE SOMIGLIANA DE TENSIONES EN LA ELASTICIDAD ANISÓTROPA BIDIMENSIONAL

**V. Mantic, F. París**

Escuela Superior de Ingenieros
Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n, E-41092 Sevilla, España
e-mail: mantic@esi.us.es, paris@esi.us.es

**Palabras Clave:** Elasticidad anisótropa, Ecuaciones integrales de contorno, Método de los elementos de contorno, Identidad de Somigliana, Análisis tensional.

**Resumen:** *El desarrollo de las aplicaciones de los materiales compuestos requiere cada vez más aplicaciones de los métodos numéricos, y en particular del Método de los Elementos de Contorno (MEC), al análisis tensional de los materiales anisótropos elásticos, para modelar desde un punto de vista macroscópico los materiales compuestos. El MEC se aplica a la resolución numérica de la Ecuaciones Integrales de Contorno (EIC) correspondientes a un problema elástico. El presente trabajo desarrolla una formulación general de una de estas EIC, llamada Identidad de Somigliana de Tensiones, considerándola no sólo en los puntos de contorno suaves sino también en las esquinas. Resultado de un análisis asintótico es la formulación de esta EIC en forma de suma de términos libres y una integral en el sentido de Parte Finita de Hadamard. Las fórmulas analíticas que se presentan de los tensores coeficientes de los términos libres pueden implementarse con facilidad en códigos basados en el MEC.*

## 1.- INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se enmarca en la aplicación del Método de los Elementos de Contorno (MEC) al análisis tensional de laminados con una disposición simétrica de las láminas y que se modelan como una lámina equivalente ortótropa o anisótropa. En este caso el efecto laja está desacoplado del efecto placa en las ecuaciones de placa delgada[1,2] y por consiguiente ambos efectos se pueden analizar por separado. En particular en este trabajo se estudia el caso de una lámina anisótropa sometida a un estado de tensión plana.

El propósito de este trabajo es presentar una nueva formulación general de la Ecuación Integral de Contorno de tensiones ($\sigma$-EIC), llamada Identidad de Somigliana de tensiones, en materiales homogéneos elásticos anisótropos sometidos a un estado de tensión plana. Si la σ-EIC es considerada en los puntos del interior de un sólido elástico se puede interpretar como una representación de las tensiones en el interior del sólido mediante una integral sobre el contorno del sólido que incluye solamente los valores de los desplazamientos y del vector tensión en el contorno. La σ-EIC, en su forma particular de la EIC de vector tensión, es una herramienta básica en un análisis de tensiones en presencia de grietas mediante el MEC. También se utiliza como una representación de las tensiones en el dominio y en el contorno en la fase del postprocesado del MEC.

Una formulación explícita y un análisis bastante exhaustivo de la σ-EIC para puntos internos de un sólido anisótropo sometido a un estado de tensiones bidimensional fue recientemente presentada por los autores[3]. Por consiguiente, aquí se presenta una formulación general de la σ-EIC considerada solamente en los puntos del contorno del sólido incluyendo las esquinas del mismo. Esto require un análisis asintótico de la integral de contorno hipersingular cuyo resultado son varios términos libres y una integral hipersingular, que debe ser interpretada en el sentido de la Parte Finita de Hadamard (PFH)[4,5]. El nombre "integral hipersingular" esta asociado al hecho de que un núcleo de esta integral curvilínea tiene la singularidad de orden de $O(r^{-2})$, r denota la distancia entre el punto de evaluación (también llamado de colocación) y un punto de integración genérico. Teniendo en cuenta que para el cálculo de la PFH de una integral hipersingular existen procedimientos numéricos bien establecidos[4], el presente trabajo está dedicado principalmente a la evaluación de los términos libres. En general, un término libre de una EIC es un producto de un tensor coeficiente por el valor de una variable del problema. El tensor coeficiente de un término libre depende de la geometría local del contorno en el punto de evaluación y de los núcleos integrales singulares de la EIC, llamados también funciones de Green.

Existen varias posibilidades sobre cómo tratar términos libres en una EIC, siendo la evaluación analítica del tensor coeficiente la más directa. Mientras las fórmulas analíticas de los términos libres de las EIC de elasticidad isótropa son conocidas para la EIC de desplazamientos y también para la EIC del gradiente de desplazamientos, en 2D y en 3D; para la elasticidad anisótropa se conocen solamente para la EIC de desplazamientos en 2D[6]. El objetivo particular de este trabajo es derivar fórmulas analíticas de los tensores coeficientes de los términos libres en la σ-EIC en 2D.

## 2.- TENSIÓN PLANA EN UNA LÁMINA ANISÓTROPA

La ley de comportamiento de una lámina anisótropa sometida al estado de tensión plana se puede expresar mediante las flexibilidades $S_{ijpq}$ (i,j,p,q=1,2), en la notación tensorial, o mediante flexibilidades $s_{ij}$ (i,j=1,2,6), en la notación de Voigt, de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijpq}\sigma_{pq} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1}$$



donde, en la situación general, se observa un acoplamiento entre las deformaciones normales y tensiones tangenciales y vice versa.

Basándose en la teoría moderna de la elasticidad anisótropa[7,8], los desplazamientos **u** y el vector de la función de tensión φ se expresan como:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathrm{Re}\{\mathbf{A}\mathbf{f}(\mathbf{x})\} \qquad \varphi(\mathbf{x}) = \mathrm{Re}\{\mathbf{B}\mathbf{f}(\mathbf{x})\} \tag{1}$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in R^2$; $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in C^{2x2}$ son las matrices de Lekhnitskii-Stroh en variable compleja; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(z_1(\mathbf{x}), f_2(z_2(\mathbf{x})]^T$, $f_\alpha$ (α=1,2) son funciones complejas analíticas de las variables complejas $z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + \mu_\alpha x_2$. $\mu_\alpha$, $\mathrm{Im}\,\mu_\alpha > 0$, $\mu_1 \neq \mu_2$, son las raíces complejas de la ecuación característica de Lekhnitskii del material:

$$s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22} = 0 \tag{2}$$

Si definimos los coeficientes de normalización $\kappa_\alpha$ como:

$$\kappa_\alpha^2 = -2(s_{11}\mu_\alpha^3 - s_{16}\mu_\alpha^2 + s_{26} - s_{22}\mu_\alpha^{-1}) \tag{3}$$

entonces las matrices de Lekhnitskii-Stroh se expresan como:

$$\begin{aligned} A_{1\alpha} &= (s_{11}\mu_\alpha^2 - s_{16}\mu_\alpha + s_{12}) / \kappa_\alpha & B_{1\alpha} &= -\mu_\alpha / \kappa_\alpha \\ A_{2\alpha} &= (s_{21}\mu_\alpha^2 - s_{26}\mu_\alpha + s_{22}) / \kappa_\alpha\mu_\alpha & B_{2\alpha} &= 1 / \kappa_\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

El vector tensión, $\mathbf{t}(\mathbf{x})$, y el tensor de tensiones[9], $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$, se calculan como:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial\varphi}{\partial s_x}(\mathbf{x}) \qquad \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2} B_{i\alpha}B_{j\alpha}\kappa_\alpha f_\alpha'(z_\alpha(\mathbf{x}))\right\} \tag{5}$$

donde $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ es un vector unitario tangencial a un contorno con la normal exterior $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, $s_1 = -n_2, s_2 = n_1$, y la prima designa la derivada con respecto a la variable compleja.

En la obtención de las expresiones analíticas de los tensores coeficientes de términos libres se necesitará una expresión de $\kappa_\alpha f_\alpha'(z_\alpha(\mathbf{x}))$ en términos de $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ y de la rotación infinitesimal $\omega = \omega_{12}$, $\omega_{ij} = 0.5(u_{i,j} - u_{j,i})$. Derivando la expresión[10]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T\varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{B}^T\mathbf{u}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

con respecto a $x_1$ y $x_2$, utilizando la relación $u_{i,j} = \varepsilon_{i,j} + \omega_{i,j}$, la ley de comportamiento en forma tensorial $(1)_1$ y la relación $(5)_1$ particularizada para las direcciones de los ejes coordenados, se obtiene:

$$\begin{aligned} f_\alpha' &= A_{i\alpha}\sigma_{i2} + B_{i\alpha}S_{i1pq}\sigma_{pq} - B_{2\alpha}\omega \\ \mu_\alpha f_\alpha' &= -A_{i\alpha}\sigma_{i1} + B_{i\alpha}S_{i2pq}\sigma_{pq} + B_{1\alpha}\omega \end{aligned} \tag{7}$$

La relación deseada se obtiene de (7) sustituyendo las expresiones (4):

$$\kappa_\alpha f'_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x})) = V_{kl\alpha}\sigma_{kl} - \omega \tag{8}$$

donde $V_{kl\alpha}=V_{lk\alpha}$ y

$$V_{11\alpha} = -\mu_\alpha s_{11} + \frac{1}{2}s_{16} \quad V_{22\alpha} = \frac{s_{22}}{\mu_\alpha} - \frac{1}{2}s_{26}$$
$$V_{12\alpha} = \frac{1}{2}\left(\mu_\alpha^2 s_{11} - 2\mu_\alpha s_{16} + s_{12} + \frac{1}{2}s_{66}\right) = -\frac{1}{2}\left(\mu_\alpha^{-2}s_{22} - 2\mu_\alpha^{-1}s_{26} + s_{12} + \frac{1}{2}s_{66}\right) \tag{9}$$

## 3.- NÚCLEOS INTEGRALES DE LA σ-EIC. FUNCIONES DE GREEN

Las expresiones de las funciones de Green básicas para estados de tensión bidimensionales, que representan los desplazamientos **u** y el vector de la función de tensión φ ambos originados por una fuerza de línea y una dislocación de línea, fueron derivadas para un material anisótropo por Stroh[11]. A partir de estas expresiones de Stroh y la representación $(5)_2$, se pueden obtener las siguientes expresiones de las funciones de Green que aparecen en la σ-EIC bidimensional como núcleos integrales singulares[3,9]:

$$\begin{aligned} U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= -\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha=1}^{2} A_{k\alpha}B_{i\alpha}B_{j\alpha}\frac{\kappa_\alpha}{z_\alpha}\right\} \\ T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) &= n_l(\mathbf{y})\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha=1}^{2} B_{k\alpha}B_{l\alpha}B_{i\alpha}B_{j\alpha}\frac{\kappa_\alpha^2}{z_\alpha^2}\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

donde $z_\alpha = (y_1 - x_1) + \mu_\alpha(y_2 - x_2)$. Suponiendo un medio anisótropo infinito, $U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ representa el desplazamiento en dirección "k" y $T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})$ el vector tensión en dirección "k" ambos provocados en el punto **y** por una deformación impuesta concentrada (o, en otros términos, un dipolo de dislocación) definida en direcciones "i" y "j" y situada en el punto **x**.

## 4.- TENSORES COEFICIENTES DE LOS TÉRMINOS LIBRES EN LA σ-EIC

### 4.1 Formulación de la σ-EIC

Sea una lámina anisótropa representada por un dominio abierto $\Omega \subset R^2$ con un contorno Γ suave a trozos. Sea un punto $\mathbf{x} \in \Gamma$ fijo. Definimos un entorno circular de este punto como $B_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid |\mathbf{y}-\mathbf{x}| < \varepsilon\}$ y su contorno como $S_\varepsilon(\mathbf{x}) = \partial B_\varepsilon(\mathbf{x})$. Consideremos en el teorema de Betti de reciprocidad de trabajos aplicado al dominio Ω con el entorno $B_\varepsilon(\mathbf{x})$ excluido, denominado como $\Omega \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x})$, dos estados elásticos, el estado actual $(u_k(\mathbf{y}), t_k(\mathbf{y}))$ y el estado auxiliar definido por $(u^*_k(\mathbf{y}), t^*_k(\mathbf{y})) = (U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x}), T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}))$. El teorema de Betti para este caso adopta la siguiente forma:



$$\begin{aligned} &\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})\cap\Omega} \left[u_k(\mathbf{y})T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) - t_k(\mathbf{y})U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right]dS_\varepsilon(\mathbf{y}) + \\ &\int_{\Gamma\setminus B_\varepsilon(\mathbf{x})} \left[u_k(\mathbf{y})T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) - t_k(\mathbf{y})U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right]d\Gamma(\mathbf{y}) = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

donde la integral sobre el contorno del dominio $\Omega \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x})$ está dividida en dos. La primera integral para $\varepsilon \to 0_+$ dará lugar a términos libres y la segunda a una integral hipersingular sobre Γ. Como no existe el límite de ninguna de estas integrales se tomará su PFH[5]. De aquí en adelante vamos a dedicarnos al cálculo de los términos libres. Para eso se precisan las siguientes expansiones en serie de desplazamientos y vector tensión en el entorno del punto **x**:

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{y}) &= u_k(\mathbf{x}) + \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{3} A_{k\alpha}h_\alpha(z_\alpha(\mathbf{y}))\right\} + O(\varepsilon^2) \\ t_k(\mathbf{y}) &= -\frac{\partial}{\partial s_y}\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{3} B_{k\alpha}h_\alpha(z_\alpha(\mathbf{y}))\right\} + O(\varepsilon) \\ h_\alpha(z_\alpha(\mathbf{y})) &= f'_\alpha(z_\alpha(\mathbf{x}))(z_\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})) \end{aligned} \tag{12}$$

Para simplificar las manipulaciones a realizar se utilizarán las siguientes expresiones de los núcleos integrales:

$$\begin{aligned} U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= -\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{3} A_{k\alpha}g_\alpha(z_\alpha(\mathbf{y}))\right\} \\ T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial s_y}\mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{3} B_{k\alpha}g_\alpha(z_\alpha(\mathbf{y}))\right\} \\ g_\alpha(z_\alpha(\mathbf{y})) &= \frac{1}{\pi i}B_{i\alpha}B_{j\alpha}\frac{\kappa_\alpha}{z_\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})} \end{aligned} \tag{13}$$

La primera integral en (11) se puede descomponer utilizando (12) y (13) como:

$$\begin{aligned} &\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})\cap\Omega} \left(\mathrm{Re}\{\mathbf{h}^T\mathbf{A}^T\}\partial_{s_y}\mathrm{Re}\{\mathbf{Bg}\} - \partial_{s_y}\mathrm{Re}\{\mathbf{h}^T\mathbf{B}^T\}\mathrm{Re}\{\mathbf{Ag}\}\right)dS_\varepsilon(\mathbf{y}) \\ &+ \int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})\cap\Omega} T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})dS_\varepsilon(\mathbf{y})u_k(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})\cap\Omega} \left[T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})O(\varepsilon^{1+\alpha}) - U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x})O(\varepsilon^\alpha)\right]dS_\varepsilon(\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{14}$$

El integrando de la primera integral es proporcional a $\varepsilon^{-1}$, pero como $dS_\varepsilon \approx \varepsilon$, esta integral tiene un límite que corresponde a dos términos libres, uno asociado a $\sigma_{kl}(\mathbf{x})$ y otro a $\omega(\mathbf{x})$. El integrando de la segunda integral es proporcional a $\varepsilon^{-2}$ que multiplicado por $dS_\varepsilon \approx \varepsilon$ da una integral cuyo valor diverge como $\varepsilon^{-1}$. Sin embargo la PFH de su expansión en función de ε puede ser no nula y representará el termino libre asociado a los desplazamientos. La tercera integral, que incluye los remanentes de las expansiones de (12), tiene un límite igual a cero para $\varepsilon \to 0_+$.

Para evaluar los términos libres se precisan algunos conceptos geométricos asociados a $S_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega$ en un punto $\mathbf{x} \in \Gamma$ que en general puede estar situado en una esquina[5,6]. Los vectores unitarios tangenciales a $\Gamma$ en $\mathbf{x}$ con el origen en $\mathbf{x}$ se denotan como $\mathbf{r}^{(1)}$ y $\mathbf{r}^{(2)}$. La parte del $S_\varepsilon(\mathbf{x})$ situada entre $\mathbf{r}^{(1)}$ y $\mathbf{r}^{(2)}$ y orientada al interior del sólido se denomina como $S_\varepsilon(\mathbf{x},\Omega)$ y su longitud es exactamente proporcional a $\varepsilon^{-1}$. Para el valor particular de $\varepsilon=1$, es decir $S_1(\mathbf{x},\Omega)$, se denomina como el arco característico del punto $\mathbf{x}$. Sea $S_\varepsilon^+(\mathbf{x},\Omega) = S_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega \setminus S_\varepsilon(\mathbf{x},\Omega)$ y $S_\varepsilon^-(\mathbf{x},\Omega) = S_\varepsilon(\mathbf{x},\Omega) \setminus S_\varepsilon(\mathbf{x}) \cap \Omega$. La longitud de estos arcos diferencias es del orden de $O(\varepsilon^{-2})$ y está basicamente definida por las curvaturas $k^{(1)}$ y $k^{(2)}$ de $\Gamma$ a los dos lados del punto $\mathbf{x}$.

### 4.2 Fórmulas analíticas de los tensores $C^\sigma$ y $C^\omega$

Teniendo en cuenta que las longitudes de $S_\varepsilon^{\pm}(\mathbf{x},\Omega)$ son del orden de $O(\varepsilon^{-2})$, el límite de la primera integral en (14) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})\cap\Omega} \left(\mathrm{Re}\{\mathbf{h}^T\mathbf{A}^T\}\partial_{s_y} \mathrm{Re}\{\mathbf{Bg}\} - \partial_{s_y} \mathrm{Re}\{\mathbf{h}^T\mathbf{B}^T\}\mathrm{Re}\{\mathbf{Ag}\}\right) dS_\varepsilon(\mathbf{y}) = \\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{ \int_{S_\varepsilon(\mathbf{x},\Omega)} [.] dS_\varepsilon(y) + O(\varepsilon)\right\} = \int_{S_1(\mathbf{x},\Omega)} [.] dS_1(y) = \{\text{integrando por partes}\} = \\
&- \int_{S_1(\mathbf{x},\Omega)} \partial_{s_y}\left(\mathrm{Re}\{\mathbf{h}^T\mathbf{B}^T\}\mathrm{Re}\{\mathbf{Ag}\}\right) dS_1(y) \\
&+ \frac{1}{2}\int_{S_1(\mathbf{x},\Omega)} \mathrm{Re}\left\{\mathbf{h}^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{B}+\mathbf{B}^T\mathbf{A}\right)\partial_{s_y}\mathbf{g} + \bar{\mathbf{h}}^T\left(\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{B}+\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{A}\right)\partial_{s_y}\mathbf{g}\right\} dS_1(y) = \qquad (15) \\
&- \mathrm{Re}\left\{\mathbf{h}^T\mathbf{B}^T\right\}\mathrm{Re}\{\mathbf{Ag}\}\Big|_1^2 + \frac{1}{2}\int_{S_1(\mathbf{x},\Omega)} \mathrm{Re}\left\{\mathbf{h}^T\partial_{s_y}\mathbf{g}\right\} dS_1(y)
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la relación $z_\alpha(\mathbf{y}-\mathbf{x})\partial_{s_y} z_\alpha^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \partial_{s_y} \log\left(z_\alpha^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right)$ y (8) se obtienen las expresiones explícitas de los términos libres que involucran a $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ y $\omega(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}
C^\sigma_{ijkl}(\mathbf{x})\sigma_{kl}(\mathbf{x}) + C^\omega_{ij}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) &= \sum_{e=1}^{2} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha=1}^{3} B_{i\alpha}B_{j\alpha}A_{k\alpha}\frac{\kappa_\alpha}{z_\alpha^{(e)}}\right\} n_l^{(e)}\sigma_{kl}(\mathbf{x}) + \\
&+ \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha=1}^{3} B_{i\alpha}B_{j\alpha}V_{k\alpha}\log\frac{z_\alpha^{(1)}}{z_\alpha^{(2)}}\right\}\sigma_{kl}(\mathbf{x}) - \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha=1}^{3} B_{i\alpha}B_{j\alpha}\log\frac{z_\alpha^{(1)}}{z_\alpha^{(2)}}\right\}\omega(\mathbf{x}) \qquad (16)
\end{aligned}$$

donde $z_\alpha^{(e)} = r_1^{(e)} + \mu_\alpha r_2^{(e)}$.

Para el caso particular de un punto $\mathbf{x}$ situado en una parte de $\Gamma$ suave se tiene que:

$$C^\sigma_{ijkl}(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{4}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \qquad C^\omega_{ij}(\mathbf{x}) = 0 \qquad (17)$$



### 4.3 Fórmula analítica del tensor $B^u$

La segunda integral en (14) se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\int_{S_\varepsilon(\mathbf{x})\cap\Omega} T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})dS_\varepsilon(\mathbf{y}) = \int_{S_\varepsilon(\mathbf{x},\Omega)} T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})dS_\varepsilon(\mathbf{y}) + \int_{S_\varepsilon^+(\mathbf{x},\Omega)\cup S_\varepsilon^-(\mathbf{x},\Omega)} \chi_\Omega(y)T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})dS_\varepsilon(\mathbf{y}) \qquad (18)$$

donde $\chi_\Omega(y) = +1$ para $\mathbf{x} \in \Omega$ y $-1$ para $\mathbf{x} \notin \Omega$. La primera integral del segundo miembro en (18) es exactamente proporcional a $\varepsilon^{-1}$ de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{S_1(\mathbf{x},\Omega)} T^\sigma_{kij}(\mathbf{y},\mathbf{x})dS_\varepsilon(\mathbf{y}) \qquad (19)$$

lo que implica que su PFH es cero. La segunda integral del segundo miembro en (18) tiene un límite que se puede expresar como[5]:

$$B^u_{ijk}(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{e=1}^{2} k^{(e)}T^\sigma_{kij}(\mathbf{y}^{(e)},\mathbf{x}) \qquad (20)$$

donde $\mathbf{y}^{(e)}=\mathbf{x}+\mathbf{r}^{(e)}$ son los puntos extremos de los vectores tangentes al $\Gamma$ en $\mathbf{x}$. Sustituyendo $(10)_2$ en (20) se obtiene la expresión final del tensor coeficiente del término libre que involucra $u_k(\mathbf{x})$.

$$B^u_{ijk}(\mathbf{x}) = -\tfrac{1}{2}\sum_{e=1}^{2} k^{(e)}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\pi i}\sum_{\alpha=1}^{3} B_{i\alpha}B_{j\alpha}B_{k\alpha}B_{l\alpha}\frac{\kappa_\alpha^2}{\left(z_\alpha^{(e)}\right)^2}\right\} r_l^{(e)} \qquad (21)$$

Para el caso particular de un punto $\mathbf{x}$ situado en una parte de $\Gamma$ suave se tiene que:

$$B^u_{ijk}(\mathbf{x}) = 0 \qquad (22)$$

## 5.- RESUMEN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Una formulación general de la $\sigma$-EIC para los puntos $\mathbf{x}$ del contorno en una lámina anisótropa homogénea sometida al estado de tensión plana adopta la siguiente forma:

$$C^\sigma_{ijkl}(\mathbf{x})\sigma_{kl}(\mathbf{x}) + C^\omega_{ij}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) + B^u_{ijk}(\mathbf{x})u_k(\mathbf{x}) = \mathrm{PFH}\int_{\Gamma\setminus B_\varepsilon(\mathbf{x})} \left(t_k(\mathbf{y})U^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - u_k(\mathbf{y})T^\sigma_{kij}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\right)d\Gamma_y$$

(23)

Se han presentado las expresiones para los núcleos integrales y los tensores coeficientes de los términos libres de esta formulación. Se puede observar que en el caso de una esquina aparece un término libre que involucra la rotación infinitesimal $\omega$. La aplicación de $\sigma$-EIC en este caso puede requerir su combinación con la $\omega$-EIC. El enfoque utilizado es de aplicación directa a otras EIC hipersingulares como sería el caso del gradiente de los desplazamientos y de la rotación infinitesimal. Los tensores coeficientes de los términos libres derivados aquí son de aplicación directa también a la $\sigma$-EIC en elastodinámica y a las $\sigma$-EIC con funciones de Green especiales (como por ejemplo del semiplano, etc.) que tienen el mismo comportamiento singular asintótico que las funciones de Green del medio infinito aquí utilizadas.

## 6.- REFERENCIAS


1. Berthelot, J.-M. (1997) *"Composite Materials"*, Ed. Springer.
2. París, F. & Cañas, J. (1991) *"Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos"*, E.S.I., Universidad de Sevilla.
3. Mantic, V. & París, F. (1998) *"Integral kernels in the 2D Somigliana displacement and stress identities for anisotropic materials"*, Comput. Mech. 22, pp. 77-87.
4. Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T.J. & Rizzo, F.J. (1992) *"A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations"*, J. Appl. Mech. 59, pp. 604-614.
5. Mantic, V. & París, F. (1995) *"Existence and evaluation of the two free terms in the hypersingular boundary integral equation of potential"*, Engrng. Anal. Boundary Elements 16, pp. 253-260.
6. Mantic, V. & París, F. (1995) *"Explicit formulae of the integral kernels and C-matrix in the 2D Somigliana identity for orthotropic materials"*, Engrng. Anal. Boundary Elements 15, pp. 283-288.
7. Lekhnitskii, S.G. (1938) *"Some cases of the elastic equilibrium of a homogeneous cylinder with arbitrary anisotropy"* (in Russian), Applied Mathematics and Mechanics 2, pp. 345-367.
8. Ting, T.C.T. (1996) *"Anisotropic Elasticity: Theory and Applications"*, Ed. Oxford University Press.
9. Mantic, V. & París, F. (1997) *"Symmetrical representation of stresses in the Stroh formalism and its application to a dislocation and a dislocation dipole in an anisotropic elastic medium"*, J. Elasticity 47, pp. 101-120.
10. Yeh, C.S., Shu, Y.C. & Wu, K.C. (1993) *"Conservation laws in anisotropic elasticity. I. Basic framework"*, Proc. R. Soc. Lond. A. 443, pp. 139-151.
11. Stroh, A.N. (1962) *"Steady state problems in anisotropic elasticity"*, J. Math. Phys. 41, pp. 77-103.