

# **ESTIMACIÓN DE UN MODELO DEL PRECIO DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA EN COLOMBIA CON DETECCIÓN DE PUNTOS DE VOLATILIDAD, UTILIZANDO LA TRANSFORMADA WAVELET Y SERIES DE TIEMPO<sup>1</sup>**

Jesús Alonso Arbeláez Arcila<sup>2</sup>

alonsoarbelaez@gmail.com

Alfredo Trespalacios Carrasquilla<sup>3</sup>

alfredo.trespalacios@gmail.com

## **Resumen**

En este documento se propone una técnica para estimar un modelo del precio de la energía eléctrica en Colombia, utilizando las propiedades de filtrado de la Transformada Wavelet Discreta, TWD, y las técnicas tradicionales de modelación de series de tiempo ARIMA, GARCH.

---

<sup>1</sup> Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de Magíster en Administración Financiera, Escuela de Economía y Finanzas de la Universidad EAFIT. Pereira, 2018.

<sup>2</sup> Especialista en Finanzas, Ingeniero Electricista.

<sup>3</sup> Magíster en Finanzas, Ingeniero Electricista. Consultor en temas de energía, finanzas y riesgos. Investigador asociado a la fundación ECSIM, Profesor del Instituto Tecnológico Metropolitano y la Universidad EAFIT.

Además, la detección de puntos de cambio en la varianza de la serie de precios a través del método de detección de múltiples cambios en una secuencia de variables dependientes, en la cual la serie de precios spot se descompone en una serie de aproximación y varias de detalle.

Posteriormente, cada sub-serie por separado se modela con la técnica que mejor se ajusta a los datos, obteniendo como pronóstico final la suma de los pronósticos reconstruidos obtenidos de cada sub-serie. La conclusión más importante del modelo propuesto es permitir una mayor precisión en el pronóstico y, a su vez, detectar puntos de cambio de volatilidad debidos a variables exógenas en la serie de precios spot del mercado eléctrico Colombiano.

**Palabras claves:** Estimación del precio de la energía eléctrica, Transformada Wavelet Discreta, ARIMA, GARCH, Volatilidad.

## **Abstract**

In this document we propose a technique to estimate a model of the price of electric power in Colombia, using the filtering properties of the Discrete Wavelet Transform (DWT) and the traditional time series modeling techniques ARIMA, GARCH; in addition, the detection of points of change in the variance of the price series through the detection method of multiple changes in a sequence of dependent variables; the series of spot prices is decomposed in a series of approximation and several details, then each sub-series separately is modeled with the technique that best fits the data. The final forecast is the sum of the reconstructed forecasts obtained from each sub-series. The most important conclusion of the proposed model is to allow greater precision in the forecast and, in turn, detect points of volatility change due to exogenous variables in the series of spot prices of the Colombian electricity market

**Keywords:** Estimation of the price of electric power, Discrete Wavelet Transform, ARIMA, GARCH, Volatility.

## INTRODUCCIÓN

La incorporación de la competencia en la generación de electricidad contribuyó a que los precios comenzaran a reflejar el costo real de la producción de la energía y a responder a variaciones de los determinantes de este precio. Por ejemplo, los cambios en la disponibilidad del agua, precios internacionales de los hidrocarburos, ciclos económicos y condiciones particulares del mercado (Botero & Cano, 2008)

La reforma eléctrica implantada con las Leyes 142 (El Congreso de Colombia, 1994) y 143 de 1994 (El Congreso de Colombia, 1994) en Colombia, creó un mercado mayorista competitivo con el fin de lograr la eficiencia en la prestación del servicio de electricidad y la libre entrada a los agentes interesados en prestarlo. Este mercado, se denomina Mercado de Energía Mayorista, MEM, y en él participan los agentes que desarrollan las actividades de generación, transmisión, distribución y comercialización, así como los grandes consumidores de electricidad (Vargas, 2009, p. 48)

En 1995 se abrió camino a la libre competencia y la participación privada, donde la competencia en la generación de energía contribuye a reflejar el precio real de la energía y a mostrar las variaciones que sufre, debido a diferentes factores tales como la ocurrencia del fenómeno El Niño, disponibilidad de agua, costos de generación, entre otros (Botero & Cano, 2008).

Debido a que las variables exógenas aportan incertidumbre al mercado, afectando la percepción del valor de la energía, resulta ser de importancia predecir un valor esperado ajustado, que permita tomar decisiones de compra y venta. Por esa razón, este trabajo se propone encontrar un modelo de estimación del precio de la energía en Colombia, que permita a los

agentes que intervienen en las transacciones de compra y venta, en este caso los generadores y comercializadores, obtener el mayor beneficio de su ejercicio, estableciendo una herramienta de pronóstico que describa de forma adecuada el mercado eléctrico mayorista.

La investigación contempla revisión la literatura actual sobre métodos de estimación del precio de la energía, los cuales se caracterizan con el objeto de determinar qué se podía proponer o complementar que no esté estudiado o implementado y con ello aportar con una nueva metodología de cálculo.

En Colombia se han realizado estudios académicos para modelar el precio de la energía, los cuales en su mayoría han utilizado los modelos ARIMA y Redes Neuronales Artificiales, RNA, pero no hay evidencia de estudios de aplicación de un modelo de Heterocedasticidad Condicional Autoregresiva Generalizada, GARCH, como herramienta para la predicción del precio y no de retornos y la varianza, como lo han propuesto Gil & Maya (2008).

Para ello, se realizó una fusión entre el modelo ARIMA, propuesto por (Contreras, Espínola, Nogales, & Conejo, 2003) y el modelo GARCH de García, Contreras, van Akkeren, & García, (2005), para predecir los precios de la electricidad del día siguiente, y motivados por la idea de la aplicación de las Wavelets en las finanzas incorporadas Conejo, Plazas, Espinola, & Molina, (2005) y Tan, Zhang, Wang, & Xu, (2010), respectivamente. Además, se utilizó la metodología presentada por Lavielle, (1999), como una aplicación para identificar los puntos donde cambia la varianza en la serie de precios de la energía en Colombia.

El propósito de este documento es aportar una herramienta adicional para la toma de decisiones, complementando las ya estudiadas como modelos ARIMA, SARIMA, IGARCH, VAR, ANFIS, RNA, Cournot, Teoría de Juegos y Análisis Estadístico, los cuales se han estudiado ampliamente y tienen respectivos niveles de precisión, como se aprecia en la Tabla 1,

aportando en la implantación de una nueva técnica en Colombia para el pronóstico más preciso del precio de la energía y la detección de intervalos de cambio de la varianza que no se había realizado antes en el país, lo cual resulta importante en la identificación de eventos que afectan el precio.

El presente documento investigativo está distribuido de la siguiente manera: La Sección 1, Estado del Arte, presenta la literatura a nivel nacional con referencia a la estimación del precio de la energía y un análisis de los artículos que son relevantes para la investigación; en la sección 2, se realiza la descripción del Movimiento del Precio Spot a través de los métodos ARIMA y GARCH; la sección 3, explica el funcionamiento de la Transformada Wavelet Discreta, resaltando las propiedades de filtrado, descomposición y reconstrucción, así como las condiciones que se deben cumplir para ello; en la sección 4, Estimación de Modelos, se describe de forma detallada el procedimiento propuesto, paso a paso y su correspondiente diagrama de flujo. La Evaluación del Método se presenta en la sección 5, donde el procedimiento propuesto es comparado con las técnicas más utilizadas en la actualidad, evaluando el nivel de desempeño con respecto a la serie original. Los indicadores utilizados fueron RSME, MAPE, THEIL, MAE, BIA. Pro y Var. Pro.

Los resultados obtenidos son presentados en la sección 6, incorporando tablas que resumen los resultados para los casos donde se realiza control de bondad del ajuste y en los que no. Además, se muestran las gráficas de ajuste para cada método por separado respecto a la serie original y agrupadas, donde se muestra claramente la superioridad del modelo. Al finalizar, se da a conocer la utilidad de la componente de detalle al ser empleada para detectar cambios en la varianza, lo cual es un aporte adicional de la investigación. Finalmente, se presentan las conclusiones a las que se llegó después de aplicar la metodología al sector eléctrico financiero.

En lo que refiere a la metodología utilizada, el primer paso para la modelación fue tomar los precios diarios de la energía eléctrica en Colombia (\$/kW.h.) desde el mes de enero hasta diciembre del 2000, de la base de datos del Portal BI de XM, Operador del mercado eléctrico colombiano. Posteriormente, a través de la Transformada Wavelet Discreta, se descompuso la serie de precios en componentes de aproximación y detalle, las cuales fueron modeladas con técnicas ARIMA y GARCH hasta el nivel óptimo que permitiera el mayor nivel de precisión. Luego, se pronosticaron los precios para cada sub-serie y estos a su vez se reconstruyeron para poder obtener el precio final al sumarse en la misma escala.

La conclusión más relevante, fruto de esta investigación, es la presentación de una metodología que no se había usado en Colombia para la detección de puntos de cambios en la varianza, la cual permite identificar intervalos donde la varianza de una serie de tiempo a cambio y, por lo tanto, algo fundamentación en la serie, tiene aplicación en la identificación de puntos críticos de alta volatilidad debido a factores externos climatológicos o regulatorios del mercado.

### **ESTADO DEL ARTE**

Como punto de partida, Hernández, Velásquez, & Dyner (2005), demostraron que la serie de precios presenta una componente estacional asociada a los ciclos de invierno-verano propios de la hidrología. Los resultados del modelo de Box-Jenkins indican que sus residuos no siguen una distribución normal, aunque son incorrelacionados, lo que implica la necesidad de evaluar posteriormente modelos heterocedásticos. Por otra lado Muñoz-Santiago, Urquijo-Vanstrahlengs, Castro-Otero, & Lombana (2017) establecieron que si en las variables de estudios presentan ciertas características como comportamientos bruscos en periodos cortos (alta volatilidad ocasionada por El Niño y La Niña), asimetría en su distribución y no cumple con los supuestos de

estacionariedad, entre otros hechos, es preferible aplicar los modelos arch, garch y sus derivaciones por cubrir mejor la heterocedasticidad (varianza no constante)

Por último, Hurtado, Quintero, & García (2014) plantearon que la modelación a través de modelos autorregresivos paramétricos y no paramétricos lineales y no lineales no constituye una herramienta fiable para estimación del precio ofertado para las centrales más importantes de Colombia en el MEM, dada la dificultad para estimar el precio con sus cambios, particularmente en picos y periodos de estabilidad. Por lo tanto, se debe recurrir a herramientas que permitan modelar cambios como los que se presentan en las ofertas de los precios de las centrales. Teniendo en cuenta las aportaciones de los anteriores autores, los cuales trabajaron con modelos autorregresivos es evidente la necesidad de un modelo que incluya una técnica que incorpore volatilidad en los modelos futuros de estimación del precio de la energía.

Considerando los resultados obtenidos por Botero & Cano (2008), donde identifican algunos periodos de intervención por parte del regulador en Colombia de forma empírica y Galindo & Villarreal (2017), presentan un modelo de reversión a la media cuyos parámetros fueron estimados por máxima verosimilitud, el cual resultó ser un buen modelo para modelar los procesos subyacentes del precio de la energía, ya que los resultados obtenidos mostraron un buen ajuste a la serie histórica incorporando adecuadamente los choques generados por la llegada e intensidad del ENSO. Estos estudios evidencian la importancia de identificar los puntos en los cuales se presenta incidencia de estos fenómenos externos, los cuales influyen significativamente en los precios.

Con base lo anterior, en esta investigación se utilizan las propiedades de la Transformada Wavelet para filtrar y descomponer series de tiempo, en componentes útiles para análisis estadísticos por separado para una misma serie, sin perder información contenida en ella.



A continuación, se muestra una tabla resumen, que contiene el estado del arte en la actualidad a nivel país, donde se presentan los autores, la metodología utilizada, las variables, los indicadores de desempeño utilizados para pronosticar el precio de la energía y las conclusiones respectivas de cada investigación.

Tabla 1. Estado del Arte Modelación del Precio de la Energía en Colombia

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
Muñoz-Santiago, Urquijo-Vanstrahlengs, Castro-Otero, & Lombana, (2017)	Pronóstico del precio de la energía en Colombia utilizando modelos ARIMA con IGARCH	ARIMA	Precio promedio de los treinta días de cada mes;	Root Mean Squared Error; Mean Absolute Error; Mean Abs. Percent Error; Theil Inequality Coefficient; Bias Proportion; Variance Proportion; Covariance Proportion	El modelo encontrado establece que si en las variables de estudios presentan ciertas características como comportamientos bruscos en periodos cortos de tiempo (alta volatilidad ocasionada por El Niño y La Niña), asimetría en su distribución y no cumple con los supuestos de estacionariedad, entre otros hechos, es preferible aplicar los modelos ARCH, GARCH y sus derivaciones por cubrir mejor la heterocedasticidad (varianza no constante).
(Galindo & Villarreal, 2017)	Modelamiento de los precios de la energía en bolsa en Colombia incorporando el efecto del ENSO	Modelo de reversión a la media estimado por máxima verosimilitud, regímenes y probabilidades de transición cambiantes	Índice de Oscilación al Sur (SOI); variación de la temperatura superficial oceánica (SSTA);	Porcentual	El modelo de reversión a la media cuyos parámetros fueron estimados por máxima verosimilitud, resultó ser un buen modelo para modelar los procesos subyacentes del precio de la energía ya que los resultados obtenidos mostraron un buen ajuste a la serie histórica incorporando adecuadamente los choques generados por la llegada e intensidad del ENSO.
(Agudelo, López-Lezama, & Velilla, 2015)	Predicción del Precio de la Electricidad en la Bolsa mediante un modelo Neuronal No-lineal autorregresivo con entradas exógenas	Redes neuronales artificiales	Relación entre generación hidráulica y térmica; Volumen útil diario de energía kWh-mensual; Aporte de energía kWh-mensual; probabilidad del fenómeno de El Niño; Caudal promedio mensual;	Coefficiente de determinación; correlación muestral (ACF); Autocorrelación muestral parcial (PACF) del error; Coeficiente de determinación R; Raíz del error cuadrático medio (RECM)	"Los resultados obtenidos con el modelo NARX-ARIMA seleccionado son consistentes con la serie de precios real, lo cual se evidencia a través del alto coeficiente de determinación del 96% entre los datos reales y los simulados con el modelo, y de una correlación muestral (ACF) y autocorrelación muestral parcial (PACF) del error que se encontró dentro de las bandas de confianza del 95%. La variable que presento mayor correlación con el precio de bolsa fue la relación entre la generación hidráulica y generación térmica, variable que no había sido incorporada en otros modelos de predicción del precio en bolsa en el corto plazo. Adicionalmente, se consideró la demanda de la energía eléctrica, variable fundamental en modelos económicos."

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
(Díez, 2015)	Proyección de precios de energía eléctrica de mediano plazo en el mercado colombiano mediante la aplicación del índice de Lerner	Índice de Lerner	Costo Marginal	Error Medio Absoluto; Error Medio Absoluto Porcentual; Raíz Error Medio Cuadrado; Coeficiente de desigualdad de Theil	La aplicación de la metodología permitió estimar los precios futuros de la energía a partir de la proyección de los Costos Marginales, y la estimación del índice de Lerner, como resultado del cálculo de la concentración y la elasticidad.
(Uribe & Trespalcios, 2014)	Contraste de modelos estocásticos para el precio de la energía en Colombia	Modelo determinístico y estocástico	Presencia del Caudal; Demanda; Generación;	RSEM (Raíz cuadrada del error cuadrático medio), MAE (Error cuadrático medio), MAPE (Error absoluto porcentual promedio), THEIL (Coeficiente de Theil), BIA Pro (Proporción de sesgo), Var. Pro (Proporción de varianza), Cov. Pro (Proporción de covarianza)	Se presentaron varios modelos para el precio de la energía en Colombia con sus respectivos parámetros y ecuaciones que fueron utilizadas para la realización de los pronósticos. Además de tener en cuenta el efecto de la ocurrencia del fenómeno El Niño, también se tuvo en cuenta las variables explicativas: nivel de los caudales, demanda de energía y la generación de energía. Se aprecia que en modelos dependientes sólo de la ocurrencia del fenómeno El Niño, su varianza instantánea parece depender de las variables explicativas, corroborando así la importancia de ellas para ajustar modelos para el precio de la energía en Colombia.
(Hurtado, Quintero, & García, 2014)	Estimación del precio de oferta de la energía eléctrica en Colombia mediante inteligencia artificial	Redes neuronales + lógica difusa, ARIMA	Índice de la industria; Índice de Oferta Residual; Multivariate ENSO Index; Demanda comercial atendida en bolsa; Precio de bolsa del día anterior; Coste marginal; Aportes hídricos; Volumen embalse; Contratos; Índice de Precios del Productor; Disponibilidad de la central; Precios del gas natural; del petróleo y del carbón; Volumen total de los embalses; Aportes hídricos totales;	Error de entrenamiento; Error de prueba; Error de validación; Error mínimo;	El estudio presenta varias metodologías para la estimación del precio ofertado por recurso energético para el Mercado Eléctrico Mayorista colombiano, dos de ellas parten de los modelos de Inteligencia Artificial y una de ellas de las series de tiempo y la identificación de sistemas dinámicos. Adicionalmente, se realizó como ejercicio previo un filtro de variables a través de la estimación de modelos Logit cuya variable objetivo fue el cambio porcentual del precio ofertado mayor al 5%, 10%, 15% y 20%, a través de la evaluación de su significatividad en cambios de este tipo

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
			Oportunidad de las centrales térmicas		
(Ramírez, 2013)	Comparación de la efectividad de diferentes herramientas para modelar el precio del mercado de electricidad en Colombia	ARIMA + ecuaciones diferenciales estocásticas (Wiener y Ornstein-Uhlenbeck)	Precio de la energía	Porcentual; gráfico	Los resultados basados en serie de tiempo son mejores que el modelo de ecuaciones estocásticas, pero ello se debe a los supuestos a los que se someten cada una de las metodologías y al tipo de problema que están afrontando en nuestro caso precio de la energía. Se revisan los distintos factores de riesgo e incertidumbre que influyen directa o indirectamente en las decisiones de inversión en mercados energéticos.
(Hidalgo, 2013)	Determinación de precios vía equilibrio de Cournot en el mercado eléctrico spot colombiano	Modelo de Cournot	Aportes Hídricos en Energía; Capacidad Efectiva Neta; Costo Equivalente de la Energía; Costo Marginal del Despacho Programado; Demanda de Energía del SIN; Mínimo Operativo Superior en Energía; Precio en Bolsa Nacional; Volumen del Embalse en Energía; Mínimos Técnicos Generación; Eficiencia Térmica; Costo Combustibles	Ajuste gráfico; mínimo error	El equilibrio de Cournot, como un subconjunto del equilibrio de Nash, es el modelo económico que mejor describe el comportamiento de los mercados spot eléctricos. Bajo los supuestos planteados en la simulación propuesta, el modelo presentado para el Mercado de Energía Mayorista colombiano basado en equilibrio de Cournot fue exitoso en acercarse al comportamiento tanto en precio de equilibrio como en cantidades en el largo plazo, para el periodo de tiempo contemplado.
(Jiménez, 2013)	Modelamiento de tipo movimiento browniano para el mercado spot de electricidad en Colombia	Reversión a la media, movimiento browniano	Precio promedio diario	Minimización de los errores existentes entre los valores reales de la serie de datos de los precios y los valores estimados por las curvas	El modelo construido se basó en la unión de tres componentes principales: estacionalidad, difusión con reversión a la media y saltos súbitos. La evidencia obtenida en los datos históricos permitió validar la existencia de dichos supuestos en el mercado analizado y a partir de una sección de la serie de datos se realizó la estimación de los parámetros.

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
(García, Bohórquez, López, & Marín, 2013)	Poder de mercado en mercados spot de generación eléctrica: metodología para su análisis	Convolución y modelo de Cournot	Precio promedio diario;costos marginales;Demanda real diaria;Cantidad generada por el oligopolio;Precio en bolsa rezagado un periodo;Precio en bolsa rezagado un periodo,Cantidad generada por las minorías;	Nivel de concentración en la industria; Índice de oferta residual;	Esta investigación por medio de una convolución (técnica similar a un Filtro de Kalman) y un modelo de Cournot estima el efecto que pueden tener los agentes en el pool eléctrico en Colombia sobre el precio spot, comportándose estratégicamente vía cantidades y realizando transacciones entre el mercado en bolsa y el mercado de contratos de largo plazo con el objeto de tener un mayor nivel de beneficios como lo argumenta la teoría económica.
(Franco, 2012)	Análisis de un modelo de mercado mayorista de energía de corto plazo mediante teoría de juegos	Teoría de juegos + modelo de Cournot	Generación;demanda;	Índice de lerner,	"La sensibilidad de la demanda ante cambios en el precio es un elemento fundamental para el mercado, dado que permite al consumidor regular sus niveles de consumo y a la vez ser parte activa en la formación del precio. Dicha característica es por lo general ausente en los mercados de energía eléctrica; y como se ha podido corroborar para los diferentes casos simulados, esta característica actúa como un mecanismo de protección para la demanda ante fenómenos propios del sistema que incrementan el precio, y de igual manera contribuye a la reducción del poder de mercado en el sistema."
(Barrientos, Rodas, Velilla, Lopera, & Villada, 2012)	Modelo para el pronóstico del precio de la energía eléctrica en Colombia	Redes neuronales artificiales, modelo de regresión múltiple con variables estacionarias en covarianza	Precio; Demanda de energía;Nivel de embalse;PIB;	MÁX (Error máximo),MÍN (Error mínimo), MSE (Error Medio Cuadrático), RMSE (Raíz del error medio cuadrático), RMSPE (Raíz de error medio cuadrático porcentual),MAE (Error medio absoluto);MAPE (Error medio absoluto porcentual)	El método econométrico presentó buen desempeño al modelar el precio en función del PIB, nivel de embalses y demanda; encontrando un crecimiento del precio acorde con la tendencia proyectada en el crecimiento de la economía. El desempeño de la red neuronal fue muy deficiente al modelar el precio en función del PIB, el nivel de los embalses y el crecimiento de la demanda. Si bien los errores obtenidos al comparar los datos de entrenamiento con los arrojados por el modelo eran aceptables, los precios proyectados a partir del año 2010 eran totalmente alejados de la realidad. Sin embargo, el modelo neuronal del precio en función de la demanda, nivel de embalses y oferta real de energía; mostró un mejor desempeño, encontrándose que los precios medios proyectados para el periodo

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
(Villada, García, & Molina, 2011)	Pronóstico del precio de la energía eléctrica usando redes neuro-difusas	Redes neuro-difusas (lógica difusa + redes neuronales)	Precio diario; Nivel de los embalses	RMSE;RMSEPE;MAE;MAPE	La red neuro-difusa ampliada con dos variables de entrada superó a la red neuronal y al modelo GARCH en el ajuste fuera de la muestra. Se concluye por lo tanto que además de la facilidad para su implementación, las redes neuro-difusas mejor desempeño en el pronóstico fuera de la muestra y requieren un menor presentaron un tiempo de cómputo comparado con el demandado por los otros métodos.
(Velásquez, Franco C., & Olaya, 2010)	Predicción de los precios promedios mensuales de contratos despachados en el mercado mayorista de electricidad en Colombia usando máquinas de vectores de soporte	Redes neuronales artificiales (máquinas de soporte vectorial)	Precio promedio	Sumatoria del error cuadrático medio (MSE); Desviación media absoluta (MAD);	Los resultados muestran que la SVM pronosticó de una forma más precisa el valor de la serie para el siguiente mes, tanto para la muestra de calibración como para el horizonte de 12 meses adelante; no obstante, un perceptrón multicapa presentó el mejor desempeño respecto a la totalidad de los datos. Este resultado se explica en parte, porque el MLP no capturó mejor la dinámica de la muestra de calibración en relación a la SVM, y ello le permitió (al MLP) responder mejor al cambio estructural que se presenta en la muestra de predicción.
(Sierra & Castaño, Medellín 20-23 de Julio de 2010)	Pronóstico del precio spot del mercado eléctrico colombiano con modelos de parámetros variantes en el tiempo y variables fundamentales (en desarrollo)	Modelo de Parámetros variantes en el tiempo + Filtro de Kalman	Precio de la energía; Demanda; Aportes Hídricos	RMSE;MAPE;P. Sesgo;P. Var;P. Cov;AIC;BIC;	El modelo TVP seleccionado fue satisfactorio en pronóstico, considerando las condiciones anormales del periodo a pronosticar, principalmente porque no requirió de una intervención explícita, sino que sus parámetros por sí solos intentaron adaptarse a las nuevas condiciones del mercado, ocasionadas por el fenómeno de El Niño
(Bedoya, 2009)	Modelación del precio de la energía en Colombia usando un modelo de inferencia neurodifuso (ANFIS)	Sistema de inferencia neuronal adaptativo (Anfis)	Aporte de los Ríos (asociado al comportamiento hidrológico agregado de los ríos que alimentan las centrales generadoras); Embalse Ofertable (margen resultante de restar del nivel actual de un	Madia;Volatilidad; Coeficiente de asimetria;Curtosis Xls;Curtosis Real;	Se ha mostrado que los modelos ANFIS son modelos altamente no lineales y que pueden ser muy útiles para el estudio de series de tiempo altamente poco lineales. El nivel de ajuste y el nivel de predictibilidad para el caso estudiado son muestra de que un modelo ANFIS puede ser una herramienta poderosa en el estudio del comportamiento de los precios de la energía eléctrica en Colombia

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
			embalse el nivel establecido como reserva o mínimo operativo superior MOS)		
(Arias & Ribon, 2009)	Pronóstico del precio de contratos de la energía en el largo plazo a través del método ANFIS	Sistema de inferencia neuronal adaptativo (Anfis)	Precio medio despechado en el período t-1; Nivel de embalse; Disponibilidad de generación; Generación hidráulica; Temperatura superficial del mar;	Coefficiente de correlación múltiple; Coeficiente de determinación R <sup>2</sup> ; R <sup>2</sup> ajustado; Error típico;	Dado que la generación hidráulica presenta una gran participación en el mercado energético Nivel del Embalse, los componentes que influyen significativamente en el precio son: hidráulica, nivel de embalse, variables climáticas y temperatura. ANFIS es un sistema híbrido cuyo comportamiento es más acertado cuando se tiene un número de datos significativo.
(Botero & Cano, 2008)	Análisis de series de tiempo para la predicción de los precios de la energía en la bolsa de Colombia	ARIMA	Precio de la energía	ME; SSE; MSE; MPE; MAPE; MSI MP; THEIL	Los modelos con tendencia, estacionalidad anual y errores autorregresivos, presentan grandes ventajas en su forma de estimación debido al alcance que puede obtenerse con la estacionalidad anual y la tendencia identificada sobre la serie de tiempo
(Aristizábal & Bolívar, 2008)	Definición de portafolios de inversión en Colombia usando redes neuronales artificiales	Redes neuronales artificiales	Precio de la energía; PIB; Volumen de energía tranzado en contratos; Rendimiento Contratos; Energía Exportada; Precio dólar	Error Cuadrático Medio	Los resultados obtenidos muestran que las redes neuronales son una buena herramienta en el campo de la predicción y que entre más riguroso sea el estudio de los datos de entrada y la topología de la red, se puede obtener una mejor precisión del pronóstico.
(Hernández, Velásquez, & Dyner, 2005)	Modelos ARIMA y estructural de la serie de precios promedio de los contratos en el Mercado Mayorista de Energía Eléctrica en Colombia	ARIMA (Modelos de Box-Jenkins) + Modelo estructural con errores	Precio promedio mensual;	MAPE; MSIMP; U-THEIL; MSE; R <sup>2</sup>	Los resultados del modelo de Box-Jenkins indican que sus residuos no siguen una distribución normal aunque son incorrelacionados. Esto indica la necesidad de evaluar posteriormente modelos heterocedásticos.
(Pulgarín, Smith, & Poveda, 2000)	Predicción del precio de la energía eléctrica con un modelo de redes neuronales y	Redes neuronales artificiales	Embalse ofertable agregado; Aportes agregados al sistema; anomalías de temperatura superficial del mar en la región	Coefficiente de correlación; Error Cuadrático Medio; Error Absoluto; Media de los Datos; Desviación Estándar de los Datos; Media del Error; Desviación	En cuanto al problema particular de predicción del precio de Energía en Bolsa en Colombia se puede decir que es un problema de alta complejidad por los diversos procesos que involucra, ya sea físicos, de mercado o de regulación del estado, y de gran importancia tanto para adecuada operación como para

AUTOR	REFERENCIA	MÉTODO	VARIABLES	INDICADORES	CONCLUSIONES
	usando variables macroclimáticas		Niño 3-4 del Océano Pacífico;	Estándar del Error; Radio del error de predicción;	las posibilidades de expansión del Sistema de Energía Eléctrica en Colombia. Entre esos procesos físicos que afectan el Precio de la Energía en Bolsa en Colombia es de resaltar la alta relación que se da con las variables que representan los fenómenos macroclimáticos sobre el Océano Pacífico, (El Niño y La Niña), en especial las anomalías de temperatura superficial del mar en la región Niño 3-4.

*Fuente: Elaboración propia.*



## MOVIMIENTO DEL PRECIO SPOT

En este capítulo se revisan diferentes alternativas para modelar el precio spot de energía eléctrica, se consideran modelos que provienen de la teoría de series de tiempo, se muestran las características de las series del precio de la energía eléctrica y lo que las hacen diferentes a otros tipos de bienes. Según Gil & Maya, (2008), las siguientes son propias de las series de precios del mercado eléctrico colombiano: curtosis, aglomeraciones de volatilidad, ocurrencia de eventos extremos y reversión a la media. A continuación, se exponen algunas de ellas:

En las colas pesadas, *heavy tails*, la serie de rendimientos poseen una acumulación de datos significativa en los extremos. Esto se identifica al tener un nivel de curtosis elevado, por lo se afirma que los rendimientos siguen una distribución leptocúrtica en la cual la curva es más apuntada y con colas más anchas que la norma.

Al graficar el retorno del precio de la energía, específicamente para este estudio, al obtener la componente de detalle de la serie, se observan los clusters de volatilidad que son periodos de fuertes oscilaciones del retorno y periodos de relativa estabilidad.

Estacionalidad la cual está relacionado con variables exógenas propias de la energía eléctrica como el clima, la demanda intrahoraria, la influencia de variables macroclimáticas (períodos niño y niña) y el efecto día calendario.

En Galindo & Villarreal, (2017), la evidencia académica, y empírica, establece que el comportamiento del precio de la energía tiende a revertir a un medio en el largo plazo (como sucede con la mayoría de los *commodities*, cuando el precio de un bien es alto. Esto genera una tendencia al aumento de la oferta y, por tanto, una presión a la baja de los precios. De igual forma sucede cuando el precio del bien es bajo, ya que esto obliga a una disminución en la oferta y

como consecuencia en el largo plazo una presión al alza en los precios. Para el caso específico del mercado energético colombiano, el precio de la energía está fuertemente influenciado no sólo por la dinámica de la oferta y la demanda, sino también por los cambios climáticos, como por ejemplo el Fenómeno de El Niño, que supondría que, por ejemplo, en etapas donde la intensidad del ENSO resulta ser fuerte, la media de largo plazo de los precios debería ser mayor a la media de los precios bajo un escenario en el cual no hay presencia del Fenómeno de El Niño.

Box y Jenkins han desarrollado modelos estadísticos para series temporales que tienen en cuenta la dependencia existente entre los datos, esto es, cada observación en un momento dado es modelada en función de los valores anteriores. Los análisis se basan en un modelo explícito. Los modelos se conocen con el nombre genérico de ARIMA (Auto Regressive Integrated Moving Average), que deriva de sus tres componentes AR (Autoregresivo), I(Integrado) y MA (Medias Móviles).

El modelo ARIMA permite describir un valor como una función lineal de datos anteriores y errores debidos al azar, además, puede incluir un componente cíclico o estacional. Es decir, debe contener todos los elementos necesarios para describir el fenómeno. (De la Fuente, s.f.)

### **MODELOS ARIMA (p, d, q)**

De acuerdo con (De la Fuente, s.f.), un modelo ARIMA es una serie temporal que se convierte en ruido blanco (proceso puramente aleatorio) después de ser diferenciada d veces:

$$(1 - B)^d s_t = \varepsilon_t, \text{ donde } B \text{ simboliza el operador de rezago Backshift.}$$

En forma desarrollada:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d s_t = \varepsilon_t (1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - \dots - \alpha_q B^q) \quad (1)$$

Los coeficientes  $\phi$  y  $\alpha$  son las ponderaciones de la componente AR y MA respectivamente,  $t$  representa el número de rezagos que el modelo requiere para realizar una estimación del modelo.

Un modelo ARIMA permite describir una serie de observaciones después de que hayan sido diferenciadas  $d$  veces, a fin de extraer las posibles fuentes de no estacionariedad. Esta fórmula se puede aplicar a cualquier modelo. Si hay alguna componente  $p$ ,  $d$ ,  $q$ , igual a cero, se elimina el término correspondiente de la fórmula general.

Un modelo  $ARIMA(1,1,1)$  se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta s_t = \phi_1 \Delta s_{t-1} + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2)$$

### MODELO GARCH

Los procesos GARCH se utilizan para calcular volatilidad en el precio de un activo financiero, en términos estadísticos un proceso GARCH busca modelar la volatilidad de la varianza, debido a que esta no es homocedástica; es decir, presenta heterocedasticidad o cambios sistémicos en la varianza a través del tiempo.

Considere la serie

$$s_t = \mu + \varepsilon_t \quad (3)$$

Donde  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ . Aquí  $z_t$  es una sucesión de variables aleatorias i.i.d con distribución  $N(0,1)$ . El término independiente  $\mu$  es un desplazamiento promedio y  $\omega$  es la constante o *offset* del modelo. Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son las ponderaciones de la componente la varianza condicional y el error.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (4)$$

$$\text{Con } \omega > 0, \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q \text{ y } \beta_j \geq 0, j = 1, \dots, p. \quad (5)$$

Como se observa, en los procesos  $GARCH(p, q)$ , la varianza condicional no sólo depende de los cuadrados de las perturbaciones, sino, además, de las varianzas condicionales de periodos anteriores. Si en el proceso  $GARCH(p, q)$  se tiene que  $\beta_i = 0, j = 1, \dots, p$ , entonces el proceso es un  $ARCH(q)$ , si  $\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i < 1$ , entonces el proceso es estacionario y la varianza no condicionada  $\sigma^2$  esta dada por

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j} \quad (6)$$

En un modelo  $GARCH(1,1)$  la varianza queda especificado de la siguiente forma:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta \varepsilon_{t-1}^2 \quad (7)$$

## **TRANSFORMADA WAVELED DISCRETA**

TWD es un método de pre-procesamiento que proyecta una serie temporal en una colección de funciones de base ortonormales. Esta transformación se aplica a los datos para obtener información adicional de los datos originales en el dominio del tiempo. Después de aplicar TWD a los datos, se pueden analizar las señales descomponiéndolas en varias frecuencias. El componente de alta frecuencia puede ser ruido, pero el componente de baja frecuencia contiene un patrón claro de los datos originales, lo que facilita la estimación.

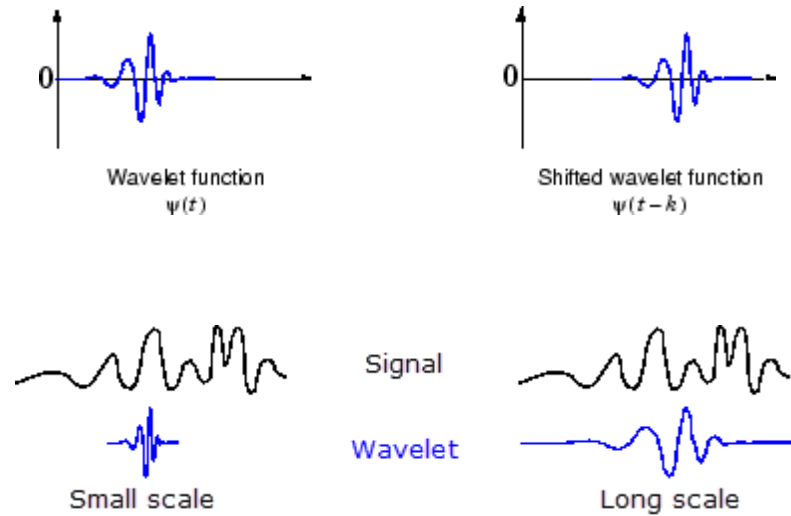
TWD consta de dos funciones de onda básica, la wavelet padre  $\phi$  y wavelet madre  $\psi$ .

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^j t - k) \quad (8)$$

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^j t - k) \quad (9)$$

El parámetro  $j = 1 \dots J$ , es el parámetro de escala en el  $J^{th}$  nivel de descomposición, y  $k$  es el parametro de traslación.

El desplazamiento consiste en el retraso o adelanto en la aparición de la señal y la escala es el alargamiento o compresión de la wavelet.



Gráfica 1. Desplazamiento y escalado Wavelet, Fuente: *Wavelet Toolbox TM User 's Guide R*

Jin & Kim, (2015) sostienen que la wavelet padre  $\phi$  transforma la serie original  $s(t)$  en los componentes de aproximación  $A$ , y la wavelet madre  $\psi$  en los componentes de detalle  $D$ , los cuales son similares a los datos originales suavizados y  $t$  es el índice de tiempo discreto.

Escribimos las transformaciones de la siguiente manera:

$$A_{j,t} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\phi_{j,t}(t)dt \quad (10)$$

$$D_{j,t} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\psi_{j,t}(t)dt \quad (11)$$

Se puede inferir que la representación original está dada por la suma de los componentes descompuestos. Por lo tanto, se puede representar la serie original como una combinación de los componentes de aproximación y detalle, como sigue:

$$s(t) = A_j(t) + D_j(t) + D_{j-1}(t) + \dots + D_1(t) \quad (12)$$

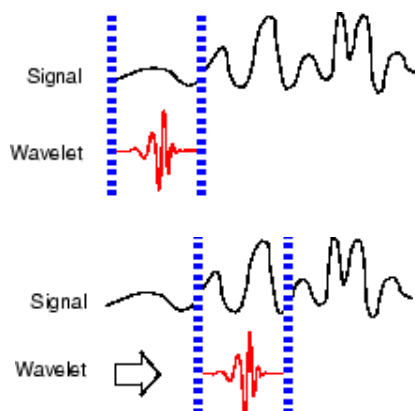
De forma más generalizada, así:

$$s(t) = \sum_{k=1}^n A_{j,k} \phi_{j,k}(t) + \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^n D_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (13)$$

Donde  $c_{j,k}$  representa los coeficientes de aproximación en la escala  $j$  y localización  $k$ ;  $J$  es el nivel de descomposición;  $d_{j,k}$  representa los coeficientes de detalle en la escala  $j$  y localización  $k$ ; y  $n$  es el tamaño de los datos de la serie de tiempo.

Esta Transformada es eficiente para el análisis local de señales no estacionarias y de rápida transitoriedad y, al igual que la Transformada de Fourier con ventana, mapea la señal en una representación de tiempo-escala.

El aspecto temporal de las señales es preservado. La diferencia está en que la Transformada Wavelet provee análisis de multiresolución con ventanas dilatadas. De otro lado, el análisis de las frecuencias de mayor rango se realiza usando ventanas angostas y el análisis de las frecuencias de menor rango se hace utilizando ventanas anchas (UNICEN, s.f.).



Gráfica 2. Mapeo Wavelet Serie de Precio , Fuente: Wavelet Toolbox TM User ' s Guide R

## FILTROS DIGITALES

De acuerdo con Strang & Nguyen (1996) Un filtro digital en el dominio del tiempo está dado por la convolución de una señal con una sucesión  $h$ . La convolución por  $h$  se conoce como

el filtrado por  $h$ . En el dominio del tiempo esta dado por  $h * x$ , y en el dominio de la frecuencia esta dado por  $H(z)X(z)$ . La sucesión  $h$  es llamada la respuesta al impulso del filtro, y  $H(z)$  la función de transferencia, dada por:

$$H(z) = \sum h(n) z^{-n} \quad (14)$$

Donde  $h = (h(0), \dots, h(N))$ , Si  $h$  es una sucesión finita, entonces  $h$  es llamado un filtro FIR (respuesta finita al impulso) y  $H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(N)z^{-N}$  (15)

### **FILTRO PASA-BAJO (*MOVING AVERAGE*)**

En este filtro, la salida  $y(n)$  para un tiempo  $t = n$ , es el promedio de la entrada  $x(n)$  y  $x(n - 1)$ .

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n - 1) \quad (16)$$

Los coeficientes del filtro son:  $h = \left[ \dots, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right]$

Aplicando las propiedades de la transformada  $z$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^{-1} \right) \quad (17)$$

### **FILTRO PASA-ALTO (*MOVING DIFFERENCE*)**

En este filtro, la salida  $y(n)$  para un tiempo  $t = n$ , es la diferencia promedio de la entrada  $x(n)$  y  $x(n - 1)$ .

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n - 1) \quad (18)$$

Los coeficientes del filtro son:  $h = \left[ \dots, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right]$

Aplicando las propiedades de la transformada  $z$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \quad (19)$$

### CONDICIÓN DE ORTOGONALIDAD

Para que dos filtros sean ortogonales entre sí, se debe cumplir que el producto punto entre los vectores  $H_0$  y  $H_1$  sea igual a cero, así:

$$H_1 \cdot H_0 = 0$$

Para ilustrar mejor este concepto, se toman los coeficientes de dos filtros de longitud  $n = 2$  para verificar la condición de ortogonalidad. (Strang & Nguyen, 1996)

$$h_0 = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \xrightarrow{\text{filtro espejo}} h_1 = \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right] \quad (20)$$

Se debe cumplir que:  $h_0 \cdot h_1 = 0$

$$h_0 = \left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cdot \left[ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right] = 0 \quad (21)$$

Muchas de las wavelets más comunes como las de Daubechies, Coifman, Mallat, y sus funciones de generación de escala satisfacen una relación QMF.



## FILTROS ESPEJO EN CUADRATURA

Los filtros espejo en cuadratura (del inglés Quadrature Mirror Filters, QMF), son filtros ortogonales entre si relacionados de la siguiente forma:

$$H_1(z) = -z^{-N}H_0(-z^{-1}) \text{ donde } (h(N), -h(N - 1), \dots) \quad (22)$$

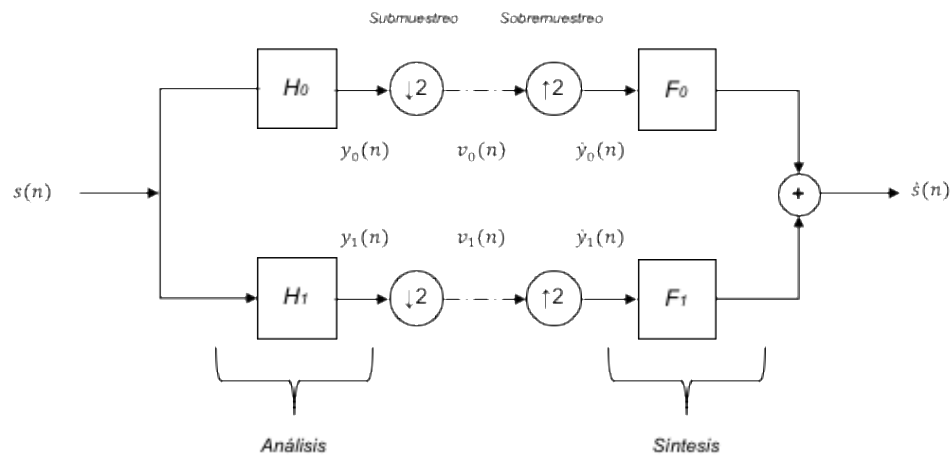
El filtro Daubechies se ajusta a este patrón.

## BANCO DE FILTROS ORTOGONALES

La estructura convencional de un banco de filtros, de acuerdo con Strang & Nguyen, (1996), es mostrada en la Figura 3. En el banco de análisis  $H_0$ , se usa generalmente un filtro pasa-bajo y en  $H_1$  es usado un filtro pasa-alto ortogonal a  $H_0$ .

El banco de análisis a la izquierda tiene un filtro pasa-bajo  $H_0$ , y el submuestreo por  $(\downarrow 2)$  -que elimina las componentes de numero impar después del filtrado. El banco de análisis produce dos salidas. Luego comienza el banco de síntesis a la derecha con el sobremuestreo  $(\uparrow 2)$  - el cual inserta ceros en las componentes impares. Los filtros  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $F_0$  y  $F_1$  son lineales e invariantes en el tiempo. Los operadores  $(\downarrow 2)$  y  $(\uparrow 2)$  no son invariantes en el tiempo.

$$(\downarrow 2)(\uparrow 2)x = [x(0) \ 0 \ x(2) \ 0 \ x(4) \ 0] \text{ en funcion de } z \frac{1}{2}[X(z) + X(-z)] = X_{par}(z^2) \quad (23)$$



Gráfica 3. Banco de filtros.

## RECONSTRUCCIÓN PERFECTA

Los mismos autores consideran que la condición para la reconstrucción perfecta es que el banco de filtros sea biortogonal. El banco de síntesis, desde  $F_0$  y  $F_1$  y  $(\uparrow 2)$  es el inverso del banco de análisis. Matrices inversas implican automáticamente biortogonalidad. (las filas de  $T$  y las columnas de  $T^{-1}$  son por definición biortogonales) (Strang & Nguyen, 1996).

Un banco de filtros de dos canales da reconstrucción perfecta cuando:

$$F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) = 2z^{-l} \rightarrow \text{cancelación alias}$$

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 \rightarrow \text{eliminación distorsion}$$

La relación que permite la ortogonalidad entre los filtros en la siguiente:

$$h = (h(0), h(1), h(2), h(3), \dots, h(N)) \quad (24)$$

$$H_0(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \dots + h(N)z^{-N}$$

$$H_1(z) = -z^{-N}H_0(-z^{-1})$$

$$F_0(z) = H_1(-z)$$

$$F_1(z) = -H_0(-z)$$

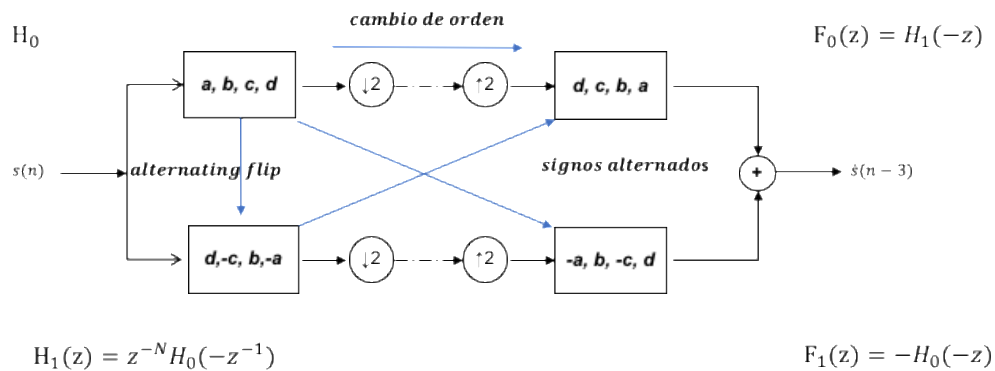
Donde :

$$z^{-N}H_0(-z^{-1}) = (h(N), \dots, (-1)^N h(0))$$

$$H(-z) = (h(0), -h(1), h(2), -h(3), \dots)$$

El *alternating flip* da automáticamente doble ortogonalidad entre los filtros pasa bajo y pasa alto. Cuando el diseño de  $H_0$  conduce a una reconstrucción perfecta en el banco de filtros alternado, también conduce a la ortogonalidad.

La estructura de un banco de filtros ortogonal es muy especial, y la Figura 4, muestra cómo se relacionan los filtros. (Strang & Nguyen, 1996)

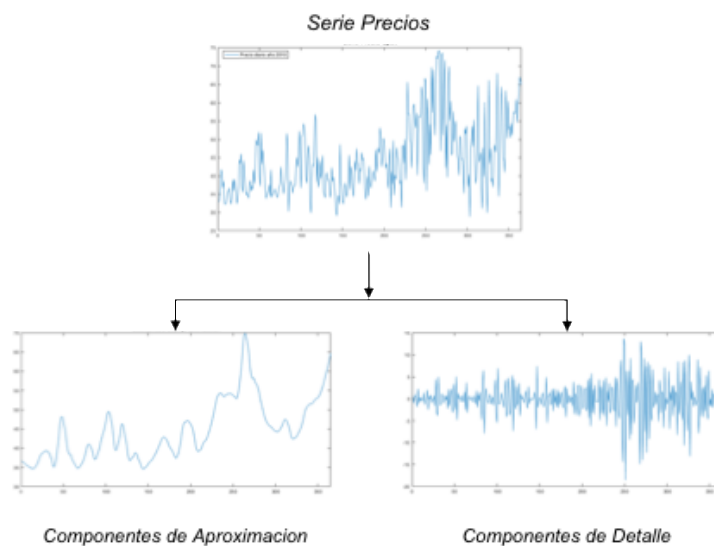


Gráfica 4. Forma de un banco de filtros ortogonal para cuatro coeficientes

## FILTROS DE UN NIVEL

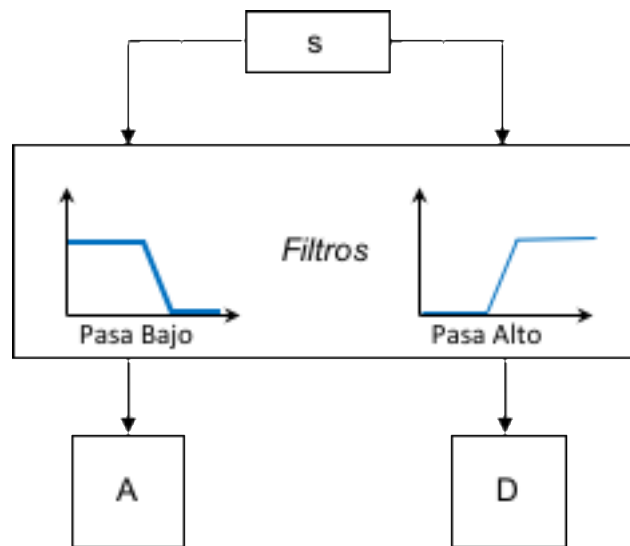
Kouro & Musalem, (2013) consideran que en la mayoría de las señales son las componentes de baja frecuencia las que le otorgan a la señal la mayor parte de su información, o bien, le dan una especie de identidad a la señal, mientras que las componentes de alta frecuencia

se encargan de incorporar características más particulares. Es por ello que se subdividen las componentes de una señal en dos categorías: aproximaciones (baja frecuencia) y detalles (alta frecuencia):



Gráfica 5. Componentes de una serie.

Surge la idea de separar estas dos componentes a través de filtros donde  $s$  es la serie que se desea analizar,  $A$  la salida del pasabajo y  $D$  la salida del filtro pasaalto. Naturalmente, los filtros son diseñados de tal manera que sean complementarios (ortogonales); es decir, la suma de  $A$  y  $D$  debe ser  $s$ . Si se diseñaran los filtros en forma muy separada se perdería información, o en caso contrario se estaría amplificando la banda de entrecruzamiento. Sin embargo, este procedimiento tiene la desventaja que se aumenta al doble el número de datos originales, pues por cada muestra de  $s$  se genera un par de muestras  $(A, D)$ , por lo que el costo matemático y computacional se incrementa. Para remediar esta falencia, se propone un método que guarda la mitad de los puntos  $(A, D)$ , sin perder en ello información de la señal  $s$ . Este procedimiento es conocido como submuestreo (Kouro & Musalem, 2013).



Gráfica 6. Filtros Pasa Bajo y Pasa Alto

## DESCOMPOSICIÓN WAVELET

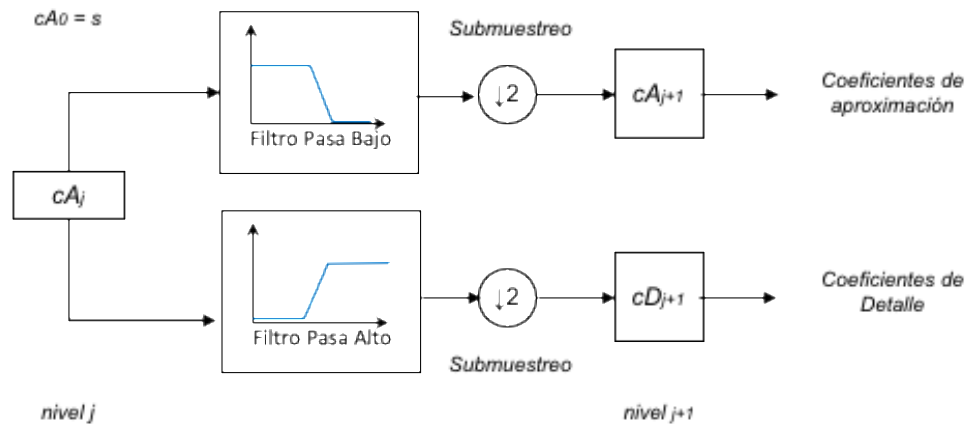
En la Figura 7, los círculos con flechas representan la eliminación de datos o submuestreo.

Luego,  $cD_{j+1}$  y  $cA_{j+1}$  son los nuevos coeficientes obtenidos de la etapa de filtración.

Intuitivamente se puede concluir que al tener  $cD_{j+1}$  y  $cA_{j+1}$ , en conjunto, se tiene la misma cantidad de datos que las de la señal original  $s$ , y se ha mantenido la información necesaria.

En esquema se ejemplifica la idea para una señal  $s$  de longitud  $n$  datos, obteniéndose en la salida dos series de aproximadamente  $n/2$  datos cada una. La idea de aproximado se debe a que el proceso de filtración es realizado a través de convolución de la señal de entrada con la función de transferencia (discreta) del filtro, lo que puede introducir eventualmente una o dos muestras más. Sin embargo, para muchas señales de mayor complejidad, no basta con dos bandas de frecuencias (alta y baja), sino que más bien debe hacerse una descomposición de más niveles para

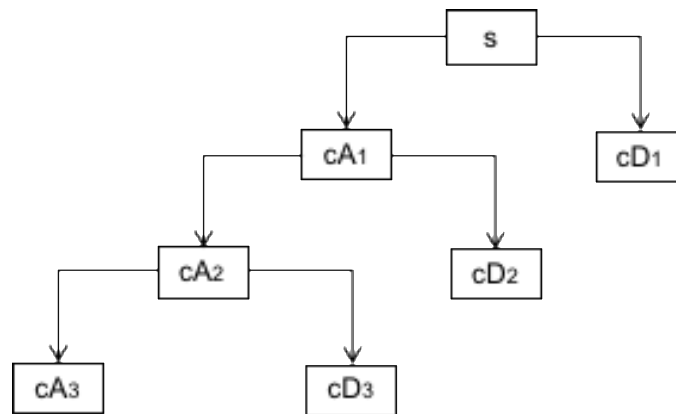
poder separar las características y poder analizarlas independientemente. Surge la idea entonces de filtros multiniveles (Kouro & Musalem, 2013).



Gráfica 7. Esquema de descomposición en series Wavelet.

## FILTROS MULTINIVEL

Kouro & Musalem, (2013) mencionan que para realizar la motivación expuesta en el punto anterior, basta con iterar el proceso de filtrado, esto es, aplicar el mismo procedimiento a las señales de salida de la primera etapa, y así sucesivamente hasta el nivel de precisión que se desee. Lo anterior da origen a una descomposición multinivel conocida como ramificación o árbol de descomposición Wavelet, cuya idea es expuesta en la Figura 8. La descomposición wavelet de una señal  $s$  en el nivel  $J$  tiene la siguiente estructura:  $[cA_j, cD_j, \dots, cD_1]$ , para el caso  $J = 3$ , los nodos terminales del arbol son los siguientes:



Gráfica 8. Filtros Multivariados, con el algoritmo de árbol.

Nótese que  $cD_1$  resulta ser la componente de más alta frecuencia de la señal, y  $cA_3$  la de menor frecuencia. Al ser descompuesta la señal en mayor cantidad de bandas de frecuencia se posee una información más detallada acerca de  $s$ . Esta metodología es conocida como multiresolución. Surge en forma inmediata la inquietud acerca del diseño del algoritmo, relativo al número de niveles a utilizar.

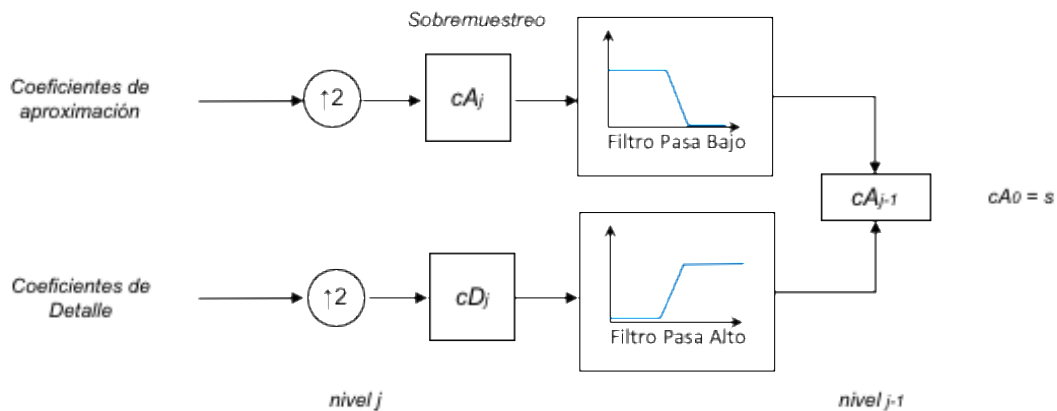
### DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE NIVELES

En teoría, como se trata de un proceso recursivo, se podría iterar en forma sucesiva infinitas veces. Sin embargo, en la práctica, sólo se puede descomponer hasta que un intervalo o nivel posea una sola muestra. Podría pensarse en forma intuitiva que se obtienen resultados óptimos con un mayor número de niveles de descomposición, sin embargo, esto no siempre es así, como se demostrará más adelante.

### RECONSTRUCCIÓN WAVELET

En los puntos anteriores se explicó la base teórica acerca de la descomposición Wavelet, de acuerdo con Kouro & Musalem (2013). Por tratarse de una transformación, es deseable poder

establecer su inversión, en otras palabras, poder volver a la señal original a partir de los datos de salida del árbol. El proceso anterior es conocido como reconstrucción Wavelet o Transformada Inversa de Wavelet (discreta). La metodología sigue el razonamiento en dirección contraria, es decir, a partir de los coeficientes  $cA_j$  y  $cD_j$ , donde (*j depende del número de niveles*) debe obtenerse  $s$ . Lo anterior queda ilustrado en la Figura 9.



Gráfica 9. Esquema de reconstrucción Wavelet.

En este caso, se debe realizar una sobre-representación de la muestra para compensar el submuestreo realizado en el proceso de descomposición. La secuencia de la señal original  $cA_0$  puede ser reconstruida a partir de las secuencias de coeficientes de aproximación  $cA_j$  y de los coeficientes de detalle wavelet  $cD_j$  con  $0 \leq j \leq J$ , donde  $j = J$  es la menor resolución en la descomposición.

La aproximación discreta  $cA_{j-1}$  en el próximo nivel de mayor resolución puede ser obtenida como la suma de dos convoluciones, una entre la aproximación discreta  $cA_j$  y el filtro paso-bajo y otra entre los coeficientes de detalle wavelet  $cD_j$  y el filtro paso-alto.

La etapa crítica en este proceso es el filtrado, pues la elección de los filtros es determinante en la calidad de la reconstrucción. Los filtros de descomposición H y L (para



pasaaltos y pasabajos respectivamente), y sus filtros de reconstrucción correspondientes  $H'$  y  $L'$ , diseñados a partir de una teoría llamada Filtros Espejo en cuadratura (Quadrature Mirror Filters).

## **ESTIMACIÓN DE MODELOS**

Para aplicar la transformada Wavelet a una serie de datos numéricos, se hace necesario implementar una transformada discreta. La idea fue desarrollada por Mallat en 1989, quien diseñó un algoritmo basado en un banco de filtros que permite obtener una transformada Wavelet en forma instantánea a partir de los datos de interés (Kouro & Musalem, 2013)

La transformada wavelet convierte una serie de precios en un conjunto (típicamente de tres a seis) de series constitutivas. Estas series presentan un mejor comportamiento (varianza más estable y sin valores atípicos) que las series de precios originales, y por lo tanto, se pueden predecir con mayor precisión. La razón del mejor comportamiento de la serie constitutiva es el efecto de filtrado de la transformada wavelet (Conejo, y otros, 2005)

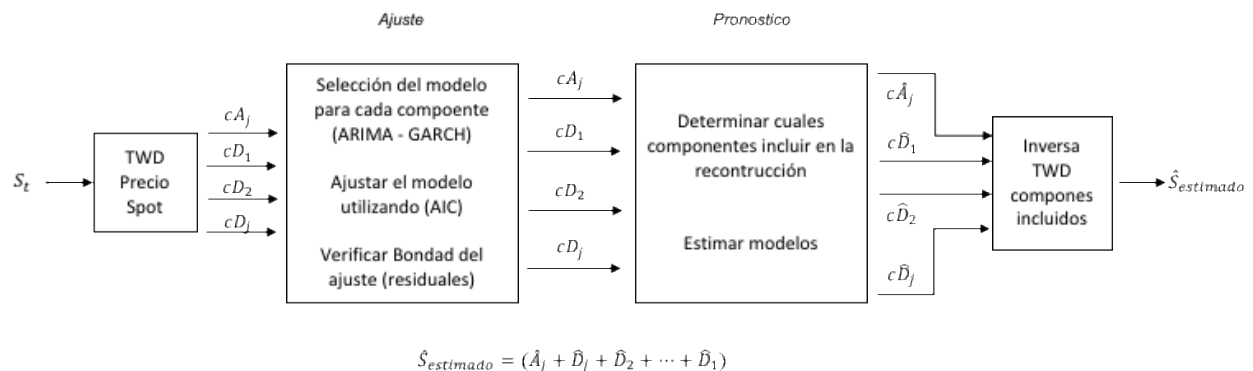
Mediante la transformación wavelet, la serie histórica de precios se descompone y se reconstruye en una serie de aproximaciones y algunas series de detalles. Entonces, cada subserie se puede predecir por separado mediante un modelo de serie temporal adecuado. El pronóstico final se obtiene al componer los resultados pronosticados de cada subserie (Tan, y otros, 2010)

El procedimiento explicado en este documento, está basado en los modelos propuestos por Conejo, y otros (2005) y Tan (2010) para pronosticar el precio de la energía; el cual es renovado al incorporar el análisis de la primera componente de detalle, para determinar los intervalos de cambio en la varianza, El método funciona de la siguiente manera:

1. Mediante transformada wavelet, la serie de precios de electricidad  $s_t$  se descompone en una serie de aproximación definida como  $cA_j$  y  $J$  series de detalles definidas como  $cD_j, \dots, cD_2, cD_1$ , respectivamente donde  $j = J$  es el máximo nivel de descomposición para con el cual se logra la mejor aproximación a la serie original según los modelos estimados (ARIMA-GARCH).
2. Se construye un modelo ARIMA para pronosticar los valores futuros de  $A_j$ , mientras que el modelo GARCH se usa para series de detalles ( $cD_j, \dots, cD_2, cD_1$ ).
3. Se calculan los rezagos en las componentes de aproximación y detalle utilizando el criterio de información de Akaike para los modelos ARIMA y GARCH.
4. Se realiza un control de bondad del ajuste, para asegurar que cada modelo describe los datos de manera adecuada. Los residuos deben estar no correlacionados, homocedásticos y normalmente distribuidos con media y varianza constante. Para lo cual se utilizan Ljung-Box Q-test para correlación y Engle test para heterocedasticidad.
5. Se eliminan las componentes de aproximación y detalle que no cumplan el paso (4), dado que esto puede dar como resultados, sesgos y pobre rendimiento predictivo
6. Se realiza la estimación de los modelos ARIMA y GARCH para los componentes de aproximación y detalle respectivamente, obteniendo las series  $c\hat{A}_j, c\hat{D}_j, \dots, c\hat{D}_2, c\hat{D}_1$ .
7. Se realiza la reconstrucción de los componentes de aproximación y detalle estimados, para obtener el mismo número de datos que la serie original,. Mediante la transformada Wavelet Inversa Discreta, las series de  $c\hat{A}_j, c\hat{D}_j, \dots, c\hat{D}_2, c\hat{D}_1$  se denominan  $\hat{A}_j, \hat{D}_j, \dots, \hat{D}_2, \hat{D}_1$ . Entonces la serie estimada se puede definir de la siguiente manera:

$$\hat{S}_{estimado} = \hat{A}_j + \hat{D}_j + \dots + \hat{D}_2 + \hat{D}_1 \quad (25)$$

Donde  $\hat{S}_{estimado}$  es el precio pronosticado de la serie de precios,  $\hat{A}_j, \hat{D}_j, \dots, \hat{D}_2, \hat{D}_1$  son los resultados pronosticados (reconstruidos) de la series  $c\hat{A}_j, c\hat{D}_j, \dots, c\hat{D}_2, c\hat{D}_1$ .



Gráfica 10. Procedimiento pronóstico del Precio Spot

## EVALUACIÓN DEL MÉTODO

Para la evaluación del desempeño predictivo se emplean algunos indicadores utilizados por (Uribe & Trespacios, 2014) que cuantifican que tan cerca está la variable estimada de la serie de datos original. Una de las medidas más utilizadas es el Promedio del Error Porcentual Absoluto (MAPE):

$$MAPE = \frac{1}{T} \left( \sum_{t=1}^T \frac{|P_t - \hat{P}_t|}{\hat{P}_t} \right) \times 100 \quad (26)$$

Donde  $P_t$  es el precio de la energía en el día  $t$  y  $\hat{P}_t$  su pronóstico.

El MAPE mide el valor medio del error absoluto en términos porcentuales al valor real de la variable.

Error Absoluto medio (MAE) a menor valor mejor será el modelo para pronosticar.

Mientras más alejado de cero, más se deteriora la capacidad de predicción del modelo.

$$MAE = \frac{1}{T} (\sum_{t=1}^T |P_t - \hat{P}_t|) \quad (27)$$

Otra medida de pronóstico, comúnmente empleada, es la Raíz Cuadrática Media del Error (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (P_t - \hat{P}_t)^2} \quad (28)$$

El RMSE mide la dispersión de la variable simulada en el curso del tiempo, penalizando fuertemente los errores grandes al elevarlos al cuadrado. Esta característica hace que el RMSE se recomiende cuando el costo de cometer un error es aproximadamente proporcional al cuadrado de dicho error.

No siempre el modelo que genere pronósticos con el menor MAPE generará los pronósticos con el menor RMSE y viceversa, por lo que en la selección de los mejores modelos de pronóstico se hace necesario establecer la medida del error a utilizar para la elaboración del ranking de desempeño.

El coeficiente de THEIL se utiliza para medir la capacidad de predicción de los modelos, su valor varía entre 0 y 1. A medida que se aproxima a cero mejor es el modelo para pronosticar, caso contrario cuando se acerca a uno la capacidad predictiva del modelo disminuye.

$$THEIL = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (P_t - \hat{P}_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\hat{P}_t)^2 + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (P_t)^2}} \quad (29)$$

### PROPORCIÓN DE SESGO

Esta medida indica que tan lejos está la media de los datos pronosticados de la media de los datos reales.

$$BIA.Pro = \frac{(\bar{\hat{P}}_t - \bar{P}_t)^2}{\frac{1}{T} (\sum_{t=1}^T |P_t - \hat{P}_t|)} \quad (30)$$

Proporción de la varianza

Esta medida indica qué tan lejos está la desviación estándar de los datos pronosticados de la desviación estándar de los datos reales.

$$Var.Pro = \frac{(s_{\hat{P}_t} - s_{P_t})^2}{\frac{1}{T} (\sum_{t=1}^T |P_t - \hat{P}_t|)} \quad (31)$$

### RESULTADOS

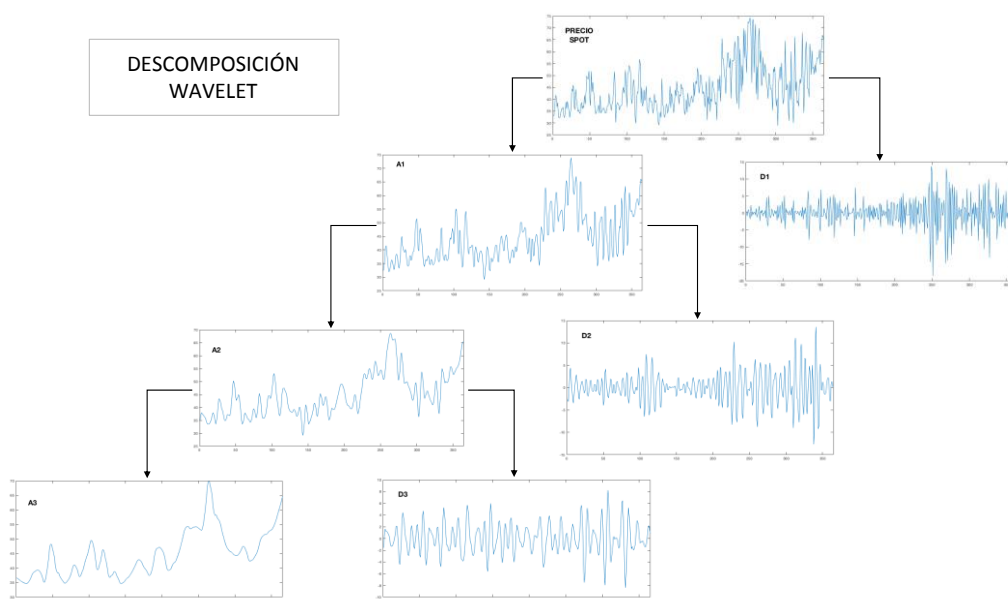
Para la estimación del modelo se utilizaron los precios de la energía en Colombia (\$/kW.h.) desde el mes de enero a diciembre del año 2000, de la base de datos del Portal BI de XM (Operador del mercado eléctrico colombiano). Se realizó la descomposición Wavelet de la serie original hasta el nivel 3, donde  $D1$  es la componente con mayor volatilidad de la serie y  $A1$ , la de menor volatilidad. Al ser descompuesta la serie en varios niveles se posee información más detallada de  $S$ , como se observa en la Figura 11, a través de la Wavelet Daubechies 4, dado que esta proporciona buena compensación entre longitud de onda y suavidad. En la Figura 12 se

presenta de forma más detallada. Para cada nivel de descomposición se utilizaron los componentes de aproximación y detalle. Los componentes de aproximación representan la tendencia de la serie y los componentes de detalle representan la volatilidad o ruido de la serie original.

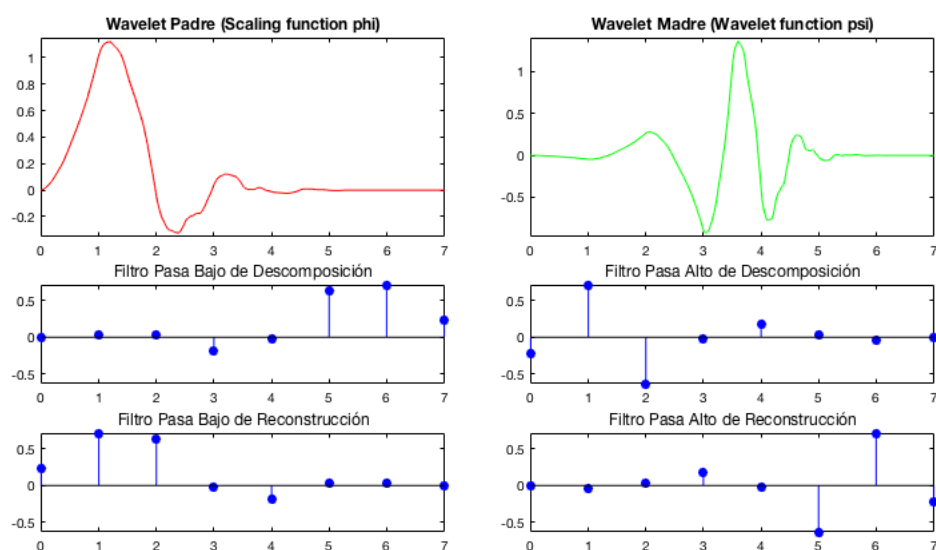
En cada nivel de descomposición se realizó la modelación del componente de aproximación con el modelo ARIMA que mejor se ajustara a la sub-serie, dado que este proporciona buenos resultados en ausencia de grandes cambios aleatorios, y para las componentes de detalle el modelo GARCH, que es más adecuado para capturar la dinámica de la varianza condicional de una serie temporal.

El nivel óptimo de descomposición se obtuvo donde los resultados de la evaluación del desempeño fueron mínimos, en este caso por la evaluación del método, menores índices RSME, MAPE, THEIL, MAE, BIA.Pro, Var.Pro, encontrando una limitante es el número mínimo de muestras que se requieren para los modelos ARIMA y GARCH. Causado por el muestreo descendente en la descomposición en árbol.

Es de resaltar que para cada modelo ARIMA y GARCH respectivamente, se calcularon los rezagos utilizando el criterio de información de Akaike (AIC). Además, se realizó un control de bondad del ajuste, para asegurar que cada modelo describa los datos de manera adecuada. Para lo cual se utilizaron pruebas Ljung-Box Q-test para correlación y Engle test para heterocedasticidad.



Gráfica 11. Descomposición Wavelet Precio Spot de la energía eléctrica



Gráfica 12. Wavelet Daubechies 4

En el proceso de obtener el mejor modelo que se ajustara a la serie de precios original, se evidenció que el mejor ajuste arrojado por el AIC, no siempre cumplía con los supuestos requeridos por los modelos ARIMA Y GARCH en algunas sub-series, y algunos de ellos presentaron autocorrelación o heterocedasticidad en los residuos. Se procedió para ambos casos a realizar una depuración y contrastar ambos casos; modelos optimizados y sobreestimados.

## RESULTADOS SOBRE-ESTIMADOS

Los resultados obtenidos después de utilizar el criterio de información de Akaike (AIC), para seleccionar las componente autorregresiva  $p$  y de medias móviles  $q$  sin realizar control de bondad del ajuste de los modelos obtenidos se pueden observar en la Tabla 2. Para cada modelo ajustado se calcularon los rezagos y el correspondiente AIC, el mejor modelo de ajuste es: el modelo de regresión con el menor AIC.

La siguiente tabla muestra la comparación de los resultados de los modelos que se obtuvieron después de realizar el pronóstico in simple, los cuales sirven de contraste con respecto al modelo propuesto, el modelo con el mayor número de indicadores donde los valores son más pequeños es el WAVELET-ARIMA-GARCH-NIVEL 2, aunque este a su vez presenta un problema de sesgo.

Tabla 2. Evaluación de los Modelos

MODELO	NIVEL	ARIMA Aj	GARCH D1	GARCH D2	GARCH D3	RSME	MAPE	MAE	THEIL	BIA.Pro	Var.Pro
ARIMA	na	7,1,8	Na	na	na	5.994	10.16	4.489	0.066	0.00017	0.121
ARIMA-GARCH	na	7,1,8	<u>2,1</u>	na	na	6.059	10.08	4.522	0.067	0.00003	0.156
WAVELET-ARIMA	1	8,1,7	Na	na	na	5.883	10.25	4.490	0.065	0.00061	0.120
PROPUESTO	1	8,1,7	4,6	na	na	4.629	8.42	3.680	0.051	0.00100	0.101
PROPUESTO	2	4,1,1	4,6	<u>1,4</u>	na	<b>4.409</b>	8.38	3.618	<b>0.048</b>	0.00770	<b>0.051</b>
PROPUESTO	3	1,1,1	4,6	<u>1,4</u>	<u>0,1</u>	4.536	<b>8.05</b>	<b>3.527</b>	0.050	0.00730	0.149

\*Nivel se refiere al nivel de descomposición wavelet.

\*\* Para el caso Wavelet - ARIMA la componente D1=ARMA(4,2). Engle test para heterocedasticidad de los residuos (positiva)

\*\*\* Aj corresponde al nivel  $j=1,2,3$ .

\*\*\*\* Engle test para heterocedasticidad de los residuos (positiva), subrayado

\*\*\*\*\* *Ljung-Box Q-test* para correlación de residuos (positiva), doble subrayado.

\*\*\*\*\* Valores mínimos en negrita.



Resalta que el modelo propuesto para cualquier nivel de análisis es superior a todas las metodologías utilizadas para el análisis de series de tiempo.

### RESULTADOS ESTIMADOS (CONTROL DE BONDAD DEL AJUSTE)

Para ilustrar el comportamiento del método propuesto, ver Tabla 3, se realizó una verificación y diagnóstico de los residuos, precios reales menos precios ajustados, los cuales deben cumplir los requisitos de un proceso de ruido blanco: media cero, varianza constante, proceso no correlacionado y distribución normal. Estos requisitos se verificaron para los modelos ARIMA y GARCH en todas las sub-series de aproximación y detalle respectivamente. Las componentes que no cumplieron con alguno de estos supuestos se excluyeron del cálculo con el objeto de obtener un ajuste más exacto y pronóstico confiable.

El modelo WAVELET-ARIMA-GARCH-NIVEL 1, obtuvo cuatro indicadores con menor valor, uno más que el modelo sin control de bondad de ajuste, lo que corrobora que realizar un chequeo riguroso permite obtener un mejor método de pronóstico.

Tabla 3. Evaluación de los Modelos (Control Bondad del Ajuste)

MODELO	NIVEL	ARIMA Aj	GARCH D1	GARCH D2	GARCH D3	RSME	MAPE	MAE	THEIL	BIA.Pro	Var.Pro
ARIMA	na	7,1,8	na	na	na	5.994	10.16	4.489	0.066	0.00017	0.121
ARIMA-GARCH	na	7,1,8	1,1	na	na	6.185	10.21	4.545	0.068	0.00001	0.081
WAVELET-ARIMA	1	8,1,7	na	na	na	6.129	10.61	4.686	0.067	0.00057	0.132
PROPUESTO	1	8,1,7	4,6	na	na	<b>4.629</b>	<b>8.42</b>	<b>3.680</b>	<b>0.051</b>	0.00100	0.101
PROPUESTO	2	4,1,1	4,6	na	na	5.551	10.33	4.504	0.061	0.00490	<b>0.074</b>
PROPUESTO	3	1,1,1	4,6	na	na	6.192	11.08	4.849	0.068	0.00380	0.183

\*Nivel se refiere al nivel de descomposición wavelet.

\*\* Para el caso WAVELET-ARIMA la componente D1=ARMA(0,0), se excluye del cálculo.

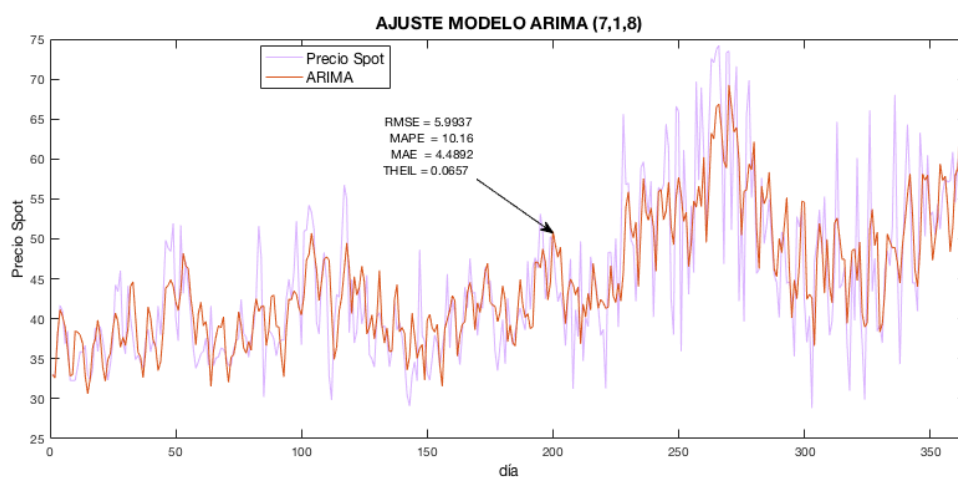
\*\*\* Aj corresponde al nivel j=1,2,3.

## AJUSTE DE LOS MODELOS

A continuación, se presentan las gráficas de ajuste para cada modelo y sus correspondientes indicadores de desempeño más significativos, entre mejor se superponga el modelo a la serie original, mejor será su pronóstico en un horizonte de tiempo dado.

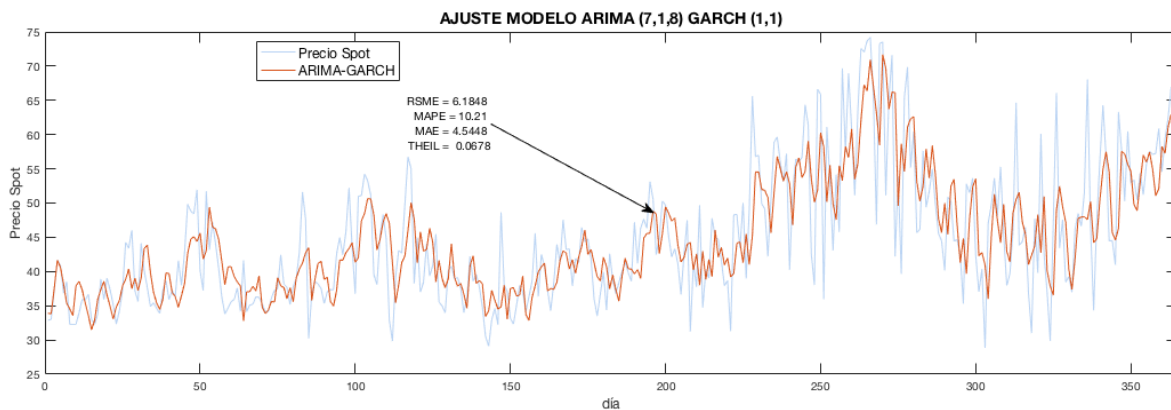
En la Figura 13, se observa cómo el modelo ARIMA no alcanza a capturar la volatilidad del precio, y marca una tendencia de la serie de precios original, en intervalos donde los precios tienen un comportamiento estable. El modelo tiene mayor ajuste que en los clústeres de volatilidad donde su ajuste es mínimo.

Lo anterior podría mejorar con una variable explicativa como el clima, pero no es caso de estudio de este documento.



Gráfica 13. Estimación Precio Spot con ARIMA

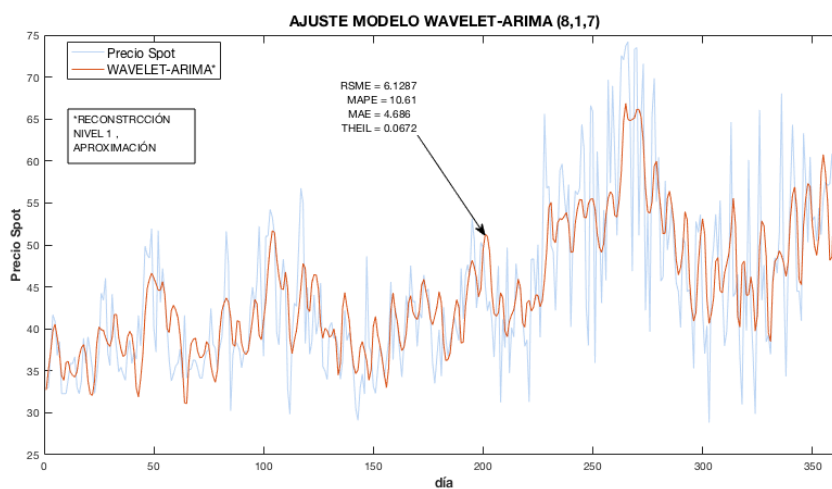
El modelo ARIMA-GARCH, Figura 14, presenta un menor ajuste que el modelo ARIMA como se puede observar, ya que los indicadores de desempeño están por encima de este, lo que permite inferir que, al incorporar la componente de varianza condicional, se agrega distorsión al modelo, lo cual no es conveniente para un pronóstico de la variable analizada.



*Gráfica 14. Estimación Precio Spot ARIMA-GARCH*

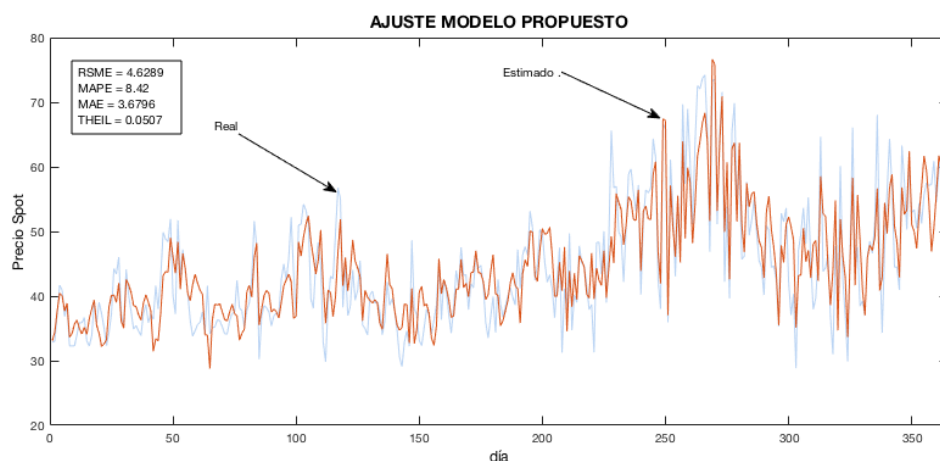
El modelo WAVELET-ARIMA se comporta como un proceso de filtrado eliminando los picos debidos a la volatilidad del precio, lo que le permite mostrar la tendencia general de la serie, pero elimina algunas componentes de volatilidad que le dan detalle a la serie, esto debido a que la componente de detalle presenta heterocedasticidad en los residuos y se excluyó del cálculo. Lo que no lo hace un modelo adecuado para serie de precios del mercado eléctrico, dado que este se caracteriza por la presencia de clúster de volatilidad, que no logran ser capturados por este modelo. Además, se evidencia que no todas las series se pueden modelar con una misma técnica, dadas las características estadísticas propias de cada una de ellas.

Se podrían analizar en futuros estudios intervalos y periodos diferentes, que se puedan ajustar de una mejor forma a este modelo y así obtener mejores resultados.



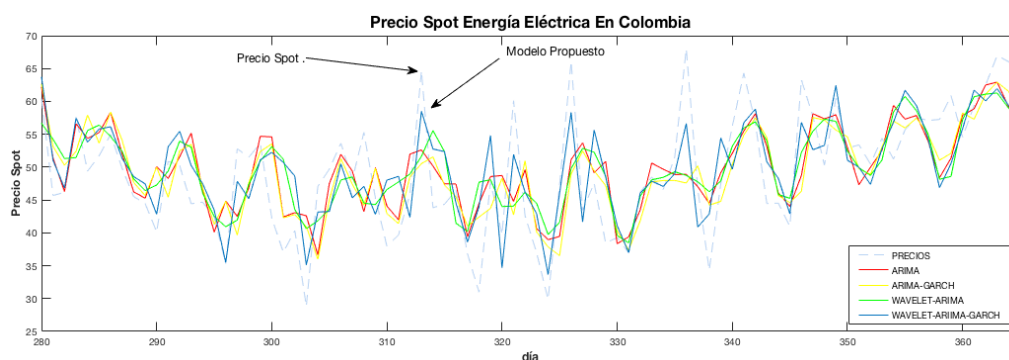
*Gráfica 15. Estimación Precio Spot WAVELET-ARIMA*

El comportamiento del modelo propuesto se puede observar en la Figura 16, el cual se superpone mejor que los métodos anteriores, dado que al modelar cada sub-serie con el mejor modelo que se ajusta a los datos ARIMA (tendencia), GARCH (volatilidad) combinados dan un resultado óptimo y permiten capturar mejor las propiedades por separado de las componentes de aproximación y detalle.



Gráfica 16. Estimación Precio Spot WAVELET-ARIMA-GARCH

El contraste de los modelos, la Figura 17, permite evidenciar cómo el modelo propuesto captura la volatilidad de la serie y representa la variable precio spot de una mejor manera, mejorando la probabilidad de pronóstico del modelo.



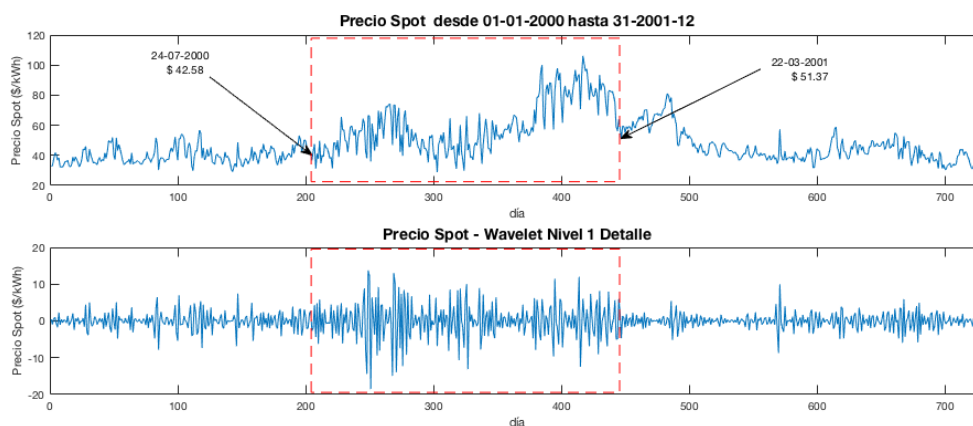
Gráfica 17. Ajuste Modelos

## COMPONENTES DE DETALLE

Los cambios en la varianza son importantes, porque a menudo indican que algo fundamental ha cambiado en la serie de datos. En las series de tiempo la Transformada Wavelet Discreta se puede utilizar para detectar cambios de volatilidad, para el caso del precio spot de la energía eléctrica en Colombia para el periodo comprendido desde 01-01-2000 hasta 31-12-2001,

se utilizó la metodología de “Detección de múltiples cambios en una secuencia de variables dependientes” (Lavielle, 1999)

Este método se aplicó a componente de detalle nivel 1, de la descomposición wavelet de la serie de precios Spot, pudiéndose detectar cambio en la varianza entre los puntos 206 (24-07-2000, \$ 42.58) y 447 (22-03-2001, \$ 51.37), (Figura 18), la región subrayada corresponde a un periodo de alta volatilidad debido a la reducción de la oferta eléctrica, los registros se contrastaron con la variable climática Oceanic Niño Index (ONI) de la National Oceanic & Atmospheric Administration, que permite estimar los periodos fríos y cálidos, los cuales coinciden con un episodio de La Niña, y que no concuerda con el alza de precios, pero puede estar relacionado con un tema regulatorio o de control de tarifas, ver Tabla 4. Esto se valida con los resultados obtenidos por Botero & Cano, (2008) quienes identifican algunos periodos de intervención por parte del regulador en Colombia.



Gráfica 18. Detección puntos cambio en la varianza.

Tabla 4. Episodios históricos de El Niño / La Niña

Año	Oceanic Niño Index (ONI)											
1998	<u>2.2</u>	<u>1.9</u>	<u>1.4</u>	<u>1</u>	<u>0.5</u>	-0.1	<u>-0.8</u>	<u>-1.1</u>	<u>-1.3</u>	<u>-1.4</u>	<u>-1.5</u>	<u>-1.6</u>
1999	<u>-1.5</u>	<u>-1.3</u>	<u>-1.1</u>	<u>-1</u>	<u>-1</u>	<u>-1</u>	<u>-1.1</u>	<u>-1.1</u>	<u>-1.2</u>	<u>-1.3</u>	<u>-1.5</u>	<u>-1.7</u>
2000	<u>-1.7</u>	<u>-1.4</u>	<u>-1.1</u>	<u>-0.8</u>	<u>-0.7</u>	<u>-0.6</u>	<u>-0.6</u>	<u>-0.5</u>	<u>-0.5</u>	<u>-0.6</u>	<u>-0.7</u>	<u>-0.7</u>
2001	<u>-0.7</u>	<u>-0.5</u>	-0.4	-0.3	-0.3	-0.1	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.3	-0.3
2002	-0.1	0	0.1	0.2	0.4	<u>0.7</u>	<u>0.8</u>	<u>0.9</u>	<u>1</u>	<u>1.2</u>	<u>1.3</u>	<u>1.1</u>
2003	<u>0.9</u>	<u>0.6</u>	0.4	0	-0.3	-0.2	0.1	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4

Fuente: NOAA, elaboración propia

\*índice subrayado indica presencia del fenómeno del niño

\*\*índice subrayado doble corresponde a presencia del fenómeno de la niña.

## CONCLUSIONES

La metodología propuesta en este documento, comparada con las técnicas más utilizadas para análisis de series de tiempo, como los métodos ARIMA, GARCH, muestra mejor resultados, al aprovechar la propiedad de filtrado de la Transformado Wavelet y modelar la componente de aproximación, por lo general de mejor comportamiento con la metodología ARIMA, y la componente de detalle con características de alta volatilidad con la metodología GARCH. Por lo que se puede inferir que el modelo propuesto permite predecir con mayor exactitud y un horizonte de tiempo más amplio.

Algunas componentes consecuencia de la descomposición wavelet, al ser modelas con los métodos ARIMA y GARCH pueden presentar heterocedasticidad y autocorrelación en los residuos, las cuales se deben excluir para garantizar exactitud del modelo propuesto.

Se encontró una metodología para determinar el nivel de descomposición óptimo para el método propuesto, donde se minimizan las medidas de rendimiento (RSME, MAPE, THEIL, MAE, BIA.Pro, Var.Pro), para lo cual el nivel con mayor número de indicadores mínimos es el mejor.

Se introdujo una metodología que no se había usado en Colombia para la detección de puntos de cambios en la varianza, la cual permite identificar intervalos donde la varianza de una serie de tiempo a cambio y, por lo tanto, algo fundamentación en la serie, lo cual tiene aplicación en la identificación de puntos críticos de alta volatilidad debida a factores externos climatológicos o regulatorios del mercado.



## Bibliografía

- Agudelo, A. P., López-Lezama, J. M., & Velilla, E. (2015). Predicción del Precio de la Electricidad en la Bolsa mediante un Modelo Neuronal No-Lineal Autorregresivo con Entradas Exógenas. *Información tecnológica*, 26(6), 99-108.
- Arias, J. C., & Ribon, S. M. (2009). *Pronóstico del precio de contratos de la energía en el largo plazo a través del método ANFIS*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.
- Aristizábal, J., & Bolívar, A. F. (2008). *Definición de portafolios de inversión en Colombia usando redes neuronales artificiales*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Barrientos, J., Rodas, E., Velilla, E., Lopera, M., & Villada, F. (2012). Modelo para el pronóstico del precio de la energía eléctrica en Colombia. *Lecturas de Economía*(77), 91-127.
- Bedoya, D. G. (2009). Modelación del precio de la energía en Colombia usando un modelo de inferencia neurodifuso (anfis ). *Revista Soluciones de Posgrado EIA*, 25-38.
- Botero, S., & Cano, J. A. (2008). Análisis de series de tiempo para la predicción de los precios de la energía en la bolsa de Colombia. *Cuadernos de Economía*, 27(48), 173-208.
- Conejo, A. J., Plazas, M. A., Espinola, R., & Molina, A. B. (2005). Day-ahead electricity price forecasting using the wavelet transform and ARIMA models. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(2), 1035-1042.
- Contreras, J., Espínola, R., Nogales, F. J., & Conejo, A. J. (2003). ARIMA Models to Predict Next-Day Electricity Prices. *IEEE Transactions On Power System*, 18(3), 1014-1020.
- De la Fuente, S. (s.f.). *Modelo Arima (p, d, q) (P, D, Q)s*. Obtenido de <http://www.estadistica.net>:  
<http://www.estadistica.net/ECONOMETRIA/SERIES-TEMPORALES/modelo-arima.pdf>

- Díez, I. C. (2015). *Proyección de precios de energía eléctrica de mediano plazo en el mercado colombiano mediante la aplicación del índice de Lerner*. Medellín: Universidad Eafit.
- El Congreso de Colombia. (1994). *Ley 142 de 1994. Por la cual se establece el régimen de los servicios públicos domiciliarios y se dictan otras disposiciones*. Bogotá: Diario Oficial N° 41.433. Año CXXX.
- El Congreso de Colombia. (1994). *Ley 143 de 1994*. Bogotá: Diario Oficial No. 41.434, de 12 de julio de 1994. .
- Franco, F. F. (2012). *Análisis de un modelo de mercado mayorista de energía de corto plazo mediante teoría de juegos*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Galindo, A. F., & Villarreal, J. (2017). *Modelamiento de los precios de la energía en bolsa en Colombia incorporando el efecto del ENSO*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- García, J., Bohórquez, S., López, G. A., & Marín, F. (2013). Poder de mercado en mercados spot de generación eléctrica: metodología para su análisis. *Documentos de trabajo Economía y Finanzas*, 13(5).
- García, R. C., Contreras, J., van Akkeren, M., & García, J. B. (2005). A GARCH forecasting model to predict day-ahead electricity prices. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(2), 867-874.
- Gil, M. M., & Maya, C. (2008). Modelación de la volatilidad de los precios de la energía eléctrica en Colombia. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 7(12), 87-114.
- Hernández, O., Velásquez, J. D., & Dyner, I. (2005). Modelos ARIMA y estructural de la serie de precios promedio de los contratos en el Mercado Mayorista de Energía Eléctrica en Colombia. *Energética*(34), 5-10.

- Hidalgo, R. A. (2013). *Determinación de precios vía equilibrio de Cournot en el mercado eléctrico spot colombiano*. Medellín: Universidad EAFIT.
- Hurtado, L., Quintero, O. L., & García, J. (2014). Estimación del precio de oferta de la energía eléctrica en Colombia mediante inteligencia artificial. *Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa*(18), 54-87.
- Jiménez, L. A. (2013). *Modelamiento de tipo movimiento browniano para el mercado spot de electricidad en Colombia*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Jin, J., & Kim, J. (2015). Forecasting natural gas prices using wavelets, time series, and artificial neural networks. *PLoS ONE*, 10(11), 1-23.
- Kouro, S., & Musalem, R. (2013). *Tutorial introductorio a la teoría de Wavelet*. Obtenido de Técnicas Modernas en Automática: <http://www2.elo.utfsm.cl/~elo377/>
- Lavielle, M. (1999). Detection of multiple changes in a sequence of dependent variables. *Stochastic Processes and their Applications*, 83(1), 79-102.
- Lopez, C. L., & Quitian, M. S. (2007). *Diagnostico de las Centrales TermoElectricas en Colombia y Evaluacion de Alternatias Tecnologicas Para elcumplimiento de La norma de emisión de fuentes fijas*. Tesis de grado, Universidad de la Salle, Facultad de Ingenieria Ambiental y Sanitario, Bogota.
- Muñoz-Santiago, A., Urquijo-Vanstrahlengs, J., Castro-Otero, A., & Lombana, J. (2017). Pronóstico del precio de la energía en Colombia utilizando modelos ARIMA con IGARCH. *Revista de Economía del Rosario*, 20(1), 125-159.
- Pulgarín, A., Smith, R. A., & Poveda, G. (2000). Predicción del precio de la energía eléctrica con un modelo de redes neuronales y usando variables macroclimáticas. *XIV Seminario*

*Nacional de Hidráulica e Hidrología* (págs. 1-11). Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Ramírez, C. A. (2013). *Comparación de la efectividad de diferentes herramientas para modelar el precio del mercado de electricidad en Colombia*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Sierra, J., & Castaño, E. (Medellín 20-23 de Julio de 2010). Pronóstico del precio spot del mercado eléctrico colombiano con modelos de parámetros variantes en el tiempo y variables fundamentales (en desarrollo. *VII Coloquio Regional de Estadística* (págs. 1-14). Medellín: Universidad Nacional de Colombia - Sede Medellín.

Strang, G., & Nguyen, T. (1996). *Wavelets and Filter Banks* (2 ed.). USA: Wellesley-Cambridge Press.

Tan, Z., Zhang, J., Wang, J., & Xu, J. (2010). Day-ahead electricity price forecasting using wavelet transform combined with ARIMA and GARCH models. *Applied Energy*, 87(11), 3606–3610.

UNICEN. (s.f.). *Introducción a la Transformada Wavelet. Descomposición de señales*. Obtenido de Facultad de Ciencias Exactas - UNICEN:

<http://www.exa.unicen.edu.ar/escuelapav/cursos/wavelets/apunte.pdf>

Uribe, E., & Trespacios, A. (2014). Contraste de modelos estocásticos para el precio de la energía en Colombia. *Revista de la Facultad de Ciencias*, 3(1), 41-55.

Vargas, L. M. (2009). *Información del sector eléctrico y los mercados de energía eléctrica de los países de la región cier*. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

- Velásquez, J. D., Franco C., C. J., & Olaya, Y. (2010). Predicción de los precios promedios mensuales de contratos despachados en el mercado mayorista de electricidad en Colombia usando máquinas de vectores de soporte. *Cuadernos de Administración*, 23(40), 321-337.
- Villada, F., García, E., & Molina, J. D. (2011). Pronóstico del precio de la energía eléctrica usando redes neuro-difusas. *Información tecnológica*, 111-120.
- Strang, G., & Nguyen, T. (1996). *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley: Wellesley-Cambridge Press.

## ANEXOS

A continuación, se muestran los resultados de la aplicación del Criterio de Información Alkaika en la simulación de los modelos ARIMA y GARCH, para determinar los retardos, donde  $p$  es el rezago correspondiente a la componente AR,  $q$  rezago correspondiente a la componente MA, además se realiza el chequeo de los residuales.

$h = 1$  indica el rechazo de la hipótesis nula de que los residuos no están autocorrelacionados.

$h = 1$  indica que debe rechazar la hipótesis nula de heterocedasticidad condicional y concluir que hay efectos ARCH significativos en la serie de retorno.

Tabla 5. ARIMA

<b>A R I M A</b>									
p/q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2441.1	2440.2	2441.1	2442.8	2441	2442.7	2444	2431.7	2428.5
2	2440.1	2441.3	2442.8	2442.4	2440.5	2399.2	2420.9	2422.1	2427.1
3	2441.4	2442.4	2441.4	2394.5	2395.3	2396.8	2421.4	2420.4	2420.7
4	2433.6	2413.5	2395.8	2394.8	2393	2394.8	2396	2387.3	2389
5	2432	2403.3	2396.6	2395.5	2397.5	2384.7	2384.3	2385.8	2387.5
6	2424.2	2396.2	2410.8	2397.5	2393.7	2383	2381.2	2383.2	2385.1
7	2424.2	2421.7	2400.1	2400.2	2390.5	2384	2383.1	2377	2378.7
8	2423.3	2425	2394.7	2389.1	2387.8	2384.8	2385.1	2378.7	2380.6
9	2425.1	2426.9	2412	2381.3	2388.9	2384.6	2382.4	2379.9	2380

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para herocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 6. ARIMA-GARCH

ARIMA									
p/q	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2441.1	2440.2	2441.1	2442.8	2441	2442.7	2444	2431.7	2428.5
2	2440.1	2441.3	2442.8	2442.4	2440.5	2399.2	2420.9	2422.1	2427.1
3	2441.4	2442.4	2441.4	2394.5	2395.3	2396.8	2421.4	2420.4	2420.7
4	2433.6	2413.5	2395.8	2394.8	2393	2394.8	2396	2387.3	2389
5	2432	2403.3	2396.6	2395.5	2397.5	2384.7	2384.3	2385.8	2387.5
6	2424.2	2396.2	2410.8	2397.5	2393.7	2383	2381.2	2383.2	2385.1
7	2424.2	2421.7	2400.1	2400.2	2390.5	2384	2383.1	2377	2378.7
8	2423.3	2425	2394.7	2389.1	2387.8	2384.8	2385.1	2378.7	2380.6
9	2425.1	2426.9	2412	2381.3	2388.9	2384.6	2382.4	2379.9	2380
GARCH									
p/q	1	2							
1	2346.4	2316.4							
2	2313.2	2318.7							

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 7. WAVELET - ARIMA - APROXIMACIÓN

ARIMA - APROXIMACION - A1								
p/q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1317.6	1308	1304.7	1296	1299.7	1300.3	1299.8	1299.6
2	1294.2	1291	1272.4	1274.4	1276.4	1274.6	1275.9	1274.3
3	1294.6	1279.2	1274.3	1271.9	1269.2	1274.7	1276.4	1276.3
4	1295.3	1276	1269	1273.9	1266.4	1267.2	1269.9	1271.4
5	1289.5	1276.7	1268.8	1266	1267.7	1270.5	1261.5	1274.3
6	1281	1272.4	1268.4	1267.6	1264.3	1260.7	1273.5	1267
7	1282.2	1274.3	1267.5	1268.8	1276.1	1274	1273	1256.3
8	1282	1276.1	1268.5	1259.2	1260.6	1276.9	1255.8	1258.1

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 8. WAVELET - ARIMA - DETALLE

ARIMA - DETALLE - D1							
p/q	1	2	3	4	5	6	7
1	1173.2	1174.4	1174	1173.2	1170.4	1165	1166.9
2	1174.3	1176	1166.5	1168.1	1169.9	1166.9	1168.9
3	1175.1	1167.6	1168.5	1170.1	1170.7	1168.8	1160.3
4	1176.7	<b>1156.7</b>	1169.9	1171.7	1161.1	1160.8	1160.8
5	1172.9	1164.3	1160	1168.4	1158.8	1160.5	1162.3
6	1169.3	1166.3	1166.7	1167.7	1160.4	1162.2	1163.7
7	1171.3	1172.7	1162.3	1163.4	1165.6	1163.9	1160.6

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 1$

Tabla 9. WAVELET - ARIMA - GARCH - NI

ARIMA - APROXIMACION - A1								
p/q	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1317.6	1308	1304.7	1296	1299.7	1300.3	1299.8	1299.6
2	1294.2	1291	1272.4	1274.4	1276.4	1274.6	1275.9	1274.3
3	1294.6	1279.2	1274.3	1271.9	1269.2	1274.7	1276.4	1276.3
4	1295.3	1276	1269	1273.9	1266.4	1267.2	1269.9	1271.4
5	1289.5	1276.7	1268.8	1266	1267.7	1270.5	1261.5	1274.3
6	1281	1272.4	1268.4	1267.6	1264.3	1260.7	1273.5	1267
7	1282.2	1274.3	1267.5	1268.8	1276.1	1274	1273	1256.3
8	1282	1276.1	1268.5	1259.2	1260.6	1276.9	<b>1255.8</b>	1258.1

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$



Tabla 10. WAVELET - ARIMA - GARCH – N1

<b>GARCH - DETALLE - D1</b>							
p/q	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
<i>1</i>	1127.8	1127.8	1127.8	1129.8	1126.8	1122.2	1124.2
<i>2</i>	1117.8	1117.8	1117.8	1117.8	1121.6	1120.2	1122.2
<i>3</i>	1119.5	1119.5	1119.5	1119.5	1121.2	1120.2	1122.2
<i>4</i>	1119.5	1119.5	1118.9	1118.9	1118.9	<b>1116.4</b>	1116.4
<i>5</i>	1117.6	1117.6	1116.7	1116.7	1116.7	1118.4	1118.4
<i>6</i>	1117.6	1117.6	1116.7	1116.7	1116.7	1118.4	1118.4
<i>7</i>	1117.6	1117.6	1116.7	1116.7	1116.7	1118.4	1118.4

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 11. WAVELET - ARIMA - GARCH – N2

<b>ARIMA - APROXIMACION - A2</b>				
p/q	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	717.56	719.21	713.75	719.27
<i>2</i>	711.11	712.67	706.69	698.57
<i>3</i>	712.63	701.68	700.37	700.36
<i>4</i>	<b>697.34</b>	698.47	700.47	705.78

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 12. WAVELET - ARIMA - GARCH – N2

<b>GARCH - DETALLE - D2</b>					
p/q	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
<i>1</i>	613.29	611.47	613.47	<b>611.36</b>	611.36
<i>2</i>	613.29	612.23	612.23	611.36	611.36
<i>3</i>	613.29	611.42	611.42	611.36	611.36
<i>4</i>	613.29	611.42	611.42	611.36	612.88
<i>5</i>	613.29	611.42	611.42	611.36	612.88

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 1$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 13. WAVELET - ARIMA - GARCH – N3

<b>ARIMA - APROXIMACION - A3</b>				
p/q	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>1</i>	<b>407.69</b>	409.48	411.45	417.49
<i>2</i>	409.48	411.57	413.45	415.6
<i>3</i>	411.44	412.7	411.16	415.7
<i>4</i>	419.6	414.87	413.05	415.14

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 0$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$

Tabla 14. WAVELET - ARIMA - GARCH – N3

<b>GARCH - DETALLE - D3</b>				
p/q	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>0</i>	345.46	NA	NA	NA
<i>2</i>	NA	NA	NA	NA
<i>3</i>	NA	NA	NA	NA
<i>4</i>	NA	NA	NA	NA

Fuente: Elaboración propia, Datos: Software MatLab

\*Ljung-Box Q-test para correlación de residuos  $h = 1$

\*\*Engle test para heterocedasticidad de los residuos  $h = 0$