

## CARACTERIZACIÓN DEL ESTADO TENSIONAL EN EL ENTORNO DE ESQUINAS CON VARIOS MATERIALES ANISÓTROPAS.

A. Barroso, V. Mantic y F. París

Escuela Superior de Ingenieros

Universidad de Sevilla

Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla

e-mail: abc@esi.us.es

**Palabras Clave:** Esquinas multimateriales, Tensiones singulares, Elasticidad anisótropa, Formalismo de Stroh, Materiales Compuestos.

**Resumen:** En el presente trabajo se presenta la generalización e implementación del procedimiento de cálculo, basado en el enfoque de Ting<sup>1</sup>, para la caracterización del estado tensional singular en las proximidades de una esquina a la que concurren varios materiales anisótropos elásticos. Con base en el formalismo de Stroh y haciendo uso del concepto de la matriz de transferencia se ha implementado un programa en el que se obtienen los órdenes de singularidad de tensiones, así como la distribución espacial de los desplazamientos y tensiones de una manera eficiente. Suponiendo adhesión perfecta en la intercara entre los materiales, se contemplan todas las combinaciones de condiciones de contorno libre y empotrado, así como todos los materiales unidos. El procedimiento incluye la posibilidad de introducir materiales matemáticamente degenerados, dentro del marco del formalismo, entre los cuales se pueden considerar a los materiales isótropos. Independientemente del número de materiales, para el caso de todos unidos, se resuelve un sistema de autovalores de tamaño  $6 \times 6$  para la obtención de los órdenes de singularidad, mientras que para todas las combinaciones libre/empotrado, el sistema es de  $3 \times 3$ . Se presentan resultados numéricos.

**Abstract:** The generalization of a procedure, developed by Ting<sup>1</sup>, for the stress characterization at the neighbourhood of an anisotropic elastic multimaterial corner is presented. Using Stroh's formalism and the concept of the transfer matrix, a computer program has been implemented in order to obtain the order of the stress singularities and the behaviour of displacements and stresses fields in a very efficient way. Assuming perfect bonding between materials, all combinations of boundary conditions including free and clamped are considered, as well as all of them bonded. The procedure includes the possibility of taking into account mathematically degenerated materials, with isotropic materials as an example. A  $6 \times 6$  eigenvalue system is solved for all-bonded configurations, no matter how many materials are included. In the case of combinations of free/clamped the size is reduced to  $3 \times 3$ . Numerical results are presented.

## 1.- INTRODUCCIÓN

La presencia de esquinas con materiales de distinta naturaleza es habitual en la ejecución de uniones adhesivas, en las que los adherentes son metales y materiales compuestos. La predicción del inicio del fallo en estas uniones, requiere del conocimiento exhaustivo del estado singular de tensiones que se inducen en las mismas.

El comportamiento más o menos anisótropo de los materiales compuestos desde un punto de vista macroscópico, hace del formalismo de Stroh de la elasticidad anisótropa, una herramienta útil para la solución del problema, siempre que sea posible asumir un estado de deformación plana generalizada, en el cuál el campo de desplazamientos depende sólo de las coordenadas de un plano ( $u_i = u_i(x_1, x_2)$ ,  $i=1,2,3$ ). Por lo general basta que las cargas y la geometría no varíen en la dirección  $x_3$ , para que un estado tal pueda ser asumido.

Entre los numerosos criterios de fallo que históricamente se han propuesto, aquellos basados en la Mecánica de la Fractura, necesitan para cada configuración a estudio, la determinación de los órdenes de singularidad y los factores de intensificación de tensiones asociados a cada uno de los modos presentes en la esquina. Los órdenes de singularidad de tensiones, dependen de la geometría local de la esquina, de las propiedades de los materiales y de las condiciones de contorno, mientras que los factores de intensificación de tensiones dependen de la geometría global y del estado de cargas.

Existen numerosos trabajos que han abordado el cálculo de los órdenes de singularidad de tensiones en esquinas, con uno o varios materiales, isotropos o con cualquier grado de anisotropía. En un resumen, que no pretende ser exhaustivo, nos podemos remontar al trabajo de Williams<sup>2</sup> como referencia clásica, que obtuvo mediante el uso de la función de Airy los órdenes de singularidad para un sector de material isotropo, Bogy<sup>3</sup> usando la transformada de Mellin, hizo lo propio para un bimaternal isotropo, Dempsey y Sinclair<sup>4,5</sup>, en un completo trabajo analizaron esquinas multimateriales isotropas y múltiples condiciones de contorno (incluyendo fricción). Ting y Chou<sup>6</sup> usando el formalismo de Stroh dan la representación de tensiones en el entorno de una esquina anisótropa, particularizando además para el caso de grietas, Delale<sup>7</sup> con la formulación de Lekhnitskii, obtiene resultados para bimatateriales anisotropos, Somaratna y Ting<sup>8</sup> presentan un procedimiento numérico para la obtención de órdenes de singularidad en esquinas 3D anisotropas. Chen y Nisitani<sup>9</sup> resolvieron el caso de un bimaternal isotropo, con ambos extremos unidos.

Numerosos resultados de esquinas trimateriales isotropas fueron obtenidas por Pageau et al.<sup>10,11</sup> para los modos plano y antiplano. Pageau et al.<sup>12</sup> también analizaron numéricamente el caso de singularidades de borde libre en materiales anisotropos mediante una formulación del Método de los Elementos Finitos (MEF). Desmorat<sup>13</sup> analizando bimatateriales anisotropos obtuvo un interesante resultado por el cual la ecuación característica de la que se obtienen los órdenes de singularidad, puede quedar expresada como suma de dos términos, en la que cada uno depende exclusivamente de las propiedades de cada material. Mantič et al.<sup>14</sup> resolvieron para una esquina ortótropa todas las condiciones de contorno incluidas la fricción, simetría y antisimetría, Chen y Huang<sup>15</sup> analizaron singularidades producidas por delaminación en apilados "cross-ply" y "angle-ply" presentando resultados numéricos. En un interesante trabajo, Ting<sup>1</sup> propuso un

procedimiento altamente eficiente para el cálculo de las singularidades en esquinas multimateriales anisotropas, procedimiento que se ha seguido en este trabajo y que será analizado con detalle más adelante, Lin y Sung<sup>16</sup>, con base en el formalismo de Stroh obtuvieron las ecuaciones características de una esquina bimaternal anisótropa con particular interés en el caso ortótropo, Chen<sup>17</sup> presenta multitud de resultados numéricos de esquinas trimateriales anisotropas utilizando también el formalismo de Stroh. Li et al.<sup>18</sup> proponen un procedimiento alternativo mediante el uso de variables duales, que conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y que es resuelto numéricamente para el caso de esquinas multimateriales anisotropas, Poonsawat et al.<sup>19</sup> usando el formalismo de Stroh han obtenido recientemente los órdenes de singularidad de bimatateriales con especial atención a materiales monoclinicos y apilados "angle-ply" incluyendo fricción entre los materiales y casos de materiales ortotropos matemáticamente degenerados, según el formalismo.

Haciendo uso del formalismo de Stroh, los materiales matemáticamente degenerados, entre los cuales puede incluirse a los materiales isotropos o simplemente los materiales anisotropos cuyas constantes elásticas correspondan a una situación de degeneración matemática, no suelen estar incluidos en estos trabajos anteriormente mencionados. Es más, para materiales transversalmente isotropos, simplemente la orientación del mismo, independientemente del valor de sus constantes elásticas, pueden hacer que se trate de un material degenerado en un sistema de coordenadas concreto (Tanuma<sup>20</sup>).

En definitiva, se ha considerado, y es ésta la motivación principal del presente trabajo, la necesidad de desarrollar una aplicación en la que poder obtener los órdenes de singularidad de una esquina N-material, en la que tengan cabida materiales de distinta naturaleza, y con cualquier tipo de degeneración (se ha usado el formalismo de Stroh). Este objetivo se ha plasmado en la posibilidad práctica de incluir en el cálculo de los órdenes de singularidad materiales isotropos y transversalmente isotropos con cualquier tipo de degeneración, además de los ya mencionados materiales matemáticamente no degenerados, según el formalismo de Stroh. Las condiciones de contorno que se contemplan son cualquier combinación de libre-empotrado así como todos los materiales unidos. Adicionalmente se presenta la distribución de desplazamientos y tensiones para cada modo singular. Para el desarrollo de la herramienta de cálculo, se ha hecho uso del procedimiento propuesto por Ting<sup>1</sup> (1997) donde de una manera eficiente, independientemente del número de materiales, la ecuación característica que se resuelve para cualquier combinación libre-empotrado, se obtiene de un sistema  $3 \times 3$ , mientras que para el caso de todos unidos, y también independientemente del número de materiales presentes en la esquina, el sistema a resolver es  $6 \times 6$ . La posibilidad de incorporación de materiales degenerados al procedimiento de cálculo se hace a través del uso de las matrices de transferencia para materiales degenerados, Barroso et al.<sup>21</sup>, obtenidas por los mismos autores que suscriben el presente artículo.

Se presentan comparaciones con trabajos previos, así como nuevos resultados con esquinas con materiales isotropos y transversalmente isotropos y ortotropos que suelen aparecer en las uniones adhesivas metal-composite.

2.- ECUACIONES BÁSICAS

Haciendo uso del formalismo de Stroh, el tamaño del sistema a resolver generado en los enfoques convencionales para la obtención de los órdenes de singularidad, depende del número de materiales y de las condiciones de contorno. Este hecho puede ser observado con especial claridad en Chen<sup>17</sup> donde un bimaternal con condiciones libre-libre, genera un sistema 12x12, mientras que para tres materiales, se alcanza 18x18. Para los casos en los que todos los materiales están unidos entre sí, los tamaños de los problemas anteriormente mencionados, alcanzan respectivamente los tamaños 18x18 y 24x24. Se puede deducir que esquinas de N materiales con adhesión perfecta entre ellos y bordes extremos con condiciones de contorno libre o empotrado, generan sistemas de tamaño 6Nx6N, mientras que si todos los materiales están unidos, el tamaño es 6(N+1)x6(N+1).

La solución en desplazamientos y el vector de la función de tensiones en el entorno de una esquina, se pueden expresar según el formalismo de Stroh (ver Ting<sup>6,22</sup>, para una información completa) de la siguiente manera:

$$\mathbf{u}(r, \theta) = r^\delta \left\{ \mathbf{A} \zeta_{(\theta)}^\delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{A}} \overline{\zeta}_{(\theta)}^\delta \tilde{\mathbf{q}} \right\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(r, \theta) = r^\delta \left\{ \mathbf{B} \zeta_{(\theta)}^\delta \mathbf{q} + \overline{\mathbf{B}} \overline{\zeta}_{(\theta)}^\delta \tilde{\mathbf{q}} \right\} \quad (1)$$

donde se ha hecho uso de un sistema de referencia polar (r, θ), centrado en el vértice. En (1) **u** es el vector de desplazamientos, **j** es el de la función de tensiones, d-1 es el orden de la singularidad, **q** y **q̃** vectores de constantes arbitrarias,  $\zeta_{(\theta)}^\delta = \text{diag}[\cos \theta + p_\alpha \sin \theta]$ ,  $\alpha=1,2,3$ . Los valores  $p_\alpha$  son las raíces de la ecuación característica Lekhnitskii-Stroh (Ting<sup>22</sup>) y **A** = [a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, a<sub>3</sub>] y **B** = [b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, b<sub>3</sub>] matrices (3x3).

Las condiciones de adhesión perfecta entre materiales, establecen las igualdades (2a) que suponen 6 ecuaciones por cada intercara. La condición libre supone (2b) y la condición de empotrado supone (2c) donde se imponen 3 ecuaciones en cada caso. De este modo con N materiales (ver figura 1) tenemos N-1 intercargas y dos bordes extremos, con un total de 6x(N-1)+2x(3)=6xN ecuaciones que se igualan a las 6xN incógnitas (q y q̃).

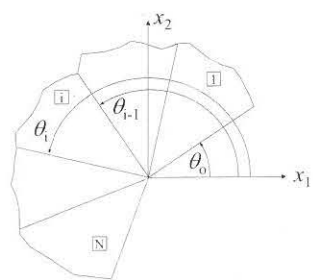


Fig. 1. Esquema de esquina multimaterial.

Condición en la intercara i (θ):

$$\mathbf{u}_i(r, \theta_i) = \mathbf{u}_{i+1}(r, \theta_i) \quad (2a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_i(r, \theta_i) = \boldsymbol{\varphi}_{i+1}(r, \theta_i)$$

Condición libre en θ<sub>0</sub>:

$$\boldsymbol{\varphi}_1(r, \theta_0) = \mathbf{0} \quad (2b)$$

Condición de empotramiento en θ<sub>N</sub>:

$$\mathbf{u}_N(r, \theta_N) = \mathbf{0} \quad (2c)$$

3.- IMPLEMENTACIÓN DEL CÓDIGO

El procedimiento descrito por Ting<sup>1</sup>, tiene base en el formalismo de Stroh y hace uso del concepto de matriz de transferencia, que relaciona los valores de los desplazamientos y el de la función de tensiones entre los extremos (θ<sub>i</sub><sup>+</sup>, θ<sub>i</sub><sup>-</sup>) de cada material. Con la matriz de transferencia y las relaciones (2a) se pueden relacionar los valores de desplazamientos y el de la función de tensiones entre la cara extrema del material 1 y el material N, tal y como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_N(\theta_N^+) \\ \boldsymbol{\varphi}_N(\theta_N^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_N^{(1)} & \mathbf{K}_N^{(2)} \\ \mathbf{K}_N^{(3)} & \mathbf{K}_N^{(4)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(\theta_1^-) \\ \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_1^-) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{w}_N(\theta_N^+) = \mathbf{K}_N \mathbf{w}_1(\theta_1^-) \quad (3)$$

donde **K<sub>N</sub>**=**E<sub>N</sub>**...**E<sub>2</sub>**·**E<sub>1</sub>**, siendo **E<sub>i</sub>** la matriz de transferencia del material i. La matriz de transferencia **E**, para un material no degenerado tiene la expresión<sup>1,21</sup>:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \overline{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \overline{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{(\theta^-)}^\delta & \zeta_{(\theta^+)}^\delta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \overline{\zeta}_{(\theta^-)}^\delta & \overline{\zeta}_{(\theta^+)}^\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \overline{\mathbf{B}}^T & \overline{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \hat{\mathbf{F}} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \quad (4)$$

Al establecer las condiciones de contorno en (3) sobre las caras extremas (θ<sub>1</sub><sup>-</sup>, θ<sub>N</sub><sup>+</sup>), surgen los siguientes casos de las ecuaciones características como determinantes de matrices 3x3 (5) y (6) ó 6x6 (7) (L=libre, E=empotrado):

$$\boxed{\text{L-E}}: \mathbf{u}_N(\theta_N^+) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_1^-) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_N^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \boxed{\text{E-E}}: \mathbf{u}_N(\theta_N^+) = \mathbf{u}_1(\theta_1^-) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_N^{(2)} = \mathbf{0} \quad (5)$$

$$\boxed{\text{L-L}}: \boldsymbol{\varphi}_N(\theta_N^+) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_1^-) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_N^{(3)} = \mathbf{0}, \quad \boxed{\text{E-L}}: \boldsymbol{\varphi}_N(\theta_N^+) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_1^-) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{K}_N^{(4)} = \mathbf{0} \quad (6)$$

$$\text{Todos unidos: } \boldsymbol{\varphi}_N(\theta_N^+) = \boldsymbol{\varphi}_1(\theta_1^-) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_N(\theta_N^+) = \mathbf{u}_1(\theta_1^-) \Rightarrow \mathbf{K}_N - \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (7)$$

donde en (7), **I** es la matriz identidad (6x6). Así pues, para plantear la ecuación característica de la que obtener los órdenes de singularidad, debemos establecer previamente las matrices de transferencia de cada material. En el trabajo de Ting<sup>1</sup> se detalla la estructura de **F̂**, en (4), para materiales anisótropos no degenerados, es decir, para aquellos materiales que según el formalismo poseen una matriz **N** (ver<sup>22</sup>) simple o semisimple, con tres autovectores linealmente independientes. Conociendo las matrices **A** y **B** del material, se conoce la expresión de la matriz de transferencia.

Los materiales isotrópicos pueden ser considerados materiales anisótropos degenerados, con un autovalor triple (μ = i = -1) y dos autovectores linealmente independientes. Para el estudio de esquinas con presencia conjunta de materiales isotrópicos y anisótropos no degenerados, se debe disponer de la expresión de la matriz de transferencia para ambos tipos de material. Los autores del presente trabajo han obtenido<sup>21</sup> las matrices de transferencia para materiales matemáticamente degenerados (matriz **N** con un autovector

generalizado) y extraordinariamente degenerados (matriz **N** con dos autovectores generalizados). Se describen a continuación los tres bloques del programa elaborado con *Mathematica*<sup>23</sup>, describiendo someramente, los pasos de cada uno.

**Bloque 1: Obtención de las matrices A, B y F̂.**

Para materiales con cualquier grado de anisotropía y no degenerados, se utilizan las expresiones de Lekhnitskii (ver<sup>22</sup>) para **A** y **B**, y la generada por Ting<sup>1</sup> para la matriz **F̂**. Para materiales isotropos, **A** y **B** son conocidas<sup>22</sup> y la matriz **F̂** se obtiene de Barroso et al.<sup>21</sup>, mientras que para los materiales transversalmente isotropos **A** y **B** se pueden tomar de Tanuma<sup>20</sup> teniendo la precaución de normalizar **A** y **B**, y transformarlas al sistema de referencia definido por los ejes que definen la geometría de deformación plana generalizada ya que en el trabajo de Tanuma se presentan referidas a unos ejes solidarios al material, **F̂** se pueden tomar de Barroso et al.<sup>21</sup> si existe degeneración.

**Bloque 2: Planteamiento del sistema y resolución.**

En este bloque se implementa el procedimiento descrito por Ting<sup>1</sup> y según la condición de contorno, se resuelve la ecuación característica correspondiente (5)-(7). Para la búsqueda de los ceros de la ecuación característica, se ha hecho uso del eficiente Método de Muller<sup>24</sup>, ya que los órdenes de singularidad pueden ser complejos (p.e. una grieta de interfase).

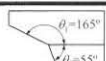
**Bloque 3: Representación de desplazamientos y tensiones.**

Los desplazamientos y tensiones se evalúan a través de la expresión (1) y sabiendo que  $\sigma_{i1} = -\varphi_{i,2}$  y  $\sigma_{i2} = \varphi_{i,1}$ .

**4.- RESULTADOS**

A efectos de verificar la implementación del programa, se compararon resultados de órdenes de singularidad de tensiones (d-1) de distintos casos de esquinas multimateriales recogidos en la literatura. Para proceder a la comparación de resultados y en lo que sigue, se establece el sistema de referencia ligado a los ejes que definen la deformación plana generalizada, de manera que los desplazamientos ( $u_i$ ,  $i=1,2,3$ ) son independientes de la coordenada según el eje  $x_3$  ( $u_i = u_i(x_1, x_2)$ ).

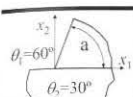
**Dempsey & Sinclair**<sup>4,5</sup>. Se ha analizado el caso de dos materiales isotropos con condiciones de contorno libre-libre y ángulos  $\theta_1=165^\circ$ ,  $\theta_2=55^\circ$  (ver Tabla 1). El ajuste es exacto hasta el sexto decimal entre la solución analítica de Dempsey y Sinclair (en Deformación Plana) y la numérica obtenida, notando la aparición del modo no plano (una 3ª raíz).

	$E_1=280$ GPa, $\nu_1=0.26$	Dempsey & Sinclair:	-0.416008, -0.248989
	$E_2/E_1=21.42$ , $\nu_2=0.30$	Barroso et al. <sup>21</sup> :	-0.427305, -0.416008, -0.248989

**Tabla 1.** Comparación de resultados en esquina bimaterial isotropa.

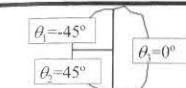
**Delale**<sup>7</sup>: Se presentan dos configuraciones de materiales reforzados con fibra (Tabla 2), estando la fibra orientada en el plano  $x_2$ - $x_3$  y formando un ángulo  $\theta$  (cada material uno

distinto) con el eje  $x_2$ . Las propiedades del material en ejes de ortotropía son:  $E_{11}=163.4$  GPa,  $E_{22}=E_{33}=11.9$  GPa,  $G_{12}=G_{13}=6.5$  GPa,  $G_{23}=3.5$  GPa,  $\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=0.3$ . Las condiciones de contorno son libre-libre. Se añaden los resultados obtenidos por Chen<sup>17</sup> para la comparación de las raíces menores, pues Delale sólo presenta la de mayor valor.

	$\alpha=90^\circ$	$\alpha=179^\circ$
	Delale <sup>7</sup> : -0.4229	-0.4995
	Chen <sup>17</sup> : -0.422886, -0.380828, -0.047337	-0.499479, -0.498481±0.019609 i
	Barroso et al. <sup>21</sup> : -0.422886, -0.380827, -0.047336	-0.499479, -0.498481±0.019609 i

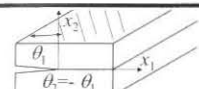
**Tabla 2.** Comparación de resultados en esquina bimaterial anisótropa.

**Pageau - Chen**: En uniones trimateriales con todos los materiales unidos, se ha analizado la configuración de la tabla 3 (resultados de Pageau y Chen, obtenidos de Chen<sup>17</sup>, con la orientación de las fibras iguales al caso anterior).

	Pageau	Chen	Barroso et al. <sup>21</sup>
	-0.084240	-0.082543	-0.08753
	-0.019218	-0.018759	-0.01807

**Tabla 3.** Comparación de resultados en esquina trimaterial anisótropa.

**Chen & Huang**<sup>15</sup>: En apilados cross-ply y angle-ply de materiales reforzados con fibra que presentan delaminación (grieta interlaminar) y que se disponen con la fibra en el plano  $x_1$ - $x_3$  formando la fibra un ángulo  $\theta$  con el eje  $x_3$  (ver tabla 4), con las siguientes propiedades:  $E_{11}=E_{22}=14.5$  GPa,  $E_{33}=138$  GPa,  $G_{12}=G_{13}=G_{23}=5.9$  GPa,  $\nu_{21}=\nu_{31}=\nu_{32}=0.21$ . *C-H* denota el resultado de Chen y Huang y *B*<sup>21</sup> el resultado obtenido en este trabajo.

	$\theta_1=45^\circ$	$\theta_1=60^\circ$	$\theta_1=75^\circ$
	<i>C-H</i> : -0.5±0.0343365 i <i>B</i> <sup>21</sup> : -0.5±0.0343398 i	<i>C-H</i> : -0.5±0.0294152 i <i>B</i> <sup>21</sup> : -0.5±0.0294173 i	<i>C-H</i> : -0.5±0.0157990 i <i>B</i> <sup>21</sup> : -0.5±0.0158000 i

**Tabla 4.** Comparación de resultados en apilado angle-ply.

Una vez comprobada la precisión de los resultados del programa se ha procedido al estudio de esquinas con presencia de materiales degenerados, para lo cual se ha hecho uso de las matrices de transferencia<sup>21</sup> desarrolladas a tal efecto. Concretamente, se han estudiado configuraciones entre una o varias láminas unidireccionales de fibra de carbono (se ha considerado ortótropa) y un adhesivo base epoxy (material isotropo). Las propiedades de ambos materiales son: Fibra de Carbono:  $E_{11}=141.3$  GPa,  $E_{22}=E_{33}=9.58$  GPa,  $G_{12}=G_{13}=5$  GPa,  $G_{23}=3.5$  GPa,  $\nu_{12}=\nu_{13}=0.3$ ,  $\nu_{23}=0.32$ . Adhesivo:  $E=3$  GPa,  $\nu=0.35$ .

En la figura 2 se presenta una esquina entre la fibra de carbono (con la fibra en la dirección del eje  $x_1$   $\phi=0^\circ$ ) y el adhesivo, en la que se ha variado el ángulo  $a$  que forma el adhesivo con la fibra de carbono y que pretende representar la configuración que se produce en las uniones adhesivas en la zona de contacto entre ambos. En las proximidades de  $a=160^\circ$  dos de las raíces (reales) se transforman en compleja conjugada y se alcanzan las raíces: -0.5 y

dos complejas conjugadas con parte real -0.5, en la configuración de grieta ( $\alpha=180^\circ$ ). La línea discontinua representa la parte imaginaria de  $(d-1)$ .

En la figura 3 se muestra una esquina trimaterial (dos ortótropos y uno isótropo) que responde a la terminación de un laminado en contacto con adhesivo. Se ha mantenido la orientación de una de las láminas variando la orientación de la otra. Cuando ambas forman el mismo ángulo ( $\phi=45^\circ$ ), desaparecen los modos singulares al no existir "esquina".

Por último, en la figura 4 se muestra la distribución angular cualitativa (con la abscisa en radianes) de las tensiones  $s_{qq}$ ,  $s_{rq}$  y  $s_{rr}$ , para el caso ( $\alpha=70^\circ$ ) de la figura 2, (para la primera raíz -0.266941). Se cumplen las condiciones de contorno (libre-libre) para las componentes  $s_{qq}$  y  $s_{rq}$ , así como la discontinuidad de la componente  $s_{rr}$  en la intercara entre ambos materiales, mientras que  $s_{qq}$  y  $s_{rq}$  siguen siendo continuas pero no así su derivada en ese mismo punto (2p), lo que se aprecia en la figura 4(b).

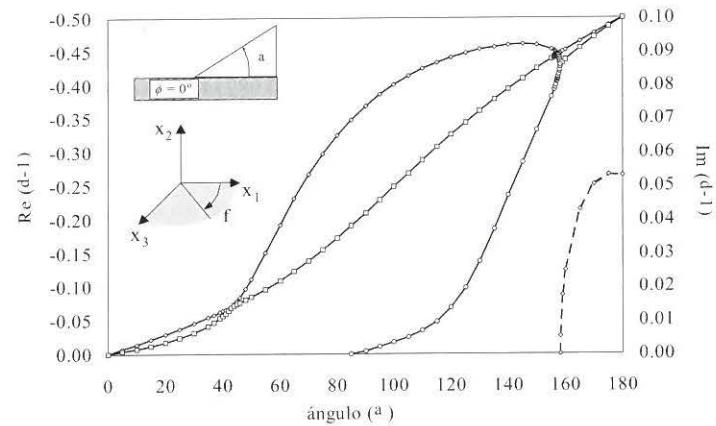


Fig. 2. Esquina bimaterial (libre-libre).

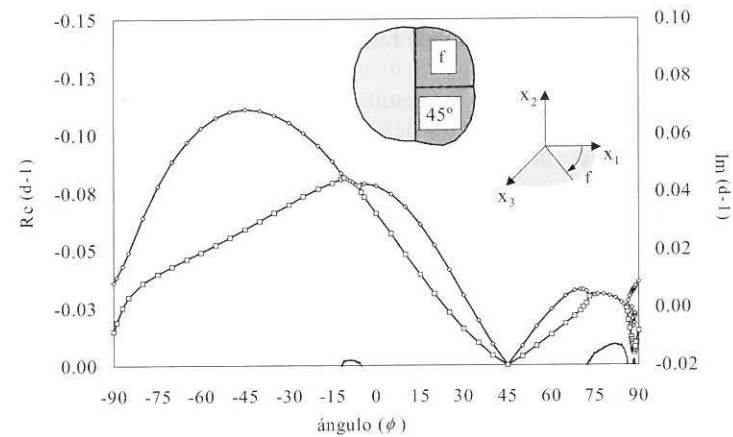


Fig. 3. Esquina trimaterial interna.

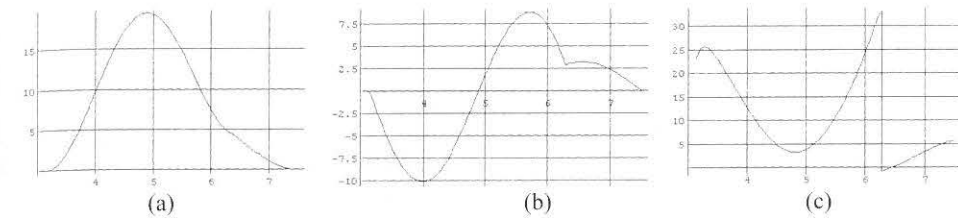


Fig. 4. Evolución angular de  $s_{qq}$  (a),  $s_{rq}$  (b),  $s_{rr}$  (c) para el caso  $\alpha=70^\circ$  de la Fig. 2.

## 5.- CONCLUSIONES

Con base en el trabajo de Ting<sup>1</sup> se ha generalizado el procedimiento de caracterización del estado singular de tensiones en esquinas multimateriales anisótropas, con la posibilidad de inclusión de materiales matemáticamente degenerados. La inclusión de materiales degenerados se ha hecho posible tras el establecimiento de las matrices de transferencia desarrolladas para los mismos<sup>21</sup>.

El programa implementado muestra una precisión excelente en relación con trabajos previos existentes para distintos tipos de materiales y condiciones de contorno.

Se presentan nuevos resultados de esquinas con materiales degenerados y no degenerados, que responden a configuraciones realistas de esquinas que se producen en las uniones adhesivas metal-composite y composite-composite habituales en la industria aeronáutica.

## 6.- AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha realizado con la financiación PROFIT 2001 del Ministerio de Ciencia y Tecnología (proyecto EUREKA S!1882) y del Ministerio de Educación y Cultura (proyecto PB98-1118).

## 7.- REFERENCIAS

1. T.C.T. Ting (1997), "Stress singularities at the tip of interfaces in polycrystals", *Damage and Failure of Interfaces*, Rossmanith (ed.) Balkema, Rotterdam, ISBN 90 5410 8991, pp.75-82.
2. M. L. Williams (1952), "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *J. Appl. Mech.* 19, pp. 526-528.
3. D. B. Bogy (1971), "Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions", *J. Appl. Mech.* 38, pp. 377-386.
4. J. P. Dempsey and G. B. Sinclair (1979), "On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge", *J. of Elasticity*, Vol. 9, No 4, pp.373-391.
5. J. P. Dempsey and G. B. Sinclair (1981), "On the singular behaviour of a bi-material wedge", *J. of Elasticity*, Vol. 11, No 3, pp.317-327.

6. T. C. T. Ting and S. C. Chou (1981), "Edge singularities in anisotropic composites", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, No 11, pp. 1057-1068.
7. F. Delale (1984), "Stress singularities in bonded anisotropic materials", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, No 1, pp. 31-40.
8. N. Somaratna and T.C.T. Ting (1986), "Three-dimensional stress singularities in anisotropic materials and composites", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 24, No 7, pp. 1115-1134.
9. D. H. Chen and H. Nisitani (1993), "Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials", *J. Appl. Mech.* 60, pp. 607-613.
10. S.S. Pageau, P.F. Joseph & S.B. Biggers, Jr. (1994), "The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions", *Int. J. Solids Struct.* 31, pp. 2979-2997.
11. S. S. Pageau, P. F. Joseph and S. B. Biggers, Jr. (1995), "Singular antiplane stress fields for bonded and debonded three-material junctions", *Eng. Fracture Mech.* 52, No. 5, pp. 821-832.
12. S. S. Pageau, P. F. Joseph and S. B. Biggers, Jr. (1995), "Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 38, pp. 2225-2239.
13. R. Desmorat (1996), "Champs singuliers dans un bi-matériau en élasticité plane anisotrope", *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, Série II b, p. 355-361.
14. V. Mantić, F. París and J. Cañas (1997), "Stress singularities in 2D orthotropic corners", *Int. J. Fracture* 83, 67-90.
15. W. H. Chen and T. F. Huang (1997), "Stress singularity of edge delamination in angle-ply and cross-ply laminates", *J. Appl. Mech.* 64, pp. 525-531.
16. Y. Y. Lin and J. C. Sung, (1998), "Stress singularities at the apex of a dissimilar anisotropic wedge", *J. Appl. Mech.* 65, pp. 454-463.
17. H. P. Chen (1998), "Stress singularities in anisotropic multimaterial wedges and junctions", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 35, No 11, pp. 1057-1073.
18. J. Li, X. B. Zhang and N. Recho (2001), "Stress singularities near the tip of a two dimensional notch formed from several elastic anisotropic materials", *International Journal of Fracture* 107, pp. 379-395.
19. P. Ponsawat, A. C. Wijeyewickrema and P. Karasudhi (2001), "Singular stress fields of angle-ply and monoclinic bimaterial wedges", *Int. J. Solids Structures* 38, pp. 91-113.
20. K. Tanuma (1996), "Surface impedance tensors of transversely isotropic elastic materials", *Q. J. Mech. appl. Math.*, Vol 49, Pt. 1, pp. 29-48.
21. A. Barroso, V. Mantić and F. París (2001), "Generación de las matrices de transferencia en el formalismo de Stroh para materiales degenerados en esquinas multimateriales anisótropas", *Congreso MATCOMP 2001*. Gijón.
22. T.C.T. Ting (1996), "Anisotropic Elasticity: Theory and Applications", Oxford University Press.
23. S. Wolfram (1991), *Mathematica, A system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley, Redwood City.
24. D. E. Muller (1956), "A method for solving algebraic equations using an automatic computer", *Mathematical Tables and Computations* 10, 208-215.