

CONSIDERACIONES SOBRE EL CRITERIO DE HASHIN

París F.; Cañas J. y Marín J.C.

Dpto. Mecánica de Medios Continuos. E.S. Ingenieros
Universidad de Sevilla
Camino de los Descubrimientos s/n. 41092 Sevilla, España
e-mail: paris@esi.us.es

Palabras Clave: Materiales compuestos fibrosos, criterios de rotura, mecánica de la fractura, micromecánica.

Resumen: *Se analizan las hipótesis en que se basa el criterio de Hashin para predecir el fallo de una lámina de materiales compuestos fibrosos. En particular, se estudia la influencia que el valor de la resistencia a cortadura transversal tiene en la predicción de resistencia de la lámina por fallo a compresión de la matriz. Finalmente se analiza la razonabilidad de las dos hipótesis sobre las que descansa el criterio.*

1.- INTRODUCCION

Un número elevado de criterios ha sido históricamente propuesto para predecir el fallo de materiales compuestos fibrosos¹. Los primeros surgen de la aplicación de los criterios de rotura existentes para materiales frágiles, criterios de la máxima tensión y deformación, o de la adopción del criterio de plastificación para materiales metálicos anisótropos como criterio de rotura de materiales compuestos fibrosos².

El primer criterio que surge con la idea de que es preciso adecuar las ecuaciones que predicen el fallo del material compuesto a los mecanismos de fallo del mismo es el criterio de Hashin-Rotem³ que se propone para el caso de una lámina y en el contexto de un estudio a fatiga. Algunos años después el propio Hashin⁴ propone un criterio general con carácter tridimensional que particulariza para el caso de una lámina y que conlleva algunas modificaciones con respecto a la propuesta anterior. Las dos propuestas de Hashin se recogen y comentan en el siguiente apartado.

Aunque durante mucho tiempo en los textos básicos de materiales compuestos se ha asignado una gran representatividad a los criterios de Tsai-Hill, Tsai-Wu y sus derivados, ha habido oposición⁵ a la aceptación de su capacidad para predecir el fallo en situaciones complejas al no estar estos criterios basados en los mecanismos de fallo de los materiales compuestos. Ello ha hecho retomar el criterio de Hashin que surgió originalmente con esta idea, habiéndose propuesto muy recientemente algunas modificaciones sobre el caso particular de fallo a compresión de la matriz^{6,7}.

El objetivo de este trabajo es en primer lugar evaluar la influencia del valor de la resistencia a cortadura transversal en las predicciones de fallo, dado que el criterio de Hashin involucra a este parámetro, de difícil estimación. En segundo lugar se revisan las hipótesis sobre las que descansa el criterio de Hashin analizando su

razonabilidad, sólo ligeramente cuestionada en las modificaciones mencionadas^{6,7}.

2.- CRITERIOS DE HASHIN

Criterio de Hashin-Rotem (1973)

Fallo de la fibra en tracción: $\sigma_{11} = X_T$ ($\sigma_{11}, X_T > 0$)
 Fallo de la fibra en compresión: $|\sigma_{11}| = X_C$ ($\sigma_{11} < 0; X_C > 0$)

Fallo de la matriz en tracción: $\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1$

Fallo de la matriz en compresión: $\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1$

donde: σ_{11} es la tensión nominal en la lámina en la dirección de las fibras, σ_{22} es la tensión nominal en la lámina en la dirección transversal a las fibras, σ_{12} es la tensión tangencial nominal en la lámina, X_T es la resistencia en la dirección de las fibras, X_C idem en compresión, Y_T es la resistencia a tracción en la dirección transversal a las fibras, Y_C idem en compresión, S es la resistencia a cortadura.

La importancia histórica de esta propuesta es que inicia una forma diferente de enfocar la generación de los criterios de fallo para materiales compuestos, reconociendo los mecanismos de fallo, estimando las variables macromecánicas asociadas a ese mecanismo y proponiendo finalmente una interacción entre ellas.

Criterio de Hashin 3D (1980)

Fallo de la fibra en tracción: $\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \frac{1}{S^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1$ o $\sigma_{11} = X_T$

Fallo de la fibra en compresión: $|\sigma_{11}| = X_C$

Fallo de la matriz en tracción, $(\sigma_{22} + \sigma_{33}) = \sigma > 0$:
 $\frac{1}{Y_T^2} \sigma^2 + \frac{1}{S^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33}) + \frac{1}{S^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1$

Fallo de la matriz en compresión, $(\sigma_{22} + \sigma_{33}) = \sigma < 0$:
 $\frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{X_T}{2S_T}\right)^2 - 1 \right] \sigma + \frac{1}{4S_T^2} \sigma^2 + \frac{1}{S^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{33}) + \frac{1}{S^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1$

donde S_T representa la resistencia transversal a cizalladura.

Criterio de Hashin 2D (1980)

Fallo de la fibra en tracción, $\sigma_{11} > 0$: $\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1$

Fallo de la fibra en compresión, $\sigma_{11} < 0$: $|\sigma_{11}| = X_C$

Fallo de la matriz en tracción, $\sigma_{22} > 0$: $\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1$

Fallo de la matriz en compresión, $\sigma_{22} < 0$:
 $\left(\frac{\sigma_{22}}{2S_T}\right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T}\right)^2 - 1\right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1$

La evolución de los dos criterios de Hashin, aunque no haya muchos cambios entre ellos, requiere algunos comentarios. Conceptualmente ambas propuestas estiman dos mecanismos de fallo de una lámina de un material compuesto de fibras.

Con referencia al fallo de la fibra, la única diferencia afecta a la contribución de σ_{12} al fallo en tracción, una modificación de no muy claros fundamentos. De hecho la modificación proviene de la interacción cuadrática que Hashin supone entre las componentes del vector tensión asociado al plano de fallo. Es importante remarcar el énfasis que Hashin pone en evitar cualquier conexión en su propuesta con conceptos energéticos. Su propuesta, como él mismo indica, es la forma más simple de aproximar una supuesta interacción entre diferentes efectos, una vez que la interacción lineal es descartada.

Es destacable en cualquier caso, que Hashin estime en su artículo la posibilidad de no considerar la contribución de σ_{12} al fallo en tensión de la fibra. No se ha encontrado en la literatura consultada una explicación de los fundamentos físicos de la contribución de σ_{12} a este fallo. Esta cuestión podría ser aclarada con un adecuado análisis micromecánico y la ejecución de ensayos apropiados.

Con referencia al fallo de la matriz, la única diferencia con respecto a la primera propuesta proviene de la consideración adicional en el caso tridimensional de que si el material falla en presencia de una presión transversalmente isótropa ($\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$), esta presión puede alcanzar valores mucho más grandes que los de la resistencia a compresión uniaxial Y_C .

Las implicaciones que la inclusión de este hecho experimentalmente comprobado tiene en la capacidad de predecir otros fallos no está clara. De hecho, es al menos chocante encontrar el valor de una resistencia, S_T , que no está en el plano bajo consideración, en una expresión de un estado de tensiones de ese plano que aparentemente no activa el mecanismo de fallo al cual S_T está asociada. Un estudio paramétrico de la influencia que el valor de S_T tiene en las predicciones para diferentes casos bidimensionales debe al menos ser realizado.

3.- EVALUACION DE LAS IMPLICACIONES DE IDENTIFICAR S_T CON S

La dificultad de medir S_T y la escasa información existente en la literatura sobre el valor de esta propiedad de las láminas de materiales compuestos ha llevado en muchos casos a tomar S_T como S , la resistencia a cortadura en el plano. Es obvio que el error introducido por ello depende de los factores involucrados en la expresión original. Los dos aspectos de máximo interés son el propio estado tensional (valores relativos de σ_{12} y σ_{22}) y la relación entre los valores reales de S_T y S .

El primero de estos dos aspectos va a ser contemplado por medio de un estudio paramétrico considerando la relación $\sigma_{12} = n \sigma_{22}$ y variando el valor de n .

En relación al segundo aspecto se ha considerado como la opción más razonable desarrollar también un estudio paramétrico en términos de valores relativos de S_T en

relación a S, tomando S como el valor correspondiente a un material particular, AS/3501⁸.

Los gráficos que se van a presentar consideran diferentes valores de k (k>1 y k<1) en la relación $S_T = k S$, con el propósito de cubrir todas las situaciones posibles. Es necesario al representar los resultados tomar algunas decisiones. El parámetro más informativo sería el error relativo encontrado cuando el valor de S es tomado en lugar de S_T en la expresión del criterio para el caso en el cual el estado tensional conduce a predecir el fallo del material. Así, se procede como sigue:

*Para un cierto valor de n y k el valor de σ_{22} que produce el fallo ($F(S_T)=1$) es encontrado (F representa el valor del criterio para fallo de la matriz a compresión).

*Con este valor de σ_{22} (y el correspondiente valor de σ_{12} de acuerdo con el valor de n considerado) el valor del criterio es calculado ($F(S_T=S)=F(S)$).

*El valor del error relativo es calculado de acuerdo a las siguientes expresiones:

Caso de $S_T < S$: $\text{error} = (F(S_T) - F(S)) / F(S)$

Caso de $S_T > S$: $\text{error} = (F(S_T) - F(S)) / F(S_T)$

La explicación para seleccionar dos diferentes parámetros para medir el error es la siguiente. Cuando $S_T < S$ (k<1), el número más representativo del error para un usuario de un programa de cálculo en el que el criterio de Hashin está siendo usado con $S_T = S$ es saber el % de error que el programa introduce con respecto al número sugerido por el programa. Por esta razón el denominador seleccionado es F(S).

Nótese que en el segundo caso, si $S_T > S$ (k>1), la aplicación de la misma expresión conduciría a valores sin representatividad cuando S_T empieza a ser significativamente grande en comparación a S, tendiendo el error siempre al 100%. Por tanto, el criterio ha sido cambiado dividiendo por $F(S_T)$, dando entonces el error con respecto a la predicción correcta del criterio.

La figura 1 representa los errores para el caso de k<1. Los errores han sido calculados incrementando n en 0.1, teniendo los símbolos sólo carácter indicativo.

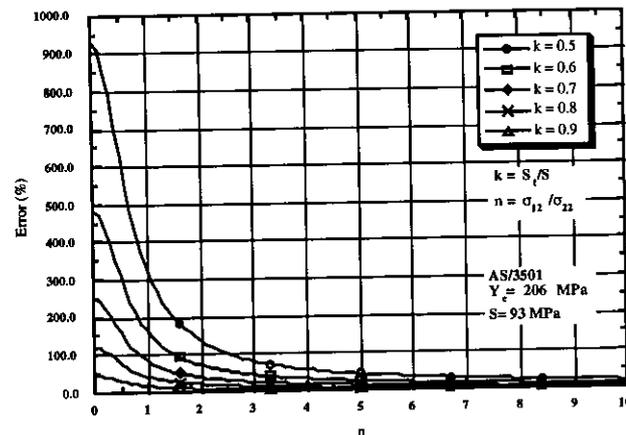


Figura 1.- Valor de los errores relativos para diferentes $S_T = kS$ (k<1).

La inspección de la evolución de los errores conduce a las siguientes conclusiones:

*Cuando $S_T < S$ (k<1), $F(S) < F(S_T)$, lo que implica que como era esperable identificar S_T con S conduce a predicciones no seguras.

*Para un determinado valor de k los errores son una función que depende muy fuertemente del estado tensional. El error es mayor cuando σ_{22} es dominante frente a σ_{12} y empieza a decrecer rápidamente cuando σ_{12} empieza a ser dominante. Como un ejemplo, para el caso k=0.5, el error es de 929.4% cuando $\sigma_{12}=0$, cae a 329.9% cuando $\sigma_{12}=1 \sigma_{22}$, es de 54.97% cuando $\sigma_{12}=4 \sigma_{22}$ y es de 18.72% cuando $\sigma_{12}=10 \sigma_{22}$.

*Si S_T es significativamente menor que S los errores pueden alcanzar valores muy elevados. Cuando el valor de S_T está cercano a S el error tiende a ser más pequeño como puede apreciarse en la figura. Pero incluso en este caso el error puede alcanzar valores significativos. Así por ejemplo, cuando $S_T=0.9S$ el error puede ser de un 50% si $\sigma_{12}=0$.

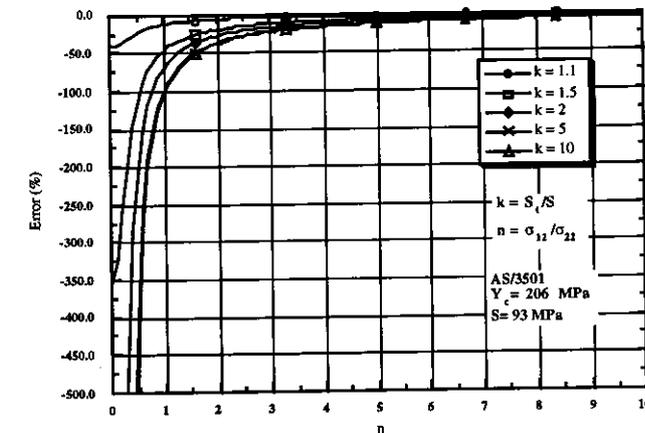


Figura 2.- Valor de los errores relativos para diferentes $S_T = kS$ (k>1).

La figura 2 representa un resumen de los errores para el caso k>1. La inspección de las curvas conduce a conclusiones similares a las de la figura anterior.

*Cuando $S_T > S$ (k>1), $F(S) > F(S_T)$, lo que implica que como era esperable identificar S_T con S conduce a predicciones conservativas.

*Para un valor determinado de k la influencia del estado tensional en el error es similar al descrito previamente para el caso k<1.

*La dependencia del error con el valor de k es también similar al caso anterior cuando k empieza a ser diferente de 1, como puede apreciarse en la figura 2.

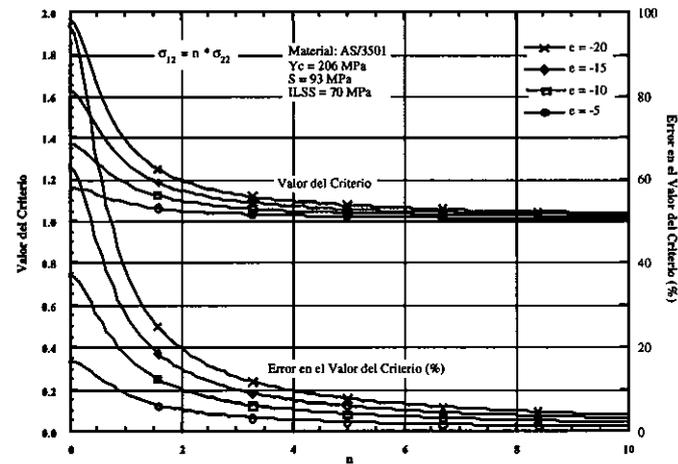


Figura 3.- Errores en las predicciones for infraestimación de los valores de S_T .

4.- SENSIBILIDAD DEL CRITERIO DE HASHIN A ERRORES EN LOS VALORES DE S_T .

La enorme influencia que la identificación de S_T con S puede tener en las predicciones del fallo de la matriz a compresión, sugiere estudiar la influencia que los errores en la identificación de los valores de S_T , por medida directa o indirecta en el laboratorio, puede tener en las predicciones del criterio de Hashin. En este sentido hay que mencionar que en vista de las dificultades de medir directamente S_T , es común tomar el valor de S_T como el correspondiente al valor aparente de la resistencia a cortadura interlaminar (ILSS, ASTM D2344).

Se va a usar el mismo procedimiento que antes y sobre el mismo material AS/3501. La figura 3 representa el caso de infraestimación de los valores de S_T , con errores de 5, 10, 15 y 20%. Con estos errores (negativos en la figura) la estimación del criterio, con los valores de las tensiones que con el valor correcto de S_T conducían al valor unidad, deben obviamente ser mayores que uno (como puede observarse en la figura), conduciendo por tanto a predicciones inseguras. Los mayores errores en las predicciones aparecen en el caso en que σ_{22} sea dominante frente a σ_{12} (rango de n entre 0 y 1). Así, para $n=0$ los errores son de 16.33% (5% de error en S_T), 36.83% (10%), 62.96% (15%) y 96.84% (20%). La figura 4 representa, para los mismos errores, el caso en que haya sobrestimación en el valor de S_T . También de nuevo los mayores errores se dan para el caso en que σ_{22} sea dominante frente a σ_{12} . Así, para el caso $n=0$, -13.19% (5%), -23.98% (10%), -32.901% (15%) y -40.36% (20%).

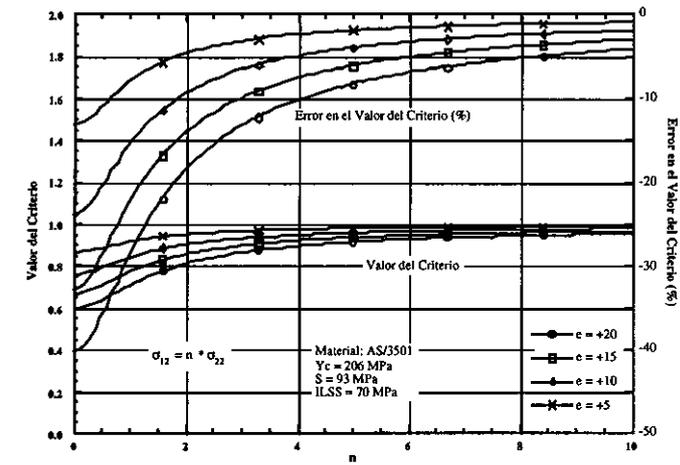


Figura 4.- Errores en las predicciones por sobrestimación de los valores de S_T .

5.- DISCUSION DE LAS HIPOTESIS DEL CRITERIO DE HASHIN

Varias de las hipótesis sobre las que descansa el criterio de Hashin pueden ser consideradas cuestionables. Con referencia al fallo de la matriz en compresión, que es la parte que en la actualidad está más en revisión^{6,7}, la primera cuestión sería dilucidar si es razonable aceptar la propuesta de interacción cuadrática de las componentes del vector tensión asociado al plano, para predecir el fallo en ese plano.

Consideremos como la forma más realista de tomar en consideración el fallo, la presencia de una grieta entre la fibra y la matriz. Esta grieta podría crecer longitudinal o circunferencialmente. La primera situación, pensando en un análisis simplificado plano, se podría abordar por medio de la configuración que aparece en la figura 5a y la segunda con la que aparece en la figura 5b. Parece, con referencia al primer caso, crecimiento longitudinal de la grieta, que la tensión σ_{22} gobierna el crecimiento, lo que resulta aún más obvio en el segundo, crecimiento circunferencial, donde el papel de σ_{12} parece irrelevante. Parece pues que la combinación cuadrática de las tensiones no representa el mecanismo de fallo a nivel micromecánico.

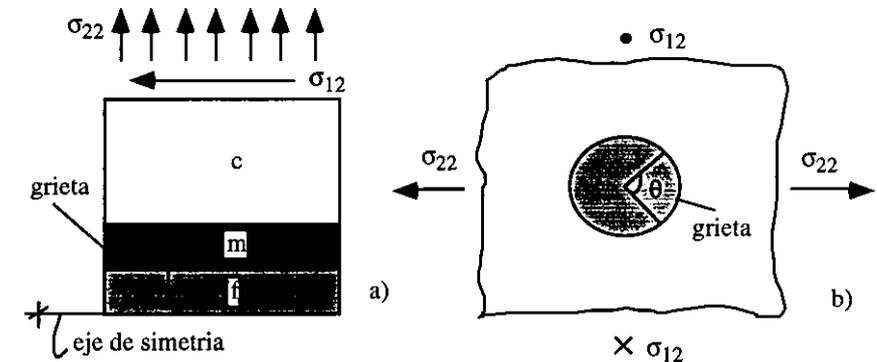


Figura 5. Grieta creciendo: a) longitudinalmente, b) circunferencialmente.

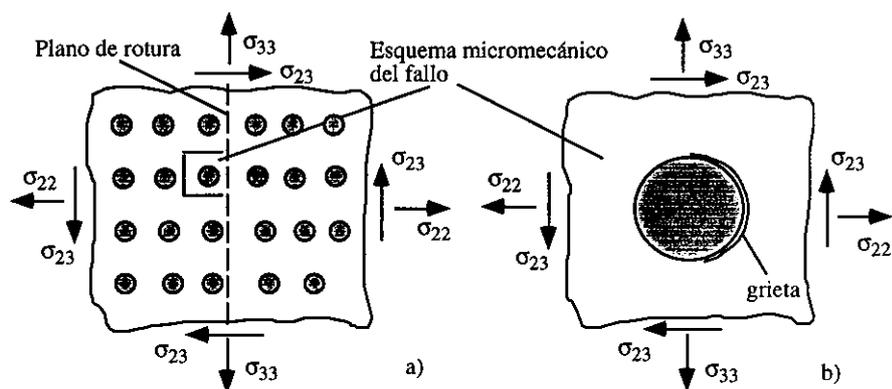


Figura 6.- Implicaciones de asociar el fallo en un plano al vector tensión del plano.

La discusión previa permite cuestionarse si es razonable que el fallo en un plano esté gobernado por el vector tensión asociado a ese plano, suposición clave en el criterio de Hashin. Una primera aproximación al problema podría realizarse a través de la configuración que se indica en la Figura 6a. Si consideramos el plano de fallo que aparece en la figura, la hipótesis de Hashin conduciría a asociar el fallo a las tensiones σ_{22} y σ_{23} , mientras que σ_{33} no jugaría ningún papel en el fallo.

Una vista micromecánica del problema conduciría a la configuración presentada en la figura 6b, preguntándonos si tiene o no σ_{33} influencia en el crecimiento de la grieta supuesta. La respuesta⁹, parece evidente: σ_{33} puede incrementar K_I y/o K_{II} y acelerar o retrasar el crecimiento de la grieta, poniendo así en cuestión la principal hipótesis sobre la que descansa el criterio de fallo bajo consideración.

6.- CONCLUSIONES

Se ha puesto de manifiesto que el valor de la resistencia a cortadura transversal juega un papel importante en las predicciones de fallo de la matriz en los materiales compuestos fibrosos. Su identificación con el valor de S , la resistencia a cortadura intralaminar, puede llevar a errores de bulto en las predicciones de fallo cuando la tensión tangencial no es dominante, una situación típica en los problemas de impacto. En cualquier caso, aunque no se identifique con S , se ha puesto de manifiesto que pequeños errores en su evaluación (lo que con toda seguridad se produce dado que habitualmente se estima su valor a través del valor de ILSS), tienen una significativa influencia en la predicción del fallo según el criterio.

Finalmente se ha estudiado la razonabilidad de las hipótesis sobre las que descansa el criterio de Hashin, resultando aconsejable un estudio micromecánico¹⁰ que clarifique las variables macromecánicas involucradas en el fallo del material compuesto y en su caso ayude a predecir el tipo de interacción entre ellas.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la invitación de K. Jackson y S. Kellas a F. París para una estancia en NASA-LARC, estancia durante la cuál las ideas expuestas fueron concebidas.

7.- REFERENCIAS

- [1] - M. N. Nahas, "Survey of failure and post-failure theories of laminated fiber-reinforced composites", J. of Comp. Tech. and Res., 8, pp.138-53, 1994.
- [2] - V. D. Azzi and S. W. Tsai, "Anisotropic Strength of Composites", Experimental Mechanics, Vol. 5, pp.283-288, 1965.
- [3] - Z. Hashin and A. Rotem, "A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials", J. of Composite Materials, Vol. 7, October, pp. 448-464, 1973.
- [4] - Z. Hashin, "Failure criterion for unidirectional fiber composites", J. of Applied Mechanics, Vol. 47, June, pp. 329-334, 1980.
- [5] - L. J. Hart-Smith, "The role of biaxial stresses in discriminating between meaningful and illusory composite failure theories", Ninth DOD/NASA/FAA, Vol. 3, pp. 1507-1528, 1992.
- [6] - L. Kroll and W. Hufenbach, "Physically based failure criterion for dimensioning of thick-walled laminates", App. Comp. Mat., 4, pp.321-332, 1997.
- [7] - C. T. Sun, B. J. Quinn, J. Tao and D. W. Oplinger, "Comparative evaluation of failure analysis methods for composite laminates, Rep. DOT/FAA/AR-95/109, 1996.
- [8] - S. W. Tsai, "Composites Design", Think Composites, 1988.
- [9] - F. París, J. C. Del Caño y J. Varna, "The fiber matrix interface crack. A numerical analysis using boundary elements", Int. J. of Fracture, Vol. 82, No. 1, pp. 11-29, 1996.
- [10] - F. París, "Sobre los criterios de fallo en materiales compuestos fibrosos", NASA Report, en prensa.