



Trabajo de grado en modalidad de aplicación

Problema de inventarios coordinados, entre una bodega y N minoristas, considerando múltiples productos en un escenario de demanda estocástica

Nicolás Chavarro Santana^{a,c}, Ivan David Camelo Prieto^{a,c}, Santiago Atehortua Galvis^{a,c},

Hector Andrés López Ospina^{b,c}, Oscar David Barrera Ferro^{b,c}

^aEstudiante de Ingeniería Industrial

^bProfesor, Director del Proyecto de Grado, Departamento de Ingeniería Industrial

^cPontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia

Resumen de diseño en Ingeniería

This document is about a multi-product policy in one warehouse systems and N coordinated retailers.

The methods of solution implemented in this work assume a deterministic as well as stochastic behavior of the demand, having the stochastic solution allows the scope of the project to have variations of demand with known distributions, in order to have dynamic solutions that come close to reality.

The main objective of the work is to design a solution for the problem of coordinated inventories, between a warehouse and N retailers, which considers multiple products, with stochastic demand; having as specific objectives i) Develop a cost function for a problem of coordinated inventories between a warehouse and N retailers that takes into account multiple products, with stochastic demand, ii) Design a deterministic solution for the problem, iii) Measure the performance of the deterministic technique in scenarios with demand variability, iv) Integrate a Monte Carlo simulation and the solution technique designed to solve the stochastic version of the problem, and v) Evaluate the impact of the solution method proposed by the Monte Carlo simulation and management indicators.

With the mathematical models, the factors of interest were defined with each of their levels in order to generate different instances to evaluate the problem in different situations. In order to find the lowest possible cost, we program a tabu search metaheuristic in VBA for Microsoft Excel, executing it for each one of the generated instances for both policies. With the final results a simulation was carried out which generates 1000 random demands and compares the two policies using the stochastic function in order to determine which of the two policies is better. With the results obtained the document presents an important conclusion: Taking both versions, the stochastic solution improves between 5.4% and 10%.

1. Justificación y planteamiento del problema

La administración de la cadena de suministro se entiende como la determinación e integración de proveedores de transporte, proveedores de materia prima, distribuidores, gestión de inventarios, flujo de información, entre otras; siendo uno de sus objetivos principales maximizar el valor agregado a los clientes (Heizer & Render, 2009). Según V. Gutiérrez & Vidal (2008), en este contexto, la gestión de inventarios es un factor crítico debido a que las inversiones son cuantiosas y los costos asociados a inventarios de materias primas, productos en proceso y productos finales crean una gran oportunidad de lograr mejoras en el sistema. En consecuencia, es fundamental tener en cuenta la coordinación que debe existir entre los diferentes participantes a lo largo de la cadena; definiéndose un sistema de coordinación como un plan operativo para alinear las operaciones de los eslabones y mejorar el beneficio del sistema (X. Li & Wang, 2007).

Más específicamente, en escenarios de coordinación de inventarios, es posible encontrar sistemas de almacenamiento multi-nivel donde una bodega abastece a varios minoristas y estos tienen tiempos de reposición coordinados. Un acercamiento a este problema para un único producto es el propuesto por Abdul-Jalbar, Segerstedt, Sicilia, & Nilsson (2010), en donde cada minorista tiene una demanda constante y esta debe ser satisfecha, es decir, no puede haber faltantes por parte de la bodega. Los plazos de entrega se consideran despreciables y los costos de ordenar y mantener son determinísticos y conocidos. El objetivo es determinar las políticas de reabastecimiento que minimicen el costo total del sistema (Abdul-Jalbar et al., 2010). La notación utilizada es la siguiente:

- Parámetros

d_j : Demanda por unidad de tiempo del minorista $j = 1, 2, \dots, N$

k_j : Costo fijo de reabastecimiento por pedido del minorista $j = 1, 2, \dots, N$

k_0 : Costo fijo de reabastecimiento por pedido de la bodega

h_j : Costo de mantener inventario por cada unidad y por unidad de tiempo del minorista $j = 1, 2, \dots, N$

h_0 : Costo de mantener inventario por cada unidad y por unidad de tiempo de la bodega

- Las variables son las siguientes:

t_j : Intervalo de reabastecimiento en el minorista $j = 1, 2, \dots, N$

t_0 : Intervalo de reabastecimiento en la bodega

f_j : Constante de coordinación: Número de veces que los minoristas $j = 1, \dots, N$ realizan un pedido durante el tiempo de reabastecimiento de la bodega

Una de las hipótesis relevantes del trabajo de Abdul-Jalbar et al. (2010) es la coordinación entre los tiempos de ciclo de la bodega con cada minorista. Dicha hipótesis se escribe matemáticamente como:

$$t_0 = t_j f_j \quad \forall j \in J$$

$$s. t. f_j \in \left\{ \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

El valor de la constante de coordinación f_j puede ser mayor o igual a 1 o menor a 1. Cuando es mayor o igual a 1 quiere decir que el minorista tiene el mismo tiempo de ciclo que la bodega, o pide con menos frecuencia que la bodega. En cambio, cuando la constante es menor a 1 pide con mayor frecuencia que la bodega. Además, en dicho trabajo obtienen que el costo total promedio por unidad de tiempo para el sistema es el siguiente:

$$C_T = \frac{1}{t_0} \left[k_0 + \sum_{j=1}^N f_j k_j \right] + \frac{t_0}{2} \left[\sum_{j=1}^N \frac{h_j d_j}{f_j} + h_0 \sum_{j: f_j > 1} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_j \right]$$

Para este problema de coordinación de inventarios de un único producto, desde la propuesta realizada por Abdul-Jalbar et al. (2010), se han realizado múltiples extensiones en la literatura científica. Una primera línea de innovación consiste en ajustar la función de costos para llegar a mejores soluciones. Por ejemplo, J. Li, Chu, and Chen (2011) consideran una flota de vehículos de capacidad limitada, donde coordinando las entregas se logran reducir los costos finales. De igual manera, Senyigit and Akkan (2012) realizan una modificación a la heurística Abdul-Jalbar et al. (2010), en donde buscan comparar el costo de reposición con el costo de mantener inventario, y de esta manera, logran resultados más eficientes en el 99% de los casos. Por otro lado, algunos autores buscan mejorar la eficiencia de la técnica de solución por medio del diseño de meta-heurísticas como es el caso de Köchel and Thiem (2011), que aborda el problema mediante un Particle Swarm Optimization (PSO). Paralelamente Taleizadeh, Niaki, Aryanezhad, & Shafii (2013), abordan el problema mediante un Algoritmo Genético (GA, por sus siglas en inglés). De igual modo Yang, Chan, & Kumar (2012), también abordan el problema mediante un GA. Estas líneas de extensión, sin embargo, dejan sin explorar dos características de interés: i) la posibilidad de formular políticas de inventario coordinado para múltiples productos y ii) el estudio de la variabilidad de la demanda.

A pesar de la cantidad de artículos relacionados con problemas de coordinación de inventarios, los sistemas de múltiples productos han recibido poca atención. Esta limitación es relevante puesto que la mayoría de compañías producen diferentes tipos de productos y la división del problema puede generar sacrificios en la función objetivo. Ahora bien, algunos autores proponen el estudio de sistemas con múltiples productos a través de la conformación de lotes y el uso de técnicas existentes (Bozorgi, 2016; J. Gutiérrez, Colebrook, Abdul-Jalbar, & Sicilia, 2013). Así mismo, otros autores resuelven problemas con múltiples productos, pero sin coordinación entre la bodega y los minoristas (Nambirajan, Mendoza, Pazhani, Narendran, & Ganesh, 2016; Xu, 2012).

Por otro lado, las diferentes industrias enfrentan variación de la demanda debido a factores internos y externos (Govindan, 2015). Los internos se pueden dar por introducir un nuevo producto con características similares a un producto ya existente, o también por una mala comunicación entre los eslabones de la cadena de suministro, lo que lleva a lo que se conoce como el “efecto látigo”. Externamente estas variaciones se pueden dar porque la competencia crea incentivos para aumentar sus ventas, entre muchas otras razones. Estos factores internos y externos generan una incertidumbre en la demanda, que se conoce como demanda estocástica (Govindan, 2015). En consecuencia, es de vital importancia considerar un escenario donde haya fluctuaciones en la demanda, sin embargo, son muy pocos los autores que tratan el problema de coordinación de inventarios en un escenario de demanda estocástica (Chavarro & Fresen, 2015).

En ese orden de ideas, esta propuesta plantea responder a la siguiente pregunta: *¿Cómo diseñar una técnica de solución para el problema de coordinación de inventarios, entre una bodega y N minoristas, considerando diferentes tipos de productos en un escenario de demanda estocástica?*

2. Antecedentes

La administración y coordinación de inventarios es un tema que ha tomado fuerza en las últimas décadas debido a los costos en los que incurre una empresa y que afectan las operaciones de la misma. Uno de los pioneros en el tema desarrolló un método de solución para una bodega y N minoristas (Schwarz, 1973), en el cual comprobó que para el caso en el cual todos los minoristas son iguales, la política óptima es estacionaria con ciclo único. Pero como toda teoría tiene sus limitaciones, en ésta se tiene que cuando los minoristas son diferentes, la política no necesariamente va a ser la óptima (Schwarz, 1973).

En ese orden de ideas, Abdul-Jalbar et al. (2010) proponen una heurística de coordinación de inventarios en la cual se busca reducir los costos en toda la cadena de suministros. El presente proyecto pretende realizar una extensión de dicha heurística, tal como se menciona en el numeral anterior, teniendo como enfoque la influencia de múltiples productos en la función de costos. En el tema multi-producto se han desarrollado varias investigaciones que ayudan en la administración de inventarios, y que a su vez sirven como base para el presente proyecto a pesar de que éstas están enfocadas a resolver distintos problemas. En la tabla 1 se observan las características (señaladas con una X) que coinciden entre los artículos consultados y el presente proyecto.

Bozorgi (2016) plantea un modelo matemático para la administración de inventarios multi-producto teniendo en cuenta que éstos sólo pueden ser manipulados en ambientes con muy bajas temperaturas y que por ende necesitan una cadena especializada para ellos; además de las emisiones que se generan con su respectiva política. Como resultados generan un método para agrupar productos en familias con características similares y un procedimiento para resolver el problema para cada una de ellas.

Artículo	Características			
	Multi-producto		Una bodega, N minoristas	X
Abdul-Jalbar, B., Segerstedt, A., Sicilia, J., & Nilsson, A. (2010). A new heuristic to solve the one-warehouse N-retailer problem. <i>Computers and Operations Research</i> , 37(2), 265–272.	Multi-producto		Una bodega, N minoristas	X
	Demanda estocástica		Coordinación	X
Bozorgi, A. (2016). Multi-product inventory model for cold items with cost and emission consideration. <i>International Journal of Production Economics</i> , 176, 123–142.	Multi-producto	X	Una bodega, N minoristas	
	Demanda estocástica		Coordinación	
Chavarro, G., & Fresen, M. (2015). Diseño de una heurística para el problema de inventarios coordinados, entre una bodega y N minoristas, que considere políticas de ciclo compartido en un escenario de demanda estocástica. <i>Pontificia Universidad Javeriana</i> .	Multi-producto		Una bodega, N minoristas	X
	Demanda estocástica	X	Coordinación	X
Topan, E., Pelin Bayindir, Z., & Tan, T. (2010). An exact solution procedure for multi-item two-echelon spare parts inventory control problem with batch ordering in the central warehouse. <i>Operations Research Letters</i> , 38(5), 454–461.	Multi-producto	X	Una bodega, N minoristas	X
	Demanda estocástica	X	Coordinación	
Schwarz, L. B. (1973). A Simple Continuous Review Deterministic One-Warehouse N-Retailer Inventory Problem. <i>Management Science</i> , 19(5), 555–566.	Multi-producto		Una bodega, N minoristas	X
	Demanda estocástica		Coordinación	X
Taleizadeh, Niaki, Shafii (2012). A hybrid method of fuzzy simulation and genetic algorithm to optimize constrained inventory control systems with stochastic replenishments and fuzzy demand	Multi-producto	X	Una bodega, N minoristas	
	Demanda estocástica	X	Coordinación	
Peter Kochel, Stefanie Thiem (2010). Search for good policies in a single-warehouse, multi-retailer system by particle swarm optimisation.	Multi-producto		Una bodega, N minoristas	X
	Demanda estocástica	X	Coordinación	
Arqum Mateen, Ashis Kumar, Subrata Mitra (2013). VMI for single-vendor multi-retailer supply chains under stochastic demand.	Multi-producto		Una bodega, N minoristas	X
	Demanda estocástica	X	Coordinación	

Tabla 1 – Artículos investigados. Elaboración de los autores

Por otro lado Topan, Pelin Bayindir, and Tan (2010) plantean una heurística para resolver el problema de un solo producto y un solo escalón; en la cual los resultados son satisfactorios pero no igualmente para un problema multi-producto con dos escalones. Asimismo, la heurística asintóticamente óptima en el número de piezas ofrece una cota inferior eficiente en la fórmula de costos, lo que hace que el método propuesto resuelva el problema con gran número de productos de manera eficiente (Topan et al., 2010).

Respecto a la naturaleza estocástica de la demanda, es posible encontrar diferentes publicaciones. Köchel & Thiem (2011) buscan las mejores políticas de inventarios para problemas de un mayorista con N minoristas. Los autores proponen un modelo Simulation Optimization (SO) en el que se integra Simulación del Montecarlo

con Particle Swarm Optimization (PSO). Concluyendo una optimización en los parámetros de las políticas de encargo, en los tipos y tamaños de los medios de transporte, centrando la optimización en los medios de transporte se observó un gran aumento en la utilidad total del problema.

Así mismo Taleizadeh et al. (2013), para la solución de un sistema de control de inventarios con restricciones, se desarrolla un método de hibridación entre un Fuzzy Simulation (FS) y un algoritmo genético. Como consecuencia, ellos determinan un mejor rendimiento computacional y una mejor solución, que un procedimiento ya realizado por medio de un Fuzzy Simulation (FS) y un Simulated Annealing (SA), con lo cual se concluyó que un Particle Swarm (PSO), un Harmony Search o un Differential Evolution pueden ser consideradas una técnica de solución para este problema.

Mateen, Chatterjee, & Mitra (2015) en un problema de inventarios administrados por el vendedor (VMI por sus siglas en inglés) para un mayorista y múltiples minoristas bajo una demanda estocástica. Este artículo bajo un modelo matemático se minimiza los costos totales de gestión de inventarios y por medio de un estudio de simulación exhaustivo se validan los resultados, los cuales se acercaron a los valores óptimos reales, reduciendo como tal el total de los costos del sistema.

Teniendo en cuenta la pertinencia encontrada por otros autores, para estudiar las características por separado, este trabajo propone dos extensiones al problema de coordinación de inventarios entre una bodega y múltiples minoristas. Como primera medida, se estudiarán sistemas de múltiples productos. La hipótesis es que la división del problema para usar las técnicas disponibles implica un sacrificio en la función objetivo. Adicionalmente, se incorporará la variabilidad de la demanda en el diseño de la función objetivo y la técnica de solución. Estudios previos han demostrado que usar la media de la demanda para tomar decisiones de inventarios, en escenarios de demanda estocástica, implica una subestimación del costo y conduce a decisiones erradas.

3. Objetivos

Diseñar una técnica de solución para el problema de inventarios coordinados, entre una bodega y N minoristas, que considere múltiples productos, en un escenario con demanda estocástica.

- Desarrollar una función de costos para un problema de inventarios coordinados entre una bodega y N minoristas que tenga en cuenta múltiples productos, en un escenario de demanda estocástica.
- Diseñar una técnica de solución para la versión determinística del problema.
- Medir el desempeño de la técnica determinística en escenarios con variabilidad en la demanda.
- Integrar una simulación de Montecarlo y la técnica de solución diseñada para solucionar la versión estocástica del problema.
- Evaluar el impacto del método de solución propuesto mediante la simulación de Montecarlo e indicadores de gestión.

4. Componente de Diseño en ingeniería

4.1. Declaración de diseño

El presente proyecto tiene como eje central el **diseño de una técnica de solución que permita resolver el problema de coordinación de inventarios para una bodega y N minoristas, en un ambiente de demanda estocástica y para múltiples productos**. Se espera que los resultados, arrojados por esta técnica, **mejoren la función de costos del modelo que no considera múltiples productos**.

Finalmente, en el desarrollo de esta propuesta **será, como estándar, usada la norma ISO 13053- 1: Métodos cuantitativos en la mejora de procesos. Seis sigma. Parte 1: Metodología DMAIC**. Esta metodología comprende cinco fases: definir, medir, analizar, mejorar y controlar (DMAIC). Esta parte de la norma ISO 13053 recomienda mejores prácticas para cada una de las fases de la metodología DMAIC empleada durante la ejecución de un proyecto (ISO, 2011).

4.2. Proceso de diseño

Todo el proceso del diseño se puede ver evidenciado en la ilustración 1, donde se explica la realización paso a paso de las dos políticas y la simulación final que las integra a las dos.

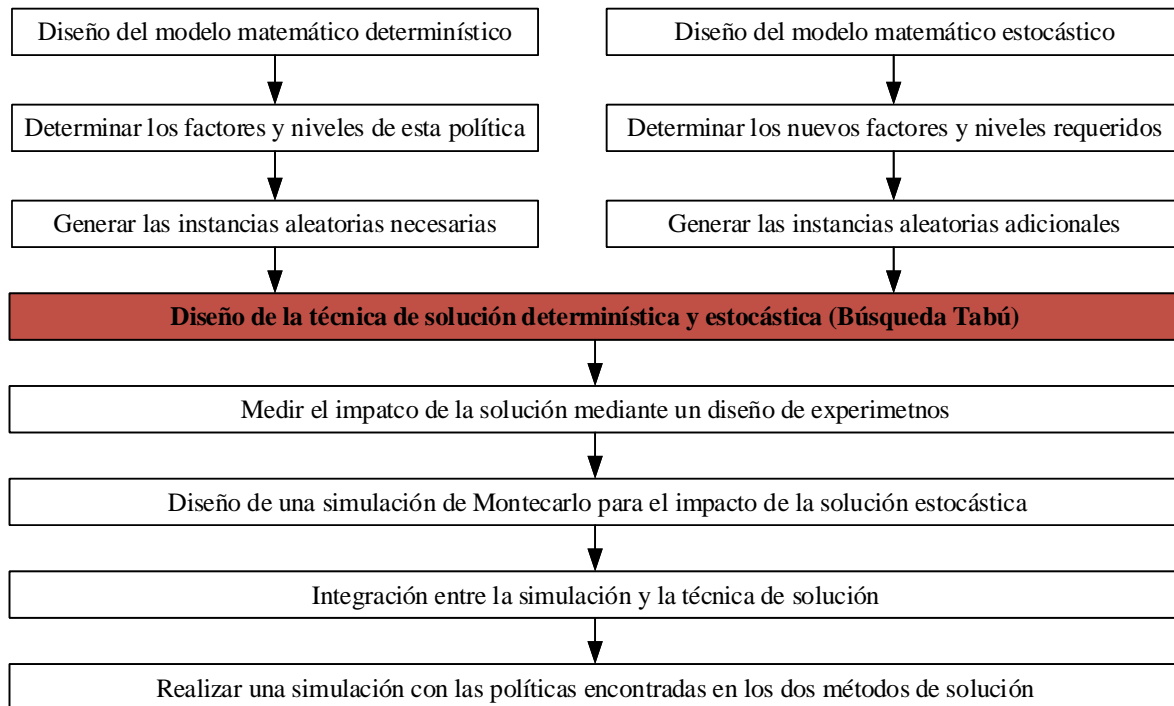


Ilustración 1 - Proceso de diseño

Según Edward Krick (1980), el proceso de diseño en ingeniería consta de cinco pasos, los cuales fueron seguidos para lograr los objetivos. En el primer paso se establece el punto inicial del problema, el punto al cual se quiere llegar y los criterios con los cuales van a ser evaluados los resultados. El segundo es donde se analiza todos los requerimientos del problema. En el tercer paso se buscan posibles formas de solucionar el problema. En el cuarto paso se evalúan las posibles soluciones de acuerdo con los criterios establecidos previamente. Por último, se establece la mejor manera de solucionar el problema. En la tabla 2 se detalla cómo fue el proceso de diseño que se siguió.

Pasos	Elementos	Descripción
Formulación del problema	Estado A	Solución inicial aleatoria
	Estado B	Solución factible con el menor costo encontrado
	Criterios	Menor costo, menor tiempo computacional
Análisis del problema		Como ya se ha mencionado anteriormente, la mayoría de investigaciones acerca de la coordinación de inventarios se ha basado en un único producto, pero en la práctica muy pocas empresas poseen un único producto en su portafolio. A raíz de esto surge la necesidad de encontrar un método de solución que tenga en cuenta esta situación. Así mismo, tener en cuenta la demanda estocástica permite tener niveles de inventario más cercanos a la demanda real, lo que deriva en menores costos de solicitud y mantenimiento de los mismos.
Búsqueda de alternativas		En este paso la idea es plantear distintas combinaciones entre el tamaño de la lista tabú, el número de iteraciones y criterios de penalización con el fin de encontrar una excelente función objetivo.
Evaluación de alternativas		Las alternativas generadas en el numeral inmediatamente anterior son evaluadas de acuerdo a los criterios definidos en la formulación del problema.
Especificación de la solución preferida		La solución escogida es aquella que cumple todas las restricciones del problema y obtiene los mejores resultados en los criterios mencionados en la formulación del problema.

Tabla 2 - Proceso de diseño

4.3. Requerimientos de desempeño y pruebas de rendimiento

Para garantizar el cumplimiento de los requerimientos de desempeño se realizó un análisis estadístico en el software especializado SPSS, el cual permitió implementar diferentes pruebas estadísticas. El objetivo es probar si existe diferencia estadísticamente significativa entre la función objetivo de la versión determinística y la versión estocástica. Además, verificar si el número de minoristas y el número de productos influye significativamente en la solución. Para las pruebas de rendimiento se partió de la hipótesis de que la variabilidad de la demanda iba a tener un impacto en la política de inventario encontrada por la versión determinística y se iba a reportar una reducción en los costos integrando esta variabilidad en la técnica de solución, y esto se

demuestra en la simulación final realizada a las políticas encontradas en donde se puede evidenciar una mejoría en los costos de hasta el 10%.

4.4. Restricciones

Al menos presentar las de proyecto de grado y explicar cómo se verifica que el diseño es factible (cumple todas las restricciones).

Para el desarrollo de la técnica establecida, se deben tener en cuenta **las siguientes condiciones:**

- Sin pérdida de generalidad, el tiempo de aprovisionamiento es despreciable.
- La política diseñada debe ser coordinada, en particular, serán políticas de ciclo compartido.
- La demanda de cada producto, en cada minorista, es desconocida, pero puede ser modelada como una variable aleatoria.
- Debe existir y ser conocido un costo común de ordenar.

4.5. Cumplimiento del estándar

La metodología utilizada para esta propuesta fue la metodología DMAIC, que se encuentra estandarizada en la norma ISO 13053 (2011). El desarrollo de este procedimiento se basa en un ciclo de mejora continua dividido en cinco etapas: Definir, Medir, Analizar, Mejorar y Controlar. El cumplimiento de dichas etapas se presenta en la metodología del presente trabajo.

5. Metodología

La metodología de este trabajo de grado estuvo basada en la norma ISO 13053-1, que enuncia la metodología DMAIC. Por consiguiente, este proyecto va a estar dividido en 3 fases, las cuales, cada una incluye a uno o varios de los pasos de la metodología DMAIC: Definir, medir, analizar, mejorar y controlar (ISO, 2011). En la ilustración 2 se representa gráficamente la metodología.

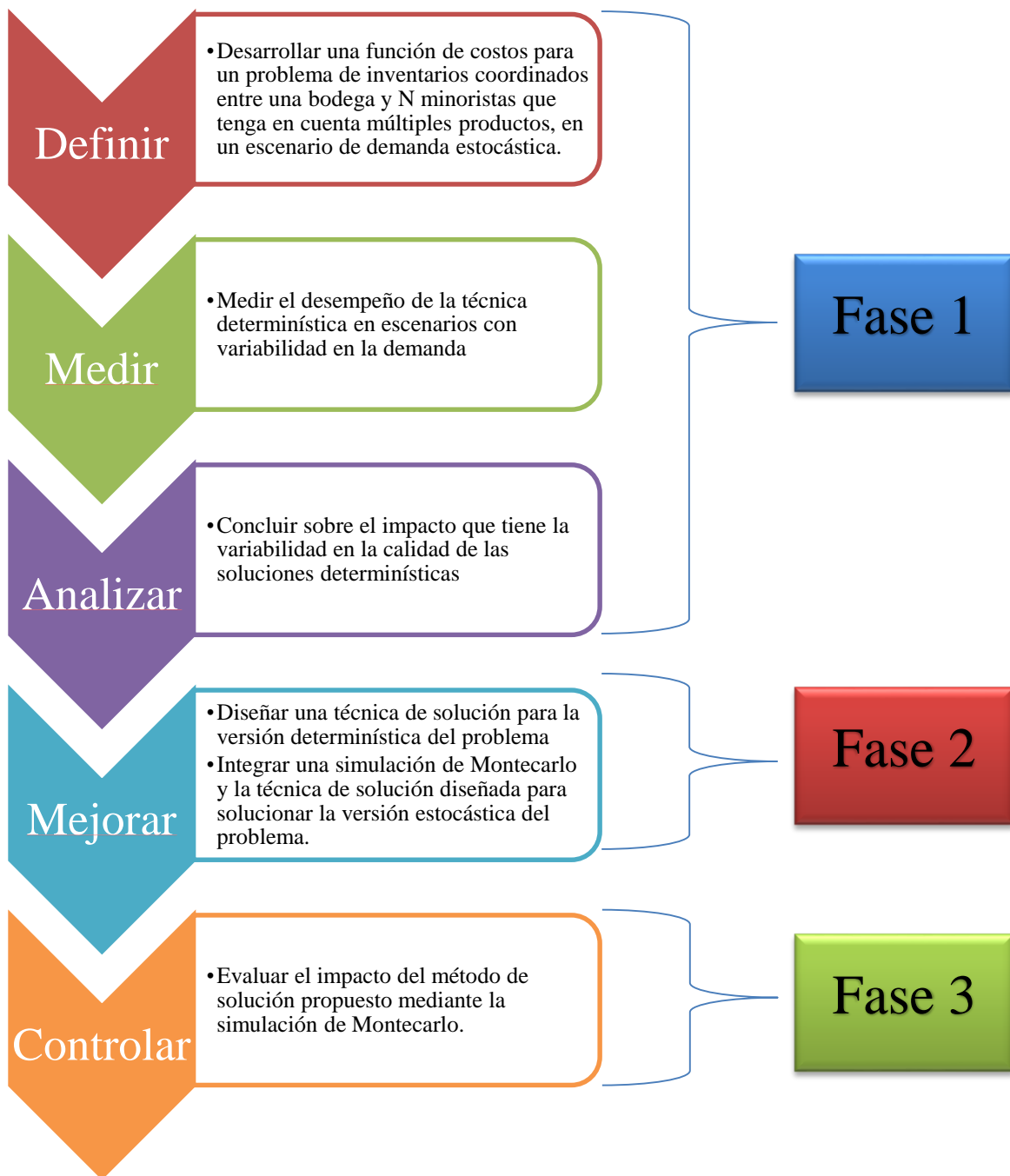


Ilustración 2 - Metodología del trabajo de grado

5.1. Fase 1

Para resolver este problema de coordinación de inventarios entre una bodega y n minoristas, muchos autores han planteado políticas de ciclo único o compartido. Schwarz (1973), propuso una heurística basada en el cálculo de constantes de coordinación para resolver este problema. La ilustración 1 representa una política en la que existe una bodega y 2 minoristas con constantes de coordinación de $t_1 < t_0$ y $t_2 > t_0$. La bodega mantiene inventario para satisfacer los órdenes de aquellos minoristas con tiempo de ciclo menor.

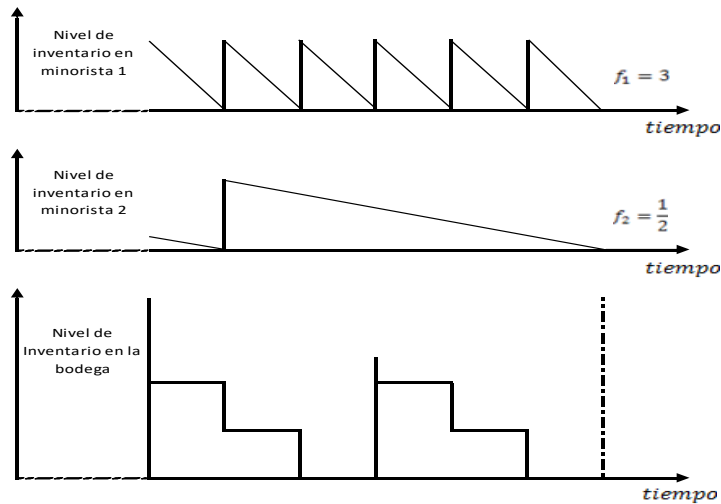


Ilustración 3 - Políticas de inventario

Por otro lado, para determinar las variables y parámetros que se desean adaptar en la minimización del costo total de la política, se plantearon dos modelos matemáticos, el determinístico y el estocástico.

Para la determinística se analizó la función objetivo de Abdul-Jalbar et al. (2010) en el cual se minimiza la función de costos por coordinación de inventarios y se realizó la extensión de ella para solucionar la parte multiproducto del problema. Para realizar la extensión, fue necesario: i) Agregar el conjunto i , el cual hace referencia a los productos, ii) Añadir una constante de coordinación entre cada producto con cada minorista y iii) La relación entre los costos conjuntos de reabastecimiento respecto al número de veces que ordena cada minorista.

Para empezar, se tomó la función objetivo de Abdul-Jalbar et al. (2010) y se identificó que se debe añadir una constante de coordinación debido a que la coordinación depende también de cada producto, adicionalmente para realizar la extensión se estableció que lo único necesario era añadir el conjunto de productos para los parámetros o variables que lo requieren, dejando el modelo matemático de la siguiente manera:

Conjuntos

- I : Productos
- J : Minoristas

Variables de decisión

- t_j : Intervalo de reabastecimiento en el minorista $j = 1, 2, \dots, J$
- tp_{ij} : Intervalo de reabastecimiento de cada producto $i = 1, 2, \dots, I$, para cada minorista $j = 1, 2, \dots, J$
- t_0 : Intervalo de reabastecimiento en la bodega
- f_j : Constante de coordinación: Número de veces que los minoristas $j = 1, \dots, J$ realizan un pedido durante el tiempo de reabastecimiento de la bodega
- $Cte_{i,j}$: Constante de coordinación: Constante de coordinación para cada producto $i = 1, 2, \dots, I$, para cada minorista $j = 1, 2, \dots, J$

Parámetros

- $d_{i,j}$: Demanda por unidad de tiempo del minorista $j = 1, 2, \dots, J$; para el producto $i = 1, 2, \dots, I$
- $k_{i,j}$: Costo fijo de reabastecimiento por pedido del minorista $j = 1, 2, \dots, J$; para el producto $i = 1, 2, \dots, I$
- k_0 : Costo fijo de reabastecimiento por pedido de la bodega
- h_j : Costo de mantener inventario por cada unidad y por unidad de tiempo del minorista $j = 1, 2, \dots, J$; para el producto $i = 1, 2, \dots, I$
- h_0 : Costo de mantener inventario por cada unidad y por unidad de tiempo de la bodega
- A_j : Costo fijo de reabastecimiento conjunto del minorista $j = 1, 2, \dots, J$

Hipótesis de coordinación

Para que exista coordinación hubo que plantear las siguientes hipótesis, que son fundamentales en el modelo matemático:

$$f_j \in \left\{ \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots \right\} \quad \forall j \in J \quad (1)$$

En el término (1), Para que exista coordinación en el modelo, el número de veces que ordena el minorista j debe tomar valores enteros entre 1 e infinito y el inverso de dichos enteros

$$\frac{f_j}{cte_{i,j}} \in \left\{ \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots \right\} \quad \forall j \in J, \forall i \in I \quad (2)$$

Adicionalmente la coordinación también depende de que el cociente entre el número de veces que ordena el minorista j y la constante de coordinación entre cada producto i con cada minorista j , tome valores enteros entre 1 e infinito y el inverso de dichos enteros, como se evidencia en el término (2)

$$Cte_{i,j} \in N \quad (3)$$

Para el término (3), la constante de coordinación de cada producto i con cada minorista j , debe tomar números naturales.

$$Si f_j \geq 1, entonces Cte_{i,j} debe ser divisor o múltiplo de f_j \quad (4)$$

Por otra parte, en el término (4), cuando el número de veces que ordena el minorista j durante el tiempo de ciclo de la bodega es mayor o igual a 1, la constante de coordinación debe tomar valores que sean múltiplos o divisores de dicho número de veces que ordena el minorista j .

$$Al menos para un producto i, Cte_{i,j} = 1 \quad \forall j \in J \quad (5)$$

Para que exista coordinación, en el término (5) se muestra que la constante de coordinación de al menos un producto debe ser igual a 1, debido a que el tiempo de ciclo de al menos un producto deber ser igual al tiempo de su minorista j .

$$t_j = \frac{t_0}{f_j} \quad \forall j \in J \quad (6)$$

En el término (6), el tiempo de ciclo de cada minorista j depende del número de veces que ordena dicho minorista con respecto al tiempo de reabastecimiento de la bodega.

$$t_{ij} = \frac{t_j}{Cte_{ij}} \quad \forall j \in J \quad (7)$$

Por último, en el término (7) se evidencia, el tiempo de ciclo de cada producto i y cada minorista j depende del número de veces que se ordena dicho producto con respecto al tiempo de reabastecimiento del minorista.

Basándose en de Abdul-Jalbar et al. (2010), hubo que realizar el cálculo del intervalo de reabastecimiento de la bodega derivando la función de costos con respecto a t_0 , obteniendo la siguiente ecuación:

$$t_0 = \sqrt{\frac{\left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right]}{\left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + h_0 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right]}}$$

Teniendo estas hipótesis y conociendo sus regiones factibles, se prosiguió a plantear la función objetivo.

Función objetivo

$$Minimizar C_T = \frac{1}{t_0} \left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right] + \frac{t_0}{2} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + h_0 \sum_{i=1}^I \sum_{j: f_j > 1} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right]$$

A continuación, se detallan los términos de la función de costos:

$$\frac{1}{t_0} \left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right] \quad (8)$$

En el término (8) se observa la sumatoria de los costos de reabastecimiento para la bodega y para cada minorista.

$$\frac{t_0}{2} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + \sum_{i=1}^I \sum_{j: f_j > 1} h_{0,i} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right] \quad (9)$$

El término (9) es posible observar la sumatoria de los costos de mantener para la bodega y para cada minorista.

Teniendo la política determinística solucionada y con los resultados, se continuó a realizar el modelo estocástico.

En principio, la base del modelo del presente proyecto fue la técnica desarrollada por Chavarro & Fresen (2015). Se adaptó dicho modelo de acuerdo a las variables y a los parámetros que competen a este problema de coordinación de inventarios para múltiples productos. A diferencia del modelo determinístico, este modelo tiene en cuenta todo lo relacionado con la penalización por faltantes y el inventario de seguridad que en fin será el que permitirá soportar la variabilidad de la demanda, la cual se distribuye normal. En ese sentido, se tuvieron en cuenta los costos de faltantes, sobrantes, desviación de la demanda, número esperado de faltantes, función de pérdida estándar de la distribución normal. Estas variaciones se hicieron tanto para la bodega como para los minoristas. A continuación, se presenta el modelo estocástico:

Conjuntos

- *I: Productos*
- *J: Minoristas*

Variables de decisión

- *t_j : Intervalo de reabastecimiento en el minorista j = 1, 2, ..., J*
- *t₀ : Intervalo de reabastecimiento en la bodega*
- *f_j : Constante de coordinación: Número de veces que los minoristas j = 1, ..., J realizan un pedido durante el tiempo de reabastecimiento de la bodega*
- *Cte_{i,j} : Constante de coordinación: Constante de coordinación para cada producto i = 1, 2, ..., I, para cada minorista j = 1, 2, ..., J*

Parámetros

- $d_{i,j}$: Demanda por unidad de tiempo del minorista $j = 1, 2, \dots, J$; para el producto $i = 1, 2, \dots, I$
- $k_{i,j}$: Costo fijo de reabastecimiento por pedido del minorista $j = 1, 2, \dots, J$; para el producto $i = 1, 2, \dots, I$
- k_0 : Costo fijo de reabastecimiento por pedido de la bodega
- h_j : Costo de mantener inventario por cada unidad y por unidad de tiempo del minorista $j = 1, 2, \dots, J$; para el producto $i = 1, 2, \dots, I$
- $h_{0,i}$: Costo de mantener inventario por cada unidad de cada tipo de producto y por unidad de tiempo de la bodega
- A_j : Costo fijo de reabastecimiento conjunto del minorista $j = 1, 2, \dots, J$
- $CF_{0,i}$ = Costo por incurrir en faltantes por producto para la bodega
- CF_j = Costo por incurrir en faltantes para el minorista j
- σ_0 = Desviación de la demanda de la bodega
- σ_j = Desviación de la demanda de los minoristas

- $n(s)_{0,i}$ = Número esperado de faltantes por cada tipo de producto para la bodega
- $n(s)_j$ = Número esperado de faltantes para el minoristas j
- $L(z_0)$ = Función de pérdida estándar de la distribución normal para el la bodega
- $L(z_j)$ = Función de pérdida estándar de la distribución normal para el minorista j .

Hipótesis de coordinación

Por otro lado, la región factible del presente problema estará acotada por las siguientes restricciones:

$$f_j \in \left\{ \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots \right\} \quad \forall j \in J \quad (10)$$

En el término (10) se muestra que para que exista coordinación en el modelo, el número de veces que ordena el minorista j debe tomar valores enteros entre 1 e infinito y el inverso de dichos enteros

$$\frac{f_j}{Cte_{i,j}} \in \left\{ \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, \dots \right\} \quad \forall j \in J, \forall i \in I \quad (11)$$

Adicionalmente se puede evidenciar en el término (11) que la coordinación también depende de que el cociente entre el número de veces que ordena el minorista j y la constante de coordinación entre cada producto i con cada minorista j , tome valores enteros entre 1 e infinito y el inverso de dichos enteros.

$$Cte_{i,j} \in N \quad (12)$$

La constante de coordinación de cada producto i con cada minorista j , debe tomar números naturales, como se evidencia en el término (12)

$$\text{Si } f_j \geq 1, \text{ entonces } Cte_{i,j} \text{ debe ser divisor o múltiplo de } f_j \quad (13)$$

Por otro lado, en el término (13) muestra que cuando el número de veces que ordena el minorista j durante el tiempo de ciclo de la bodega es mayor o igual a 1, la constante de coordinación debe tomar valores que sean múltiplos o divisores de dicho número de veces que ordena el minorista j .

$$\text{Al menos para un producto } i, Cte_{i,j} = 1 \quad \forall j \in J \quad (14)$$

Para que exista coordinación, la constante de coordinación de al menos un producto debe ser igual a 1, debido a que el tiempo de ciclo de al menos un producto deber ser igual al tiempo de su minorista j, como se puede evidenciar en el término (14)

$$t_j = \frac{t_0}{f_j} \quad \forall j \in J \quad (15)$$

En el término (15), se muestra que el tiempo de ciclo de cada minorista j depende del número de veces que ordena dicho minorista con respecto al tiempo de reabastecimiento de la bodega.

$$t_{ij} = \frac{t_j}{Cte_{ij}} \quad \forall j \in J \quad (16)$$

Por otra parte, en el término (16) el tiempo de ciclo de cada producto i y cada minorista j depende del número de veces que se ordena dicho producto con respecto al tiempo de reabastecimiento del minorista.

Por otra parte, y en coherencia con el modelo determinístico, el tiempo de ciclo de la bodega debe ser calculado de la siguiente manera para este modelo, debido a que la derivada con respecto a t0 no tiene una solución analítica:

$$t_0 = \sqrt{\frac{\left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right]}{\left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J h_{0,i} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right]}}$$

Teniendo estas hipótesis y conociendo sus regiones factibles, se prosiguió a plantear la función objetivo.

Función objetivo

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } C_T = & \frac{1}{t_0} \left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right] + \frac{t_0}{2} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + \sum_{i=1}^I \sum_{j: f_j > 1} h_{0,i} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right] \\ & + \sum_{i=1}^I SS_{0i} + \frac{CF_{0,i} n(s)_{0,i}}{t_0} + \sum_{j=1}^J SS_j + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{CF_{j,i} n(s)_j}{t_0} f_j Cte_{i,j} \end{aligned}$$

A continuación, se detallan los términos de la función de costos:

$$\frac{1}{t_0} \left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right] \quad (17)$$

En el término (17) se observa la sumatoria de los costos de reabastecimiento para la bodega y para cada minorista.

$$\frac{t_0}{2} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + \sum_{i=1}^I \sum_{j: f_j > 1} h_{0,i} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right] \quad (18)$$

El término (18) es posible observar la sumatoria de los costos de mantener para la bodega y para cada minorista.

Para que el modelo sea factible se deben cumplir las siguientes restricciones exclusivamente para el modelo estocástico:

$$\sum_{i=1}^I SS_{0i} \quad (19)$$

En el término (19) se encuentra la sumatoria de los costos de mantener el inventario de seguridad.

$$\frac{CF_{0,i}n(s)_{0,i}}{t_0} \quad (20)$$

El término número (20) representa los costos de las unidades faltantes para la bodega, en caso de que existan.

$$\sum_{j=1}^J SS_j \quad (21)$$

En el término (21) es posible observar los costos de mantener el inventario de seguridad.

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{CF_j n(s)_j}{t_0} f_j Cte_{i,j} \quad (22)$$

El término (22) muestra los costos de unidades faltantes para cada minorista.

$$SS_{0,i} = \sqrt{t_0} Z_0 \sum_i \sigma_{0,i} h_{0,i} \quad (23)$$

El inventario de seguridad de cada producto i , como se muestra en el término (23) depende del tiempo de ciclo óptimo de la bodega; la variable aleatoria normal estándar, que en nuestro caso fue tomado como el nivel deservicio de la bodega; la desviación de la demanda respecto a la media; y los costos de mantener dicho inventario de seguridad.

$$SS_j = \sigma_{i,j} Z_j \sqrt{\frac{t_0}{f_j Cte_{i,j}}} h_j \quad (24)$$

En el término (24) el inventario de seguridad de cada minorista j depende del tiempo de ciclo óptimo de la bodega; la variable aleatoria normal estándar, que en nuestro caso fue tomado como el nivel deservicio de cada minorista; la desviación de la demanda respecto a la media; y los costos de mantener dicho inventario de seguridad.

$$CF_{0,i} = \sum_i h_{0,i} \lambda \quad (25)$$

Los costos de faltantes de cada producto i dependen de los costos de mantener y los costos de penalización por tener faltantes, como se muestra en el (25)

$$CF_j = h_j \lambda \quad (26)$$

Los costos de faltantes de cada minorista j , como se puede evidenciar en el término (26) dependen los costos de mantener para cada uno de ellos y de los costos de penalización por tener faltantes.

$$n(s)_{0,i} = L(z_0) \sqrt{t_0} \sum_i^I \sigma_{0,i} \quad (27)$$

Por otro lado, en el término (27), el valor esperado de faltantes de cada producto i está dado por la función de pérdida de la variable normal estándar, el tiempo de ciclo óptimo de la bodega y la desviación de la demanda respecto a la media.

$$n(s)_j = L(z_j) \sigma_{i,j} \sqrt{\frac{t_0}{f_j Cte_{i,j}}} \quad (28)$$

Por último, en el término (28) el valor esperado de faltantes de cada minorista j depende de la función de pérdida de la variable normal estándar; el cociente entre el tiempo de ciclo óptimo de la bodega y las constantes de coordinación; y la desviación de la demanda respecto a la media de cada producto i de cada minorista j .

5.2. Fase 2

Según (Glover & Belén, n.d.) la Búsqueda Tabú es: “es un procedimiento metaheurístico cuya característica distintiva es el uso de memoria adaptativa y de estrategias especiales de resolución de problemas”. En otras palabras, esta técnica utiliza una “memoria” para ir guardando soluciones desfavorables con el fin de eliminarlas como opción de respuesta; así mismo, la utiliza para ir guardando la mejor solución que ha encontrado hasta cierta iteración, y hasta que halle una mejor o en su defecto se cumpla el criterio de parada.

De acuerdo a lo anterior, para el desarrollo de la Búsqueda Tabú en el presente proyecto se utilizó la herramienta VBA. En la primera etapa, se comienza por leer los datos de entrada (demandas, costos de ordenar, costos de mantener y costos fijos de reabastecer tanto para la bodega como para los minoristas), se inicializan las variables de coordinación en uno, se calcula el tiempo de ciclo de la bodega, se inicializan las listas tabú de las variables f y Cte en cero y finalmente se calcula el costo de la solución inicial.

En la siguiente etapa, mientras el número de iteraciones sea menor al máximo permitido, se generan dos números aleatorios, el primero para seleccionar el minorista al que se le va a hacer el cambio, y el segundo para realizar un cambio en la variable f . Luego, se calcula el nuevo costo con dicho cambio. En caso de ser mejor al calculado en la primera etapa, y mientras el cambio no esté en la lista tabú, la constante de coordinación f para el minorista seleccionado será esta última; y el nuevo costo va a quedar guardado como el mejor. En seguida, se procede a realizar el mismo procedimiento para la variable Cte , con la diferencia de que se genera un nuevo aleatorio para seleccionar uno de los productos del minorista que ya fue previamente seleccionado con el mismo criterio.

Finalmente, el algoritmo se detiene cuando encuentra el mejor costo posible dentro del número máximo de iteraciones.

Etapa 0

Leer datos de entrada. ($D_{i,j}, D_0, k_0, k_{i,j}, h_0, h_{i,j}, A_{i,j}$)
Fijar $f_j = 1$. $j=1, \dots, \text{NumMinoristas}$.
Fijar $Cte_{i,j} = 1$. $i=1, \dots, \text{NumProductos}$. $j=1, \dots, \text{NumMinoristas}$.
Calcular t_0
Inicializar $\text{MatrizTabuFj} = 0 \forall j \in J$
Inicializar $\text{MatrizTabuCteij} = 0 \forall j \in J, \forall i \in I$
Calcular $\text{CT} = \text{CostoTotal}(f_j, Cte_{i,j})$
MejorCosto = CT

Etapa 1

Mientras $\text{NumIterTotal} \leq \text{MaxIteraciones}$ **hacer**
Fijar $\text{Minorista} = \text{Aleatorio}(1, \text{NumMinoristas})$
Fijar $\text{Rand} = \text{Aleatorio2}(1, 50)$
Si $\text{Aleatorio3} < 0.5$ **entonces**
 $f_{\text{Minorista}^*} = \text{Rand}$
Si no
 $f_{\text{Minorista}^*} = \frac{1}{\text{Rand}}$
Fin si
Calcular $\text{CostoAux} = \text{CT}(f_{\text{Minorista}^*}, Cte_{i,j})$
Si $\text{CostoAux} < \text{MejorCosto} \ \& \ \text{MatrizTabuFj}(\text{Minorista}) = 0$ **entonces**
 $f_{\text{Minorista}} = f_{\text{Minorista}^*}$
 $\text{MejorCosto} = \text{CostoAux}$
Fin si

Mientras $\text{NumIterTotal2} \leq \text{MaxIteraciones2}$
Fijar $\text{Minorista2} = \text{Aleatorio}(1, \text{NumMinoristas})$
Fijar $\text{Producto} = \text{Aleatorio}(1, \text{NumProductos})$
Fijar $\text{Rand2} = \text{Aleatorio2}(1, 50)$

 $Cte_{\text{Minorista2. Producto}^*} = \text{Rand2}$

Calcular $\text{CostoAux} = \text{CT}(f_j, Cte_{\text{Minorista2. Producto}^*})$
Si $\text{CostoAux} < \text{MejorCosto} \ \& \ \text{MatrizTabuCteij} = 0$ **entonces**
 $Cte_{\text{Minorista2. Producto}} = Cte_{\text{Minorista2. Producto}^*}$
 $\text{MejorCosto} = \text{CostoAux}$
Fin si
 $\text{NumIterTotal2} = \text{NumIterTotal2} + 1$
Fin mientras
 $\text{NumIterTotal} = \text{NumIterTotal} + 1$
Fin mientras

Etapa 2

Stop. MejorCosto es el menor costo encontrado.

Pseudocódigo 1 - Pseudocódigo versión determinística

Al igual que el modelo determinístico, el estocástico también fue desarrollado por medio de VBA. En la primera etapa, además de leer los datos de entrada (demandas, costos de ordenar, costos de mantener y costos fijos de reabastecer tanto para la bodega como para los minoristas), también se inicializan las variables f y Cte en 1; el nivel de servicio de la bodega y los minoristas en 75%; y las listas tabú de f , Cte y nivel de servicio de la bodega en 0. A continuación, se procede a calcular el tiempo de ciclo de la bodega para posteriormente determinar el costo total de la solución inicial.

En la segunda etapa, se generan las demandas que van a ser utilizadas para la simulación de los minoristas y la bodega, mediante la distribución normal. La media es el valor de demanda que se generó en cada una de las

instancias, y la desviación va a depender del nivel del factor del coeficiente de variación con el que se vaya a correr la instancia.

En la siguiente etapa, y al igual que en el modelo determinístico, mediante números aleatorios se selecciona un minorista al cual se le realizan cambios en la variable f siempre y cuando este cambio genere un costo menor. Así mismo, se determina otro minorista para realizar el mismo procedimiento, pero con la variable Cte. Como en la versión determinística, este procedimiento termina cuando se llega al máximo de iteraciones.

Lo siguiente es seleccionar los niveles de servicio óptimos para la política encontrada en el paso anterior. Para esto, se realizan unos cambios muy similares a los realizados para las constantes de coordinación. Se genera un número aleatorio para seleccionar el minorista al cual se le va a hacer un cambio, de igual manera se hace con el producto, y a esta combinación se le realiza un cambio al nivel de servicio. El nivel de servicio varía entre 60% y 100%, en cambios de a 5%. Es fundamental que este procedimiento se realiza para cada uno de los conjuntos de demandas generadas, dependiendo del número de simulaciones definido en el inicio. Con estos costos se calcula el valor esperado de la función de costos y si este valor esperado es menor al valor esperado de la solución inicial.

Cuando ya se determinan el nivel de servicio óptimo para esas políticas, se vuelve a realizar el procedimiento para el cambio de constantes de coordinación y definir una nueva política. Y con la política encontrada se vuelven a encontrar los niveles de servicio. Este ciclo se repite las veces que se haya definido en el inicio del programa.

Etapa 0

Leer datos de entrada. $(D_{i,j}, D_0, k_0, k_{i,j}, h_0, h_{i,j}, A_{i,j})$

Fijar $f_j = 1$. $j=1, \dots, \text{NumMinoristas}$.

Fijar $Cte_{i,j} = 1$. $i=1, \dots, \text{NumProductos}$. $j=1, \dots, \text{NumMinoristas}$.

Fijar BodegaNS = 75%

Fijar $\text{MinoristaNS}_{i,j} = 75\% \forall j \in J, \forall i \in I$

Calcular t_0

Inicializar $\text{MatrizTabuFj} = 0 \forall j \in J$

Inicializar $\text{MatrizTabuCteij} = 0 \forall j \in J, \forall i \in I$

Inicializar $\text{MatrizTabuNSij} = 0 \forall j \in J, \forall i \in I$

Calcular CT = CostoTotal $(f_j, Cte_{i,j})$

MejorCosto = CT

Etapa 1

De $i = 1$ a NumSimulaciones

DemandaSimuladaMin(i) = Distr.Norm.Inv (MinoristasMedia, MinoristasDesviación) $\forall j \in J, \forall i \in I$

DemandaSimuladaBod(i) = Distr.Norm.Inv (BodegaMedia, BodegaDesviación)

Siguiente i

Etapa 2

Mientras IteracionesTotal \leq Iteraciones

Mientras NumIterTotal \leq MaxIteraciones **hacer**

Fijar Minorista = Aleatorio (1, NumMinoristas)

Fijar Rand = Aleatorio2 (1, 50)

Si Aleatorio3 < 0.5 **entonces**

$f_{\text{Minorista}^*} = \text{Rand}$

Si no

$f_{\text{Minorista}^*} = \frac{1}{\text{Rand}}$

Fin si

Calcular CostoAux = CT $(f_{\text{Minorista}^*}, Cte_{i,j})$

Si CostoAux $<$ MejorCosto & $\text{MatrizTabuFj}(\text{Minorista}) = 0$ **entonces**

$f_{\text{Minorista}} = f_{\text{Minorista}^*}$

MejorCosto = CostoAux

Fin si

Mientras NumIterTotal2 <= MaxIteraciones2

Fijar Minorista2 = Aleatorio (1, NumMinoristas)

Fijar Producto = Aleatorio (1, NumProductos)

Fijar Rand2 = Aleatorio2 (1, 50)

$Cte_{Minorista2, Producto}^* = Rand2$

Calcular CostoAux = CT ($f_j, Cte_{Minorista2, Producto}^*$)

Si CostoAux < MejorCosto & MatrizTabuCte(Minorista2, Producto) = 0 **entonces**

$Cte_{Minorista2, Producto} = Cte_{Minorista2, Producto}^*$
MejorCosto = CostoAux

Fin si

NumIterTotal2 = NumIterTotal2 + 1

Fin mientras

NumIterTotal = NumIterTotal + 1

Fin mientras

MejorCosto = ValorEsperado Costo Simulaciones con Política Escogida

Mientras NumIterTotal3 <= MaxIteraciones3

Fijar Mino = Aleatorio (0, NumProductos)

Fijar Producto = Aleatorio (1, NumProductos)

Fijar Rand = Aleatorio2 (60%, 100%) *Cambios de 5%

Si Minorista = 0 **entonces**

BodegaNS* = Rand

Si no

$Minorista_{Mino, Producto}^{NS*} = Rand$

Fin si

Calcular CostoAux = Valor esperado del costo de las simulaciones con los NS*

Si CostoAux < MejorCosto & MatrizTabuNS(Mino, Producto) = 0 **entonces**

Si Minorista = 0 **entonces**

BodegaNS = BodegaNS*

Si no

$Minorista_{Mino, Producto}^{NS} = Minorista_{Mino, Producto}^{NS*}$

Fin si

MejorCosto = CostoAux

Fin si

NumIterTotal3 = NumIterTotal3 + 1

Fin Mientras

Fin mientras

Etapas 3

Stop. MejorCosto es el menor costo encontrado.

5.3. Fase 3

Con el fin de medir el impacto de la versión estocástica del problema respecto a las políticas reportadas por la versión determinística se realizó una simulación de Montecarlo. En esta simulación se generaron 1000 conjuntos de demandas y para cada conjunto de demandas se calculó la función de costos del modelo matemático estocástico.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } C_T = & \frac{1}{t_0} \left[k_0 + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_j Cte_{i,j} k_{i,j} + \sum_{j=1}^J \frac{A_j}{f_j} \right] + \frac{t_0}{2} \left[\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{h_{i,j} d_{i,j}}{f_j Cte_{i,j}} + \sum_{i=1}^I \sum_{j: f_j > 1} h_{0,i} \left(1 - \frac{1}{f_j} \right) d_{i,j} \right] \\ & + \sum_{i=1}^I SS_{0i} + \frac{CF_{0,i} n(s)_{0,i}}{t_0} + \sum_{j=1}^J SS_j + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{CF_j n(s)_j}{t_0} f_j Cte_{i,j} \end{aligned}$$

De esta manera se puede evidenciar el impacto que tiene la variabilidad de la demanda en las soluciones encontradas, y esto debido a que las políticas determinísticas al no tener stock de seguridad, reportan unos costos de faltantes muy superiores al costo que tiene la versión estocástica por mantener un inventario de seguridad.

5.4. Ejemplo numérico

En esta sección se muestran tres ejemplos de los resultados obtenidos. En el primer ejemplo se genera una instancia de 3 minoristas y 2 productos, para de esta manera poder mostrar de manera detallada el comportamiento de los resultados. En los otros dos ejemplos se utiliza la metodología propuesta para la versión determinística y estocástica del problema; utilizando 20 minoristas y 10 productos.

5.4.1. Ejemplo 1

La tabla 3 muestra detalladamente la información de los parámetros que se tuvieron en cuenta para la bodega, en donde el coeficiente de variación es de 0.1.

Parámetros	Bodega
Ho	0,087
Ko	459
Do	9023
λo	8

Tabla 3 - Parámetros Bodega

De igual manera, en la tabla 4 se muestra detalladamente la información de los parámetros que se tuvieron en cuenta para cada uno de los productos, en su respectivo minorista, en donde el coeficiente de variación es de 0.1.

Parámetros	Producto 1			Producto 2		
	1	2	3	1	2	3
Hj	0,968	0,891	0,198	0,957	0,459	0,596
Kj	953	746	2538	2396	2866	2706
Dj	2211	1222	1934	1623	1493	540
λ_j	5	4	7	5	2	6
Aj	474	333	12	474	333	12

Tabla 4 - Parámetros de los minoristas

Por medio de la Búsqueda Tabú se encontraron las políticas correspondientes a la versión determinística y la versión estocástica, como se puede observar en las siguientes tablas:

j	Versión Determinística			Versión Estocástica		
	1	2	3	1	2	3
Fj	1	1	0,5	1	1	0,5
Tj	2,162	2,162	4,324	4,154	4,154	8,307

Tabla 5 - Constantes de coordinación y tiempos de reaprovisionamiento de los minoristas

Cteij	Versión Determinística			Versión Estocástica		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3
P1	4	3	1	7	5	3
P2	2	1	1	3	2	3

Tabla 6 - Constantes de coordinación de los productos

TPi,j	Versión Determinística			Versión Estocástica		
	M1	M2	M3	M1	M2	M3
P1	0,541	0,721	4,324	0,593	0,831	2,769
P2	1,081	2,162	4,324	1,385	2,077	2,769

Tabla 7 - Tiempos de reaprovisionamiento de los productos

NS	M1	M2	M3
P1	95%	95%	95%
P2	95%	60%	95%

Tabla 8 - Niveles de servicio para cada combinación de producto y minorista de la versión estocástica

	Versión Determinística	Versión Estocástica
t0	2,162	4,154
Costo promedio	\$ 13.292	\$ 12.648

Tabla 9 - Tiempo de reaprovisionamiento de la bodega y costo promedio final

A pesar de que en los dos escenarios las políticas son muy similares, los resultados reportan una mejoría del 4.85% de la versión determinística respecto a la versión estocástica. Esta mejoría se da debido a que en la versión estocástica se mantiene un stock de seguridad que reduce sustancialmente los costos de faltantes. Esto lo podemos observar en la tabla 10.

	Costo total	Costo ordenar	Costo Mantener	Costo Stock de Seguridad	Costo Faltantes
Versión Determinística	\$ 13.292	\$ 8.119	\$ 4.059	0	\$ 1.114
Versión Estocástica	\$ 12.648	\$ 7.730	\$ 3.865	\$ 940	\$ 113

Tabla 10 - Costos desagregados

5.4.2. Ejemplo 2

A continuación, se muestran unos gráficos en los que se puede observar el comportamiento de las constantes de coordinación tanto para la versión determinística como para la versión estocástica de este problema. Este ejemplo está ejecutado con un coeficiente de variación de 0.1. Los tiempos de reaprovisionamiento de la bodega para la versión determinística y para la versión estocástica son 1.747 y 1.764 respectivamente.

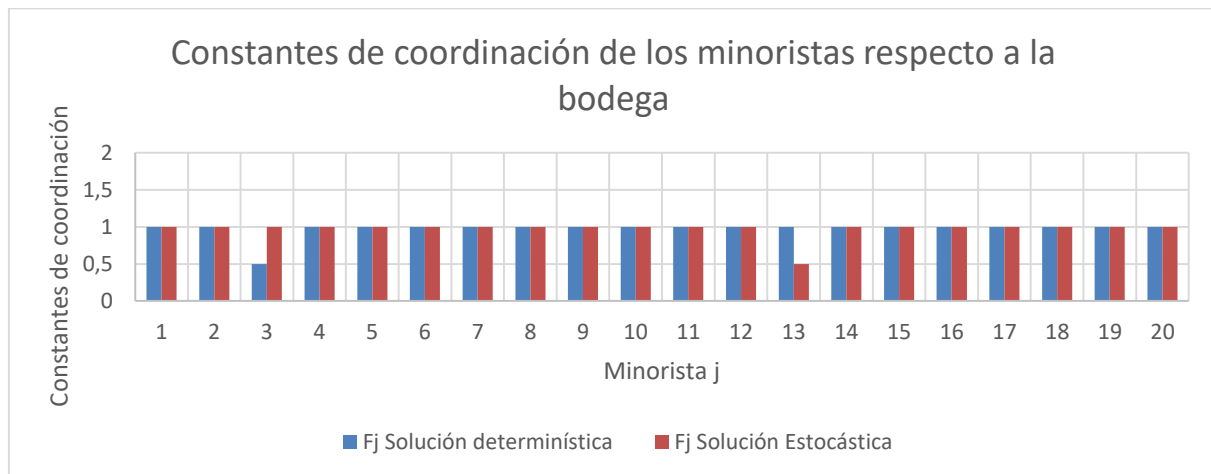


Gráfico 1 - Constantes de coordinación de los minoristas respecto a la bodega. Ejemplo 1

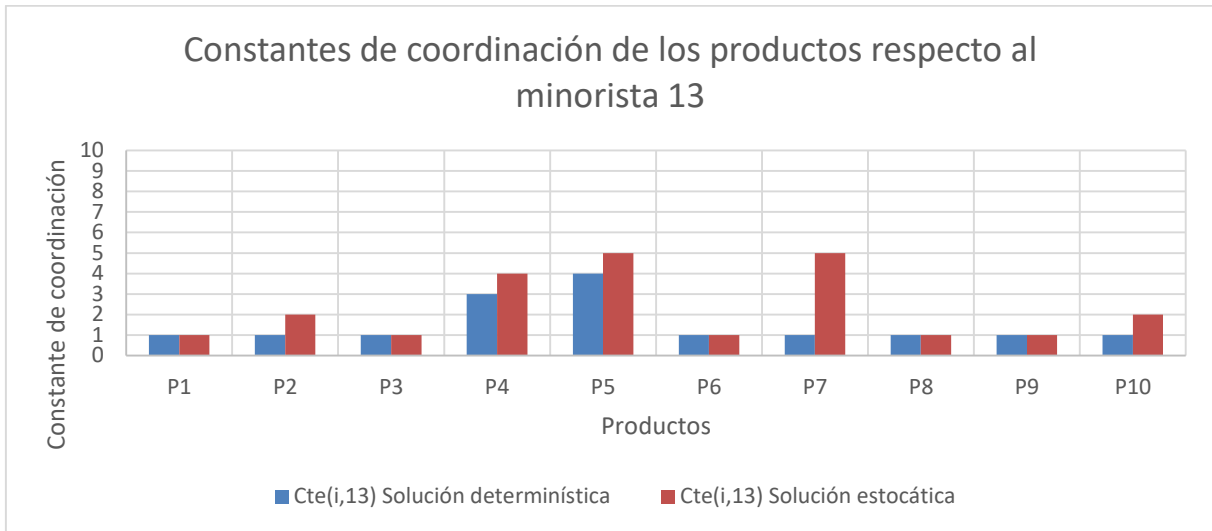


Gráfico 2 - Constantes de coordinación de los productos respecto al minorista 13. Ejemplo 1

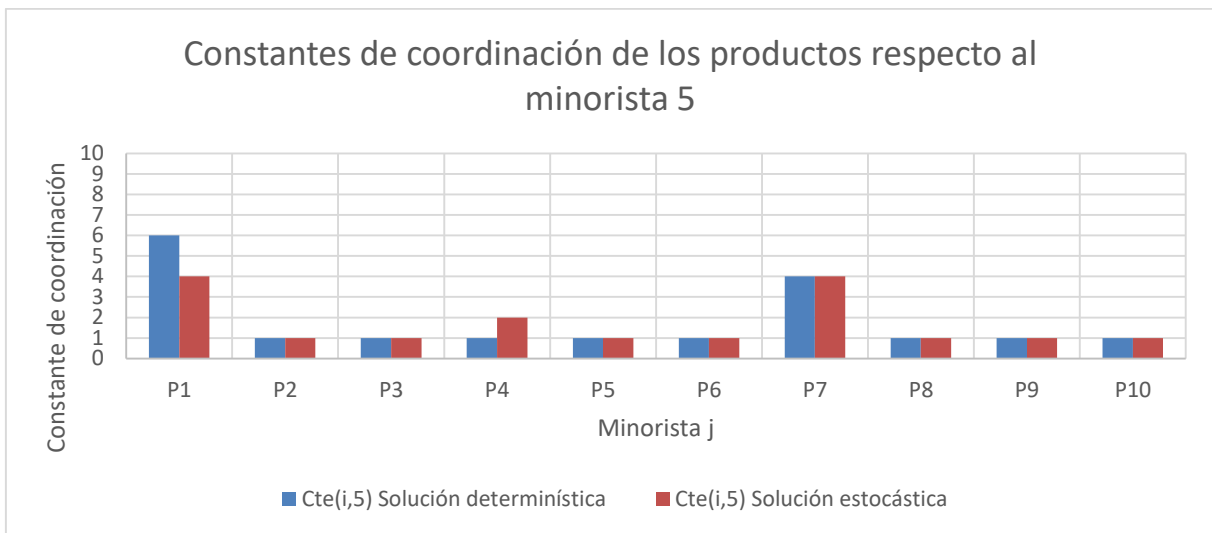


Gráfico 3 - Constantes de coordinación de los productos respecto al minorista 5. Ejemplo 1

De acuerdo con las gráficas anteriores se pueden observar políticas de inventarios muy similares. El cambio entre una política y otra está dado sobre todo por las constantes de los productos $Cte_{i,j}$. Los resultados reportan una mejoría del 3.97% de la versión determinística respecto a la versión estocástica. Esta mejoría se da debido a que en la versión estocástica se mantiene un stock de seguridad que reduce sustancialmente los costos de faltantes. Esto lo podemos observar en la tabla 11.

	Costo total	Costo ordenar	Costo Mantener	Costo Stock de Seguridad	Costo Faltantes
Versión Determinística	\$ 343.862	\$ 207.389	\$ 103.694	\$ -	\$ 32.778
Versión Estocástica	\$ 330.217	\$ 205.571	\$ 102.785	\$ 16.250	\$ 5.612

Tabla 11 - Costos desagregados

5.4.3. Ejemplo 3

A continuación, se muestran unos gráficos en los que se puede observar el comportamiento de las constantes de coordinación tanto para la versión determinística como para la versión estocástica de este problema. Este ejemplo está ejecutado con un coeficiente de variación de 0.3. Los tiempos de reaprovisionamiento de la bodega para la versión determinística y para la versión estocástica son 1.659 y 1.785 respectivamente.

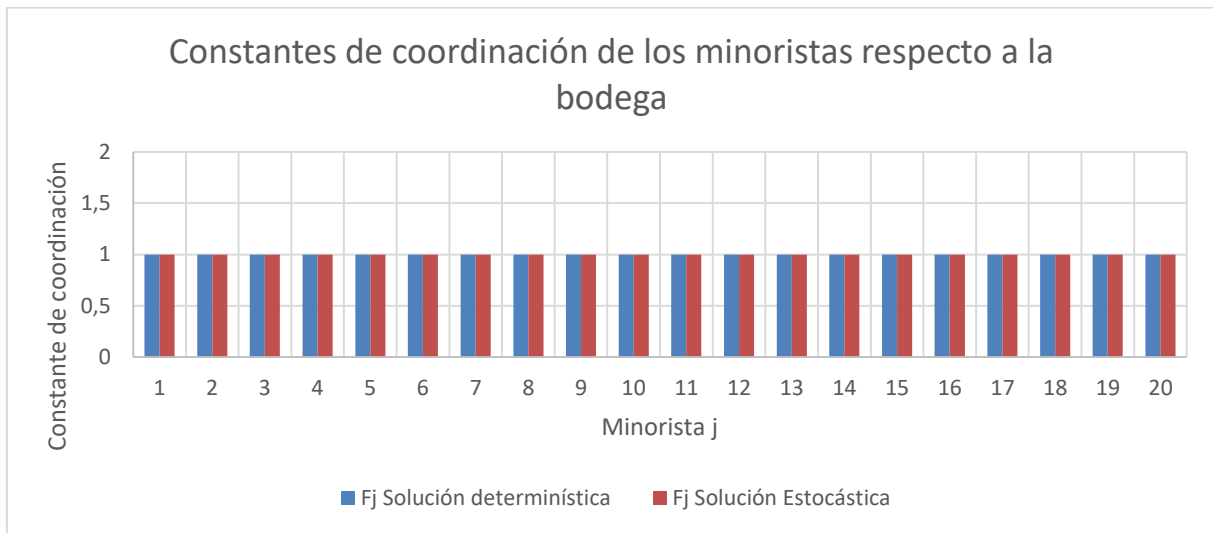


Gráfico 4 - Constantes de coordinación de los minoristas respecto a la bodega. Ejemplo 2

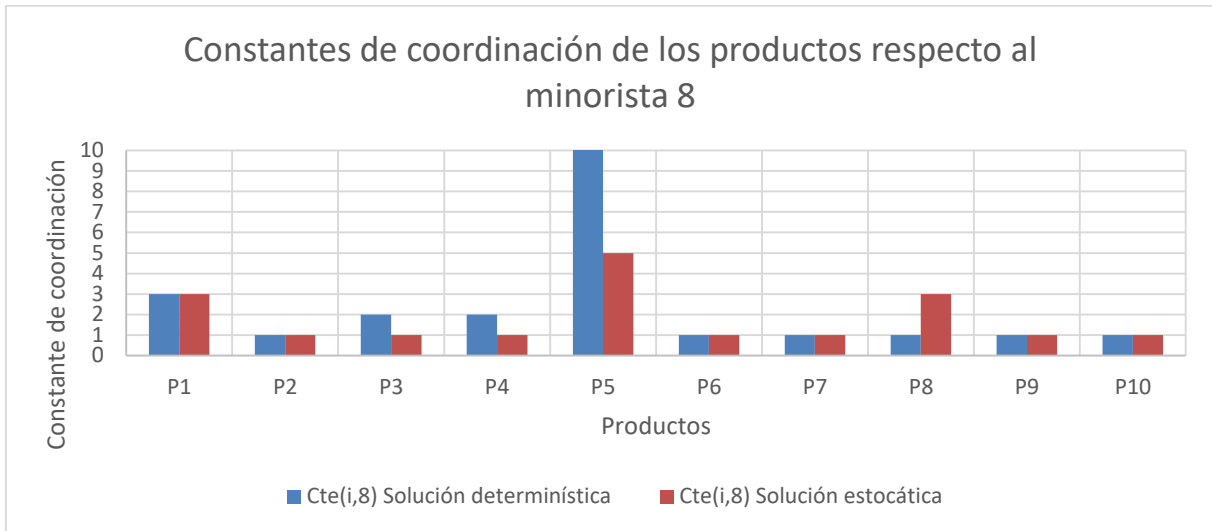


Gráfico 5 - Constantes de coordinación de los productos respecto al minorista 8. Ejemplo 2

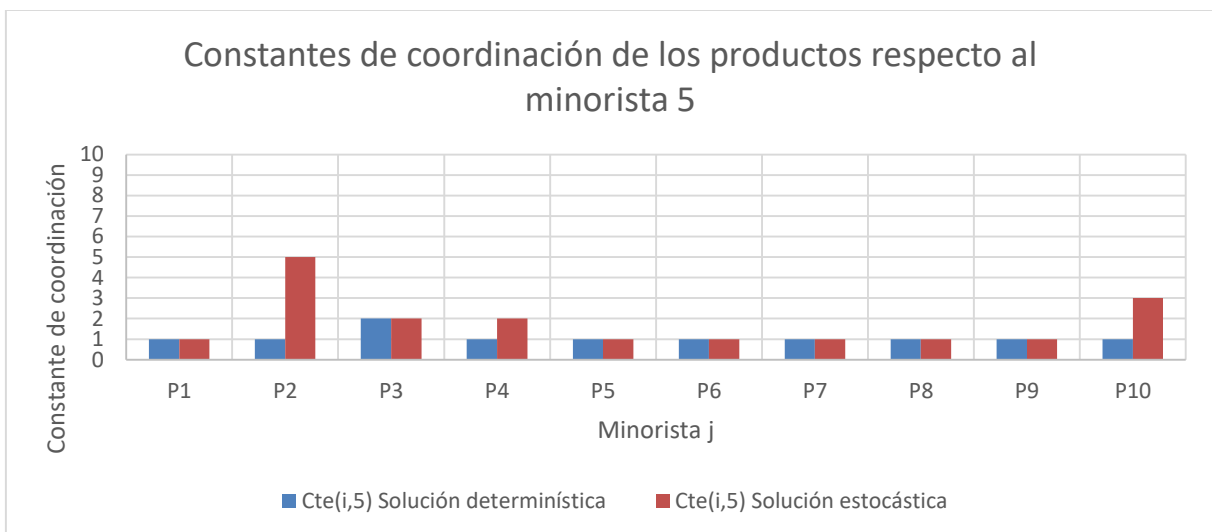


Gráfico 6 - Constantes de coordinación de los productos respecto al minorista 5. Ejemplo 2

De acuerdo con las gráficas anteriores se pueden observar políticas de inventarios muy similares, como ocurre en el ejemplo 1. El cambio entre una política y otra está dado sobre todo por las constantes de los productos $Cte_{i,j}$. Los resultados reportan una mejoría del 9.3% de la versión determinística respecto a la versión estocástica. Esta mejoría se da debido a que en la versión estocástica se mantiene un stock de seguridad que reduce sustancialmente los costos de faltantes. Comparado con el ejemplo 1, la mejoría con el coeficiente de variación de 0.3 es significativamente superior que con el coeficiente de variación de 0.1; y esto se puede evidenciar en los costos de faltantes, ya que, con altos coeficientes de variación, aumentan notablemente los faltantes en la versión determinística. Lo anterior se puede observar en detalle en la tabla 12.

	Costo total	Costo ordenar	Costo Mantener	Costo Stock de Seguridad	Costo Faltantes
Versión Determinística	\$ 442.795	\$ 222.032	\$ 111.016	\$ -	\$ 109.747
Versión Estocástica	\$ 401.622	\$ 219.193	\$ 109.597	\$ 57.077	\$ 15.755

Tabla 12 - Costos desagregados

6. Resultados

6.1. Instancias generadas

Las instancias fueron construidas aleatoriamente por una macro en Visual Basic teniendo en cuenta los siguientes factores de interés:

- Número de minoristas: Abdul-Jalbar et al. (2010) concluye que el número de minoristas es un factor que influye significativamente en el desempeño de su heurística. Debido a esto se generaron instancias con 20, 30, 40 y 50 minoristas.
- Número de productos: Salvador Hernández (2010) plantea en su tesis de doctorado que con 20 productos se tienen buenos resultados para un problema de planeación de inventarios con múltiples productos; es por esto que se tomaron tres niveles para esta investigación, un nivel por debajo de 20, 20 y un nivel por encima de 20. Debido a esto se generaron instancias con 10, 20 y 30 productos.
- Coeficiente de variación: Para medir el impacto que tienen los costos de faltantes en las soluciones obtenidas, se plantearon tres niveles de variabilidad, uno bajo, uno medio y uno alto. Debido a esto se generaron instancias con coeficiente de variación de 0.1, 0.2 y 0.3.

De la misma manera se generaron los costos asociados a cada una de las instancias. Los costos k_0 y h_0 fueron escogidos de una distribución uniforme variando en $[1, 750]$ y $[0, 0.15]$ respectivamente. Asimismo, los costos $k_{i,j}$ y $h_{i,j}$ fueron seleccionados de una distribución uniforme variando en $[k_0, 3.000]$ y $[h_0, 1]$ respectivamente. También fueron seleccionados de esta manera los costos conjuntos de ordenar A_j , siguiendo una distribución uniforme en $[1, 1000]$. Igualmente fueron seleccionados los valores de la demanda en donde la distribución uniforme variaba entre $[1, 2.500]$. Finalmente, la penalización por faltantes se seleccionó de una distribución uniforme que variaba entre $[1, 10]$.

6.2. Versión determinística del problema

Se presentan los resultados obtenidos con el procedimiento que encuentra las políticas de coordinación para la versión determinística del problema. En esta primera parte se corre la meta-heurística *Búsqueda Tabú* únicamente teniendo en cuenta la función objetivo del modelo matemático determinístico en el cual encuentra una política de inventarios que no tiene en cuenta la variabilidad de la demanda. Como se puede evidenciar en el gráfico 7, los resultados aumentan a medida que aumenta el nivel de alguno de los dos factores de estudio, ya sean los minoristas o los productos.

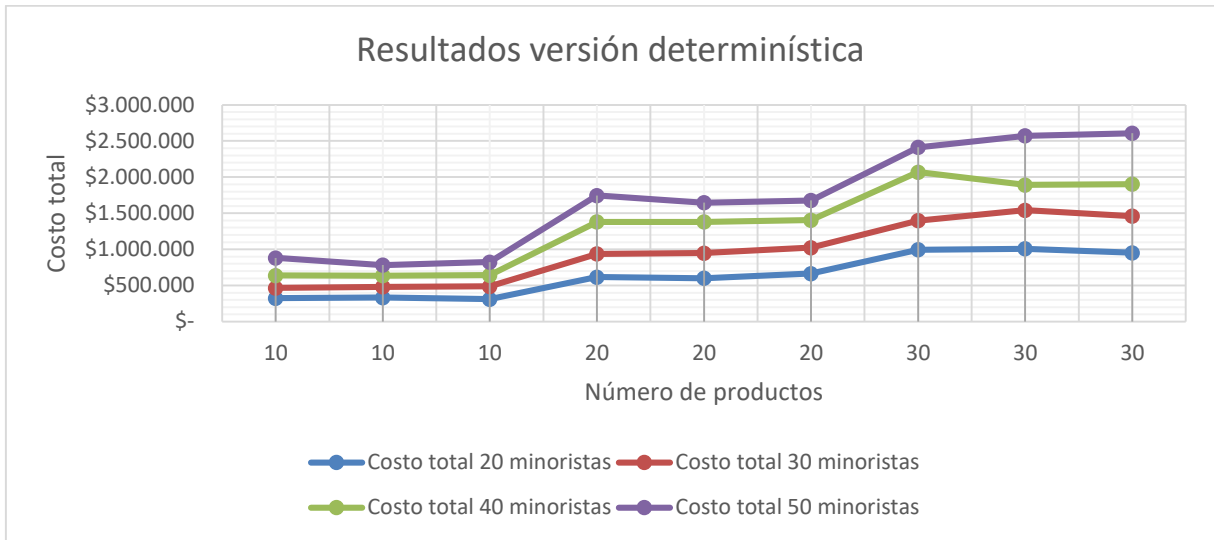


Gráfico 7 - Costo total de la versión determinística

Posteriormente, con las políticas obtenidas en el método de solución se procedió a realizar una simulación en la cual se propone medir el impacto de la solución de estas políticas en escenarios con variabilidad en la demanda. En este caso ya se tienen en cuenta costos por faltantes. Los resultados se pueden observar en los siguientes gráficos.

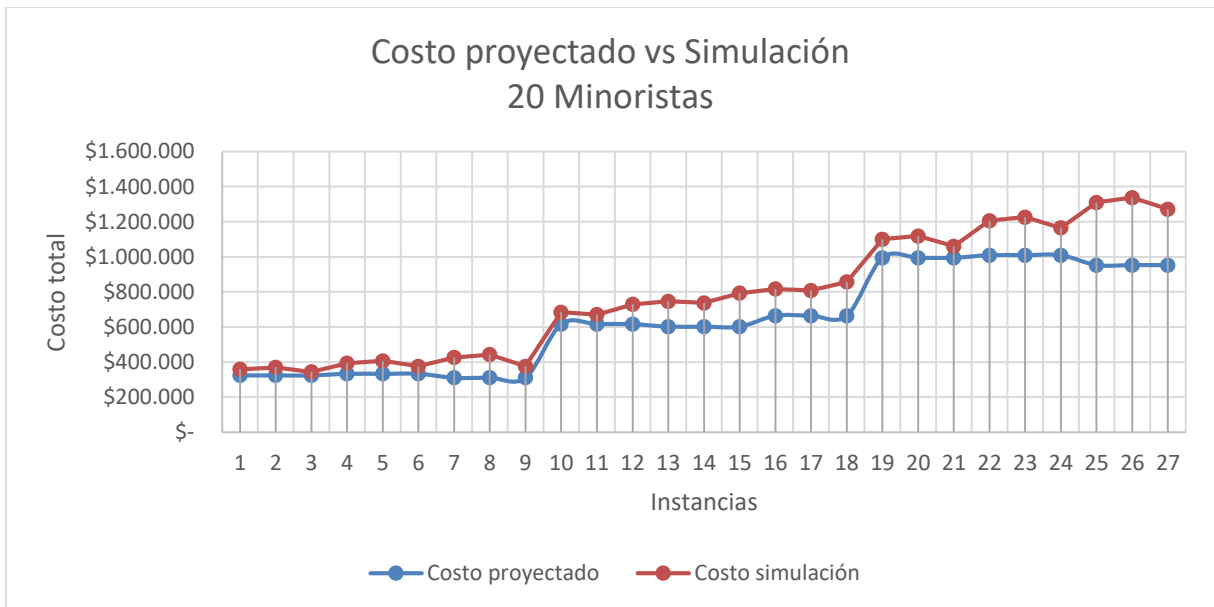


Gráfico 8 - Costo proyectado vs simulación para 20 minoristas

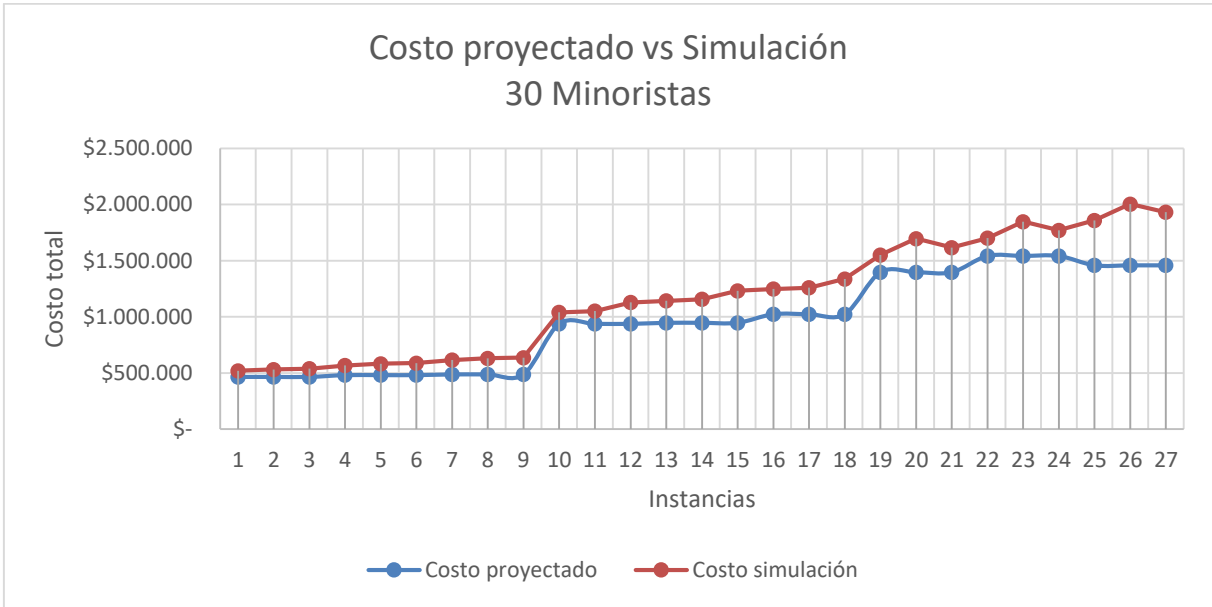


Gráfico 9 - Costo proyectado vs simulación para 30 minoristas

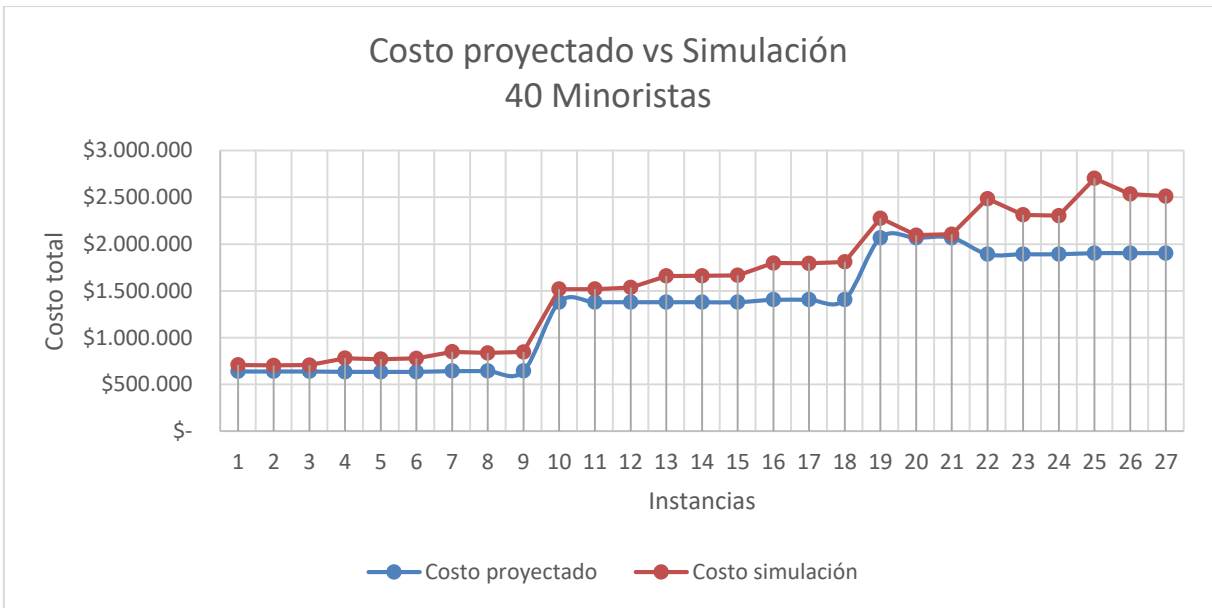


Gráfico 10 - Costo proyectado vs simulación para 40 minoristas

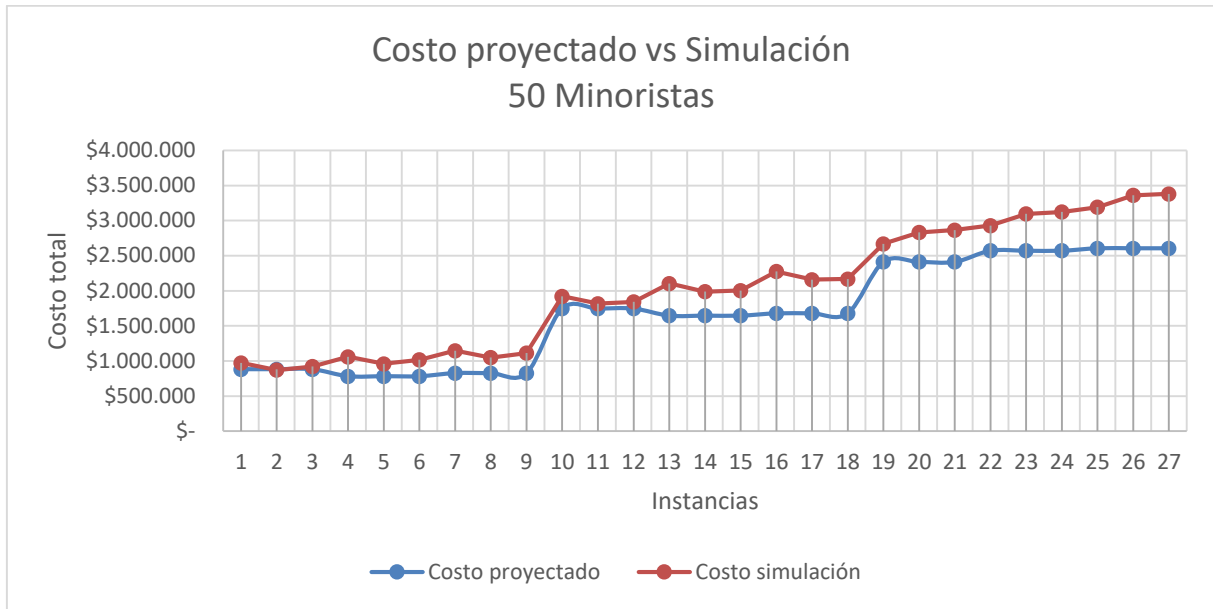


Gráfico 11 - Costo proyectado vs simulación para 50 minoristas

Para cada uno de los gráficos se puede concluir que el costo proyectado está subestimado y esto debido a que estas políticas encontradas no tienen en cuenta la variabilidad de la demanda, y por ende los costos de faltantes. Por ende, no incluir la variabilidad a la hora de definir la política de inventario puede llevar a tomar decisiones equivocadas. De igual manera, se puede observar en los gráficos que el coeficiente de variación es directamente proporcional a la subestimación del costo total; entre mayor es la variabilidad mayor es el valor de la función objetivo.

6.3. Versión estocástica del problema

En esta sección se presenta el impacto que tuvo la versión estocástica del problema respecto a la versión determinística. Para analizar el impacto de la solución estocástica se tomó como variable de respuesta la diferencia porcentual que había entre el costo de la versión estocástica y la versión determinística. En primer lugar, se debía verificar que las observaciones: i) se acoplaran a una distribución normal, ii) que los resultados eran independientes entre sí y iii) que tuvieran varianzas similares. Para el primer supuesto se realizó la prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra y el supuesto se cumplió (P-Value 0.18), los resultados se pueden observar en la tabla 13. Para el segundo supuesto se realizó una prueba de rachas y de igual manera el supuesto se cumplió (P-Value 0.12), los resultados se pueden observar en la tabla 14. Para el tercer supuesto se realizó la prueba de igualdad de varianzas de Levene, pero este supuesto no se cumplió (P-Value 0.183), los resultados se pueden observar en la tabla 15. Debido a esto no es posible tomar los resultados del diseño de experimentos que se iba a efectuar.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		Residuo para Diferencia
N		108
Parámetros normales ^{a,b}	Media	,0000
	Desviación estándar	,59267
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,074
	Positivo	,053
	Negativo	-,074
Estadístico de prueba		,074
Sig. asintótica (bilateral)		,183 ^c

a. La distribución de prueba es normal.

b. Se calcula a partir de datos.

c. Corrección de significación de Lilliefors.

Tabla 13 - Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

Prueba de rachas

	Residuo para Diferencia
Valor de prueba ^a	-,01
Casos < Valor de prueba	54
Casos >= Valor de prueba	54
Casos totales	108
Número de rachas	63
Z	1,547
Sig. asintótica (bilateral)	,122

a. Mediana

Tabla 14 - Prueba de rachas

Prueba de igualdad de Levene de varianzas de error^a

Variable dependiente: Diferencia

F	df1	df2	Sig.
2,152	35	72	,003

Prueba la hipótesis nula que la varianza de error de la variable dependiente es igual entre grupos.

a. Diseño: Intersección + Minoristas + Productos + Variabilidad + Minoristas * Productos + Minoristas * Variabilidad + Productos * Variabilidad + Minoristas * Productos * Variabilidad

Tabla 15 - Prueba de igualdad de varianzas de Levene

Sin embargo, los resultados del diseño de experimentos indicaban que el único factor significativo era el coeficiente de variación. Como el supuesto de normalidad se cumple, aunque no se haya cumplido el supuesto de homogeneidad de varianzas se realizó la prueba de Tamhane para analizar la diferencia de medias en los niveles de variabilidad y las diferencias resultaron significativas. Los resultados de la prueba de Tamhane se pueden observar en la tabla 16.

Comparaciones múltiples

Variable dependiente: Diferencia

Tamhane

(I) Variabilidad	(J) Variabilidad	Diferencia de medias (I-J)	Error estándar	Sig.	Intervalo de confianza al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
,10	,20	-2,55906*	,14618	,000	-2,9169	-2,2012
	,30	-4,45671*	,19105	,000	-4,9271	-3,9864
,20	,10	2,55906*	,14618	,000	2,2012	2,9169
	,30	-1,89765*	,20004	,000	-2,3887	-1,4066
,30	,10	4,45671*	,19105	,000	3,9864	4,9271
	,20	1,89765*	,20004	,000	1,4066	2,3887

*. La diferencia de medias es significativa en el nivel 0.05.

Tabla 16 - Prueba de Tamhane

Posterior a las pruebas, se realizaron los gráficos de perfil para comparar los niveles de variabilidad en los diferentes casos que se pueden observar a continuación.

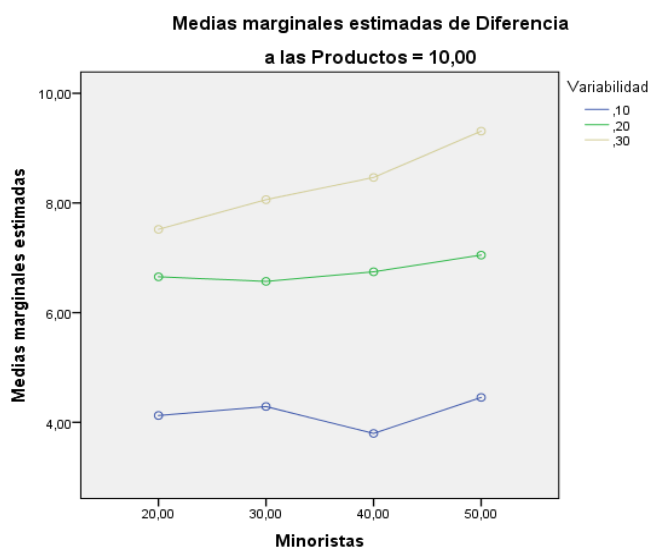


Gráfico 12 - Gráfico de perfil para 10 productos

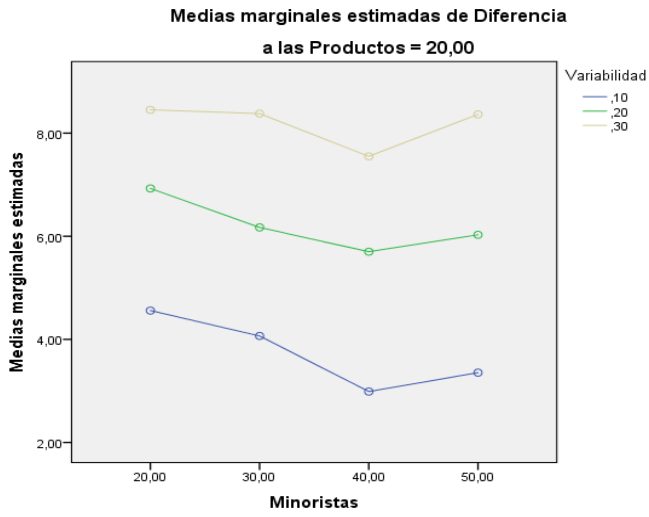


Gráfico 13 - Gráfico de perfil para 20 productos

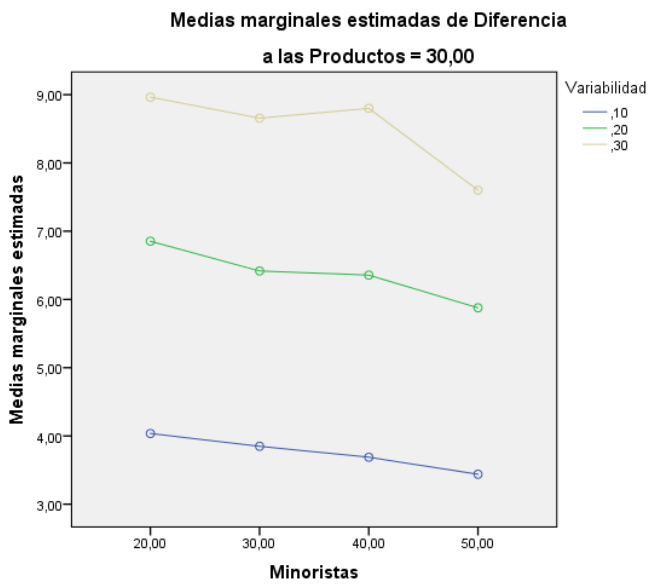


Gráfico 14 - Gráfico de perfil para 30 productos

Se puede observar que a medida que el nivel de variabilidad aumenta, la mejora de la función de costos estocástica respecto a la determinística aumenta, y esto se da debido a que a medida que aumenta la variabilidad, los costos de faltantes van a aumentar y van a ser más difíciles de suplir sin un stock de seguridad.

Finalmente, en el gráfico 15 se puede observar un diagrama de cajas en el cual podemos observar de igual manera que a medida que aumenta el nivel de variabilidad, los diferencia entre los resultados estocásticos y los determinísticos es mayor.

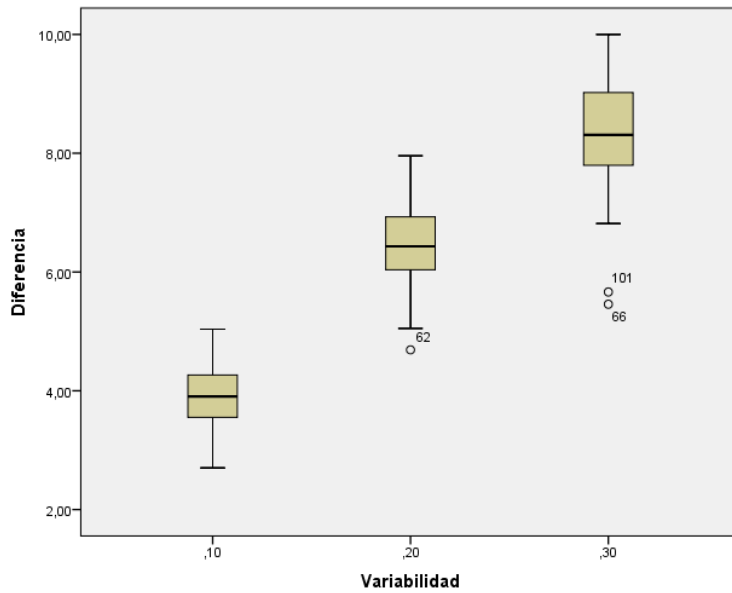


Gráfico 15 - Diagrama de cajas y bigotes

7. Conclusiones y recomendaciones

Este documento propone una solución para un problema entre una bodega y N minoristas en un escenario de demanda estocástica considerando múltiples productos. Esto debido a que en la literatura este tema no ha sido ampliamente explorado. Hay algunos casos en los que se estudia coordinación de inventarios con demanda estocástica, pero sin considerar los múltiples productos y viceversa, pero no uno que haya sido desarrollado integrando estas dos características. Asimismo, algunos autores han confirmado las ventajas que tiene formular políticas de ciclo compartido.

En primera instancia se plantearon los modelos matemáticos para la versión determinística y para la versión estocástica del problema de coordinación de inventarios con múltiples productos. Estos modelos fueron elaborados en base a modelos propuestos en la literatura para problemas similares en los que se trabajan políticas de ciclo compartido, pero con un único producto y con demanda determinística.

A partir de estos modelos se desarrolló una técnica de solución para la versión determinística del problema, en la cual a partir del modelo matemático se implementó la metaheurística Búsqueda Tabú en el lenguaje de programación VisualBasic de Excel. Este aplicativo permite tomar decisiones sobre las constantes de coordinación y los tiempos de reaprovisionamiento que deben tener los minoristas respecto a la bodega, y de igual manera los tiempos de reaprovisionamiento que deben tener los productos respecto a su minoría. Como es de esperarse, los costos aumentan a medida que aumenta el nivel de los minoristas o de los productos. Tomando las políticas obtenidas por este método, se realizó una simulación para medir el impacto que tiene la variabilidad de la demanda en los costos y se puede evidenciar una subestimación en los costos proyectados respecto a los costos simulados, con aumentos en promedio del 21%. Esta subestimación aumenta a medida que aumenta el nivel de variabilidad de la demanda.

Para solucionar la versión estocástica se partió del método de solución de la versión determinística; sin embargo, este método de solución permite tomar la decisión del nivel de servicio que va a ofrecer tanto la bodega, como cada combinación de minorista-producto. En los factores estudiados se obtuvieron mejores resultados que si se tomara un problema para cada producto y no una solución integral como la que presenta este trabajo.

A partir de las políticas obtenidas, tanto en el método determinístico como en el estocástico, se realizó una simulación en la cual se demostró el impacto que tiene integrar la variabilidad de la demanda en el método de solución, ya que se observaron mejorías entre el 2.7% y el 10%. Generalmente los valores más bajos se daban en escenarios con la variabilidad más baja y los más altos con la variabilidad más alta.

En los diferentes casos estudiados se pudo evidenciar que el número de minoristas y el número de productos no era un factor significativo con respecto a la función de costos; sin embargo, el coeficiente de variación tiene incidencia en los resultados. Cuando el coeficiente de variación es de 0.3, es decir el nivel más alto estudiado, se reducen los costos haciendo el estudio considerando una demanda estocástica.

8. Glosario

- **Diseño de experimentos:** Consiste en planear y realizar un conjunto de pruebas con el objetivo de generar datos que, al ser analizados estadísticamente, proporcionen evidencias objetivas que permitan responder las interrogantes planteadas por el experimentador sobre determinada situación (H. Gutiérrez & De La Vara, 2008).
- **Simulación de Montecarlo:** Un precursor de la simulación actual es el experimento Montecarlo, un esquema de modelado que estima parámetros estocásticos o determinísticos con base en un muestreo aleatorio. Algunos ejemplos de aplicaciones Montecarlo incluyen la evaluación de integrales múltiples, la estimación de la constante π (≈ 3.14159) y la inversión de matrices (Taha, 2012).
- **Heurística:** Una heurística es una técnica de búsqueda directa que utiliza reglas favorables prácticas para localizar soluciones mejoradas. La ventaja de la heurística es que en general determina buenas soluciones con rapidez, utilizando reglas de solución simples. La desventaja es que la calidad de la solución (con respecto a la óptima) suele desconocerse (Taha, 2012).
- **Meta-heurística:** La meta-heurística está diseñada principalmente para escapar del entrapamiento en el óptimo local al permitir movimientos inferiores, si es necesario. Se espera que la flexibilidad agregada a la búsqueda conduzca a una mejor solución (Taha, 2012).
- **Búsqueda Tabú:** Cuando la búsqueda se queda atrapada en un óptimo local, la búsqueda tabú (BT) selecciona el siguiente movimiento de búsqueda (posiblemente inferior) de una manera que prohíbe temporalmente, volver a examinar las soluciones anteriores. El instrumento principal para alcanzar este resultado es la lista tabú que “recuerda” los movimientos de la búsqueda anterior y los deshabilita durante un periodo de tenencia especificada. Cuando un movimiento tabú completa su tenencia, se elimina de la lista tabú y se hace disponible para futuros movimientos (Taha, 2012).

Referencias

- Abdul-Jalbar, B., Segerstedt, A., Sicilia, J., & Nilsson, A. (2010). A new heuristic to solve the one-warehouse N-retailer problem. *Computers and Operations Research*, 37(2), 265–272. <http://doi.org/10.1016/j.cor.2009.04.012>
- Bozorgi, A. (2016). Multi-product inventory model for cold items with cost and emission consideration. *International Journal of Production Economics*, 176, 123–142. <http://doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.03.011>
- Chavarro, G., & Fresen, M. (2015). *Diseño de una heurística para el problema de inventarios coordinados, entre una bodega y N minoristas, que considere políticas de ciclo compartido en un escenario de demanda estocástica*. Pontificia Universidad Javeriana.
- Glover, F., & Belén, B. (n.d.). Introducción a la Búsqueda Tabú, 3, 1–36.
- Govindan, K. (2015). The optimal replenishment policy for time-varying stochastic demand under vendor managed inventory. *European Journal of Operational Research*, 242(2), 402–423. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.09.045>
- Gutiérrez, H., & De La Vara, R. (2008). *Análisis y Diseño de Experimentos*. (M. G. Hill, Ed.) (Segunda ed). Gutiérrez, J., Colebrook, M., Abdul-Jalbar, B., & Sicilia, J. (2013). Effective replenishment policies for the multi-item dynamic lot-sizing problem with storage capacities. *Computers and Operations Research*, 40(12), 2844–2851. <http://doi.org/10.1016/j.cor.2013.06.007>
- Gutiérrez, V., & Vidal, C. J. (2008). Modelos de gestión de inventarios en cadenas de abastecimiento: Revisión de la literatura. *Revista Facultad de Ingeniería*, (43), 134–149.
- Heizer, J., & Render, B. (2009). *Principios de Administración de Operaciones* (Seventh). Pearson Education.
- Hernández, S. (2010). *PLANEACIÓN DE INVENTARIOS DE PRODUCTOS MÚLTIPLES CON DEMANDA PROBABILÍSTA EMPLEANDO TÉCNICAS METAHEURÍSTICAS*. Universidad Nacional Autónoma de México.
- ISO. (2011). *ISO 13053-1:2011: Quantitative methods in process improvement -- Six Sigma -- Part 1: DMAIC methodology*.
- Köchel, P., & Thiem, S. (2011). Search for good policies in a single-warehouse, multi-retailer system by particle swarm optimisation. *International Journal of Production Economics*, 133(1), 319–325. <http://doi.org/10.1016/j.ijpe.2010.03.021>
- Krick, E. (1980). *Ingeniería de métodos*. Limusa.
- Li, J., Chu, F., & Chen, H. (2011). Coordination of split deliveries in one-warehouse multi-retailer distribution systems. *Computers and Industrial Engineering*, 60(2), 291–301. <http://doi.org/10.1016/j.cie.2010.11.012>
- Li, X., & Wang, Q. (2007). Coordination mechanisms of supply chain systems. *European Journal of Operational Research*, 179(1), 1–16. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.06.023>
- Mateen, A., Chatterjee, A. K., & Mitra, S. (2015). VMI for single-vendor multi-retailer supply chains under stochastic demand. *Computers and Industrial Engineering*, 79, 95–102. <http://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.028>
- Nambirajan, R., Mendoza, A., Pazhani, S., Narendran, T. T., & Ganesh, K. (2016). CARE: Heuristics for two-stage multi-product inventory routing problems with replenishments. *Computers and Industrial Engineering*, 97, 41–57. <http://doi.org/10.1016/j.cie.2016.04.004>
- Schwarz, L. B. (1973). A Simple Continuous Review Deterministic One-Warehouse N-Retailer Inventory Problem. *Management Science*, 19(5), 555–566. <http://doi.org/10.1287/mnsc.19.5.555>
- Senyigit, E., & Akkan, H. (2012). A New Heuristic for one Warehouse and N Retailers Problem. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 62, 656–660. <http://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.109>
- Taha, H. a. (2012). *Investigación de Operaciones*. <http://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Taleizadeh, A. A., Niaki, S. T. A., Aryanezhad, M. B., & Shafii, N. (2013). A hybrid method of fuzzy simulation and genetic algorithm to optimize constrained inventory control systems with stochastic replenishments and fuzzy demand. *Information Sciences*, 220, 425–441. <http://doi.org/10.1016/j.ins.2012.07.027>
- Topan, E., Pelin Bayindir, Z., & Tan, T. (2010). An exact solution procedure for multi-item two-echelon spare parts inventory control problem with batch ordering in the central warehouse. *Operations Research*

Letters, 38(5), 454–461. <http://doi.org/10.1016/j.orl.2010.05.006>

Xu, N. (2012). Optimal policy for a multi-product, multi-period, non-stationary, stochastic production and customization problem. *International Journal of Production Economics*, 139(1), 229–236.

<http://doi.org/10.1016/j.ijpe.2012.04.012>

Yang, W., Chan, F. T. S., & Kumar, V. (2012). Optimizing replenishment policies using Genetic Algorithm for single-warehouse multi-retailer system. *Expert Systems with Applications*, 39(3), 3081–3086.

<http://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.08.171>